



東京学芸大学リポジトリ

Tokyo Gakugei University Repository

Performance of the New 40cm Telescope at Tokyo Gakugei University

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2022-12-27 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 土橋, 一仁, 西浦, 慎悟, 川崎, 優太, 富田, 飛翔 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2309/00174485

東京学芸大学新40cm望遠鏡の特徴と基本性能

土橋 一仁*¹・西浦 慎悟*¹・川崎 優太*²・富田 飛翔*²

宇宙地球科学分野

(2022年6月27日受理)

DOBASHI, K., NISHIURA, S., KAWASAKI, Y., and TOMITA, T. : Performance of the New 40cm Telescope at Tokyo Gakugei University. Bull. Tokyo Gakugei Univ. Div. Nat. Sci., 74 : 77-84. (2022) ISSN 2434-9380

Abstract

In this paper, we introduce the new astronomical telescope installed at Tokyo Gakugei University. We used to operate an old telescope with a 40cm main reflector for more than 40 years, but we replaced it by the new telescope with the same sized reflector. The new telescope was installed in the 6m astronomical dome located at the rooftop of the Research Building of the Natural Science Division in 2022 March. Unlike the old 40cm telescope which was fully manual, we designed the new telescope to be controllable by a PC, being equipped with a cooled CCD camera and optical filters (BVRcIc) compatible with the standard Johnson-Cousins system, so that we can easily perform precise photometric observations and develop astronomical teaching materials. In this paper, we describe main performance of the new telescope, and introduce astronomical research and education activities using the telescope.

Keywords: astronomical telescope, astronomy education, science education

Department of Astronomy and Earth Sciences, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Koganei-shi, Tokyo 184-8501, Japan

要 旨

本論文では、東京学芸大学に導入した新しい光学式天体望遠鏡について紹介する。口径40cmのこの望遠鏡（新40cm鏡）は、40年以上活用した同じ口径の古い望遠鏡（旧40cm鏡）を更新する形で、2020年3月に中央1号館（旧自然科学研究棟1号館）屋上の6mドーム内に設置した。全手動式だった旧40cm鏡とは異なり、新40cm鏡は全てPCで制御できるようにした。また、天文学の専門的な測光観測や教材開発を容易に行えるよう、冷却CCDカメラや標準測光システム（Johnson-Cousinsシステム）に準拠した光学フィルター（BVRcIc）を当初から装備させるなど、設計段階から工夫した。本論文では、新40cm鏡の特徴や基本的な性能について述べた後、同望遠鏡を利用した研究教育活動について紹介する。

キーワード: 天体望遠鏡, 天文教育, 科学教育

* 1 東京学芸大学 広域自然科学講座 宇宙地球科学分野 (184-8501 東京都小金井市貫井北町4-1-1)

* 2 東京学芸大学大学院 教育学研究科

1. はじめに

従来、東京学芸大学には口径40cmの本格的な光学望遠鏡（以後、旧40cm鏡、図1）が40年以上の長きに亘り設置されていた。この古い望遠鏡は三鷹光器製のカグセレン式反射望遠鏡（焦点距離1600mm、合成焦点距離5000mm）をドイツ式赤道儀に搭載したもので、1978年以前には東京学芸大学に導入されていたが、一部の図面を除いて設置当時の詳細な記録は大学には残されていない。現在確認できる限り、根岸・大脇（1978）による光学系の性能評価の報告が最も古い文献である。当初は中央1号館（旧自然科学研究棟1号館）の北側の棟の屋上の3mドームに設置されていたが、1980年4月より以前に同館の中央の棟の屋上の6mドーム（現存）に移設された。移設に伴って行われた極軸設定の記録が、久保田ほか（1980）により報告されている。1990年ごろに主鏡の球面収差の調査が行われ（及川・水野 1990）、1991年にはそれに基づく主鏡の再研磨と副鏡の新規作製が行われた。さらに、1994年には、光学系の性能検査が行われている（木本・水野・及川 1994）。検出器については、当初は伝統的な写真乾板を使用していたが、後に光電子倍增管（石井ほか 1997）や市販のCCDカメラ（小熊・水野 1999、高木・水野 2002）も導入された。

