



東京学芸大学リポジトリ

Tokyo Gakugei University Repository

学校数学における「数学化」の実現を目指した授業 設計に関する研究 : Realistic Mathematics Education に焦点をあてて

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2022-07-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 木村,健登 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2309/00174271

専門学術論文要約

学校数学における「数学化」の実現を目指した授業設計に関する研究

—Realistic Mathematics Education に焦点をあてて—

木村 健登

要 約

本研究の目的は、数学科授業における「数学化」の実現を目指した授業設計の枠組みを構築するとともに、教材を開発し、開発した教材を活用して「数学化」の実現を目指した授業設計を構想することである。そのために、Realistic Mathematics Education(RME)理論を基にして、授業設計の枠組みを構築した。そして、自力解決活動を反省し分析の対象とする「活動の反省」と異なるモデルが複線的に転換していく「モデルの複線性」を考慮した授業設計を行なった。

論文の構成

序章 本研究の目的と方法

- 0.1. 本研究の動機
- 0.2. 本研究の目的
- 0.3. 本研究の方法

第1章 「数学化」に関する基礎的考察

- 1.1. 本研究における「数学化」の概念規定
- 1.2. 「数学化」の教育的価値と教育的課題

第2章 「数学化」の実現を目指した授業設計のための理論的考察

- 2.1. Realistic Mathematics Education に関する考察
- 2.2. Realistic Mathematics Education の基本原理に関する考察

- 2.3. 「数学化」の実現を目指した授業設計の枠組みの構築

第3章 「数学化」の実現を目指した授業設計の構想

- 3.1. 「数学化」の実現を目指した授業設計の構想Ⅰ；箱ひげ図の創造に焦点をあてて
- 3.2. 「数学化」の実現を目指した授業設計の構想Ⅱ；微分と積分の観念の涵養に焦点をあてて

終章 本研究の総括と今後の研究課題

- 4.1. 本研究の総括
- 4.2. 今後の研究課題

序. 研究の背景と目的

現在、我が国の中等教育を担う多くの学校では数学的活動を促す学習指導は満足に実現されていないと考える。また、中等教育段階にいる子供たちにおいて、彼らは数学を学ぶ楽しさ

を感じておらず、数学を学ぶ価値を見出せていないという実態が国際的な大規模調査によって明らかにされてきている(例えば、PISA 2012)。さらに、中央教育審議会(2016)は高等学校の教育について、「大学入学者選抜に向け

た対策が学習の動機付けとなりがちであることが課題となっている。」(中央教育審議会, 2016, p.48)と述べ, 高等学校の教育が小・中学校に比べ知識伝達型の授業にとどまりがちで, 卒業後の学習や社会生活に必要な力の育成につながっていないことを指摘している。

これらのことから, 特に中学・高校の数学科において, 数学的活動を通して, 数学的な考え方を育む質の高い学習指導が十分に実現されていない懸念があり, そして, 生徒が数学を学ぶ意義を見出していないことが考えられる。

この現状を打開するためには, 授業において紙と鉛筆による計算だけの作業ではなく, 数学の本性に直接触れるような体験とその意味を自覚できる経験とを伴う数学的活動を充実させる必要があると考える。そこで筆者はフロイデンタール研究所の「数学化」論に着目する。これは H.Freudenthal の「活動としての数学」という数学観に依拠した数学教育論であり, 現在“Realistic Mathematics Education”(RME)と呼ばれる数学教育の理論へと精緻化されていった(伊藤伸也, 2017)。RMEにおける「数学化」を理論的かつ実践的に研究している人物として小林(2015)が挙げられる。彼は, 後述する創発的モデル化というヒューリスティックにおいて欠かせない「model-of から model-for への転換」過程の間に存在する“擬似 model-for”の状態を突き止めている。この転換には彼の言う「活動の対象化」が不可欠であるというが, この「活動の対象化」を意図した授業設計方法を確立することが必要であると筆者は考える。

以上より, 本研究の目的を, 数学科授業における「数学化」の実現を目指した授業設計の枠組みを構築するとともに, 教材を開発し, 開発した教材を活用して「数学化」の実現を目指し

