Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding : “Explaining with Letter Expressions” with Creativity as a Conceptual Lens

国際中等教育研究　第15号 p.109 ～ 129
東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

「概念的理解」を目指す数学授業のデザインと実践

―創造性を概念レンズに据えた「文字式による説明」の授業実践―

Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding:

"Explaining with Letter Expressions" with Creativity as a Conceptual Lens

数学科　小林　廉

１．はじめに

国際バカロレア（IB）の中等教育プログラム（MYP）は「概念的理解」を重視しており，その理論的基盤の一つに，「概念型カリキュラムと指導（CBCI）」（Erickson et al., 2017）がある。本数学科ではこれまであまり CBCI まで戻って授業をデザイン，実施することはしてこなかった。そこで本稿では，MYP の背景にある CBCI を理論的基盤とした授業をデザイン，実践し，そこから数学授業に対する示唆を得ることを目的とする。

そのための方法として，本稿では「授業研究」を用いる。藤井（2014）は「授業研究の構成要素と過程」を図 1 のように図式化している。本研究はこの過程に沿って実施する。具体的には，図 1 における「1.目標設定と実態把握及び計画立案」と「2.学習指導案の検討と作成」については本校数学科が毎月行っている研究会にて行い，「3.研究授業」と「4.研究協議会」は公開で実施する（実際には本校 2021 年度授業研究会にて公開した）。本稿の執筆が「5.振り返り」にあたる。すなわち本稿は，「4.研究協議会」までを通して得られた示唆と課題を記すものである。

一連の授業研究を実施する対象は 1 学年であり，数学の内容は小単元「文字式による説明」を据えている[1]。研究授業は複数台のビデオカメラを用いて撮影し，動画にまとめて公開する。生徒のワークシートはすべて回収する。研究協議会はオンライン会議ツールを用いて録画する。本稿で分析・考察対象とするのは，これら生徒の記述物と動画である。なお，本授業研究における研究授業は，2021 年度研究グループ①が実施する第 1 学年学際的単元「概念型カリキュラムによる学際的単元の実践－今、社会に求められているモノを創造する学びー」の一環として実施するものでもあるが，その観点からの記録は本冊子にある別稿に譲る。

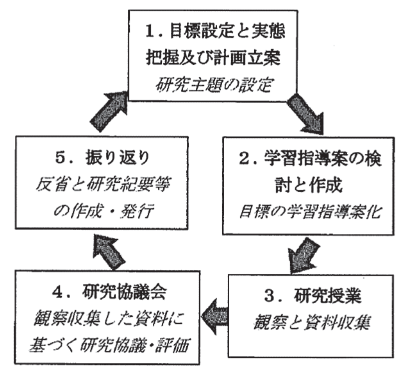

図１　授業研究の構成要素と過程
（藤井，2014）

２．目標設定と実態把握及び計画立案

（1）　研究主題の設定

先に研究主題（本授業研究の問い）について述べておくと以下のようになる。

本授業研究の問い 生徒が，本小単元だけではなく，今後も統合的・発展的に考えることを働かせていけるようになるには，どのような学習指導を行うとよいか。

1 本校は 6 年一貫教育を活かしたカリキュラム編成を行っている。詳しくは本校 Web ページ参照。

2017年告示中学校学習指導要領では,「見方・考え方」を働かせた学習活動を通して，目標に示す資質・能力の育成を目指すとされた（文部科学省，2017，p.7)。また数学的な見方・考え方は,「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること」とされ（同，p.7),特に「発展的に考える」とは「数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，新たな概念，原理・法則などを創造しようとすること」(同，p.21),「統合的に考える」とは「既習のものと新しく生み出したものとを包括的に扱えるように意味を規定したり，処理の仕方をまとめたりすること」(同，p.22）と示された。この「見方・考え方」と「資質・能力」の関係に基づくと，統合的・発展的に考察する力の育成は，統合的・発展的に考えることを働かせた学習活動を通して行われることになる。では，統合的・発展的に考えることを働かせた学習活動の実現をどう図っていくか。何より，生徒が本単元に限らず，今後も統合的・発展的に考えることを働かせていくにはどうすればよいか。

統合的・発展的に考えることについては，すでに昭和43年改訂学習指導要領の総括目標に登場しており，中島（1981）や片桐（1988）を発端とする先行研究が様々になされてきている。それらを踏まえつつ，本授業研究では，ここにCBCIの理論を用いる。すなわち,「文字式による説明」を通して統合的・発展的に考えるとはどういうことかを明確に対象化し，その「理解」を促して，今後も統合的・発展的に考えていけるようにすることをねらいとする。

(2) CBCIの理論

では，統合的・発展的に考えるとはどういうことかの「理解」をいかに促すか。本授業研究において単元・授業をデザインするにあたり，CBCIから特に示唆を得たのは次の3点である。

1)「一般化」[2] を明文化する

CBCIにおいて「一般化」とは，複数の概念の関係を明文化したもので，時，文化，状況を超えて転移するものある。より具体的には，概して普遍的に適用でき，時を超越し，程度は異なるが抽象的であり，様々な例で裏付けることができることができる（異なった状況に当てはまる)，という条件を満たすものとされている。そして,「一般化」の言い換えが「概念的理解」であり，他の文献では「本質的理解」「永続的理解」または「ビッグアイデア」としても知られているものであるという(p.42[3])。また,「一般化」は,「この学習によって何が理解できるか」「どのような学びが新しい状況に転移するのか」などといった学習の関連性についての問いに答えるものとなり（p.50),特定の事実内容やスキルと関連性のある，より深い転移可能な理解を反映したものである（p.155)。

「一般化」は知識とプロセスの両方において想定され，1つの単元につき5〜9の「一般化」を扱うとされている。例えば，Erickson et al.（2017）での事例「円の幾何学」では次のような「一般化」が挙げられている（pp.180-181，以下の2つは全部で11ある「一般化」のうちの2つである)。

（ア） 弧度法で表された角の値は，半径の弧の間の比例定数を表している。

（イ） 円の構成要素（例：接線，弦，弓形，扇形，弧，角）を正確に描く方法を知ることは，幾何学問題の解法のヒントになる。

また,「一般化」は，単元に設定する「概念レンズ」[4] に左右される。概念レンズとは，単元で，学習者自身に知力を働かせるよう促すマクロ概念のことで，学習に方向性をもたらし，脳内の低次と高次の処理センターの知的相乗作用を生み出し，深い理解と学習の転移を促すとされている(p.155)。単元設計では「一般化」を文にするより前に概念レンズの設定があり,「一般化」のうち1つないし

[2] この「一般化」がMYPでいう「探究テーマ」にあたる。

[3] 以下，CBCIに関する頁数は全てErickson et al.(2017)の翻訳版のものである。

[4] MYPでいうと「重要概念」に対応する。下に出てくる「創造性」は重要概念の一つである。

2つは概念レンズの主要な理解を表すとされている（p.68）。また概念は内容とスキルから引き出される（p.145）。本授業（および本校研究グループ①）では，この概念レンズに「創造性」を設定した。なぜなら，統合的・発展的に考えることは算数・数学にふさわしい創造的な活動をできることを目指した数学的な考え方に他ならない（中島，1981）からである。小単元「文字式による説明」を「創造性」という概念レンズでみると，新たな性質等の創造を重視することになるということである。

CBCI の「一般化」からは，授業に臨むにあたって「転移してほしい理解を明文化する」という示唆が得られる。これは案外，これまでの数学授業で行われてきていないのではないかと考える。というのも，目標の記述はたいてい「○○について理解する」のような形で書かれ，「○○について理解するとはどういうことか」が明示されないからである。そこを具体的に明示することを求めるのが CBCI の「一般化」である。また，転移してほしい理解の明文化を，プロセスにも想定していることが示唆的である。

2）「思考をうながす問い」をつくること

それでは，明文化した「一般化」の理解をどう促すか。CBCI では，そのために「思考をうながす問い」をつくることを求める。「思考をうながす問い」とは，生徒が「一般化」に向かって考えるプロセスを助けるもので，事実に関する問い，概念的な問い，議論を喚起する問いの 3 種類に分けられる[5]（p.68）。これを使用することの最大の目的は，資料や実験，論理に基づくエビデンスによって裏付けられた概念的理解を生徒から引き出すことである（p.69）。概念型教師は，3 種類の問いについて学び，生徒の思考が具体的なトピックや実例からより深い概念的理解に至るよう，指導を通してこれらの問いを柔軟に使う方法を身に付けるのだという（p.17）。1 つの一般化につき 3〜5 の事実に関する問いと概念的な問いが必要で，各単元の全体においては議論を喚起する問いを 1 つか 2 つ用意する。以下の表 1 は，Erickson et al.（2017）において，先の（ア）や（イ）を含む「一般化」に対する事実に関する問いと概念的な問いである（pp.180-181）。