学生の卒業研究や修士論文に活用されてきた旧40cm鏡も近年は老朽化が激しく、またPC制御による自動化を図るにはモーター等のシステム全体が古すぎ

て、短期間で近代化改修を行うことは困難であった。折しも、大学の中期計画に沿って望遠鏡を更新するための予算をつけてもらうことができたので、旧40cm鏡を香川県さぬき市の「天体望遠鏡博物館」（代表理事：村山昇作氏、<https://www.telescope-museum.com>）に寄贈し、新しい望遠鏡を導入することにした。

2019年12月14日、歴史と思い出のある旧40cm鏡を6mドームから搬出し（図1）、2020年1月から同じ口径40cmの新望遠鏡（以後、新40cm鏡）の設置作業に入った。当初からPC制御可能な新40cm鏡の設置が完了したのは、2020年3月である（図2）。カグセレン式の鏡筒をフォーク式の赤道儀に取り付けた新40cm鏡の製作は、東京都調布市の田中光化学工業（<http://www.tanaka-opt.co.jp>）に依頼した。鏡筒等のハードウェアや制御プログラムには、英国製・米国製を中心とした既製品を組み合わせる形式をとり、低コスト化を図った。

設置が完了した2020年3月頃には、世界を震撼させた新型コロナウイルス感染が日本でも本格的な広がりをみせはじめていた。同年4月7日からは当時の安倍総理大臣より東京・神奈川・埼玉・千葉・大阪・兵庫・福岡の7都府県に特別措置法に基づく緊急事態宣言がなされ、4月16日からは宣言が全国に拡大された。東京都の緊急事態宣言は5月25日に解除されたが、その後も大学へ通学・出勤することすら容易ではない日々が続き、せつかく取り組み始めたばかりの新40cm鏡の整備・開発も、暫く中断せざるを得なかつ



図1 (左) 旧40cm鏡と、(右) 6mドームのスリットからの搬出途中の鏡筒

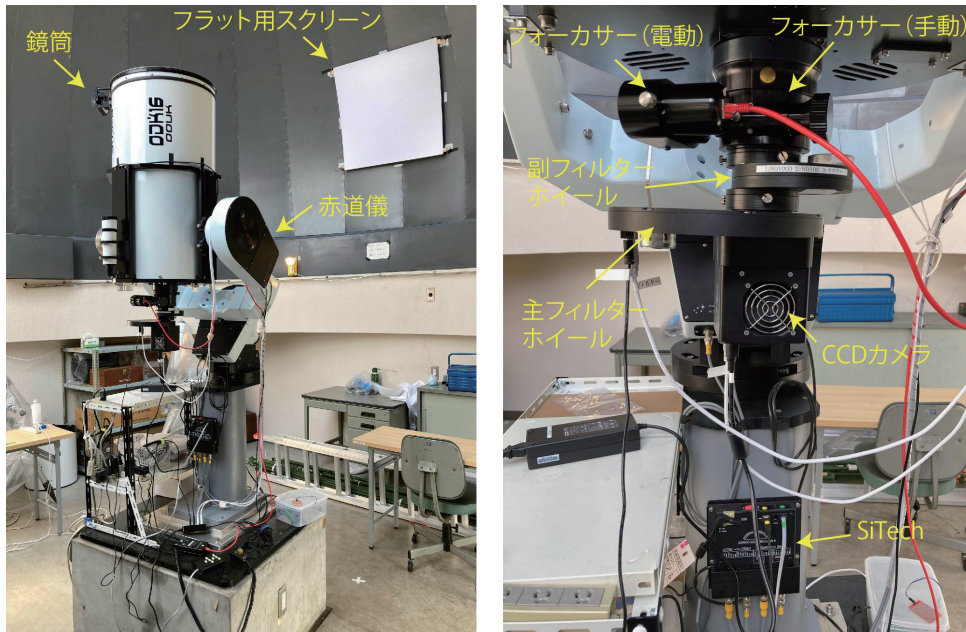


図2 (左) 新40cm鏡。右上の白いボードはドームフラット用のスクリーン。(右) CCDカメラ等の主要機器の配置

た。2020年夏頃から作業を徐々に再開し、以降、観測プログラムの作成や、古いドームとの連動システムの開発等を経て、現在に至っている。

この論文では、新40cm鏡の特徴や主な基本性能についてまとめる。また、同望遠鏡を利用して令和3年度に行った卒業研究や、今後期待される新40cm鏡の活用計画についても紹介する。なお、この論文の内容は、著者の一人である川崎が修士論文として行った開発研究(川崎 2021)に、その後の進展を加筆したものである。