た授業設計を構想することとする。

本研究の目的を達成するために, 三つの課題を設定する。第一に, 本研究において実現を意図する「数学化」を規定し, その実現によって期待できる教育的価値と「数学化」の実現に向けた課題を明らかにする。第二に, 「数学化」の実現を目指した授業を実現するために, RME に焦点を当てた授業設計の枠組みを構築する。第三に, 中学校及び高等学校数学科の授業において「数学化」を実現するための教材の開発を行い, 開発した教材を活用して「数学化」の実現を目指した授業の設計を行う。

1. 「数学化」に関する基礎的考察

まず, H.Freudenthal らの「数学化」論を検討することにより, 本研究における「数学化」の概念規定を行った。「数学化」自体の意味は, 「数学的手段を用いた, 数学的観点からの経験の組織化」とした。これは H.Freudenthal の「数学化」の意味に準拠している。ここでいう数学的手段とは, 数式処理, 図や表・グラフへの表現, 推論などを指し, 数学的観点とは, 一般性・確実性・正確性・簡潔性・審美性・抽象性・論理性・形式性などを指す。この「数学化」の対象は「現実」と「数学自身」の両方である。つまり, 「数学化」とは, 現実事象の問題を解決することとともに, そのことを通して新たな数学を創造することであり, これが行われることを「数学化」の実現と呼ぶことにした。

次に, 「数学化」の教育的価値と教育的課題を論じた。主な教育的価値として3点が挙げられる。第一に, 数学的な考え方は「数学化」の活動の過程で表出するものであり, 「数学化」の経験を蓄積することによって, 数学的に考える経験を積ませることができる。第二に, 「数

学化」によって数学を直接的に活用する能力を育成することができる。第三に、「『数学化』こそ数学である」という立場に立った数学教育を実現することで、数学はある問題を解決するために先人達が努力して創り上げてきたものであること、数学は対象を組織するための手段として有用であることを児童生徒に実感させることができ、そして、「数学化」によって創造された数学は存在価値のある数学として、数学を学ぶ意義の感得を促すことができる。一方、「数学化」の教育的課題として、H.Freudenthalの「数学化」の概念が漠然としていること、モデル転換を軸とした「数学化」の様相が不明確であること、それゆえこの「数学化」の実現を目指した授業設計の方法がなされていないことの3点を明らかにした。

2. 「数学化」の実現を目指した授業設計のための理論的考察

(1) Realistic Mathematics Education の基本原理に関する考察

H.Freudenthalの数学教育論は、そのまま教育実践においてすぐに適用可能な理論となっているわけではない。伊藤伸也(2005)は、H.Freudenthalの数学教授学は世界的に影響を与え続けている一方で、その理論が体系的・構造的ではなかったり用いられる概念が漠然としていたりするという指摘があり、先行研究においてその解明が目指されてきていることを述べている(p.127)。そこで、H.Freudenthalの数学教育論を検討する一方で、それに加えてRMEを検討することとした。この取り組みを参考にすることで、学校数学への具現化を通したH.Freudenthalの数学教育論の解釈や補完を考察できると考えられる。

RME(“Realistic” Mathematics Education)は単なる「現実的な」数学教育」という意味ではない。この“Realistic”について、M.van den Heuvel-Panhuizen(2014)は『現実世界』の意味での『現実的な』状況(“realistic” situations)はRMEにおいては重要であるが、“realistic”はここではより広い意味を持つ。それは、児童生徒たちが想像できる問題状況を与えられるということを意味する。この“realistic”の説明は、『想像する』(to imagine)を意味する、オランダ語の表現である“zich REALISEren”までさかのぼる。RMEにその名を与えたのは心的に現実(real)であるようにすることの強調ゆえである。」(M.van den Heuvel-Panhuizen, 2014, p.521)と述べており、RMEにおいて“realistic”は単に「現実的な」という意味ではなく「想像できる」という意味も含めている。RMEでは、リアリティという言葉には「ある対象において心的に実感のある状態」を意味し、授業では生徒にとってリアリティのある文脈や状況を基に、新たなリアリティの創出を目指すことが鍵となるのである。