表１　「思考をうながす問い」の例

（ア）を含む「一般化」に関して	
事実に関する問い	ラジアンの定義は何ですか。
概念的な問い	なぜラジアンは無次元量なのですか。 どのように弧度法は表されますか。 「比例定数」の概念は，角の弧度法にどのように関係しますか。
（イ）を含む「一般化」に関して	
事実に関する問い	縮尺図とは何ですか。
概念的な問い	問題を解決するために作図をどのように用いますか。 なぜ作図は問題解決のプロセスで役に立つのでしょうか。 どのような場面で，正確な円の部分的な図が問題解決に対して役に立ちますか。

なお，単元全体における「議論を喚起する問い」として，「角を測るには，弧度法と度数法のどちらを用いた方がよいか」が挙げられている。

「思考をうながす問い」をつくるというのは発問を練ることに該当すると考えられるが，CBCI で

[5] この 3 種類の問いは MYP の単元設計においてそのまま採用されている。

は 3 種類に分けてつくることが求められる点が示唆的である。授業者は，授業で扱う「事実」に関する問いなのか，それとも転移可能な理解を促したい「概念」に関する問いなのか，あるいは，ある立場で議論するために事実や概念の利用を可能にする「議論」をさせたい問いなのかを意識的に分けて発問を練ることができるようになる。

3）「帰納的指導」を実践する

Erickson et al.（2017）は，「生徒が探究に取り組む前に一般化を提示し，生徒はそこから一般化を裏付けるような事実やスキルを見つけていく」アプローチを演繹的指導，それとは逆に「まず概念もしくは一般化に関連する例や特質に触れ，これらの情報に基づいて概念的な考え（一般化）を導き出し，それを表現する」アプローチを帰納的指導と呼び，概念型の指導において用いられるのは後者であるとする（p.99)。後者のアプローチでは，生徒が理解をみずから構築できるように授業が設計されることになり，高次の思考とアイデアの統合が求められるため，結果として生徒の理解はよりパーソナルなものになり，記憶として定着しやすくなるとされている（p.100)。また，授業の最初に教師が「一般化」を提示し，そのあとに生徒がそれに関連する実例を見つけるという方法を用いた場合，生徒は自分自身で理解を構築し，それを表現する機会を奪われる，とも述べている[6]（p.101)。

そこで本授業においても「帰納的指導」の実践を試みる。すなわちまずは生徒がすでに持っている知識を引き出す学習経験を提供し，それを振り返りながら「一般化」を導き出していくことを意図する。これは，いわゆる問題解決型の授業と親和性があると考える。

3．学習指導案の作成

(1)「一般化」と「思考をうながす問い」

小単元「文字式を用いた説明」における「一般化」を次の 3 点に設定した。

表 2　本小単元における「一般化」

i.	具体と抽象を行き来することは事象の理解を深め，パターンの発見と一般化を促す。
ii.	一般化されたパターンが事実となるためには，妥当性についての説明が必要である。
iii.	妥当性についての説明の過程や結果を振り返り，新たな問いを見いだすことが，新たな知識の創造を促す。

このうち，特に本時に関係する「一般化」はⅲである。これは概念レンズ「創造性」を反映した「一般化」となっている。なお，生徒には，本小単元の最初から，ワークシートに「文字式を用いると一般的に説明でき，そこから新たな知識を創造できる」という文言を本小単元のテーマとして入れ込んでいる。これは，表 2 の「一般化」ⅱとⅲを端的にして生徒に伝わるように記しているものである。ただし本時の時点まではそのテーマについてはまだ一切言及していない。そして，ⅲの理解を目指すための「思考をうながす問い」を，これまでの「統合的・発展的に考える」ことに関する先行研究[7]を踏まえ，次のように設定した。

[6] 構成主義アプローチをとる MYP も，帰納的指導と明言はしないまでも同様のアプローチをとる。
[7] 紙幅の都合上，詳細は割愛する。例えば佐藤ほか(2017)では「統合的・発展的に考える」ことに関する先行研究が多く挙げられている。

表３　本授業研究で焦点をあてる「一般化」に関する事実に関する問いと概念的な問い

事実に関する問い	(a)　いま説明した問題の次に何を考えるか。 (b)　いま説明した結果の他にわかることはないか。 (c)　いまの問題の条件で○○が△△でなかったらどうなるか。 (d)　いまの問題から得られた結果を，すでに知っている性質と結び付けられないか。
概念的な問い	新たな性質を創造するためには，どのように考えるとよいだろうか。

事実に関する問いは，あくまで，取り組んでいる目の前の事象について説明する際の問いである。一方で，上記の概念的な問いを発するには，これまでにいくつかの実例で新たな性質を創造してきている必要がある（「帰納的指導」の実現）。そこで，いくつかの探究課題に対して事実に関する問い（a）から（d）を発してきたのち，最後の探究時に概念的な問いを発することとし，その授業を研究授業とする。事実に関する問いは本時までに発してきているから，本時に自力で転移させる生徒もいるかもしれない。しかし，一部生徒が問いを自ら発せてそのまま終わるのではなく，生徒全員が，本時で取り組む課題，およびこれまでに探究してきた課題の経験（これが「事実」に該当する）をもとに，上記の概念的な問いに答えることを意図する。ただし，以下の表４に示すように，（d）はこれまでにあまり問うてきていないため，本時では（d）は教員が明確に問うようにする。

（2）前時までに扱った教材

小単元「文字式による説明」において，本時までに扱う問題と，上記「一般化」のⅲに関わる事実に関する問いの発出状況は以下のとおりである。表３の（a）は，（b）から（d）と比べると広い問いであるため，（b）から（d）が発されるときには（a）が発されるようになっている。

表４　本時の前までに扱った教材と「一般化」ⅲに関わる事実に関する問い

No.	探究課題	一般化ⅲに関わる事実に関する問いの扱い
1	スタート地点を決めよう（陸上トラック）	なし（「説明」そのものに焦点をあてたため）
2	カレンダーに潜む規則性を見つけよう	(a)，(c)，(d)，教材５の後に（b）
3	偶数と奇数の和は奇数であることを説明しよう	なし（練習の位置づけとして扱ったため）
4	２桁の整数を入れ替えて足してみると？	(a)，教材５の後に（b)，(c)
5	17段目の不思議	(a)，(b)
6	３の倍数の判定法を説明しよう	なし（後述する評価課題に残しておくため）

本時の教材に特に関わるのは教材２である。ここでは，連続する３つの自然数を囲んだときの総和が中央の自然数の3倍になることの説明から始め，他の規則性についても自由に考えさせ（発展的に考える），そこでは自然数の個数を変えたり，囲み方を変えたりしている。また，横一列であれ，正方形であれ，奇数個囲んだときと，偶数個囲んだときの和を，「真ん中の数×個数」でまとめている（統合的に考える）。このとき偶数個のときの「真ん中の数」は，「真ん中２数の平均」とみている。また，結果的に，教材５において（b）の「他にわかることはないか」という問いを扱ったため，その問いをもって教材２や教材４を見直している。

（3）本時の教材

以上を踏まえ，本時で教材とするのは，Mason et al.（2010）にある「連続する自然数の和」の問題を参考にしたものである。この問題についてもいくつかの先行研究があるが（例えば杉野本ほか，

2011)，本時では，以下に挙げる創造を意図する。

まず，上記の教材 2 において[8]，次の性質が共有されている。

性質 1　連続する奇数個の整数の和は「真ん中の整数×個数」である。
性質 2　連続する偶数個の整数の和は「真ん中 2 整数の平均×個数」である。

なお，**性質 2** における「真ん中 2 整数の平均」を「真ん中」とみれば，どちらの和も「真ん中×個数」であるとして統合を図っている。本時で創造を意図するのは以下である。

性質 3　連続する偶数個の整数の和は，奇数を約数にもつ。
性質 4　連続する偶数個の整数の和は，連続する奇数個の整数の和として表せる。
性質 5　連続する整数の和は，奇数を約数にもつ。

これらの性質の創造については，次のような過程を期待する。まず，連続する 4 整数の和から始める。これは教材 2 でも扱っているので，いくつかの予想が考えられうる（すでに教材 2 で内側 2 つの和と外側 2 つの和は等しいといった予想がされている)。最初の整数をnとして

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=2(2n+3)$$

という結果からは，2の倍数というだけでなく，$2n+3$が2個，2が$2n+3$個という解釈ができる。

$2n+3$が2個という解釈は，内側 2 つの和と外側 2 つの和が等しいことの説明になる。また，左右に連続するように整数をつけくわえていくと，外側 2 つの和は，その 1 つ内側どうしの和より定数部分が常に$+1-1$となって打ち消しあうから，またも$2n+3$となる。こう考えると，連続する偶数個の整数の和は必ず$2n+3$を約数にもつことがわかる（**性質 3**)。

一方で，2が$2n+3$個という解釈からは，**性質 1** を根拠とすると，2を「真ん中の整数」とする$2n+3$個の連続する奇数個の整数に表せることがわかる。例えば

$$\begin{aligned}2+3+4+5=14=2\times7&=2+2+2+2+2+2+2\\&=-1+0+1+2+3+4+5\end{aligned}$$

