拡張に焦点を当てた三角比の単元計画

拡張に焦点を当てた三角比の単元計画

佐藤亮太

要約

本稿の目的を，拡張に焦点を当てた三角比の単元計画の提案とする。鋭角の三角比を鈍角の三角比へ拡張する際に，拡張する必要性とその定義の妥当性を与えたい。そこで，拡張前に 2 倍角の公式を学習し，鈍角の三角比の必要性とその定義の妥当性を持ちながら拡張し定義する。さらに拡張後，正弦定理や余弦定理の学習し，生徒の思考に沿いつつ，拡張した定義の妥当性をさらに高めることを意図した単元計画を提案する。

１．本稿の目的と方法

現行学習指導要領の高等学校数学 I の中にある三角比の指導における問題点の一つとして，鋭角の三角比から鈍角の三角比へ拡張する場面がある。学習指導要領に述べられているように，三角比を鈍角まで拡張する意義を理解させたい（文部科学省，2018，p. 40)。そして，拡張する際には，拡張する必要性とその定義の妥当性が欲しい。拡張に焦点を当てた三角比の単元計画の提案を本稿の目的とする。

目的に対し，先行研究を整理し，提案する単元計画の視点を定める。その視点をもとに単元を計画し，目的を達成する。

２．先行研究の整理と単元計画の視点

(1) 先行研究の整理

鈍角の三角比への拡張の際の問題点はこれまでも指摘されており，それに関する教材の提案や実践の報告が多くなされている。それらは，鋭角の三角比から鈍角の三角比への拡張の仕方について以下の 3 つの方法に大別できそうである。

第一は，多くの教科書でも扱っている方法で，鋭角の三角比を直角三角形の辺の比で定義した後，座標で定義しなおし，鈍角の三角比へ拡張する方法である。その多くが，座標のイメージを助けるための場面や教具を用意する提案であり，座標で定義することを助けるよう工夫されている(例えば, 柳田, 2005)。一方で，座標で定義しなおすことは，「必然性がなく，何かこじつけの印象すら与えていたようである」（磯脇，1981，p.264）という指摘もある。第二は，鋭角の三角比を座標で定義する方法である。しかし，この方法では，拡張を体験することができない。もちろん鈍角まで拡張する意義を実感できないであろう。場面を設定し工夫しているものもある（例えば，冨田，2010）が，拡張を体験することができないのは同じであろう。第一の方法と第二の方法は，鈍角の三角比の定義の理解を意図しており，その効果はあるであろうが，生徒にとって，鈍角の三角比の必要性とその定義の妥当性が不十分なのではないだろうか。

第三は，鋭角の三角比を辺の比で定義した後，鋭角三角形の面積公式，正弦定理，余弦

定理を学習した後，それらが鈍角三角形の場合にも成り立つように鈍角の三角比を定義する方法である（例えば，熊倉，2000，2006；長岡，2003）。この方法は，生徒にとって，鈍角の三角比の必要性とその定義の妥当性があると思われる。しかし，鋭角三角形の面積公式，正弦定理，余弦定理を学習する際に，鈍角三角形ではどうなるのかと生徒から自然と出てくるし，出てきて欲しいところである。したがって，この方法では，例えば，鋭角三角形の正弦定理等を学んだ直後に，鈍角三角形の正弦定理等を考えないことが，生徒の思考に沿っていない流れになってしまうのではないだろうか。

鈍角の三角比の必要性とその定義の妥当性を持ちながら拡張し，かつ，生徒の思考に沿った三角比の単元計画が必要である。

（2）単元計画の視点

磯脇（1981）は，「三角比の鋭角から鈍角への拡張も，三角形の面積公式を統一するという観点から考えさせ，自然な形で理解させる」（p.264）と述べている。筆者も，鈍角の三角比の必要性については，慣れ親しんでいる三角形の面積を求める公式を鈍角三角形についてはどうかと考えることがよいと考える。

定義の妥当性については，複数の方法で考えても同じ結果になれば妥当性が増す。三角形の「面積公式」とこじつけの印象を与えかねない「座標」以外の方法が必要である。しかし，面積公式を学習する際に鈍角三角形ではどうなるのかと考えたいので，ここで正弦定理や余弦定理を考えることは生徒の思考に沿っていない。面積公式，座標，正弦定理・余弦定理の他の方法が必要である。そこで，2倍角の公式（0°≦A≦45°のとき，$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ 等）を学習しておき，2倍角の公式を用いて定義の妥当性を確かめることを提案する。45°≦A の2倍角の公式を考えないことは，鋭角三角形の正弦定理等を学んだ直後に鈍角三角形の正弦定理等を考えないことと同様に，生徒の思考に沿っていないのではという疑問が出るかもしれないが，鈍角の三角比がないので，45°≦A の2倍角の公式を考えないことは自然であると判断する。

また，定義した後，そう定義したことのよさを実感すれば，その定義の妥当性がさらに増すと考える。この場面で，正弦定理・余弦定理を学習し，定義の妥当性をさらに高めることを提案する。