RMEは人によってその意味の解釈が異なり(M.van den Heuvel-Panhuizen & M.Wijers, 2005)、様々な人の様々な理論がある。本研究では、K.GravemeijerのRME理論に焦点を当てる。彼はRMEの基本原則として「導かれる追発明」、「教授学的現象学」、「創発的モデル化」の3つを挙げている(K.Gravemeijer, 2004)。

H.Freudenthal(1973)は、「追発明」とは、学習者が数学史上に見られる発明を繰り返すことによる数学学習のことであり、そして、単に歴史を繰り返すのではなく、袋小路や回り道などの失敗を避け、当時にはなかった知識を用いた上で繰り返されるべきであると述べている。

このように、学習過程の指導環境を考慮して“guided”が用いられ、「導かれる追発明」としている。そして、彼は「もし関係に満ちた数学が教授されるなら、関係している他の部分が数学であろうとも物理であろうとも日常生活であろうとも、その教授は、最初に、そして何度も何度も、関係しているその他の要素と結びつけられるべきである。」(H.Freudenthal, 1973, p.133)と述べている。つまり、授業は、授業者がねらいとする数学的概念、構造、アイデアによって組織されることが求められる現象から始まり、その現象を組織するためのツールとして児童生徒たちにとって新たな数学が生じていくように設計するべきであるということである。この現象を準備するための教材研究が「教授学的現象学」である。

また彼は、学習過程においては学習者の学習水準が想定されるべきであり、その飛躍を「活動を意識することと反省の対象にすること」(H.Freudenthal, 1991, p.99)として特徴づけた。小林廉(2015)は、Van Hiele の学習水準の飛躍と対比して、上記の飛躍手段を「活動の対象化」と呼んでいる。しかし、これら2つの水準飛躍は意味が異なると筆者は考えるため、本研究では、上記の飛躍手段を「活動の反省」と呼ぶことにする。K.Gravemeijer は、上述の活動水準の飛躍を引き起こすための媒介として「モデル」の概念を用い、「創発的モデル化」を提唱した。これは、一連の授業において、児童生徒の自力解決活動“のモデル”(model-of)が、児童生徒たちにとって新たな数学を創造する“ためのモデル”(model-for)へと転換するというモデルの転換が実現されることを目指したヒューリスティックである。児童生徒による model-of の利用は、新たな数学的関係や数学的対象を実感

すること、即ち「数学的リアリティ」の創出を促し、それがなされると、model-for へと役割を転換させる。ここでモデルとは全体を束ねる概念であり、具体的には様々な形で現れるものである。それら具体的な現れはサブモデルと呼ばれ、それぞれのサブモデルが以前のサブモデルを内包しながらその役割を model-of から model-for へ転換させていくことを繰り返すことによって、モデルが全体的にその役割を転換させていくと考えられる。



図1 媒介としてのモデル

(K.Gravemeijer, 1997, p.339)

K.Gravemeijer(2007a)は図1に対応した4つの活動水準について以下のように説明し、K.Gravemeijer(1997)は長除法についての学習過程を例示している。

表1 活動水準(Gravemeijer, 2007a, p.14)

1. 課題設定における活動：解釈と解決は、その設定の活動の仕方の理解に依存する。
2. 参照的活動：model-of が設定された課題における活動を参照する。
3. 一般的活動：model-for が数学的な関係のネットワークを参照する。
4. フォーマルな数学的推論：数学的活動のためのモデルの支えにもはや依存しない。

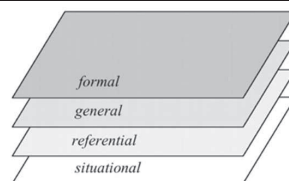


図2 活動水準(K.Gravemeijer, 2007a, p.14)