である。ここで，そのように表せるしくみとして，0と絶対値が等しい整数どうしを加えている（除く場合もある）ことがわかれば，4 個に限らず，連続する偶数個の整数の和は，連続する奇数個の整数の和に表しなおせることがわかる。このようにして**性質 4** が創造される。そして，**性質 4** が成り立つことから，**性質 3** が成り立つことがわかる。

以上の**性質 3** または**性質 4** と，**性質 1** を合わせると，**性質 5** が創造される。本授業では，この**性質 5** を統合によって創造された性質とみる。すなわち，はじめは異なって捉えていた「連続する奇数個の整数の和」と「連続する偶数個の整数の和」を，共通する**性質 5**「奇数を約数に持つ」を有する「連続する整数の和」として統合できたと考える。これは中島（1981）でいう「集合による統合」にあたると考えられる。ただし，本来的には，連続する奇数個の場合と偶数個の場合で，「真ん中」と「個数」の決まり方が異なる点に注意が必要である（結局はどちらも「公差1の等差数列の和」として統合するとこの点が明らかになる)。

（4） 本時案

以上を踏まえ，本時案を本稿末尾の資料に示す。ただし，指導案は 1 時間で作成したが，次章を見ればわかるように，結果的には約 3 時間にわたって行うこととなった。

[8] 教材 2 は教育実習生が授業を行っている。

4．研究授業の実際

研究授業は実際には約 3 時間にわたって実施することとなった。以下では各時間の概要を，授業終了時の板書（一部消しているのは生徒の氏名である）とともに記していく。

（1）第 1 時の概要

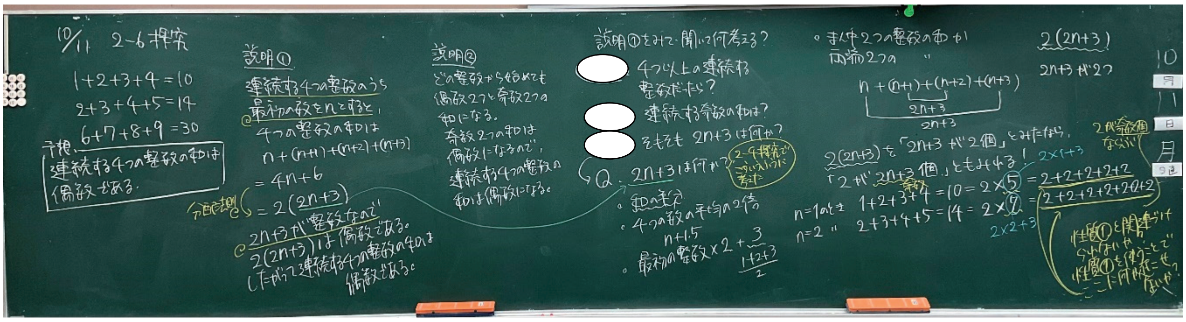

図 2　第 1 時終了後の板書

第 1 時は，教材 2 を振り返りながら，「連続する 4 個の整数の和について成り立つ性質（連続する偶数個の整数の和は「真ん中 2 整数の平均×個数」である，性質 2 のこと）以外の性質を見いだし，その性質が確かに成り立つことを説明しよう」という問題提示を行った。具体的な場合からすぐに「連続する 4 つの整数の和は偶数である」という予想がなされたため，それの説明を求めると，図 2 のように説明が 2 通り出てきた。ここで「説明①（左側の説明）を聞いて次に何を考えるか？」という事実に関する問い（a）を発問した。すると，いくつか出てきた中で，生徒 AS が「そもそも$2n+3$は何を表すのか」と発言したため，これをとりあげて全体にそのまま発問した。これは，教員が事実に関する問い（b）を発したことに相当する。生徒 AS は，以前の授業で，今回で言うと$2(2n+3)$をただの偶数で終わらせずに$2n+3$にも着目した経験から上記の問いを発したと発言した。

するといくつか出る中で，$2n+3$を「真ん中 2 つの和か，両端 2 つの和」とみる発言がなされたため，$2(2n+3)$を「$2n+3$が2個」と解釈し，「そうみたなら$2(2n+3)$を他にどうみられるか」と問うと，「2が$2n+3$個」という発言がなされた。そこから$n=1$と$n=2$の場合で具体的に表し，2が奇数個の和であると解釈してから（ここでは「代入するとめっちゃわかりやすい」という発言が自然になされた），「奇数個に関わる性質で我々がすでに知っているものは何か」と問うと「連続する奇数個の整数の和は“真ん中の整数×個数”である」という性質（性質 1）が発言されたため，ここでその性質と関連付けられないか（事実に関する問い（d）），その性質を使って2が奇数個の和に何か起こせないか，と発問した。この時点で残り 5 分もなかったため，残り時間は自力解決の時間とした。この時点で，生徒 AS と生徒 IK がそれぞれ次のように記述していた。

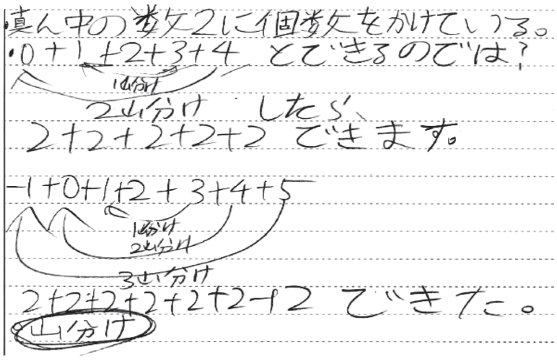

図 3　生徒 AS の自力解決

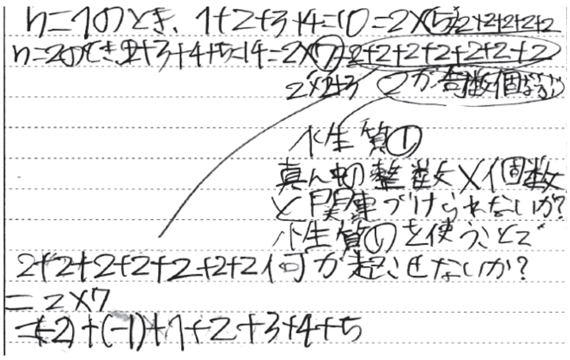

図 4　生徒 IK の自力解決

(2) 第 2 時の概要

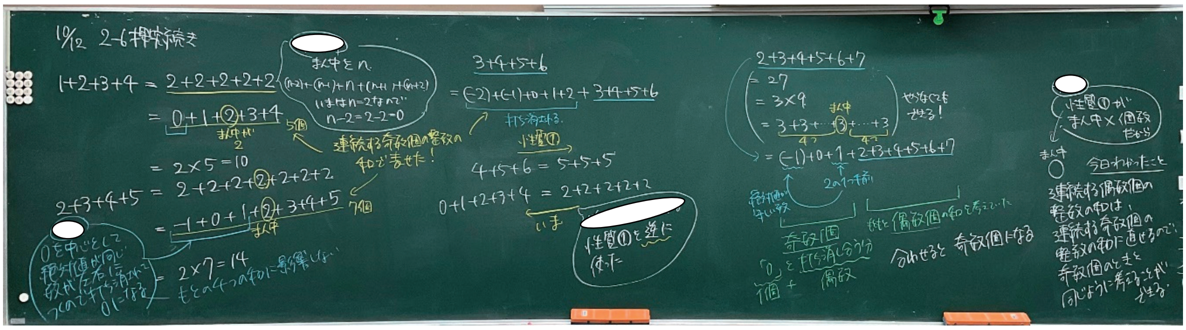

図５　第２時の概要

最初は前時の自力解決の続きの時間をとった。生徒たちは苦戦しながらも真剣に考えている様子であった(実際, アイデアの共有を図ろうとしたらもう少し粘らせてほしいという反応を示された)。7 分ぐらいたって，2が5つ並んだ和の真ん中の2に〇をつけている生徒をとりあげる（図 5 右上）なかで，生徒 HA が「わかった，性質 1 とぐるぐるさせるんでしょ」と発言し，それに触発されたと考えられる生徒 IK が,「この式（性質 1 のこと）がこっち（左から右へのジェスチャー）だとすると，性質 1 を使うとこっち（右から左へのジェスチャー）になる」と発言した（これは後ほど図 5 の真ん中あたりに板書される）と発言した。周りからは「は？」「どゆこと？」といった発言がなされ，このタイミングで自由に話し合う時間をとった。話し合いは活発になされ，例えば生徒 AS（図 3）のアイデアを聞いた数名の生徒たちは「なるほどー！すごい！おもしろい！」といった反応を示していた。