以上より，提案する単元計画の視点をまとめると次の2点である：(1) 鈍角の三角比の定義の前に2倍角の公式を学習し，鈍角の三角比の定義の妥当性を高める；(2) 鈍角の三角比の定義の後に，正弦定理・余弦定理等を学習し，鈍角の三角比の定義の妥当性をさらに高める。

３．単元計画の提案

上述の単元計画の視点より以下を提案する。

単元計画（全16時間，括弧内は時間数）

① 鋭角の三角比（2）
② 三角比の表（2）
③ 相互関係（1）
④ 2倍角の公式（2）
⑤ 鈍角の三角比への拡張（2）
⑥ 正弦定理（2）
⑦ 余弦定理（2）
⑧ ヘロンの公式(1)
⑨ ブラマグプタの公式(1)
⑩ 空間図形の計量(1)

以下では，鋭角の三角比から鈍角の三角比へ拡張する場面に関わる授業①から授業⑧までを詳述する。

授業①において直角三角形の辺の比で鋭角の三角比を定義する。授業②において，三角比の表を観察し，角度が大きくなれば正弦と正接は増加，余弦は減少することや，正弦と正接は角度が 0°に近いときは近い値であること，余角の三角比の関係等を見いだし，それぞれ図を用いて証明する（図 1)。また，0°と 90°の三角比も表にあるので，ここで図 1 等から，0°と 90°の三角比を値を解釈し定義する。加えて，正弦は，角度が大きくなれば増加するが増加の仕方は減少することも，表から観察でき，このことを，斜辺を一定にして角度を変化させ証明する（図 1 右)。これは，鈍角の三角比を定義するときに座標を考える足掛かりになると考えている。余弦・正接についても同様である。

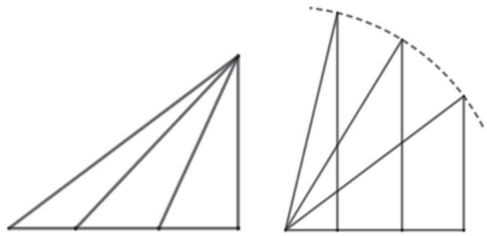

図 1. 高さを固定し角度を変化させた直角三角形（左）と斜辺を固定し角度を変化させた直角三角形（右）

そして，授業③において，次の問いを解決することを通して，三角比の相互関係を見いだし証明する。

授業③　相互関係

問　$\angle\mathrm{C} = 90°$，$\angle\mathrm{A} = A$，$\mathrm{AB} = 5$である直角三角形 ABC において，次の線分の長さをAの三角比を用いて表せ。

（1）BC，（2）CD，（3）AC，（4）BD，（5）AD

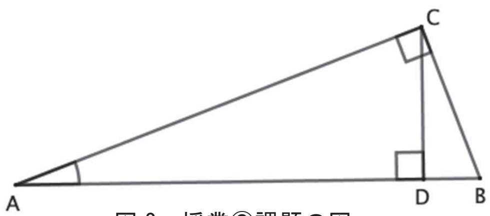

図 2. 授業③課題の図

(1) $\mathrm{BC} = 5\sin A$

(2) $\mathrm{CD} = \mathrm{BC} \times \cos A = 5\sin A\cos A$

(3) $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \times \sin(90° - A) = 5\cos A$

$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} \times \tan(90° - A) = 5\sin A \cdot \frac{1}{\tan A}$

(4) $\mathrm{BD} = \mathrm{CD} \times \tan A = 5\sin A\cos A\tan A$

$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \sin A = 5\sin^2 A$

$\mathrm{BD} = \mathrm{AB} - \mathrm{AD} = 5(1 - \cos^2 A)$

(5) $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \times \cos A = 5\cos^2 A$

$\mathrm{AD} = \mathrm{AB} - \mathrm{BD} = 5(1 - \sin^2 A)$

(3)〜(5)では, 別の方法で求めている生徒の考えを出し, (3), (4)において, $\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$, (4), (5)において，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$を見いだすことができ，証明する。

授業④において，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$であるので正弦と余弦の 2 乗の和が 1 であるが，差（$\sin^2 A - \cos^2 A$）はどうなるだろうかという問いから資料 1 の表を配布し, 表を観察する。そうすると表から 2 倍角の公式を予想できる。そして，予想した 2 倍角の公式を以下の問で証明する。この問にある図（図 3）は授業③の図（図 2）にいくつか付け加えたもので，授業③で求めたことを利用することを想定している。