2. 新40cm鏡の主な特徴と性能

旧40cm鏡と比べ、新40cm鏡には、①全体的にPC制御が可能であること、②それによりインターネットを介した遠隔操作(IoT化)を実現できること、さらに、③専門的な光学フィルターを当初から搭載することで精密な測光観測を容易に遂行できるようにすること、という三つの特徴をもたせることを、設計段階から念頭に置いていた。これらを実現することで、新40cm鏡を利用する学生は本格的な天文学の観測の経験を積むことができ、測定の原理や望遠鏡の構造をより効率的に理解できるようになる。また、ヘルツシュプルング・ラッセル(HR)図や変光星に関する天文教材の開発等も、より簡単に行えるようになることが期待される。

新40cm鏡のシステムは、鏡筒、赤道儀、CCDカメラ、光学フィルターや制御用のPC等から成る。これら個々

の機器の2022年5月時点での性能や特徴を、幾つかの項目に分けて以下に示す。

2. 1 鏡筒・赤道儀・フォーカサー・アイピース

鏡筒は、口径40cmの主鏡を搭載したOrion Optics UK社製のODK16を採用した。焦点距離は272cm、鏡筒長は82cm、単体重量は36kgである。これを支える架台としては、Mathis Instruments社製のMI-500を採用した。フォーク式の赤道儀であり、最大搭載可能重量は68kgである(図2左)。

焦点調整用のフォーカサーは、手動式のものと同電動式のもの2種類を採用した(図2右)。手動式のものStarlight Instruments社製のFtD3015B-Aであり、釣り上げ能力は5.9~6.8kgである。電動式のもの、同社製のSI-EFS/SI-PDMS-Otherであり、PC制御が可能である。観望会等での使用を想定したアイピースとしては、William Optics社製の焦点距離9mm~40mm(型番:SKU E-SWA09~E-SWA40)のものを4種類購入した。これらの機器の諸元を、表1にまとめる。

2. 2 冷却CCDカメラ・光学フィルター

冷却CCDカメラとしては、Finger Lakes Instrumentation社製のML8300-GPSを採用した(図3, 表2)。外気温から-55℃までの冷却が可能であり、東京の夏季の夜(30℃程度)でも約-20℃の低温を確保できる。カメラに搭載されているイメージセンサー(CCDチップ)は、ON Semiconductor社製のKAF-8300である。有効な画素数は3326×2504pixであり、ピク

表1 新40cm鏡の主な機器 (1)

鏡筒	Orion Optics UK社製 ODK16 焦点距離272cm, 鏡筒長82cm, 鏡筒単体重量36kg https://www.orionoptics.co.uk/ODK/odk16.html			
赤道儀	Mathis Instruments社製 MI-500 フォーク式, 最大搭載重量68kg, Servo II搭載 http://www.mathis-instruments.com/Products/Forks.html			
フォーカサー (手動)	Starlight Instruments社製 FTF3015B-A 重量1.5kg, 吊り上げ能力5.9~6.8kg https://www.starlightinstruments.com/product/cs-ftf3015b-a-feather-touch-3-0-diameter-dual-speed-focuser-1-5-draw-tube-travel-and-brake/			
フォーカサー (電動)	Starlight Instruments社製 SI-EFS/SI-PDMS-Other USBケーブルで接続 https://www.starlightinstruments.com/product/si-efs-electronic-focusing-system/			
アイピース	William Optics社製			
	型番	焦点距離	重量	
	SKU E-SWA40	40mm	570g	https://williamoptics.com/products/eye-pieces/swan-40mm-2-eyepiece
	SKU E-SWA25	25mm	330g	https://williamoptics.com/products/eye-pieces/swan-25mm-2-eyepiece
	SKU E-SWA20	20mm	100g	https://williamoptics.com/products/eye-pieces/swan-20mm-1-25-eyepiece
	SKU E-SWA09	9mm	70g	https://williamoptics.com/products/eye-pieces/swan-9mm-1-25-eyepiece