その後教室全体で共有を図り，まずは生徒 IK に，$1+2+3+4=2+2+2+2+2$が，$0+1+2+3+4$になることを説明してもらった。他の生徒からは,「天才じゃん！」みたいな声もあれば,「0はどこから？」「他の数では？」といった発言が矢継ぎ早になされた。生徒 IK は,「前やった，nを真ん中において,（右に）$n+1$,（左に）$n-1$，$n+2$，$n-2$としていく，この場合nは2だから2下げると0になる」と説明した。すると「先生，$2+3+4+5$だとどうなるの？」という発言が他の生徒からなされ，他の生徒からも「思った，今は$n=2$だったから（0になった)」と同調するような発言がなされたため，生徒 AS を指名して$2+3+4+5$の場合について説明してもらった。すると,「そういうことか！」といった声が複数出るとともに，生徒 HA が「そっか，余計な部分が結局0になるんだ」と発言したためそこの説明をさらに求めると,「(この場合でいうと$-1+0+1$の部分が）奇数だから，絶対に0を中心として右と左側に同じ数ずつつくから，0になって,（もともとの）計算に影響しない」と説明した（図 5 左下)。そうすると「あー！」「言われてみれば確かにそうだ」という感想が複数もれていた。これを$3+4+5+6$の場合で確かめ（図 5 真ん中上)，結局何ができたかと問うと，いくつかの発言の後,「連続する奇数個の和で表すことができた」とまとめられた。また,「こんなこと思いつけないよ」という声もあったため，そのアイデアについて問うと，別の生徒から，改めて生徒 IK の“性質 1 を逆に使う”というアイデアが具体的な例で発言された（図 5 真ん中)。「思いつけない」と言っていた生徒も「なるほど」と発言していた。

さらに，$2+3+4+5+6+7$の場合について問い，HA のアイデアをもとに「最初の整数（ここでは2）の一つ手前の整数（ここでは1）と絶対値が等しい整数までの和をつけ加えればよい」というアイデアを共有した。そのうえで，いま取り組んだ問題はあくまで連続する「4 個」と「6 個」の場合であるが，連続する「偶数個」の整数の和を連続する奇数個の整数に直せると言い切ってよいかを問うた。すると，もともとは偶数個であり，そこに「0」と「打ち消し合う整数のペア」を合わ

せた奇数個を付け加えるのだから全体では奇数個になる，という説明が口々に発せられた。最後に，今日は何がわかったのかを問い，それに対して発せられた生徒の発言をまとめた（図５右下）。

（3）第３時の概要

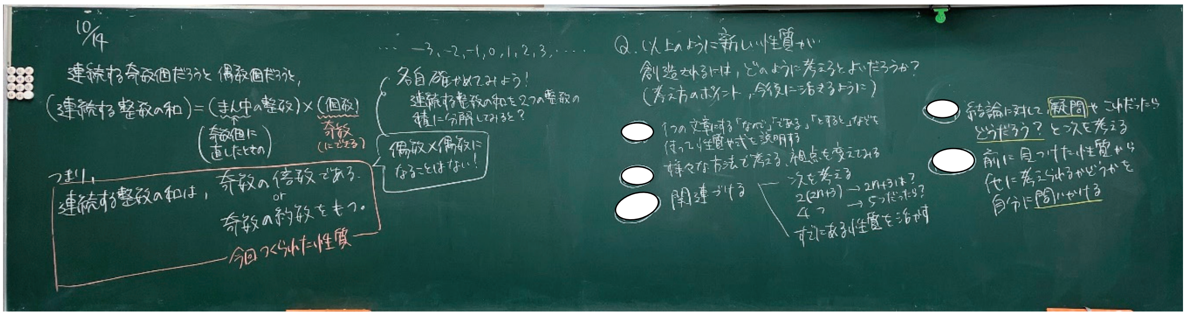

図６　第３時の概要

第３時は，まず，第２時までを振り返り，今回新たに“創造”された性質を表現していった（図６左)。「約数」という表現は自発的には出されなかったが，「倍数」という表現は出されたため，「倍数といえば」と問うことで生徒から出された（なお，「偶数×偶数になることはない」は不正確であることが協議会で指摘された)。

次に，ここでいよいよ，「新しい性質が創造されるには，どのように考えるとよいだろうか」という概念的な問いを発した。まずはそれぞれが自分で書き，そのうえで共有を図った。生徒たちが発言した内容が図６右下である。ここでは，結論を踏まえて次を考えること，新たな疑問を持つこと，他に考えられるかを自分に問いかけることといったことが発言された。また，次のように図で記している生徒も見られ，これも全体で共有した。他にも「創造された性質を使って，活かして，もう一度新しい性質を考える，関連付ける，繰り返す」と記す生徒がいるなど，「妥当性についての説明の過程や結果を振り返り，新たな問いを見いだすことが，新たな知識の創造を促す」という一般化ⅲを多くの生徒が自分の言葉で示していた。

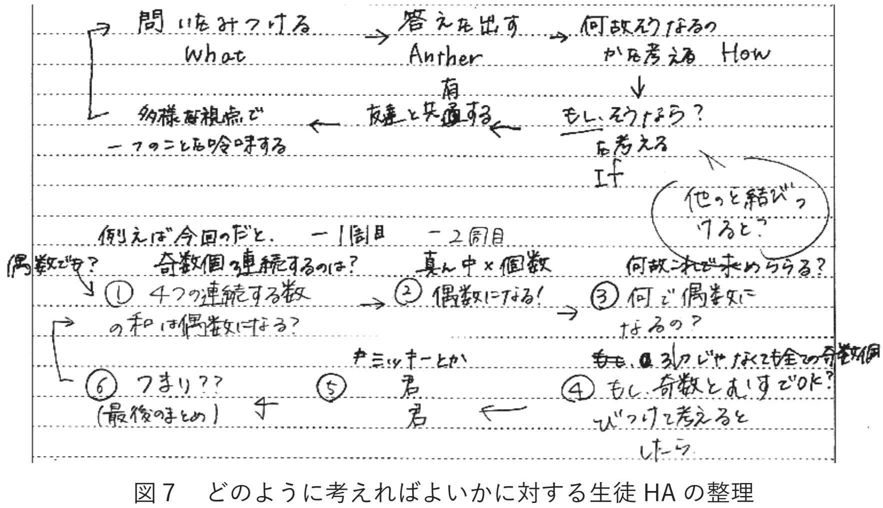

図７　どのように考えればよいかに対する生徒 HA の整理

５．研究協議会の実際

今回の授業研究では，2020 年度に引き続き COVID-19 の影響を受け，４で記した３時間分の授業を１つの動画にして事前に公開し，それを踏まえてオンライン会議ツールを用いて協議会を行うというスタイルをとった。以下，質疑応答と指導助言の２つに分け，その実際を記す。

（1）質疑応答の実際

以下に質疑応答の実際を挙げる。

表 5　協議会における質疑応答一覧

質問 1．第 1 時終わりの生徒 AS の考え（図 3）は独自に考えられたものか。またそこでの「山分け」とは本人はどういう意味で使っていたのか。AS が独自に整数まで拡げたのなら本当にすごいと思う。その場での発見に他ならないと思う。
回答 1．第 1 時では整数まで拡げるアイデアは全く出されていなかったため，図 3 は生徒 AS が自力で考えたもの。「山分け」のアイデアは本人に聞いてみたかったが，第 2 時で「$2+3+4+5$」の場合について本人に説明するよう問うと，本人は生徒 IK の「性質 1 を逆に使う」というアイデアで説明した。そのため「山分け」の説明はなされていない。
質問 2．自評で$2n+3$の意味を解釈するところ（第 1 時）が強引だったかもしれないとあったが，今振り返るとこういう展開にすればよかったというものがあるか。$2n+3$とは何かという問いをもっとよくできないかと考えたときに，すでに$2n+3$に外在的な意味があってそれを見つけるというより「$2n+3$にどんな意味をつけられるか」という方向も考えられたのではないか。
回答 2．$2(2n+3)$を解釈するにあたり，$2n+3$は何なのかという問いは生徒から出たので，これより前の文字式による説明の授業で「他にわかることはないか」という問いを扱っておけば生徒から出うることがわかった。一方で，$2n+3$が2個という見方は生徒がしていたが，これを「2が$2(n+3)$個」とみるところは教員が問わなければ出てこなかったと考えられ，いまも教員が問う展開を想定しているが，ここに，本教材を Mason et al.（2010）とは変えて本授業のように入っていったところから生じる不自然さかもしれないと考えている。
質問 3．「連続する整数の和は奇数の倍数である（奇数を約数にもつ）」に関して，「すなわち『偶数×偶数』にならない」とあったが，例えば 7+8+9 の場合，4×6 とも表せるため，「偶数×偶数」でもある。ここはもう少し慎重に考えた方がよかったように思ったが，意図的に深入りしなかったのか。また，「奇数の倍数」という表現を考えてみると，任意の整数は 1 の倍数であり，1 は奇数であるため「全ての整数は奇数の倍数である」という元も子もない話になってしまうが，連続する整数の和だからこその特徴的な性質の方がよかったのではないか。
回答 3．前者に関しては雑な扱いになってしまっていた。正確には「偶数×偶数」にならないように積に分解できる，である。意図的に深入りしなかったわけではないが結果的にそうなっている。後者に関しては，つくったからには面白いものになってほしいという思いがあり，1の倍数（あるいは1を約数にもつ）を出して当たり前で終わらわせてしまうとつくった性質が面白くないものになってしまう可能性があると考えた。ここももっと正確に「1以外に奇数の約数をもつ」とすべきだったと考える。
質問 4．「2が$2n+3$個ある」には飛躍があるのではないか。連続する 6 個の整数の和なら「真ん中」は3になるになるが，「真ん中」が2に引っ張られている生徒もいた。ここでかえって混乱を招いているのではないか。生徒に本来どういう問いを発するべきだったか。連続する奇数個の場合と偶数個の場合をそれぞれ文字式で表して共通点を探るという手も考えられる。今回の授業では数列自体を 1 つの対象として扱う必要があり，奇数個の場合と偶数個の場合が一般化・統合されることでその違いが解消される。それは数学では大事なアイデアだが，とても難しい。今回 AS などが自力で思いついていなかったら教員が引っ張る授業になってしまっていたのではないか。ま

