The introduction to set theory : Taking `Relations Between High Schools and Colleges' into consideration 2

集合論への入り口

−高大接続を視野に 2 −

The introduction to set theory

− Taking 'Relations Between High Schools and Colleges' into consideration 2 −

数学科　荻原　洋介

＜要旨＞

数学 A（および数学Ⅰ）で集合と要素の個数について扱うが，その説明はベン図を利用した直感的なものである．2 つの集合の場合にはベン図が捉えやすいが，3 つの集合についての包除原理はベン図でも考えにくく，4 つ以上の場合には適用ができない．

そこで，特性関数を利用して大学での数学にも繋がるような展開を高等学校でどのように行うことが可能かについて，授業での実践を踏まえて述べる．

なお証明については，直感的に明らかなものであってもきちんと述べるようにしている．

＜キーワード＞　集合，特性関数，包除原理，要素，集合の演算

1　準備

集合の要素の個数を計算する際に必要となる包除原理を証明するために特性関数（characteristic function）を定義する．

なお，以下では特に断りがない限り，全体集合は U とし，A，B，C は U の部分集合とする．また，補集合については，大学数学との関連を意識して A^c，集合の要素の個数は $|A|$ のように表す．

定義 1（特性関数）

集合 A に対して，写像 $I_A : U \longrightarrow \{0, 1\}$ を次のように定義する．

$$x \in A \Longleftrightarrow I(x) = 1,$$

$$x \notin A \Longleftrightarrow I(x) = 0$$

特性関数は，簡単に言えば x が集合 A の要素であるか否かを 1 と 0 で類別することである．

特性関数について成り立つ性質を証明する前に次の準備をする．

補題

（1）　$I_{A \cup B}(x) = 0$ であることと $I_A(x) = 0$ かつ $I_B(x) = 0$ であることは同値である．

（2）　$I_{A \cap B}(x) = 0$ であることと $I_A(x) = 0$ または $I_B(x) = 0$ であることは同値である．

【証明】（1）　$I_{A \cup B}(x) = 0$ とし，$I_A(x) = 1$ または $I_B(x) = 1$ であるとして矛盾を導く．

（ア）　$I_A(x) = 1$ かつ $I_B(x) = 0$ のとき．

$x \in A$ かつ $x \notin B$ より，$x \in A \cup B$ であるから，$I_{A \cup B}(x) = 0$ に反する．

$I_A(x) = 0$ かつ $I_B(x) = 1$ のときも全く同様である．

（イ）　$I_A(x) = 1$ かつ $I_B(x) = 1$ のとき．

$x \in A$ かつ $x \in B$ より，$x \in A \cup B$ であるから，$I_{A \cup B}(x) = 0$ に反する．

次に $I_A(x) = 0$ かつ $I_B(x) = 0$ とする．このとき，$I_{A \cup B}(x) = 1$ であるとして矛盾を導く．

$x \in A \cup B$ より，$x \in A$ または $x \in B$ であるから，$I_A(x) = 1$ または $I_B(x) = 1$ が成り立つから矛盾する．

したがって，$I_{A \cup B}(x) = 0$ であることと $I_A(x) = 0$ かつ $I_B(x) = 0$ であることは同値である．

（2）　$I_{A \cap B}(x) = 0$ であるとする．

このとき，$I_A(x) = 1$ かつ $I_B(x) = 1$ として矛盾を導くが，$x \in A$ かつ $x \in B$ より矛盾である．

$I_A(x) = 0$ または $I_B(x) = 0$ であるとする．このとき，$I_{A \cap B}(x) = 1$ として矛盾を導く．

$x \in A \cap B$ であるから，$I_A(x) = 1$ かつ $I_B(x) = 1$ となり矛盾である．

したがって，$I_{A \cap B}(x) = 0$ であることと $I_A(x) = 0$ または $I_B(x) = 0$ であることは同値である．

【証明終了】

これを用いて次の性質を証明する．

定理 1

（1） $I_{A^c}(x)=1-I_A(x)$
（2） $I_{A\cap B}(x)=I_A(x)I_B(x)$

【証明】（1） $x\in A^c$ のとき，$I_{A^c}(x)=1$ である．一方，$x\in A^c$ より $x\notin A$ であるから，$I_A(x)=0$ である．このとき，$I_{A^c}(x)=1-I_A(x)$ が成り立つ．

$x\notin A^c$ のとき，$I_{A^c}(x)=0$ である．一方，$x\notin A^c$ より $x\in A$ であるから，$I_A(x)=1$ である．このとき，$I_{A^c}(x)=1-I_A(x)$ が成り立つ．