第1水準は、お菓子を分配するといった現実

生活の活動に関連づけられる。児童らは、この状況に対してなじみのある知識やストラテジーを活用する(例えば、一つずつ配る)。第2水準にいる児童は、このお菓子の分配が筆記課題として提示されたときに状況のモデルをつくる。このお菓子の分配は、紙と鉛筆を用いてモデル化されているのであり、本学習過程におけるモデルは「同数累減」ということになる。第3水準にいる児童は、焦点が数学的観点からのストラテジーへと移行しており、長除法の開発を試みている。ここでは児童はただ数を扱っているだけで、状況を考えていない。第4水準では、最終的に長除法を創る活動を含んでいる。

K.Gravemeijer の RME 理論は、第一に、「現実」と「数学」の数学化の側面から数学的活動を構造的に捉えていること、第二に、児童生徒の思考活動について4つの水準を設けることにより、数学的活動の質の高まりを議論しようとしていること、第三に、現象学的な分析によって、数学的な考えによって組織化される具体的な問題状況から学習を始められるよう意図していることの3点が特徴的であり、「数学化」の実現において示唆的であると考える。

(2)「数学化」の実現を目指した授業設計の枠組みの構築

本節では、K.Gravemeijer(2020)の授業設計の枠組みを基に、小林廉(2015)の水準間の移行に着目した授業構想のアイデアを取り入れ、単元を通して「数学化」を実現するための授業設計の枠組みとして整理していく。

まず、単元の目標の水準とする問題解決活動を明確にし、そこで利用される数学の分析を行う必要がある。これは単元の目標を明確にすることであるし、追発明する対象を明確にすることでもある。数学を分析する視点は、「それは

何を組織することで生じるのか」という教授学的現象学の視点と、「生徒たちにとって新たに実感されるべき数学的関係のネットワークと対応する数学的対象は何か」という数学的リアリティの視点である。数学的リアリティが明確になると、それと反射的關係を成す「中心的なモデル」の設定ができるようになる。生徒たちの活動の結果として生じ(model-of)、新たな数学を創造して目標とする問題解決活動を遂行するために利用可能(model-for)となるモデルは何であるのかを設定することとなる。

次に、授業の出発点がどのようになるかを構想していく。モデルは、生徒にとって経験的にリアルである文脈状況をモデル化することで創発するということが鍵であった。経験的にリアルな文脈や状況を特定することで、児童生徒にとって馴染みのある文脈や状況に根ざしたモデルの形成が行われる。

次に、数学的リアリティとモデルの反射的關係を視点として授業を具体化していくことになる。ここではまず大局的な視点に立ち、全体を束ねる概念としての中心的なモデルの転換を想定する。指導の段階を①課題設定における活動から参照的活動②参照的活動から一般的活動③一般的活動からフォーマルな数学的推論の3段階に分け、中心的なモデルはどう転換していくべきかを具体化し、各段階で探究すべき事象の要件が何であるかを検討する。その上で局所的な視点に立って、サブモデルとしていかに展開されていくようにするのかを検討し、それを実現するための事象を設定していく。このとき、数学的リアリティの創出に欠かせない「活動の反省」がどのように行われるのかを吟味することも重要となってくると考える。

以上のことをまとめると次のようになる。こ

の授業設計の枠組みは2種類ある。一つは単元構成に関する枠組み(枠組みA)で、もう一つはより具体的な授業構想に関する枠組み(枠組みB)である。学習指導案でいうと、枠組みAは該当する単元の指導計画の構想に、枠組みBは該当する授業の展開の構想に対応する。

表2「数学化」の実現を目指した

授業設計の枠組みA

I. 指導目標の明確化

- (1) 追発明の対象を設定する。
- (2) 上記の目標は何を組織することによって達成されうるかを考える。
- (3) 一般的活動を行う際に構築されているべき数学的対象は何かを考える。

II. 中心的なモデルの設定

- (1) 生徒の学習歴を把握する。
- (2) 生徒の活動から生じるインフォーマルなモデル(model of)は何かを考える。
- (3) 新たな数学を創造するために利用することになるモデル(model for)は何かを考える。
- (4) model of/for の転換時に I (3) で特定した数学的リアリティが創出するかどうかを確認する。