た，第 1 時の説明②から行きつきたい性質を説明する手もあったのではないか（連続する偶数個を「真ん中」で 2 つに分けるとそのすぐ両側の 2 整数は必ず偶数と奇数になるから和が奇数)。そういうことも扱いながら奇数個と偶数個の場合を統合するというアイデアを扱えると面白いとなったのではないか。
回答 4．例えばmとnの 2 文字を用いて等差数列の和を文字式に表して考察する手もあったが，2 文字を用いて文字式に表すのは難しいと判断した（等差数列の和として統合することについては本稿 3（3))。ただ，授業やってみて，今回の流れで強引だった（教員が引っ張った）ところがあったのは間違いないので，教材研究の時点で，等差数列の和として統合を図る方ももっと検討しておけばよかったかもしれない。
質問 5．「2が$2n+3$個」から$2n+3$を奇数とし，「性質 1 と関連付けられないか」と進んだが，そこは無茶だったのではないか。「2が奇数個」という対象に連続する奇数個の和の性質を使おうとしたわけだが，「2が奇数個」はもちろん連続する整数ではない。しかし結果的には統合できていたように考えられたが，その要因は何か。性質 1（連続する奇数個の整数の和は「真ん中の整数×個数」である）と，「同じ整数の和は連続する奇数個の和にできる」という性質をここでいったん統合的にみているのではないか。そうみたいから，自然数の和ではなく負の整数まで拡げたのではないか。
回答 5．そこは皆さんが無茶だと思ったところではないかと思う。そこの問いは悩んだので，ということは不自然だったと考えられる。性質 1（連続する奇数個の整数の和は「真ん中の整数×個数」である）の授業では，例えば$3+4+5=4+4+4$のように書いてはいて，4が3つの和ということは扱っている。なので2が奇数個並んだ時に性質 1 を（生徒は逆に使うと言っていたが）そこを直接的に伝えるわけにはいかなかったので，「性質 1 と関連付けられないか」「性質 1 を使って何か起こせないか」という問いになった。連続する 5 個の整数の和も具体的には書いていたので，そこに「性質 1 を逆に使う」という着想を得たのではないかと思っている。

なお，動画を見ての事前質問において，上記の質問 5 に関連して「統合」に関する重要な指摘があったので，以下にとりあげておきたい。

・・・今回の主張のメインとされている$2(2n+3)$の解釈から性質 1 にもっていく場面は，生徒にとっての問いが生起されておらず，教師主導の展開になってしまっていたように思います。2×5，2×7の「5」「7」や$2n+3$が奇数であることは，生徒の気づきというよりも先生が誘導していたように見えました。「性質 1 と関連づけられないか」というところも，「今後も統合的・発展的に考察していけるように」という観点から考えれば，本当は生徒に気付かせたいところだと思います。なぜ性質 1 と関連付けようと思うのか，というところが，今後も統合という目で考察できるか，というところに関わってくるはずだからです。逆に，教師が出ないとどうにもならないのであれば，思考のプロセスが自然ではないということになるのだと思います（今回は，そうだったのではないかと思います。20 分くらいから，生徒はどこに向かっているのかわからない状態になってしまっていたのではないかと思いました)。

この要因は，上の教材について指摘した通り，偶数個と奇数個での違いがはっきりしていなかった点にあるように思います。今回の授業のご提案を改めて統合という観点から考えると，「A と B は違って見えるけど，ある観点からみたら同じに見えそうな気がするな，どうみたら同じに見

えるかな？」という問いが，生徒から生起されて欲しいのだと思います（性質 1 と 2 の統合で経験済みですし）。この A と B の違いがはっきりしていなかったのではないかということです。

(2) 指導助言

指導助言者からは，「『学びの転移』を視点とする授業デザインと学習指導」と題する指導助言があった。ここには大変重要な指摘が含まれていると考えられるため，以下に 3 点に分けて，なるべく指導助言の語り口そのままに記す。

① 概念的理解をめざす単元・授業デザインについて

まず，CBCI の「概念的理解」は数学教育研究でいう理解の研究とは別であることを踏まえる必要がある。CBCI は概念的理解をつくっていくにあたって教科固有性を重視している。それを学際的視点から扱うこともあるが，数学科としてどのように概念的理解をつくっていくか。今日の提案は，概念的理解をめざす単元・授業デザイン，学習指導の提案とみられる。中 1 だからこそ，時，時空を超えて根付いていく理解をつくっていこうとする提案だと受け止めた。

本単元において「新たな性質を創造するためには，どのように考えるとよいのだろうか」という問いに対峙した生徒に残したいことは何だったのか。それがまず，性質 5（連続する整数の和は，奇数を約数にもつ）ではなかったということを整理しておきたい。やりかったことが表れていたのは，第 3 時の最後や，紹介されていたワークシート（図 7）で，統合的・発展的に考えることが目標になっていた。だが，この転移可能性はどの程度あるのだろうか。特に中 1 段階でこれを書かせるということにどの程度の転移可能性があるのか。これは昔流行ったストラテジーに関する研究と同じになり，それだけ覚えていてもうまく解けるようにはならないという事態を招かないか。「次の問いを考える」，「条件を変える」，とだけ覚えていても我々が期待するような統合・発展はできない。できた生徒が振り返って書くことには意味があるかもしれないが，これを書くことが目標になってしまうとストラテジー研究と同じになってしまう。

だとすると，この事例から何を残すべきだったのか。新しい性質を創造する際に転移可能性が高い，鍵となる「式の見方」があったのではないか。先ほど議論になっていた$2(2n+3)$は，出てくる出てこないの議論はあるが，ここには「積を和とみる」という見方がある（例えば$2\times5=2+2+2+2+2$）。あるいは第 1 時で式の見方に焦点をあてて授業をつくっていたら，「$2n+3$は何か」ではなく「$2(2n+3)$からどんなことがわかるか」だったのではないか。「積を和とみる」という見方を意識していたらそういう問いになっていたのではないか。そこで2が奇数個の和が生徒から出てくるかということだが，本授業の前に「具体と抽象を行き来することは事象の理解を深め，パターンの発見と一般化を促す」ことが重要視されている（表 2）。具体を扱えば気がつけたのではないか。

さらに「$2(2n+3)$からどんなことがわかるか」と問うと，例えば「$2(2n+3)=(n-1)+n+(n+3)+(n+4)$」のように，「ないものをつくる」という転移可能な見方，式のつくり方をできたのではないか。ここで$n-1$と$n+4$など生徒からは出てこない，出てきてもその価値が生徒たちはわからないと思われるかもしれないが，性質 1（連続する奇数個の整数の和は「真ん中の整数×個数」である）と性質 2（連続する偶数個の整数の和は「真ん中 2 整数の平均×個数」である）の授業をしたときに，$6+7+8+9=15\times2=\frac{15}{2}\times4$を「ないものをつくる」と扱っておけば，今回の授業で「ないものをつくっていいんだからいくらでもできちゃう」という意見が出て，「ないものをつくる」ことの大事さがわかってきたかもしれない。そのうえで，性質 2 を扱っていたときに，$6+7+8+9=15\times2=2\times15$とみていれば，

$$6+7+8+9=15\times2=2\times15=(-5)+(-4)+\cdots+2+\cdots+6+7+8+9$$

と，当時生徒から出てきたかはわからないが，2を「真ん中」とする連続する 15 個の整数の和とみれたかもしれない。つまり性質 1 と性質 2 の授業のときに式の見方に焦点をあてた授業をしていれば，違う統合の道筋もあり得たかもしれない。具体的には，

$$6+7+8=7\times 3=3\times 7=0+1+2+3+4+5+6$$

とみると，上では「$6+7+8+9$」が残っているがここでは「$6+7+8$」が残っていないので，ここで「同じようにみれないかな」と問えたかもしれない。すると「ないものをつくる」という見方が身に付いているので，「$6+7+8$」を残すなら

$$6+7+8=(-5)+(-4)+\cdots+0+\cdots+5+6+7+8$$

と，偶数個である 14 個の和にできたかもしれない。すると今度は「14 個」はどこからきたかが（また上記の結果は1.5×14になるので1.5はどこからきたかも）問いとなる。このように問いが連続する授業デザインが，式に対する見方・考え方が根付いたうえでなされるとよいのではないか。