表2 新40cm鏡の主な機器 (2)

冷却CCDカメラ	Finger Lakes Instrumentation社製 ML8300-GPS 冷却温度=外気温-55℃, 動作環境 -30~+45℃, 重量1.3kg, ダイナミックレンジ 67.0dB, シャッター直径 45mm, インターフェース USB http://flicamera.com/spec_sheets/ML8300.pdf
搭載イメージセンサー	ON Semiconductor社製 KAF-8300 出力感度 $23 \mu\text{V/e}$, ピクセルサイズ $5.4 \times 5.4 \mu\text{m}$, 画素数 $3348 \times 2574\text{pix}$, 有効画素数 $3326 \times 2504\text{pix}$, アクティブイメージサイズ $17.96 \times 13.52\text{mm}$ https://www.onsemi.jp/pdf/datasheet/kaf-8300-d.pdf
主フィルターホイール (電動)	Finger Lakes Instrumentation社製 FW2-7 フィルターのスロット数 7, 装填可能なフィルターの直径 $50 \pm 0.125 \text{ mm}$, 装填可能なフィルターの厚さ 1.0~5.0 mm, インターフェース USB https://www.starlightinstruments.com/product/cs-ftf3015b-a-feather-touch-3-0-diameter-dual-speed-focuser-1-5-draw-tube-travel-and-brake/
副フィルターホイール (手動)	田中光化学工業社製 (特注) フィルターのスロット数 3, 装填可能なフィルターの直径 52 mm

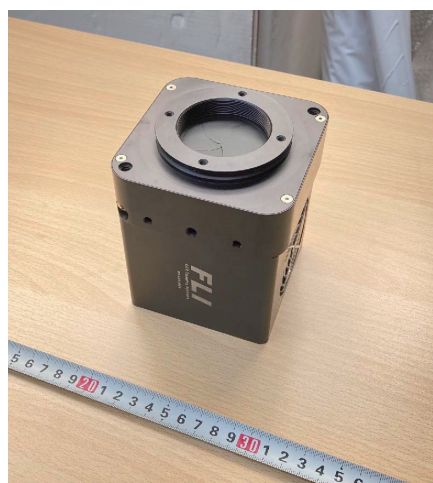


図3 冷却CCDカメラ

セルサイズは $5.4 \times 5.4 \mu\text{m}$ である。これは、天球上で約 $22.7' \times 17.0'$ の視野と、約 $0.41''$ のピクセル分解能に相当する。入射光量に対するリニアリティのチェック等は、別の論文にまとめる (鈴木ほか 2022)。

本格的な測光観測を可能にするために、新40cm鏡には標準測光システム (Johnson-Cousinsシステム) に準拠したAstrodon社製のB, V, Rc, Icフィルターを導入した (表3)。その他に、惑星や一等星などの明るい天体を撮影するために、光量を1/100や1/1000にするケンコー・トキナー社製の減光フィルター (ND100とND1000) も導入した。また、学生の卒業論文や修士論文の一環として、月面の鉱物分析を試行するためのバンドパスフィルター (渋谷光学製BPF420, BPF775,

表3 光学フィルター

主フィルターホイール (電動) (B, V, Rc, Ic及びBPF420, BPF775, BPF875の合計7枚を装着)	Astrodon社製 B, V, Rc, Icフィルター (計4枚) Jonson-Cousinsシステム準拠, 直径49.7mm, 厚さ3.000 ± 0.025mm https://astrodon.com/products/astrodon-photometrics-uvbri-filters/				
	渋谷光学社製 バンドパスフィルター (計3枚)				
	型番	中心波長	半値幅	直径	厚さ
	BPF420	420nm	25nm	50mm	4.2mm
	BPF775	775nm	65nm	50mm	2.5mm
	BPF875	875nm	60nm	50mm	2.5mm
	注: BPF775とBPF875は50×50mmの角形既製品を円形に加工。 https://www.shibuya-opt.co.jp/e_c_filter07.html				
副フィルターホイール (手動) (2枚の減光フィルターと1枚のクリアーフィルターの合計3枚を装着)	ケンコー・トキナー社製 光学フィルター (合計3枚) 減光用PRO ND100, PRO ND1000, 及びクリアーフィルター 直径52mm				