III. 授業の出発点の設計

- (1) 単元の最初の活動の具体的な目標を設定する。
- (2) model of が生徒たちのインフォーマルな解決から生じるための文脈や状況の条件を考える。
- (3) 経験的にリアルで、III(2)を満たす文脈問題を作る。

IV. 一連のサブモデルの設計

- (1) III(3)の文脈問題の活動を出発点として、後の参照的活動や一般的活動で創発するサブモデルを特定する。
- (2) それらサブモデルの発展について考える。

表3「数学化」の実現を目指した

授業設計の枠組みB

V. 課題設定における活動から参照的活動への転換を引き起こす問題解決活動における授業者の手立ての設定

- (1) 本活動の生徒の予想される解決過程を考察する。
- (2) 本活動の主発問を設定する。

VI. 参照的活動から一般的活動への転換を引き起こす問題解決活動の設計

- (1) 本活動の具体的な目標を設定する。
- (2) サブモデルが実際に創発、発展したりするような文脈や状況、議論の条件を考える。
- (3) 経験的にリアルで、VI(2)を満たす文脈問題を作る。

VII. 参照的活動から一般的活動への転換を引き起こす問題解決活動における授業者の手立ての設定

- (1) 本活動の生徒の予想される解決過程を考察する。
- (2) 活動の対象化を促す議論や活動について考察する。
- (3) 本活動の主発問を設定する。

VIII. 一般的活動からフォーマルな数学的推論への転換を引き起こす問題解決活動の設計

- (1) 本活動の具体的な目標を設定する。
- (2) モデルに依存しないフォーマルな数学的推論を促す文脈問題を作る。

IX. 一般的活動からフォーマルな数学的推論への転換を引き起こす問題解決活動における授業者の手立ての設定

- (1) 本活動の生徒の予想される解決過程を考察する。
- (2) 本活動における主発問を設定する。

図3は、この枠組みを俯瞰し表現したものである。枠組みAでは活動水準そのものに着目

し、生徒にとって馴染みのある状況からねらいとするフォーマルな数学の獲得までの学習の道筋を逆算しながら構想していく。枠組み B は、水準間の移行部分に着目し、その実現を図るための授業設計ツールとして機能するのである。

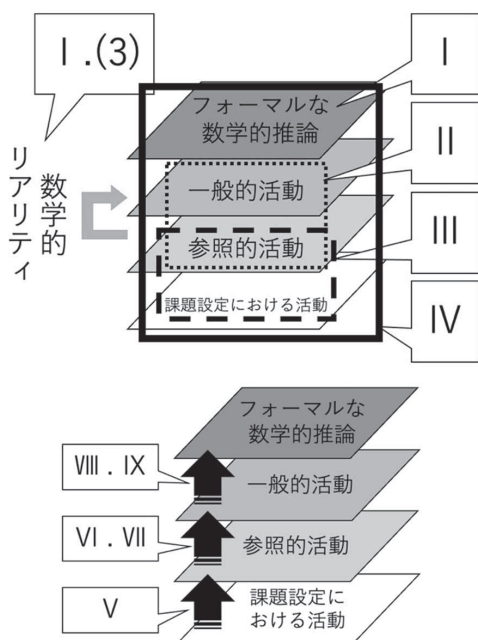


図3 「数学化」の実現を目指した
授業設計の枠組みの俯瞰

3. 「数学化」の実現を目指した授業設計の構想

本章では、構築した授業設計の枠組みをもとに、「数学化」の実現を目指した数学科授業の設計を行った。第1節の内容である中学校数学科の指導内容である単元「データの活用」における箱ひげ図の学習について記述する。

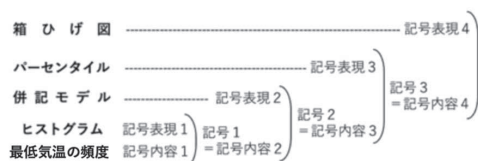


図4 一連のサブモデルの一覧

図4 は上の枠組み A にそって授業を構想した

際に作成した、一連のサブモデルの一覧である。

以下に作成した教材「避暑地の快適具合の分析」とその解決過程を記す。

問1)八王子市に住んでいる A 先生は、お盆休みに、同僚の先生たちと共に旅行に出かけることになっています。旅行先は避暑地として有名な軽井沢です。ある先生が「軽井沢だったら、長袖シャツも必要だ」と言いました。A 先生は、本当に長袖シャツが必要なのかどうか疑問に思っています。夏の軽井沢は、本当に長袖のシャツを着るほど寒いのでしょうか。