「積を和にする」「ないものをつくる」という見方・考え方をこのように扱ったうえで今回の「$2+3+4+5$」などに臨んでいたらどうなったか。授業での「こんなの思いつかないよ」という発言は我々の印象に強く残っていると思う。でも上記の見方・考え方を扱っておけば思いつきうるし，少なくとも「あ，ないものをつくったんだね」という反応になったのではないか。ここで，CBCI のいう意味での「一般化」が生徒たちに腹落ちするのではないか。最近，統合的・発展的に考えることを目標に据えた研究授業をみると，さきほどの図 7 のようなものが先行していて，授業で扱った見方・考え方を使って振り返っていないので，深まらないということがよくある。今回は，式の見方・考え方として何を残すかを考えてデザインするということがヒントになるのではないか。第 2 時では$3+4+5+6$がすっと扱われていていたが，そこでは「真ん中」の2がもとの式にはなく，それも生徒たちの次の問いが生まれていく契機となったはずだ。そうした問いを解決していくと，生徒たちなりの問いをたどりながら統合までの道筋ができていくのではないか。

以上を概念的理解として言葉にすると「積を和と見たり，ないものを補ったりして式を見ると，新たな性質がわかることがある」「数に関する性質を統合できないか考えるときは，積を和とみたり，ないものを補ったりして式を見る」のようになる。これは，コンピュータはなかなかやってくれず，人間だからこそできることだ。さらにそういう眼でみると，中 3 で学習する展開と因数分解に対する（我々の）見方も変わってくる。今度は数学的内容のレベルがあがって，この概念的理解を式のみで扱うことになる，とみることができる。

②概念的理解をめざす学習指導について

本稿 **3（1）**の表 4 にあるような問いは，今回転移が難しかったかもしれないと述べたが，だからといってやらなくてよいというわけではない。ここで，「態度化」（〜しようと思い，かつ，それができる）をどう図るまで視野にいれたとき，表 4 にあるような問いのままでよいかどうか。表 4 ではすでに問われてしまっているが，自分で問えるようにしていきたい。それにはどうしたらよいか。

そのためには見取って価値づける（評価）が必要ではないか。第 1 時で，「代入するとわかりやすいじゃん！」という発言があった。具体と抽象を行き来するということをわかっている生徒もいて，第 1 時の活動をみるとそうしている生徒も多くいた。だがこの発言をした生徒はそれがわかっていなかったのだろう。だからこの発言が出た。そういう状況があるならば，具体的な数で試してみている生徒をとりあげ，「どうしてそうしたのか」を問い，「いきなり文字だとよくわからないのでまずは具体的にやってみた」といった発言を引き出し，それを評価して価値づけ，どう取り組んでよいかわからなかった生徒にもその態度を促す必要がある。統合・発展は高次であるだけに，生徒の期待する活動の芽が少しでもあれば取り上げて「どうしてそうしたの」を問い，「みんなは凄いと思

わないかもしれないけど私（教員）は凄いと思う，何で凄いと思ったと思う？」「何でこんなことしたかみんなも考えてみよう」といった評価をしながらみんなを育てていくことが大切。よく附属だからできるという声もきくが，実は普段からそういう評価して価値づけることをやっているかどうかが大きくて，そういう教室文化がつくられているかどうか。統合したいという思い，すなわち統合的にみることの価値の認識があればこそ，これは見取って価値づけていかないと育まれない。こういうことが主体的に学習に取り組む態度の評価の本来の姿である。評価は生徒を育てるために行うものだ。生徒の期待する姿があればそれをみんなと共有してみんなを育てていく。そういうことを「評価」ととらえて積極的に行っていくことができるとよいのではないかと思う。

③「概念的理解」実装化の道筋における国立大学附属学校の使命について

OECD が，カリキュラム・オーバーロードという問題を提起している。生徒にとっては，内容の多さのわりに残るものが少ない。教員にとっては，内容の多さのために深める時間がない。税金でまなかっている学校教育において，受益者たる生徒の不利益が生じていていいのか。活き活きとした学びがなされてこそ，学校の存在価値がある。今回，生徒は自由に動き，黒板を使い，話し合い，先生が「一度止めて」みたいにいうと「もっと話し合っていたいのに」と腹立たしく見えるぐらいだった。生徒が指名される前にいろいろと言ってくる授業は実はなかなか見れない。こういう授業をつくれるとよいと思う。

今回の内容は，（平成 21 年告示学習指導要領の）数学 A「整数の性質」で扱ったら大きな学びになる。本時はその証左だった。もともと現行の学習指導要領で数学 A に課題学習つきで「整数の性質」や「図形の性質」が入ったときは，今回のような授業をしてほしいという思いがあった。高校生の中には中学校の時点で数学が苦手だった生徒も多くいる。そういう生徒は数学 I の内容ではなかなか探究的なこともできないかもしれない。だからこそ小学校からなじんでいる整数の性質で，あるいは作図などしながら，証明はできないかもしれないけど新たな発見はできて，これはなぜ成り立つんだろうと思ってくれるかもしれない。そうした学びがないと覚えるだけの数学になってしまう。しかし学習指導要領にそのような思いがあったとしても，実装化の道筋がないと，現状のようになってしまう。「実装化の道筋なき政策は夢物語にすぎない」。作図はほとんど扱われないし，整数の性質では合同式が教えられ，なぜ合同式を教えるのかというと入試で役立つからとなってしまう。2022 年度から始まる新しい学習指導要領ではどうなるだろうか。

Erickson et al.（2017）が，「教師は，提示された目標を生徒ができるだけ早く達成することをめざす指導を行うよう教え込まれている」「教師は自分が生徒に代わって思考するということに慣れてしまっているがために，生徒が自分たちの力で概念的理解にたどり着けるかどうか確信がない」（だから教えてしまう）と記している（p.100）。演繹的アプローチと帰納的アプローチでいうと演繹的アプローチをとってしまう。高校になるとなかなか生徒が導けないから教師が教えて，一応証明も教えて，さぁ問題解こうとなってしまう。そうではなくて後々残るための概念的理解を大事にしよう，というのが CBCI の趣旨。その意味で今回，TGUISS 数学科が CBCI に着目したのは大事な提起だったと思う。ぜひこれをもっと広めていきたい，実装化していきたい。

それを，TGUISS 数学科はどのように行っていくか。教師の「転移可能な概念的理解」の形成にどう関わるのか。その場だけでなく 3 年間あるいは 6 年間を見据えて授業づくりをしていくための教師の学び，成長を作る必要がある。今回のような授業がこの学校に閉じてしまう限りは，格差の助長につながりかねない。国立大学附属学校として，この学校の生徒は深い学びができるが他の学校ではそうではないという事態を招いてはいけない。実装化に向けて，数学科としてもっと CBCI について学び，単元の実践例をつくるなどして，一層影響力のある取り組みや発信をしていかねば

ならない。数学的リテラシーについては，TGUISS 数学科には『TGUISS 数学』という宝物のようなテキストができたが，その試みももう 10 年以上前から続くものである。ここで新たな一歩を踏み出す必要があるのではないか。

勿論こうした実装化は教師だけでできることではない。社会全体で変えていくなかで，TGUISS 数学科が関わる芽を持ってほしいという指摘である。つまり，エコシステム全体の変化の道筋をつくることが不可欠で，そこにどう関わるかの視点をもって，これから取り組んでいってほしい。もっといえば，社会変革に向けて，この学校だけではなく，今日集まっていただいたみなさんがともに関わっていけるようになるとよいと思う。そのための取組を，附属もやるし，大学もやる[9]。それをここに約束して今日の指導助言としたい。

6．振り返り（考察）

ここでは，**5** までの一連の授業研究を踏まえて，CBCI を理論的基盤とした授業のデザインおよび実践から得られる示唆について考察する。また，研究方法として用いた「授業研究」についても一言加えておきたい。

(1)「一般化」（概念的理解）を設定することの価値

まず,「一般化」(概念的理解) を設定することについては価値があることが確認された。「一般化」を検討することは，とりもなおさず,「要は生徒の中に後々まで残ってほしい理解とは何なのか」を検討することに他ならない。今回実践してわかったことは，それをこれまで行ってきているようで実はできていなかったということだ[10]。また，本稿 **2 (1)** でも述べたように，多くの数学授業では，「○○について理解している」で目標の記述を止めてしまい,「○○について理解しているとはどういうことなのか」まで踏み込んで記述されない。そのことが,「要は生徒の中に後々まで残ってほしい理解とは何なのか」をあやふやにしてしまい，単元を通して一貫性のない授業を引き起こしてしまっていないか。「一般化」の設定はそれを防ぎ，一連の授業の焦点をより明確にしうる。