したがって，$I_{A^c}(x)=1-I_A(x)$ である．

（2） $x\in A\cap B$ のとき，$I_{A\cap B}(x)=1$ である．

このとき $x\in A$ かつ $x\in B$ より，$I_A(x)=1$ かつ $I_B(x)=1$ である．

したがって，このとき $I_{A\cap B}(x)=I_A(x)I_B(x)$ である．

$x\notin A\cap B$ のとき，$I_{A\cap B}(x)=0$ である．補題（2）から $I_A(x)=0$ または $I_B(x)=0$ であるから，$I_A(x)I_B(x)=0$ となり，$I_{A\cap B}(x)=I_A(x)I_B(x)$ である．

【証明終了】

集合の基本となるものは de Morgan の法則である．これを特性関数で証明すると次のようになる．

定理 2（de Morgan の法則）

（1） $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
（2） $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

【証明】（1） $x\in(A\cup B)^c$ のとき，$x\notin A\cup B$ より $I_{A\cup B}(x)=0$ であるから $I_A(x)=0$ かつ $I_B(x)=0$ である．したがって，$I_{A^c}(x)=1$ かつ $I_{B^c}(x)=1$ であるから，

$$I_{A^c}(x)I_{B^c}(x)=1 \qquad \therefore \quad I_{A^c\cap B^c}(x)=1$$

となり，$x\in A^c\cap B^c$ より，$(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$ である．

次に $x\in A^c\cap B^c$ とすると，

$$I_{A^c\cap B^c}(x)=1 \qquad \therefore \quad I_{A^c}(x)I_{B^c}(x)=1$$

より，$I_{A^c}(x)=1$ かつ $I_{B^c}(x)=1$ である．

したがって，$1-I_{A^c}(x)=0$ かつ $1-I_{B^c}(x)=0$ より，$I_A(x)=0$ かつ $I_B(x)=0$ であるから $I_{A\cup B}(x)=0$ となり，$x\in(A\cup B)^c$ である．ゆえに，$A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$ である．

以上より，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ である．

（2） $x\in(A\cap B)^c$ のとき，$x\notin A\cap B$ であるから，$I_{A\cap B}(x)=0$ より，$I_A(x)=0$ または $I_B(x)=0$ となる．したがって $I_{A^c}(x)=1$ または $I_{B^c}(x)=1$ となるから，$x\in A^c$ または $x\in B^c$ より，$x\in A^c\cup B^c$ である．ゆえに，$(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$ である．

$x\in A^c\cup B^c$ のとき，$I_{A^c}(x)=1$ または $I_{B^c}(x)=1$ であるから，$I_A(x)=0$ または $I_B(x)=0$ となり，$I_{A\cap B}(x)=0$ である．すなわち，$x\in(A\cap B)^c$ であるから，$A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$ である．

以上より，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ である．

【証明終了】

2 包除原理の証明

2－1 2つの集合の場合

3つの場合を証明する前に，2つの場合についての証明方法を授業では行った．その理由は，特性関数からだけでは，要素の個数に直接結びつかないためである．

定理 3

集合 A，B に対して

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

である．

【証明】

証明の核になるのは

$$I_{A\cup B}(x)=I_A(x)+I_B(x)-I_{A\cap B}(x) \quad \cdots\cdots ①$$

となることにあり，これは定理1（2）を用いて

$$I_{A\cup B}(x)=I_A(x)+I_B(x)$$
$$-I_A(x)I_B(x) \quad \cdots\cdots ②$$

を証明することにある．

ここで右辺を変形して

$$1-\{1-I_A(x)\}\{1-I_B(x)\}$$
$$=1-I_{A^c}(x)I_{B^c}(x)$$
$$=1-I_{A^c\cap B^c}(x)$$
$$=I_{(A^c\cap B^c)^c}(x)=I_{A\cup B}(x)$$