問2)A 先生が住んでいる八王子では夜でも暑く、寝苦しいことがあります。多くの場合で、軽井沢の方が八王子より過ごしやすいということをデータから説明してみましょう。

問3)東京近郊には、軽井沢の他にも、八ヶ岳(山梨)、開田高原(長野)、那須高原(栃木)、草津(群馬)といった有名な避暑地があります。A 先生はこの候補の中から来年の旅行先を決めようとしています。過ごしやすさの観点で考えると、来年の旅行先はどこが良さそうですか。A 先生に助言してください。

問1 では、軽井沢への旅行で長袖のシャツを持っていくべきかを決めることが解決すべき問題であると設定し、この問題を解決するために、2011 年から 2020 年までの 10 年間における 8/8~8/24 の期間における軽井沢の最低気温に関するデータを収集することにする。なぜならば、長袖のシャツが必要な時間帯は夜であるため、それに近い最低気温に関するデータを収集する。期間に関しては、お盆休みとその前後 1 週間の 10 年間分とすることで多くのデータから、例年のお盆休み期間における軽井沢の最低気温を知ることができるようにした。

ここで、授業者から「長袖のシャツを持って

いくべきかどうかをどのようにして判断しますか。」という問いが出される。八王子の平均気温のデータも収集し、8/8～8/24の期間における軽井沢の最低気温が、八王子のどの時期の平均気温に対応するのかを分析することで、長袖のシャツが必要かどうかを判断することにした。Excelを活用し、収集したデータから、代表値やヒストグラム、度数分布表を表現する。

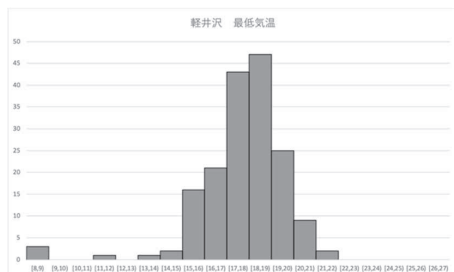


図5 軽井沢最低気温ヒストグラム(model-of)

この表現物は、各地域における最低気温に関するヒストグラムのモデル(model-of)となっている。これより、例年の8/8から8/24までの軽井沢の最低気温の平均値、中央値はそれぞれ17.7°C、17.9°Cであった。170あるデータの小数第一位を四捨五入した値における最頻値は18°Cであった。これらの代表値やヒストグラムからも多くのデータが17°C台、18°C台に含まれていることが読み取れる。どのくらい多くのデータかという点、170日中90日のデータが17以上19未満の値をとることがわかる。八王子の平均気温が17°Cから19°Cほどになるときの時期を調べると、5月上旬や10月の中旬あたりの平均気温に該当することがわかる。確かに、5月上旬や10月上旬あたりの服装を考えると、長袖のシャツを予備として持つていく方が良く考える。

問2では、先ほどと同じように、2011年から2020年までの10年間における8/8～8/24の期間における八王子の最低気温に関する

データを収集した。そして、同様にして度数分布表や代表値、ヒストグラムを表出する。これらヒストグラムや表から、八王子より軽井沢の方が、幾分か気温が低いことが読み取れる。また、互いの平均値を比べると5.6°C差があり、中央値で比較すると5.7°C差があることが読み取れる。代表値で見るとこのような温度の差があることが読み取れることがわかる。

ここで、授業者から「軽井沢の方が絶対に過ごしやすいとは言えないのではないのでしょうか。」という問いが出される。八王子の最低気温の方が軽井沢より低くなる日もあるため、一概に夏の夜は「いつでも」軽井沢の方が必ず寒いとは言えないが、軽井沢で21°C台や八王子で18°C台を記録する日はあまり起こり得ないとも言える。軽井沢で21°C台を記録したのは170日中2日で、八王子で18°C台を記録したのは170日中3日のみであるからである。