表 1. 授業④配布資料の一部

角	sin	cos	tan	sin−tan		sin^2+cos^2	cos^2−sin^2
0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000		1.0000	1.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175	0.0000		0.9999	0.9993
2	0.0349	0.9994	0.0349	0.0000		1.0000	0.9976
3	0.0523	0.9986	0.0524	0.0001		0.9999	0.9945
4	0.0698	0.9976	0.0699	0.0001		1.0001	0.9903
5	0.0872	0.9962	0.0875	0.0003		1.0000	0.9848
6	0.1045	0.9945	0.1051	0.0006		1.0000	0.9781
7	0.1219	0.9925	0.1228	0.0009		0.9999	0.9702
8	0.1392	0.9903	0.1405	0.0013		1.0001	0.9613
9	0.1564	0.9877	0.1584	0.0020		1.0000	0.9511
10	0.1736	0.9848	0.1763	0.0027		1.0000	0.9397
11	0.1908	0.9816	0.1944	0.0036		0.9999	0.9271
12	0.2079	0.9781	0.2126	0.0047		0.9999	0.9135
13	0.2250	0.9744	0.2309	0.0059		1.0001	0.8988
14	0.2419	0.9703	0.2493	0.0074		1.0000	0.8830

授業④ 2倍角の公式

問　下の図（図 3）を用いて以下の問いに答えよ。

（1）$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$ を示せ。

（2）$\sin 2A$ をAの三角比で表せ。

（3）$\tan 2A$ をAの三角比で表せ。

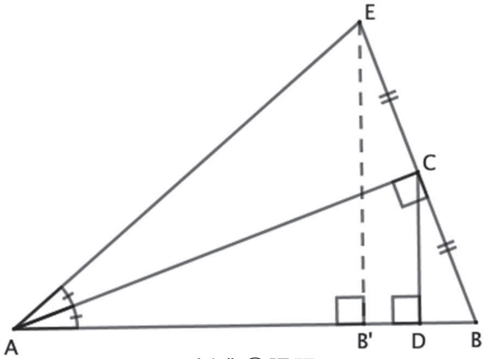

図 3. 授業④課題の図

(1)$\triangle\mathrm{ABE}$ は二等辺三角形であるので，$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} = 5$である。よって，$\mathrm{AB}' = 5\cos 2A$である。一方，$\mathrm{AB}' = \mathrm{AD} - \mathrm{DB}' = \mathrm{AD} - \mathrm{BD} = 5\cos^2 A - 5\sin^2 A$ であるので，$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$ を示すことができる。

(2)$\mathrm{EB}' = 5\sin 2A$である。一方，$\mathrm{EB}' = 2\mathrm{CD} = 2 \cdot 5\sin A\cos A$ であるので，$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ である。

ここで得られた2倍角の公式は，0°　≦A≦ 45°　の範囲で成り立つものであることを注意しておく。

授業⑤において，三角比を三角形の面積公式と2倍角，さらに座標において鈍角の三角比へ拡張する。まず，下の問の図4のように鋭角三角形の図をかき，面積をb，c，Aで表す。そして，三角形は鋭角三角形だけでなく鈍角三角形もあることから，鈍角三角形について考える。

授業⑤　鈍角の三角比への拡張（正弦）

問1　面積Sをb，c，Aで表せ

(i) $A < 90°$のとき

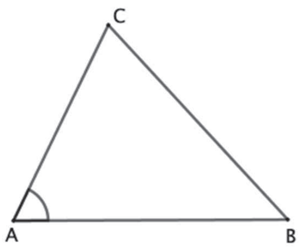

図 4. 授業⑤の図（$\angle A$ が鋭角）

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

(ii) $A = 90°$のとき

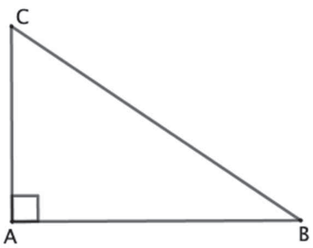

図 5. 授業⑤の図（$\angle A$ が直角）

$$S = \frac{1}{2}bc$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

(iii) $A > 90°$のとき

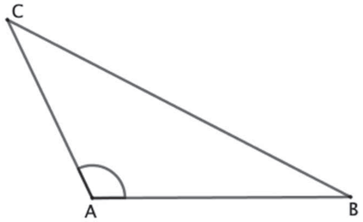

図 6. 授業⑤の図（$\angle A$ が鈍角）

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(180° - A)$$

ここで，まず，(i)と(ii)から，$\angle A$ が鋭角のときも鈍角のときも，どちらも$S = \frac{1}{2}bc\sin A$となりまとめてかけることを確認する。そして，「$\sin 90° = 1$」と定義したからまとめてかくことができ，「$\sin 90° = 1$」と定義したよさを実感させ，定義の妥当性をさらに高める。

次に，「$\sin(180° - A) = \sin A$だったら，A が鋭角，直角，鈍角のいずれの場合も，$S = \frac{1}{2}bc\sin A$となりまとまりきれいである。そのため，$\sin(180° - A) = \sin A$としてみよう。」として，鈍角の三角比の必要性を与える。