さらに，指導助言者からは，カリキュラム・オーバーロード（カリキュラムを実施する際の過剰負担・負荷）の観点から「一般化」(概念的理解) の価値が示された。本来,「一般化」が妥当なもので明確になっていれば，それを達成する教材群が焦点化されてくるはずである。ところが，例えば高等学校では，生徒の理解の状態よりも，教科書にあるすべての問題に取り組むことを優先するケースが少なからず存在している。そこで取り組んでいる問題は,「要は生徒の中に後々まで残ってほしい理解とは何なのか」を検討したときに，本当に必要な問題なのであろうか。OECD (2020) は,「持続可能なカリキュラムのデザイン原則」における教科内の原則の 1 つに「焦点化」を挙げ，カリキュラム・オーバーロードに対して有効であると述べている (p.28)。また，教科横断のデザイン原則の 1 つに「転移可能性」(子どもたちが特定の教科における基盤となる概念やビッグアイデアを理解し，それがどのように他の教科に適用できるかを分かるようにカリキュラムを構造化すること) を挙げ，それがカリキュラム・オーバーロードの低減につながることを述べている (p.29)。なにをもって「焦点化」を図るにあたっては「一般化」(概念的理解) が鍵になると考えられるし,「転移可能性」においては「一般化」と同義語である「ビッグアイデア」を理解することの必要性が明示されている。「一般化」を検討することには，その単元における焦点化を促し（ぶれないようにし），教科横断的な取り組みを確かなものにするという価値がある。

---

[9] 詳しくは「高校探究プロジェクト」（https://g-tanq.jp/）を参照。

[10] MYP の単元設計では「一般化」に当たる「探究テーマ」の記述が求められるが，我々の「単元」の捉えが広すぎて,「探究テーマ」の焦点がぼけていた可能性がある。

(2)「一般化」(概念的理解) 設定上の困難性に対する示唆

一方で，今回の実践で明らかになったのは，「一般化」を設定することの難しさである。指導助言からわかるように，今回もともと設定していた「一般化」のⅲは，転移可能性の側面からみて“上滑り”になってしまっていた。こう表現するのは，今回の数学の内容と切り離された形の「一般化」になってしまっていたと考えられるからである。指導助言で提案されたのは，「式の見方・考え方として何を残すかを考えてデザインする」ということであった。「積を和と見たり，ないものを補ったりして式を見ると，新たな性質がわかることがある」のような，式という数学の内容を伴った実体的な理解は，(今回の対象生徒が中 1 だったからこそ余計に) 今後また式を用いて統合的・発展的に考えていくにあたって，残す価値がある。そもそも「見方・考え方」と「内容」は切り離して考えることはできないにも関わらず，今回は意図せず「見方・考え方」を標語的に残すようになってしまっていた。その原因として，転移可能性を考えるあまりに数学の個別的内容から極力離れようとしていたことが考えられる。

こうしたことを防ぎ，実のある「転移可能な概念的理解」を設定するにはどうするか。本実践からは次の 3 点が示唆される。

第一に，改めてカリキュラムのシーケンスとスコープを意識し，今回の単元のどんな見方・考え方が次はどこの単元に転移してほしいのか，転移しうるのかを，“今回の単元の内容だからこそ”記述できる形で明文化することである。そうすることで，コンテント・フリーによる上滑りを防ぎ，実体のある「一般化」となることを期待できる。

第二に，しかしそれ自身が難しいことであるから，教員間で協働し，集団で検討しながら「一般化」をつくっていくことである。「一般化」が「要は生徒の中に後々まで残ってほしい理解とは何なのか」を問うものであるなら，教員集団がどんな授業を目指し，どんな研究に携わろうとも，それは避けて通れないはずである。また，概念は内容から引き出されることから，指導する数学の内容が同一である限りは，ある教員集団において検討された「一般化」(とその理解を目指すための「思考をうながす問い」や教材群) が，他の教員にも役立つものとなるはずである。特にこれまでの国立大学附属学校の実践や研究の中には，「附属だからできる」と言われ，他の学校へと拡げていきにくいものもあった。しかし「一般化」の検討とそれに基づく「思考をうながす問い」の設定や教材群は，他の学校に直接的に貢献できる可能性が高い。

そして第三に，改めて CBCI や，MYP 数学，あるいは McTighe&Wiggins (2004) の「永続的理解」設定の知見を活用することである。例えば CBCI では，概念型教師の成長について述べられていたり，「一般化」を設定するにあたってレベルを 3 まで想定し，レベル 2 や 3 にふさわしい動詞を挙げていたりするが，本実践ではそのあたりは参考にできていない。また MYP 数学では，各教科が共通で基盤とするための「重要概念」と，教科特有の「関連概念」を定めており，特に「関連概念」は，数学科のビッグアイデアを検討するうえで参考になる。McTighe&Wiggins (2004) については，実は本校はかつて「逆向き設計論」をもとに公開研究会を行ったことがあったが，そのときは「永続的理解」の重要性は前面に出さなかった。つまりは，すでに研究の知見としてのリソースは多々あるが，まだそれらを活かしきれていないということである。

(3)「授業研究」の可能性と必要条件

研究方法として用いた「授業研究」自体についても，今回得られた示唆をここに記しておきたい。

第一に，図 1 における「3. 研究授業」の連続性についてである。図 1 のプロセスでは，研究授業は 1 時間であることが想定されている。しかし授業で探究を重視するほど，ふつうは 1 時間では決着がつかず，研究協議会においてもしばしば「次時はどうするのか」「次時での生徒の実態が気にな

る」といったことが話題となる。実際，今回も 3 時間を使っている。ところが今回はオンラインで事前に授業動画を視聴いただく形であったため，動画編集によって 3 時間分を見せることが可能となった。これはオンラインによる研究授業の思わぬ副産物であった。ただし，当然ながらオンラインでは生徒の実態を観察しにくいというのが大きな難点であり，それとトレードオフする形とはなる。今後，オンラインにせよ対面にせよ，こうした 1 時間では完結しない研究授業をどう扱うかが，「授業研究」に関する研究を拡げる一つの契機となると考えられる。

第二に，研究協議会における「指導助言者」の重要性を改めて実感した次第である。すでに岩崎ら（2021）が，「授業において，子どもを見る視点を提供することや，どのような指導の在り方がよいかを価値づけるなど，授業の批評者として参画する外部講師の存在や役割の重要性」（p.30）を示唆しているが，そこでは指導助言者（外部講師）の力量が問われることになる。今回の指導助言では，本来は我々が協議会において行うべきであった「概念的理解」の意味がまず明確にされ，それを目指す単元・授業デザインと学習指導の提案と位置付けられたうえで，我々の設定した「一般化」がそもそも違っていたのではないかという指摘とともに本来的な「一般化」が明示され，さらにはカリキュラム・オーバーロードという（世界的に）迫りくる問題を背景に「概念的理解」のいっそうの価値づけがなされ，それをもとに今後の本校数学科としての課題が提示された。こうした指導助言を実行できる指導助言者は非常に限られているのではないだろうか。実際，授業後のアンケートにおいて，指導助言が勉強になったという声が多かった。昨今，教員研修として「授業研究」が用いられるものの，負担感ばかりがあって意味がないという声を聞く。この原因の一つとして，授業者や参加者たちが時間をかけて「授業研究」に取り組んだだけのフィードバックが指導助言者からなされていないということがありえるのではないだろうか。今回のように，授業者たちだけでは想像もつかないような見地から確かなフィードバックを行うことのできる指導助言者がその場にいれば，「授業研究」は意味がないという帰結にはならないはずである。

7．おわりに

本稿の目的は，MYP の背景にある「概念型カリキュラムとその指導（CBCI）」を理論的基盤とした授業をデザイン，実践し，そこから数学授業に対する示唆を得ることであった。そのために，「文字式による説明」を内容とした「授業研究」を，CBCI を理論的基盤として実施した。結果として，「一般化」（概念的理解）を設定することの価値を明確にするとともに，「一般化」（概念的理解）設定上の困難性に対する示唆を 3 点得ることができた。さらには「授業研究」の可能性と必要条件についても示唆を得ることができた。

今回 CBCI まで戻ることで，MYP が求める単元設定の意義を再認識することになった。MYP の単元設計は，「一般化」（概念的理解）や「思考をうながす問い」などの検討をするためのしかけである。「単元」のとらえを少し狭めることで，実のある「一般化」を設定できると考えられる。MYP 数学の単元設計の意義を踏まえ，他校へと貢献できる形で単元設計に取り組んでいくことが今後の課題となる。

謝辞

指導助言者を務めていただいた東京学芸大学大学院の西村圭一先生に心より感謝申し上げます。

引用・参考文献

藤井斉亮.（2014）.授業研究における学習指導案の検討過程に関する一考察. 日本数学教育学会誌.96（10）,2-13.