逆に、多くのデータが分布している部分に着目する。例えば、ヒストグラムの棒が突出している2つの部分は、軽井沢では17°C以上18°C未満、18°C以上19°C未満の階級が該当し、八王子では、23°C以上24°C未満、24°C以上25°C未満の階級が該当する。その部分の度数を調べると、軽井沢では最低気温が17°C以上19°C未満となった日が170日中90日あり、八王子では最低気温が23°C以上25°C未満となった日が170日中87日ある。最低気温に関してはおよそ半分、軽井沢では17°C以上19°C未満となり、八王子では23°C以上25°C未満となることがわかる。よって、最低気温が密集している部分では4°C以上最低気温の差があり、軽井沢の方が八王子より涼しくなっていると考えられる。

ここで、真ん中50%の範囲に関連して、授業者は第一四分位数、第三四分位数、四分位範

圏の定義が教えられる。八王子、軽井沢それぞれのデータの最小値、最大値、中央値、第一四分位数、第三四分位数を帯グラフで表現し、ヒストグラムや度数折れ線に併記する(図6)。

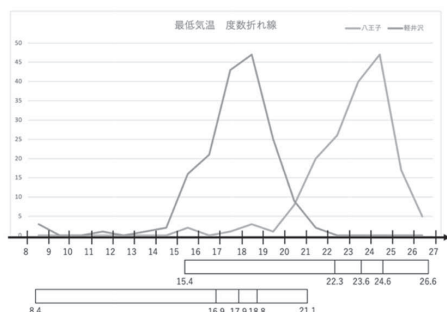


図6 最低気温に関する併記モデル

このように、併記モデルを表現することによって、最低気温の範囲や四分位範囲がわかりやすくなることを理解する。八王子の最低気温の範囲と四分位範囲は、それぞれ 11.2°C 、 2.3°C である。軽井沢の場合はそれぞれ 12.7°C 、 1.9°C である。軽井沢の方がデータの範囲が大きい、四分位範囲が小さいため、真ん中 50% のデータはより値が密集していることになる。夏の夜に関して言えば、半分が 16.9°C から 18.8°C の間で最低気温を記録している軽井沢の方が涼しく過ごしやすいと言える。

問3では、日中の気温が低く、夜の気温が低すぎない程度の温度である地域が過ごしやすい地域であると言える。例えば、軽井沢は、日中は涼しいが、夜は寒くなる恐れがあり、長袖のシャツが必要となる可能性がある。日中も夜も服装の種類を変えずに過ごすことができるならば、それはより快適な旅行となると考える。よって、本問題では、最高気温が低く、そのうち最低気温が適温である地域が過ごしやすい旅行先と設定する。そこで、上記の地域それぞれの最高気温、最低気温のデータを収集し、ヒストグラムや度数折れ線に表現して、最適な旅

行先を決定することにする。上記の計画を基に、まずは 2011 年から 2020 年までの 10 年間ににおける 8/8~8/24 の期間における軽井沢、大泉(山梨)、開田高原(長野)、那須高原(栃木)、草津(群馬)の最高気温と最低気温に関するデータを収集する。気象庁から収集できるデータには八ヶ岳(山梨)がなかったため、そこから近い場所にある大泉(山梨)のデータを収集することにした。Excel を活用し、収集したデータから、度数分布表や、それぞれの代表値、ヒストグラムを表出した。分布の様子を視覚的に表現したが、これらを比較することは困難である。度数折れ線を見れば、どの地域の山(データがたくさんある部分)がどこにあるかが一目瞭然であるが、範囲が見づらい。そこで、授業者の問い「より簡単に分かりやすくデータの分布を表現する方法はないでしょうか。」から、併記モデルで使用していた帯グラフのみに焦点をあてるというアイデアを活用する(図7)。この帯グラフは、箱ひげ図を創出するためのモデル(model-for)として機能する。