そして，鈍角の三角比の妥当性のために「$\sin(180° - A) = \sin A$として不都合があるか。例えば，$\sin 110° = \sin 70°$として不都合があるか。言い換えれば今まで成り立っていたことが成り立つか。」と問う。この問いを解決するために，授業④の２倍角の公式を利用する。もし 2 倍角の公式が 45° 以上の角でも成り立っていると仮定すると，

$$\sin 110° = 2\sin\frac{110°}{2}\cos\frac{110°}{2}$$
$$= 2\sin 55°\cos 55°$$
$$= 2\cos(90° - 55°)\sin(90° - 55°)$$
$$= 2\cos 35°\sin 35°$$
$$= \sin(2 \times 35°)$$
$$= \sin 70°$$

となり，不都合がないことを確認する。また，$\sin 110° = 2\sin 55°\cos 55°$であることから，鋭角の三角比の表から，$\sin 55°$，$\cos 55°$と$\sin 70°$の値を読み取り，$\sin 110° = 2\sin 55°\cos 55° \fallingdotseq 2 \times 0.8192 \times 0.5736 = 0.93978624 \fallingdotseq \sin 70°$という確認方法もある。

先行研究では，$\sin 120°$等の有名角の正弦を問題にすることが多い（例えば，小松，2008；長岡，2003）。しかし，有名角でない方が補角との関係がよくわかるので，$\sin 110°$を課題とすることを提案する。

一方，教科書のように座標での考えも扱い，不都合がないことを確認する。座標での考えは，既習事項ではないが，実は今まで成り立っていたこととして，授業②での図 1 右の考えを足掛かりとして出ることを期待する。

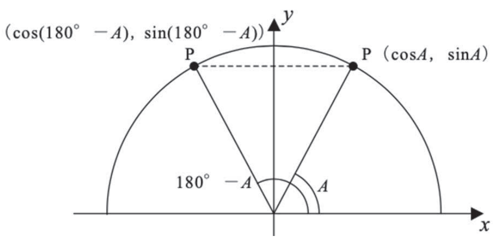

図 7. 座標での三角比の定義

この 2 つの方法どちらでも，$\sin(180° - A) = \sin A$として不都合がない。別の言い方をすると，$\sin(180° - A) = \sin A$とすれば，鈍角の場合も含めて，「面積公式」，「2 倍角の公式」，「単位円（正弦は y 座標）」ということが，引き続き成り立ちよい。以上から，妥当性を持って，$\sin(180° - A) = \sin A$と決め，鈍角の三角比を定義する。

つぎに，余弦，正接を鈍角へ拡張する。正弦について拡張したので，余弦と正接についても拡張する必然性をすでに与えていると判断し，正弦の時の「面積公式」にあたるもの

は与えていない。

授業⑤ 鈍角の三角比への拡張（余弦，正接）

問 2　$\cos 110°$の値を決めよ。理由も述べよ。

・2 倍角の公式

$$\cos 110° = \cos^2 \frac{110°}{2} - \sin^2 \frac{110°}{2}$$
$$= \cos^2 55° - \sin^2 55°$$
$$= \sin^2(90° - 55°) - \cos^2(90° - 55°)$$
$$= -(\cos^2 35° - \sin^2 35°)$$
$$= -\cos(2 \times 35°)$$
$$= -\cos 70°$$

$$\cos 110° = \cos^2 \frac{110°}{2} - \sin^2 \frac{110°}{2}$$
$$= \cos^2 55° - \sin^2 55°$$
$$\fallingdotseq (0.5736)^2 - (0.8192)^2$$
$$= -0.34207168$$
$$\fallingdotseq -\cos 70°$$

$$\cos 110° = 1 - 2\sin^2 \frac{110°}{2}$$
$$= 1 - 2\sin^2 55°$$
$$= 1 - 2\cos^2(90° - 55°)$$
$$= -(2\cos^2 35° - 1)$$
$$= -\cos(2 \times 35°)$$
$$= -\cos 70°$$

・相互関係

$\sin^2 110° + \cos^2 110° = 1$ より

$$\cos^2 110° = 1 - \sin^2 110°$$
$$= 1 - \sin^2 70°$$
$$= \cos^2 70°$$

したがって，$\cos 110° = \pm \cos 70°$

・単位円

図 7 を考えて

$$\cos 110° = -\cos 70°$$

以上のことから，$\cos 110° = -\cos 70°$と決めると，「2 倍角の公式」「相互関係」「単位円（余弦はx座標）」のどれも成り立ちよさそうであるとして，妥当性を持って，$\cos(180° - A) = -\cos A$と決め，鈍角の余弦を定義する。

続いて，正接も，同様に，「2 倍角の公式」「相互関係」「単位円（正接は傾き）」から，妥当性を持って，$\tan(180° - A) = -\tan A$と決め，鈍角の正接を定義する。

以上のように，鈍角の三角比を，「2 倍角の公式」「相互関係」「単位円」という 3 つ（正弦については「面積公式」「2 倍角の公式」「単位円」の 3 つ）の視点で定義したが，「この中で 1 つ定義として選ぶとすればどれにするか」と問い考えさせる。そうすると「単位円」が視覚的でわかりやすく定義としてよいという意見が出たりする。教科書では，視覚的でわかりやすくという理由で，単位円で定義されていると紹介する。また，どれを定義にしてもよく，どれかを定義にして学習を進めてみて定義を再検討したくなったらそこで考えればよいことも伝える。数学Ⅱでの一般角の三角比を定義する際は，単位円での定義が視覚的でわかりやすくよいとなると思われる。