BPF875) 等も装着できるようにした。

これらのフィルターのホルダーとしては, 7枚のフィルターを装着できるAnderson社製の主フィルターホイール (電動式) と, 3枚のフィルターを装着できる田中光化学社製の副フィルターホイール (手動式) の2種類を用意し (図4), 必要に応じて連結して使用できるようにした (図2右)。現時点では, 2枚の減光フィルターと参照用のクリアーフィルター1枚を副

フィルターホイールに入れ, 明るい天体を観測する時に使用している。その他の合計7枚のフィルターは主フィルターホイールに入れ, 常時使用している。

2. 3 制御用PC・ソフトウェア・ドームとの連動

制御用PCとしては, Diginnos社製Magnate IEを導入した (表4)。OSはWindows 10で, このマシンに制御用のソフトウェアであるMSB Software社製Astroart7と



図4 (左) 主フィルターホイールと, (右) 副フィルターホイール

表4 その他の機器

制御用PC	Diginnos社製 Magnate IE OS: Windows 10, CPU: Intel Core i3, 内臓HD: SSD 240GB
I/Oボード	Vellman社製 K8055 寸法145mm × 88mm × 20mm デジタル入力数5, アナログ入力数2 デジタル出力数8, アナログ出力数2 https://www.velleman.eu/products/view/?id=351346
ロータリーエンコーダー	Cytron Technologies 社製 RE08A パルス数 8ppr, スロットディスク径 35mm, 読み取り可能最大数 1kHz https://drive.google.com/file/d/0BzFWfMiqqjyqdlpDUtC5ektd1E/view?resourcekey=0-88bAQLjyqgsJinDfpGYqww

表5 ソフトウェア

制御用ソフトウェア①	MSB Software 社製 Astroart7 カメラ・望遠鏡制御可能, 画像処理可能, ASCOM対応 http://www.msb-astroart.com/
制御用ソフトウェア②	Borland社製C++ Builder C/C++ 統合開発環境 https://www.embarcadero.com/jp/products/cbuilder