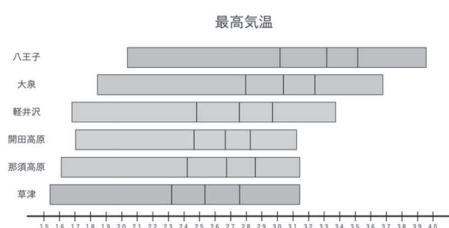


図7 最高気温の帯グラフモデル(model-for)

図7より、一番、最高気温の分布が低い形となっているのは草津であるが、最低気温の最小値は一番小さく、また、四分位範囲も軽井沢より低い位置にある。最高気温の分布が低く、さらに比較的最低気温が高い分布となっているのは那須高原であることが読み取れる。よって、これらの中で気温的に一番過ごしやすい地域は、那須高原と決定する。図7では、帯グラフ

が羅列されており、どの線分がどの代表値となるのが今ひとつ見にくい。そこで、「この帯グラフをより見やすい形に表現し直してみよう。」という授業者の問いから、帯グラフの形を変える。散らばり具合を表現できる四分位範囲に関しては帯グラフのまま箱として表現し、それより外側の部分を髭として表現することで、四分位範囲を強調したグラフ表現ができる。また、2018年8月17日から19日にかけて、草津では、7.9°C、6.5°C、8.5°Cと、例年では考えられないような最低気温を記録している。このような気温は減多に起きることがないため、この値を無視してデータを再分析した方が良く考える。それを考慮して、箱ひげ図の作成を行うと、図8のようになった。

例えば、過ごしやすさという指標を、日中の涼しさという観点と昼夜の気温差の小ささという観点で見る。この箱ひげ図の表現から、最低気温は軽井沢より低い、四分位範囲が小さい草津の方が、気温が安定しており、さらに比較的昼夜間の温度差も小さいため、草津が旅行先として決定するという結論も考えられる。

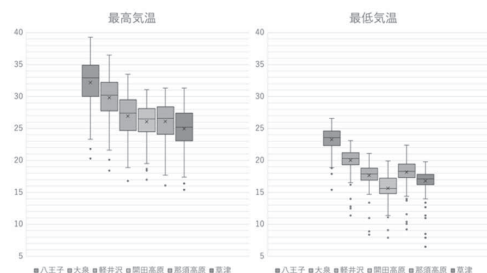


図8 気温の箱ひげ図(フォーマルな数学)

他にも、K.Gravemeijer(2007b)のように、ヒストグラム(model-of)から4等分線表示を通して四分位線表示(model-for)へのモデル転換を構想することもできる。即ち、異なる複数のモデルが複線的に転換する場合があるということであり、それを考慮した授業設計の

枠組みを構築することができた(図9)。

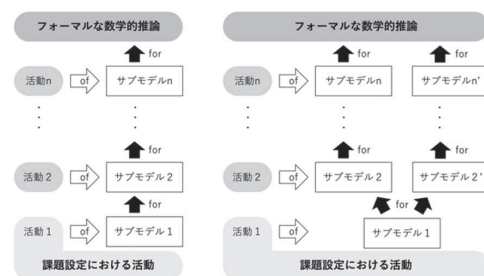


図9 既存のモデル転換(左)と
複線性を考慮したモデル転換(右)

4. 今後の課題

本研究における今後の研究課題は主に次の3点である。第一に、本研究において設計した授業を実践することによって、授業設計方法と授業案を評価し、改善を図っていくことである。第二に、箱ひげ図や微分積分の内容以外の単元に対しても、本研究で構築した授業設計方法を適用することである。第三に、RMEに関する理論的考察を進めていくことである。

主要・引用参考文献

- Freudenthal, H(1991). Revisiting Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K(2007a). Emergent modeling and iterative process of design and improvement in mathematics education. 筑波大学・APEC 国際会議. 講演会資料. 2007年12月9日.
- 小林 廉(2015) 数学科授業における「数学化」の実現に関する研究. 東京学芸大学大学院連合学校博士論文.

(きむら けんと

東京学芸大学大学院 連合学校教育学研究科
東京都小金井市貫井北町 4-1-1)