定義をする際に妥当性を持って定義したいが，定義した後も妥当性を確認し，定義のよさを実感しながら学習を進めたい。そのために，正弦定理と余弦定理をここで学習する。授業⑥⑦において授業⑤のように拡張したよさを実感し，その定義の妥当性をさらに高めることを意図している。

授業⑥では，△ABC において，辺の長さ a と角の大きさ A を与え，△ABC を描かせる。△ABC は決まらないが，外接円の大きさは決まる。だから，「a と A と外接円の半径 R には

関係があるのではないか」と正弦定理を考える必要性を与える。

授業⑥ 正弦定理

問 BC $= a$, ∠A=A である三角形 ABC は無数にあるが，外接円の大きさは等しい（外接円の半径をRとする)。したがって，a，A，R には関係がありそうである。a，A，R の関係を式で表せ。

（i）$A < 90°$のとき

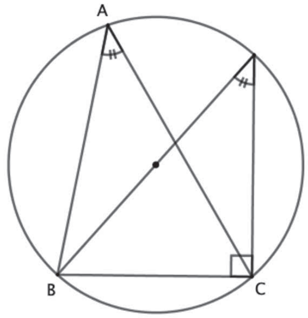

図 8. 授業⑥の図（∠A が鋭角）

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

(ii) $A = 90°$のとき

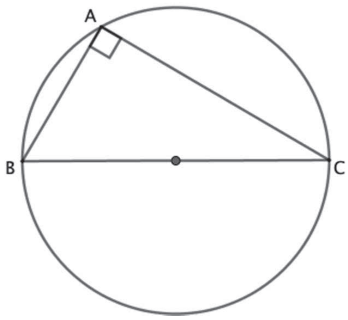

図 9. 授業⑥の図（∠A が直角）

$$2R = a$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

(iii) $A > 90°$のとき

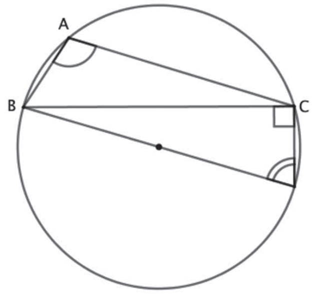

図 10. 授業⑥の図（∠A が鈍角）

$$\sin(180° - A) = \frac{a}{2R}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

正弦定理も，教科書のように，A が鋭角，直角，鈍角の場合で，図が異なるので分けて考えるが，関係式は同じでありきれいである。同じ関係式になるのは，$\sin 90° = 1$，$\sin(180° - A) = \sin A$と定義したからであるので，ここで改めて，$\sin 90° = 1$，$\sin(180° - A) = \sin A$と定義したよさを実感させ，定義の妥当性をさらに高める。

授業⑦では，b，c，A で△ABC が決まるので，a を b，c，A で表せてもよいはずであることから，以下の問を設定する。

授業⑦ 余弦定理

問 a を b，c，A で表せ。

(i) $A < 90°$のとき

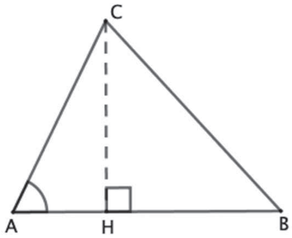

図 11. 授業⑦の図（∠A が鋭角）

$$\mathrm{CH} = b \sin A$$

$$\mathrm{BH} = c - b\cos A$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

(ii) $A = 90°$のとき

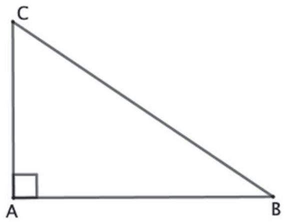

図 12. 授業⑦の図（$\angle A$ が鋭角）

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

(iii) $A > 90°$のとき

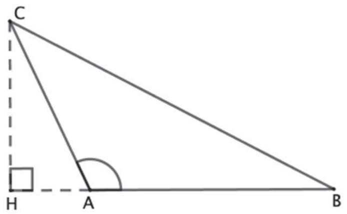

図 13. 授業⑦の図（$\angle A$ が直角）

$$\mathrm{CH} = b\sin(180° - A) = b\sin A$$

$$\mathrm{BH} = c + b\cos(180° - A) = c - b\cos A$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

正弦定理と同様，余弦定理も，教科書のように，A が鋭角，直角，鈍角の場合で図が異なるので分けて考えるが，関係式は同じでありきれいである。同じ関係式になるのは，$\cos 90° = 0$，$\cos(180° - A) = -\cos A$と定義したからであるので，ここで改めて，$\cos 90° = 0$，$\cos(180° - A) = -\cos A$と定義したよさを実感させ，定義の妥当性をさらに高める。