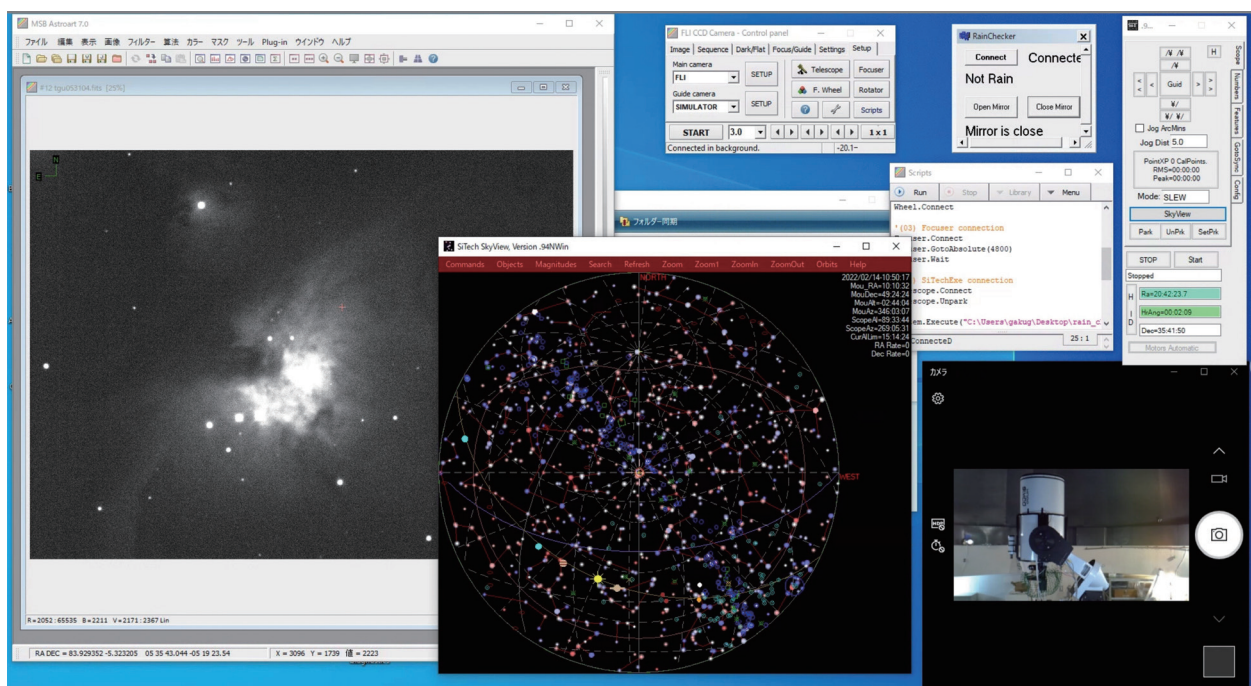


図5 観測中のPC画面

Borland社製C++ Builder (BCB) をインストールして使用している (表5)。図5に、観測中のPC画面の例を示す。

新40cm鏡本体は納入時点からPC制御可能であったが、それが納められている直径6mのドームは古く、電動ではあるもののそのままではPCによる制御はできない。これについては、ドームの駆動用モーターの始動時・停止時の過大電流を制御するためのインバータ (東芝インバータ社製VF-nC3) を新たに設置し、さらに表4のI/Oボード (Vellman社製K8055) やロータリーエンコーダー (Cytron Technologies社製RE08A) を導入することにより、新40cm鏡の向きと連動してドームが自動的に回転できるよう工夫した (富田ほか2022)。スリットの開閉の自動化については、駆動用電源の確保が難しく、現時点ではまだ実現できていない。将来的には、これについても自動化を図りたい。

2. 4 その他の周辺設備・機器

上記の一連の機器に加え、ドームフラットのデータを取得するためのスクリーンとランプを製作した。ス

クリーンは、ポスターの掲示によく利用される発砲スチロール製のボードに白い模造紙を貼り付けた素材を採用し、ランプは市販の白熱電球 (100W) を使用した。その他、雨滴センサー、気象モニター、望遠鏡監視用のウェブカメラ等も設置した。また、赤経軸のワームギアの歪みに起因と思われる周期的なポインティング・エラーを補正するためのPeriodic Error Correction (PEC) の機能も、現在テスト中である。さらに、制御用のPCをインターネットに接続し、Chrome Remote Desktopを利用して遠隔操作可能にする開発も行った。これらの幾つかの開発項目については、前述のドーム回転の連動に関する開発とともに、別の論文 (富田ほか2022) で紹介する。

以上の機器から成る新40cm鏡の観測システムのフローチャートを、図6にまとめる。

3. 新40cm鏡を利用した教育研究活動

新40cm鏡の将来的な使い道は、多岐にわたるもの

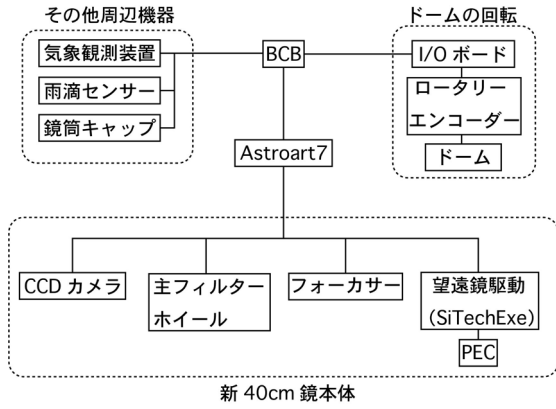


図6 望遠鏡制御のフローチャート

と思われる。学生の卒業研究や修士論文を通して、天文学の専門的な研究や各種学校（小学校～大学）の授業で活用できる天文教材の開発に利用できるであろう。システム開発が進んだ令和3年度には、学生の卒業研究・修士論文として、新40cm鏡を利用した数種類の研究テーマに試験的に取り組んだ。