H. LynnErickson, Lois A.Lanning, Rachel French. （2017）. Concept-Based Curriculum and Instruction for the Thinking Classroom. Corwin.（H・リン・エリクソンほか（2020），『思考する教室をつくる概念型カリキュラムの理論と実践: 不確実な時代を生き抜く力』，北大路書房. ）.

International Baccalaureate. （2018）. MYP:From principles into practice.（『原則から実践へ』）

International Baccalaureate. （2021）.Mathematics guide.（『「数学」指導の手引き』）.

岩崎浩・日野圭子・松尾七重.（2021）.学会員の語りからみえる日本の授業研究の目的の多様性と重要な諸側面. 日本数学教育学会（編）算数・数学授業研究ハンドブック,東洋館出版社,26-35.

J.Mason ,L.Burton,K.Stacey.（2010）.Thinking Mathematically. Second Edition. Addison Wesley. （ジョン・メイソンほか（2019）.『教科書では学べない数学的思考』.新評論.）

片桐重男.（1988）. 数学的な考え方の具体化 （数学的な考え方・態度とその指導）.明治図書.（片桐重男.（2017）.名著復刻 数学的な考え方の具体化.明治図書.）

文部科学省.（2017）.中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編. https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1387016.htm

中島健三.（1981）.算数・数学教育と数学的な考え方.金子書房.

OECD.（2020）. Curriculum （re）design. A series of thematic reports from the OECD Education 2030 project.OVERVIEW.

佐藤学，重松敬一，赤井利行，杜威，新木伸次，椎名美穂子.（2017）. 学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証.数学教育学論究臨時増刊.99,9-15.

杉野本勇気，岩崎秀樹，大滝孝治，岩知道秀樹.（2011）. 高校数学における論証指導－Sylvester の定理に向けた局所的組織化－. 日本数学教育学会誌,93（9）,13-16.

Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding:

"Explaining with Letter Expressions" with Creativity as a Conceptual Lens

Abstract

In this paper, we attempt to design and practice a lesson based on the theoretical foundation of "Concept-Based Curriculum and Instruction （CBCI）," which is the background of MYP, and to obtain suggestions for mathematics lessons from it. In order to achieve this goal, we will conduct a "lesson study" on the topic of "Explanations by Letter Expressions". As a result, we propose three suggestions for the difficulty in setting conceptual understanding.

資料　元々作成していた学習指導案

①本時の目標

【思考力，判断力，表現力等】文字式を用いて数量の性質を見いだし統合的・発展的に考察する力を養う。

【主体的に学習に取り組む態度】文字式を用いた説明の過程や結果を振り返って発展させようとする態度を養う。

②本時の展開　※T は教師の問い，S は生徒の反応

時間	指導内容・主な発問と予想される生徒の反応	留意点
10	問題提示 T0：以前に見いだして説明した以下の性質について振り返る。 ①　連続する奇数個の整数の和は「真ん中の整数×個数」である。 ②　連続する偶数個の整数の和は，「真ん中の 2 整数の平均×個数」である。真ん中 2 整数の平均を「真ん中」とみればこれも①と同じく「真ん中×個数」とみることができる。 T1：前は両方とも「真ん中×個数」とみられるのではないかということを議論したが，そのとき皆さんが考えていたように，偶数個の整数の和について他にもいろいろとわかることがある。連続する 4 個の整数の和の場合で考えてみよう。何が予想できるだろうか。 $1+2+3+4=10$，$2+3+4+5=14$，$3+4+5+6=18$ S1-1：偶数である。 S1-2：奇数の 2 倍になる。 S1-3：真ん中 2 つの和と外側 2 つの和が等しく，その 2 倍になる。 T2：予想したことがいつでも成り立つことを説明しよう。どうすればよいか。 S2：文字式を使う。 T2-1：何を文字でおくか。 S2-1：4 つの整数のうちどれでもよい。 T3：今日は，後でみんなで議論しやすくするために，最初の整数をnとおくことにして，予想したことを説明してみよう。	教材 2 の際に共有している性質である。 上記の性質とは異なる視点で連続する偶数個の整数について考えることを明示する。 S1-3 は教材 2 の際に生徒が発表している。 文字式を用いるという方針はすぐに共有されると考える。ここでは何を文字とするかを話題とし，後の議論のために文字で表す整数をそろえる。
5	自力解決 文字式の計算は$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=2(2n+3)$ S3-1：$2n+3$は整数だから，偶数になる。 S3-2：$2n+3$は奇数だから，奇数の 2 倍になる。 S3-3：真ん中 2 つの和と外側 2 つの和がそれぞれ$2n+3$であり，その 2 倍になっている。	
10	比較検討・練り上げ I T4：(少なくとも S3-1 について共有する) T5：文字式の計算結果$2(2n+3)$から予想したことを説明できたいま，何を考えるか。 S5-1：他にわかることがないか考える。 S5-2：4 個じゃない偶数の場合について考える。 T6：$2(2n+3)$をさらに考察してみよう。何がわかるだろうか。 S6-1：$2n+3$が2個ある。 T6-1-1：$2n+3$とは何か。	事実に関する問い（a） S5-2 の反応が出た場合はそれを認めつつその前に$2(2n+3)$に焦点化する。 事実に関する問い（b）

	S6-1-1：内側 2 つの和と外側 2 つの和。	
15	<u>比較検討・練り上げⅡ</u> T6-2：$2(2n+3)$を$2n+3$が 2 個とみたのなら，他にどうみられるか。 S6-2：2が$2n+3$個あるとみられる。 T6-2-1：例えばどういうことか。 S6-2-1：$1+2+3+4=10=2\times5=2+2+2+2+2$ $2+3+4+5=14=2\times7=2+2+2+2+2+2+2$ T6-2-2：2の個数が奇数個ある。「奇数個」から想起する，我々がすでに知っている性質は何か。 S6-2-3：性質① T6-2-4：S6-2 を，性質①と関連付けられないだろうか。具体的には，「$2+2+2+2+2$」や「$2+2+2+2+2+2+2$」に性質①を使って何か起こせないだろうか？（※ここで再度自力解決の時間をとる） S6-2-4-1：$2+2+2+2+2$を性質①を使って連続する整数の和に直すと，$0+1+2+3+4$とみられる。$1+2+3+4=0+1+2+3+4$だから，連続する 4 つの整数の和は連続する 5 つの整数の和とみられる。 S6-2-4-2：$2+2+2+2+2+2+2$を性質①を使って連続する整数の和に直すと$2+3+4+5=-1+0+1+2+3+4+5$ と連続する 7 つの整数の和になる。「0」は足しても変わらないのと-1と1が打ち消し合って$2+3+4+5$に戻る。 S6-2-4-3：$3+4+5+6=-2+(-1)+0+1+2+3+4+5+6$とできる。 T6-2-5：2が$2n+3$個あるとみることによって何がわかったか。 S6-2-5：連続する 4 個の整数の和は，2を「真ん中」とする，$2n+3$個の連続する整数の和で表せる。 T6-2-6：どういう仕組みのもとにそう表せるのか。 S6-2-6：0と絶対値が等しい整数どうしを加えれば，新たに加えられた部分はすべて打ち消されるので和は変わらないが，新たに奇数個加えられることになるので，全体としては奇数個の連続する整数の和になる。 T6-2-7：今は連続する 4 個の整数の和について考えていたが，6 個や 8 個の場合はどうか。 S6-2-7：同じ仕組みで連続する奇数個の整数の和に直すことができる。 T7：前は，連続する奇数個の整数の和と，連続する偶数個の和を，どちらも「真ん中×個数」とみることができるとしてまとめた。今回は両者について何が言えるだろうか。 S7-1：どちらも結局は連続する奇数個の和である。 T7-2：ということはどちらも「真ん中×個数」で求めることができ，ここでの個数は奇数である。ここからわかることは何か。 S7-2：どちらも奇数を約数に持つ（奇数の倍数である)。	もし「4 個」を変える意見が強ければ，連続する 6 個の整数の和についても同様に3が$2n+5$個あるとみることを共有する。 事実に関する問い（d） 具体的な場合を通してこの仕組みに気づければよいと考える。 事実に関する問い（d）
5	<u>まとめ</u>	

	T8：今回，連続する整数の和は奇数を約数にもつという新しい性質を創造できた。このようにして新しい性質を創造するためには，どのように考えるとよいだろうか。 S8-1：説明した結果の文字式から他に何かわかることがないかを考える。 S8-2：もともとわかっていたこと（連続する奇数個の整数の和の性質）と関係がないか考える。 S8-3：問題の条件を変える。 S8-4：1つの性質を説明して終わりじゃないと考える。 T9：いま挙げてくれたような考え方を踏まえると，ある性質を説明して終わりではなくて，そこから新たな性質を創造することができますね。それが，「文字式を用いると一般的に説明でき，そこから新たな知識を創造できる」というテーマを設定した意図でした。	概念的な問い 本時だけでなく，本小単元における活動を振り返らせる。 残り時間次第では，まずはどのように考えるとよいかを書かせてみたうえで，全体で共有していくようにする。 ここで一切言及していなかったテーマについて説明する。