授業⑧では，$\triangle$ABC の面積 S について考える。三角形の決定条件の３つのうちの１つの2 辺とその間の角が与えられた場合の S は，授業⑤で扱った。残り 2 つの場合についてを課題とする。

授業⑧

問 1　面積 S を a，B，C で表せ

方法 1

正弦定理より $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin\{180° - (B + C)\}}$

$$\mathrm{AB} = \frac{a\sin C}{\sin(B + C)}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sin C}{\sin(B + C)} \cdot \sin B = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B + C)}$$

方法 2

$\mathrm{BH} = x$とする

(i) $B < 90°$ かつ $C < 90°$ のとき

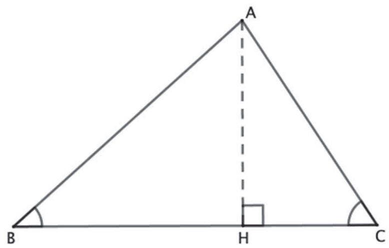

図 14. 授業⑧の図（$\angle B$，$\angle C$が鋭角）

$$AH = x\tan B = (a - x)\tan C$$

$$x = \frac{a\tan C}{\tan B + \tan C} \text{ なので} AH = \frac{a\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH = \frac{a^2 \tan B\tan C}{2(\tan B + \tan C)}$$

(ii) $B > 90°$のとき

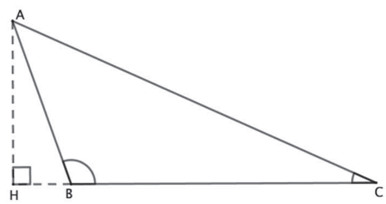

図 15. 授業⑧の図（$\angle B$ が鈍角）

$$AH = x\tan(180° - B) = (a + x)\tan C$$

$$x = \frac{-a\tan C}{\tan B + \tan C} \quad なので AH = \frac{a\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH = \frac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B + \tan C)}$$

(iii) $C > 90°$のとき

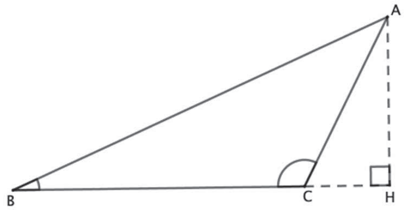

図 16. 授業⑧の図（$\angle C$ が鈍角）

$$AH = x\tan B = (x - a)\tan(180° - C)$$

$$x = \frac{a\tan C}{\tan B + \tan C} \quad なので AH = \frac{a\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH = \frac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B + \tan C)}$$

(i)～(iii)より，すべて場合（$B = 90°$や$C = 90°$を除いて）で同じ関係式になる。同じ関係式になるのは，$\tan(180° - A) = -\tan A$と定義したからであるので，ここで改めて，$\tan(180° - A) = -\tan A$と定義したよさを実感させ，正接についても定義の妥当性を確認する。ここで，方法 1 と方法 2 を見比べることにより，以下を得る。

$$\frac{\sin B\sin C}{\sin(B + C)} = \frac{\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$を利用することにより，以下の三角関数の加法定理を得ることができる。

$$\sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$$

ただし，$0° < B + C < 180°$であり，かつ$B = 90°$と$C = 90°$を除いた範囲で成り立つものであるので，注意が必要である。さらに授業⑧では，問 2 として「面積 S を a，b，c で表せ」でヘロンの公式を導く。

４．まとめと今後の課題

拡張に焦点を当てた三角比の単元計画の提案が本稿の目的であった。目的に対し，以下の 3 点の特長をもつ単元計画を提案した：①鈍角の三角比の必要性とその定義の妥当性を持ちながら拡張し定義する点；②生徒の思考に沿っている点；③拡張した定義の妥当性をさらに高める点。

上記の通りに提案したが，その有用性や改善点を明らかにすることは今後の課題である。また，この単元計画で拡張の仕方を生徒は学ぶが，そのことをどう評価するかという点も今後の課題である。例えば，数学Ⅱの三角関数を学習する際に，一般角についての三角比を定義する場面で評価することが考えられる。180°を超える角と負の角を学習した後，課題「$\sin 240°$の値を決めよ」を評価問題とすることができる。複数の方法で考え，拡張した定義の妥当性を吟味できるかどうかで，評価できると考えている。以下は，過去に実践した際の生徒の反応である。⑤⑥の内容は未習であったが，単位円を考え，理解し利用したようである。

① 単位円を利用

角θの動径と単位円の交点 P の座標を（x，y）とすれば，$0° \leqq \theta \leqq 180°$において$y = \sin\theta$であったので，$180° < \theta$においても$y = \sin\theta$とすると，

$$\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

② 2 倍角の公式を利用

$$\begin{aligned}\sin 240° &= \sin 2(120°)\\ &= 2\sin 120°\cos 120°\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