それらのうち、天文学の専門的なテーマとしては、6.7GHzのメタノールレーザー（CH₃OH）の光学カウンターパートの検出を試みた研究がある（荒川2022）。メタノールレーザーは若い大質量星に付随する現象であり（例えば、Sannaほか 2010）、その強度は中心星の光度と連動していると予想されるが、肝心の中心星は濃密な分子雲コアに深く埋もれているため、可視光や近赤外線ではなかなか検出できない。この研究では、なゆた望遠鏡（西はりま天文台）での近赤外線観測と並行して、新40cm鏡（主にIバンド）による検出を試みた。もともとチャレンジングな観測であり、結局、中心星を40cm鏡で検出することは出来なかったが、見かけの等級の下限は抑えることができた。取り組んだ学生にとっては、貴重な経験になったものと思われる。また、専門的な研究としては、トランジット法による系外惑星探査（例えば、塚田2008）も、近い将来行えるものと期待している。

また、高校レベルの天文教材の開発としては、高校

地学の教科書にも記載のある食連変光星アルゴルの光度曲線の測定（松井 2022）や、ガリレオ衛星の公転のムービー作成（芹澤 2022）に取り組んだ（図7）。後者は、ケプラーの法則の理解を深めるための教材に応用できる。また、同ムービーのデータを詳細に見てみると、木星の公転に合わせて背景の恒星が移動したり、木星の自転に合わせて大赤斑が移動していく様子も確認することができる。これらを基に、木星に関する多様な教材を開発することが可能であると考えられる。これらとは別に、令和3年度には、高校地学向けのテーマとして、散開星団のヘルツシュプルング・ラッセル図（HR図）の作成にも取り組んだ（下井倉ほか 2022）。

小中学校の理科では、月や金星といった太陽系内天体をよく取り扱う。月に関するテーマとして、月齢カレンダーの作成や、月の秤動を捉える試みも行った（芹澤 2022）。これらの天体は明るいので、主フィルターホイールに収められた通常の標準測光システムのフィルター（BVRcIc）に加え、副フィルターホイールの減光フィルターも併用して撮影を行った。悪戯心もあり、昼間の空に浮かぶ月や金星の撮影を行ったところ、これらの天体については夜間に撮影した場合と比べて遜色のない画像を得られることがわかった（図8）。明るい恒星や惑星であれば、昼間であっても天体望遠鏡で観ることができ。このことは、天体観測に慣れた人の間では一般的に知られており、優秀な学芸員のいる科学館であれば、青空の中の金星を望遠鏡で観察するサービスをしているところもある。しかし、口径40cm程度の望遠鏡で撮影すると、昼でもこれほど鮮明に月面や金星を観察できるとは、我々も十分に認識していなかった。減光フィルターを利用した日中の月・惑星の観測を、IoT技術による望遠鏡の遠隔操作と組み合わせれば、昼間の学校の教室からの遠隔天体観測も可能になるであろう。今後、そのような教育方法を実現するための取り組みを行っていく予定である。

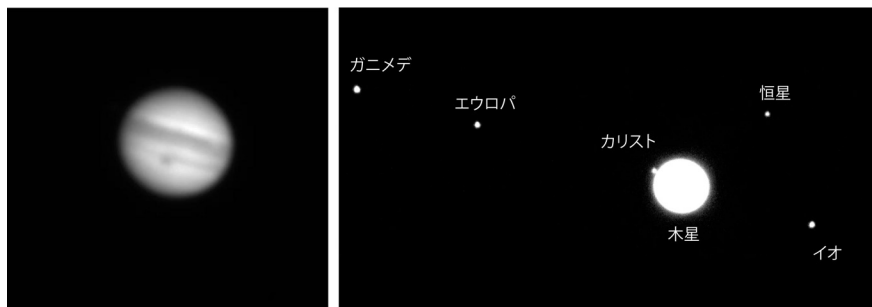


図7 Bバンドで撮影した（左）木星と、（右）ガリレオ衛星

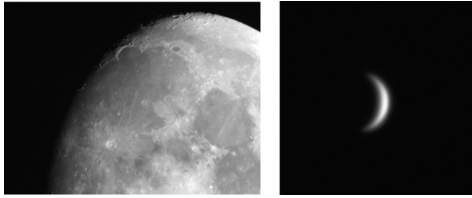


図8 日中にRバンドで撮影した(左)月面と、(右)金星

さらに、新40cm鏡の各種装置の開発・整備については、興味のある学生も活動に参加させた。そのような例としては、前述の望遠鏡とドーム回転の連動システムの開発(富田 2022)の他に、冷却CCDカメラの線形性の測定(鈴木 2022)や、新40cm鏡の測光システムへの標準システムへの変換に関するものがある(佐藤 2022)。このような装置の開発や性能評価は、働きかける対象(装置)が身近なので(実際に見たり触ったりできる)、取り組む学生にも理解しやすく、強い興味関心や達成感が得られやすい。「ものづくり教育」としての価値も高いので、今後も観測装置開発を通じた学生教育も継続的に行っていく予定である。

4. まとめ

本論文では、東京学芸大学に導入された新40cm鏡の特徴や基本的な性能について紹介した。2020年3月の設置以来、望遠鏡本体の調整や周辺機器の開発はまだ継続中であるが、既に天文学の専門的な学術研究や教材開発に利用し始めている。今後、さらに整備を進め、東京学芸大学での学生教育や小学校～高等学校での天文教育に活用していきたい。

謝辞

本研究は、放送大学教育振興会助成金(2021年度)、公益財団法人カシオ科学振興財団研究助成金(助39-52)、公益財団法人柏森情報科学振興財団研究助成金(K33研X X VI第584・591号)、東京学芸大学連合大学院広域科学教科教育学研究経費(令和3年度)の資金的な援助を受けました。散開星団のHR図の作成には、JSPS科研費(22K02966)の援助を受けました。ここに感謝致します。

引用文献

- Sanna, A. Moscadelli, L., Cesaroni, R., Tarchi, A., Furuya, R. S., and Goddi, C. (2010), *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 517, id. A78, 19pp.
- 荒川琉嘉(2022), 東京学芸大学 卒業論文(令和3年度), pp. 1-44.
- 石井秀樹・水野孝雄・古沢秀明・小島正順・根本岳志(1997), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第49集, pp.71-80.
- 及川賢一・水野孝雄(1990), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第42集, pp.145-151.
- 小熊隆一・水野孝雄(1999), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第51集, pp.57-65.
- 川崎優太(2021), 東京学芸大学 修士論文(令和2年度), pp. 1-27.
- 木本佐江子・水野孝雄・及川賢一(1994), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第46集, pp.91-98.
- 久保田宏・大脇直明・水野孝雄(1980), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第32集, pp.209-219.
- 佐藤悠(2022), 東京学芸大学 卒業論文(令和3年度), pp.1-35.
- 下井倉ともみ・浜田麻比呂・土橋一仁(2022), 東京学芸大学紀要, 自然科学系, 第74集, pp.59-66.
- 鈴木海哉(2022), 東京学芸大学 卒業論文(令和3年度), pp. 1-38.
- 鈴木海哉・富田飛翔・西浦慎悟・土橋一仁(2022), 東京学芸大学紀要, 自然科学系, 第74集, pp.67-75.
- 芹澤来渡(2022), 東京学芸大学 卒業論文(令和3年度), pp. 1-58.
- 高木貴博・水野孝雄(2002), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第54集, pp.93-100.
- 塚田健(2008), 東京学芸大学 修士論文(平成19年度), pp.1-67.
- 富田飛翔・土橋一仁・川崎優太・西浦慎悟(2022), 東京学芸大学紀要, 自然科学系, 第74集, pp.85-93.
- 根岸潔・大脇直明(1978), 東京学芸大学紀要, 第4部門, 数学・自然科学, 第30集, pp.303-327.
- 松井ひなた(2022), 東京学芸大学 卒業論文(令和3年度), pp.1-40.