③ 補角や余角の関係を利用

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ &= \sin(90^\circ + 150^\circ)\\ &= \sin\{180^\circ - (90^\circ - 150^\circ)\}\\ &= \sin(90^\circ - 150^\circ)\\ &= \cos 150^\circ\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

④ 補角や余角の関係を利用

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ &= \sin(180^\circ - 240^\circ)\\ &= \cos\{90^\circ - (180^\circ - 240^\circ)\}\\ &= \cos 150^\circ\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

⑤ $\sin(90^\circ + A) = \cos A$を利用

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ &= \sin(90^\circ + 150^\circ)\\ &= \cos 150^\circ\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

⑥ $\sin(-A) = -\sin A$を利用

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ &= \sin(-120^\circ)\\ &= \sin 120^\circ\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

評価基準

3	$\sin 240^\circ$の値を 3 つ以上の方法で検討し定義できている。
2	$\sin 240^\circ$の値を 2 つの方法で検討し定義できている。
1	$\sin 240^\circ$の値を 1 つの方法で検討し定義できている。
0	$\sin 240^\circ$の値を 1 つの方法でも定義できていない。

引用・参考文献

- 磯脇一男（1981）三角比の鈍角への拡張の指導，日本数学教育学会誌 63(11)，pp.264-265.
- 小松真（2008）拡張に焦点を当てた三角比の学習指導に関する考察，数学教育論文発表会論文集 41，pp.369-374.
- 熊倉啓之（2000）学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究：三角比の指導を通して，日本数学教育学会誌 82(11)，pp.2-10.
- 熊倉啓之（2006）学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究：中学と高校の接続を重視して，数学教育論文発表会論文集 39，pp.355-360.
- 文部科学省（2018）高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編
- 長岡耕一（2003）三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案，日本数学教育学会誌 85(9)，pp.32-37.
- 冨田真永（2010）三角比の概念構成の指導に関する研究：鈍角への拡張場面に焦点をあてて，数学教育論文発表会論文集 43(1)，pp.447-448.
- 柳田大介（2005）理解を重視する高校数学の指導に関する研究(Ⅲ)：鋭角から鈍角への三角比の拡張場面を事例として，数学教育論文発表会論文集 38，pp.115-120.

（さとう　りょうた
東京学芸大学附属高等学校
〒154-0002 東京都世田谷区下馬４－１－５）

資料 1．授業④の生徒への配布資料

角	sin	cos	tan		sin−tan		sin^2+cos^2	cos^2−sin^2
0	0.0000	1.0000	0.0000		0.0000		1.0000	1.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175		0.0000		0.9999	0.9993
2	0.0349	0.9994	0.0349		0.0000		1.0000	0.9976
3	0.0523	0.9986	0.0524		0.0001		0.9999	0.9945
4	0.0698	0.9976	0.0699		0.0001		1.0001	0.9903
5	0.0872	0.9962	0.0875		0.0003		1.0000	0.9848
6	0.1045	0.9945	0.1051		0.0006		1.0000	0.9781
7	0.1219	0.9925	0.1228		0.0009		0.9999	0.9702
8	0.1392	0.9903	0.1405		0.0013		1.0001	0.9613
9	0.1564	0.9877	0.1584		0.0020		1.0000	0.9511
10	0.1736	0.9848	0.1763		0.0027		1.0000	0.9397
11	0.1908	0.9816	0.1944		0.0036		0.9999	0.9271
12	0.2079	0.9781	0.2126		0.0047		0.9999	0.9135
13	0.2250	0.9744	0.2309		0.0059		1.0001	0.8988
14	0.2419	0.9703	0.2493		0.0074		1.0000	0.8830
15	0.2588	0.9659	0.2679		0.0091		0.9999	0.8660
16	0.2756	0.9613	0.2867		0.0111		1.0001	0.8481
17	0.2924	0.9563	0.3057		0.0133		1.0000	0.8290
18	0.3090	0.9511	0.3249		0.0159		1.0001	0.8091
19	0.3256	0.9455	0.3443		0.0187		1.0000	0.7880
20	0.3420	0.9397	0.3640		0.0220		1.0000	0.7661
21	0.3584	0.9336	0.3839		0.0255		1.0001	0.7432
22	0.3746	0.9272	0.4040		0.0294		1.0000	0.7194
23	0.3907	0.9205	0.4245		0.0338		1.0000	0.6947
24	0.4067	0.9135	0.4452		0.0385		0.9999	0.6691
25	0.4226	0.9063	0.4663		0.0437		1.0000	0.6428
26	0.4384	0.8988	0.4877		0.0493		1.0000	0.6156
27	0.4540	0.8910	0.5095		0.0555		1.0000	0.5878
28	0.4695	0.8829	0.5317		0.0622		0.9999	0.5591
29	0.4848	0.8746	0.5543		0.0695		1.0000	0.5299
30	0.5000	0.8660	0.5774		0.0774		1.0000	0.5000
31	0.5150	0.8572	0.6009		0.0859		1.0000	0.4696
32	0.5299	0.8480	0.6249		0.0950		0.9999	0.4383
33	0.5446	0.8387	0.6494		0.1048		1.0000	0.4068
34	0.5592	0.8290	0.6745		0.1153		0.9999	0.3745
35	0.5736	0.8192	0.7002		0.1266		1.0001	0.3421
36	0.5878	0.8090	0.7265		0.1387		1.0000	0.3090
37	0.6018	0.7986	0.7536		0.1518		0.9999	0.2756
38	0.6157	0.7880	0.7813		0.1656		1.0000	0.2419
39	0.6293	0.7771	0.8098		0.1805		0.9999	0.2079
40	0.6428	0.7660	0.8391		0.1963		0.9999	0.1736
41	0.6561	0.7547	0.8693		0.2132		1.0000	0.1391
42	0.6691	0.7431	0.9004		0.2313		0.9999	0.1045
43	0.6820	0.7314	0.9325		0.2505		1.0001	0.0698
44	0.6947	0.7193	0.9657		0.2710		1.0000	0.0348
45	0.7071	0.7071	1.0000		0.2929		1.0000	0.0000

角	sin	cos	tan		sin−tan		sin^2+cos^2	cos^2−sin^2
45	0.7071	0.7071	1.0000		0.2929		1.0000	0.0000
46	0.7193	0.6947	1.0355		0.3162		1.0000	−0.0348
47	0.7314	0.6820	1.0724		0.3410		1.0001	−0.0698
48	0.7431	0.6691	1.1106		0.3675		0.9999	−0.1045
49	0.7547	0.6561	1.1504		0.3957		1.0000	−0.1391
50	0.7660	0.6428	1.1918		0.4258		0.9999	−0.1736
51	0.7771	0.6293	1.2349		0.4578		0.9999	−0.2079
52	0.7880	0.6157	1.2799		0.4919		1.0000	−0.2419
53	0.7986	0.6018	1.3270		0.5284		0.9999	−0.2756
54	0.8090	0.5878	1.3764		0.5674		1.0000	−0.3090
55	0.8192	0.5736	1.4281		0.6089		1.0001	−0.3421
56	0.8290	0.5592	1.4826		0.6536		0.9999	−0.3745
57	0.8387	0.5446	1.5399		0.7012		1.0000	−0.4068
58	0.8480	0.5299	1.6003		0.7523		0.9999	−0.4383
59	0.8572	0.5150	1.6643		0.8071		1.0000	−0.4696
60	0.8660	0.5000	1.7321		0.8661		1.0000	−0.5000
61	0.8746	0.4848	1.8040		0.9294		1.0000	−0.5299
62	0.8829	0.4695	1.8807		0.9978		0.9999	−0.5591
63	0.8910	0.4540	1.9626		1.0716		1.0000	−0.5878
64	0.8988	0.4384	2.0503		1.1515		1.0000	−0.6156
65	0.9063	0.4226	2.1445		1.2382		1.0000	−0.6428
66	0.9135	0.4067	2.2460		1.3325		0.9999	−0.6691
67	0.9205	0.3907	2.3559		1.4354		1.0000	−0.6947
68	0.9272	0.3746	2.4751		1.5479		1.0000	−0.7194
69	0.9336	0.3584	2.6051		1.6715		1.0001	−0.7432
70	0.9397	0.3420	2.7475		1.8078		1.0000	−0.7661
71	0.9455	0.3256	2.9042		1.9587		1.0000	−0.7880
72	0.9511	0.3090	3.0777		2.1266		1.0001	−0.8091
73	0.9563	0.2924	3.2709		2.3146		1.0000	−0.8290
74	0.9613	0.2756	3.4874		2.5261		1.0001	−0.8481
75	0.9659	0.2588	3.7321		2.7662		0.9999	−0.8660
76	0.9703	0.2419	4.0108		3.0405		1.0000	−0.8830
77	0.9744	0.2250	4.3315		3.3571		1.0001	−0.8988
78	0.9781	0.2079	4.7046		3.7265		0.9999	−0.9135
79	0.9816	0.1908	5.1446		4.1630		0.9999	−0.9271
80	0.9848	0.1736	5.6713		4.6865		1.0000	−0.9397
81	0.9877	0.1564	6.3138		5.3261		1.0000	−0.9511
82	0.9903	0.1392	7.1154		6.1251		1.0001	−0.9613
83	0.9925	0.1219	8.1443		7.1518		0.9999	−0.9702
84	0.9945	0.1045	9.5144		8.5199		1.0000	−0.9781
85	0.9962	0.0872	11.4301		10.4339		1.0000	−0.9848
86	0.9976	0.0698	14.3007		13.3031		1.0001	−0.9903
87	0.9986	0.0523	19.0811		18.0825		0.9999	−0.9945
88	0.9994	0.0349	28.6363		27.6369		1.0000	−0.9976
89	0.9998	0.0175	57.2900		56.2902		0.9999	−0.9993
90	1.0000	0.0000					1.0000	−1.0000