となり示された．

ここで特性関数の性質である，要素が対象となる集合に入る（値 1）か否（値 0）かを判定することに注意すると，

$$|A|=\sum_{x\in U}I_A(x)$$

であるから，② で $x \in U$ について和をとると

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

である．

【証明終了】

最後の和を取るところでは，授業では $\sum$ を用いず言葉による説明で済ませた．

２－２　3 つの集合の場合

以上の準備をもとに，3 つの集合に対しての包除原理を生徒に証明してもらうレポートを課した．

この段階では 3 つの集合の場合の de Morgan の法則等は証明していなかったため，その辺りを自分で補題として書けるかも評価の対象とした．

この証明方法については，2 つの場合と同様に特性関数を利用しても良いし，例えば

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$$

の証明であれば，$X = A \cup B$ とおいて，2 つの場合に帰着させる方法でも良い．

後者の方法は，本質的には数学的帰納法に直結するもので，一般の場合の証明につながるものを含んでおり，証明はできなかったが，予想を書いているレポートが数点あった．

以下では，前節までに出てきた補題や定理の 3 つの集合の場合に拡張したものは述べないが，いずれも前節までと同様に拡張と証明が可能である．

定理 4

集合 A，B，C に対して

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

である．

【証明】 $I_{A \cup B \cup C}(x) = 1 - I_{A^c \cap B^c \cap C^c}(x)$ である．

一方，右辺について

$$\begin{aligned}
&1 - I_{A^c}(x) I_{B^c}(x) I_{C^c}(x) \\
&= 1 - \{1 - I_A(x)\}\{1 - I_B(x)\}\{1 - I_C(x)\} \\
&= 1 - \{1 - I_A(x) - I_B(x) + I_{A \cap B}(x)\} \times \{1 - I_C(x)\} \\
&= 1 - \{1 - I_A(x) - I_B(x) - I_C(x) + I_{A \cap B}(x) + I_{B \cap C}(x) + I_{C \cap A}(x) - I_{A \cap B \cap C}(x)\} \\
&= I_A(x) + I_B(x) + I_C(x) - I_{A \cap B}(x) - I_{B \cap C}(x) - I_{C \cap A}(x) + I_{A \cap B \cap C}(x)
\end{aligned}$$

したがって，

$$I_{A \cup B \cup C}(x) = I_A(x) + I_B(x) + I_C(x) - I_{A \cap B}(x) - I_{B \cap C}(x) - I_{C \cap A}(x) + I_{A \cap B \cap C}(x)$$

であるから，$x \in U$ について和を取ることで示された．

【証明終了】

3　生徒のレポートから

３－１　内容と評価の設定

次の内容について評価の対象とした．

（ア）　2 つの集合のときから帰納的推測を行い，3 つの集合の証明につなげるための補題を自分で設定する．

（イ）（ア）の証明

（ウ）　包除原理の証明

（エ）　4 つ以上の集合への考察（予想）

（ア）～（ウ）は「思考・判断・表現」として，（エ）は「主体的に学習に取り組む態度」を視野に設定した．

実際に提出されたレポートは次の 4 つに大別される．(巻末写真参照)

（１）　見当違いのもの

（２）　2 つの集合に帰結しているもの

（３）　3 つの集合について，単独に証明しているもの

（４）　ベン図を用いているもの

4 種類のレポートの中で評価項目（エ）に該当するものは全体の 5 %程度であった．

３－２　振り返り

授業では 2 つの集合についての説明をかなり丁寧に行ったため，評価項目（ア）～（ウ）については多くの生徒について評価をすることができたが，この類推は容易であるため，ヒントを与えすぎたと考えている．

2 節における補題，定理 1 までを証明して，特性関数に慣れさせ，2 つの集合の場合について ① を証明する過程において定理 2 が必要になることに気づかせ，自分で補題として設定できるようにする方が評価項目（エ）に繋がりやすかったであろう．

なお，一般の包除原理の証明方法の１つとして数学的帰納法があるが，これを視野に入れるのであれば２年生の課題として設定することも考えられるだろう．

４　補遺ー集合の演算ー

特性関数を用いれば，３つ以上の集合の演算についても直感ではなく証明可能になる．

定理５

集合 A，B，C に対して次が成り立つ．

（１）　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

（２）　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

【証明】（２）は同様であるため，（１）のみ証明する．

（１）

$$
\begin{aligned}
f_{(A\cup B)\cap C}(x)&=f_{(A\cup B)}(x)f_C(x)\\
&=f_C(x)\{f_A(x)+f_B(x)-f_{A\cap B}(x)\}\\
&=f_A(x)f_C(x)+f_B(x)f_C(x)\\
&\qquad -f_{A\cap B}(x)f_C(x)\\
&=f_{A\cap C}(x)+f_{B\cap C}(x)-f_{A\cap B\cap C}(x)
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
f_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}(x)&=f_{A\cap C}(x)+f_{B\cap C}(x)\\
&\qquad -f_{(A\cap C)\cap(B\cap C)}(x)\\
&=f_{A\cap C}(x)+f_{B\cap C}(x)-f_{A\cap B\cap C}(x)
\end{aligned}
$$

より示された．

【証明終了】

５　総括

数学では，ベン図に限らず，グラフや樹形図などを利用した視覚的な理解をすることは非常に重要であるが，大学以降の数学との親和性を考えると，視覚的に理解するだけでは，想像の困難な高次元の内容への敷居が高くなってしまう．

論理に頼って，視覚的に理解できる範囲を手掛かりにすることは，数学を学ぶ姿勢として養いたいところである．

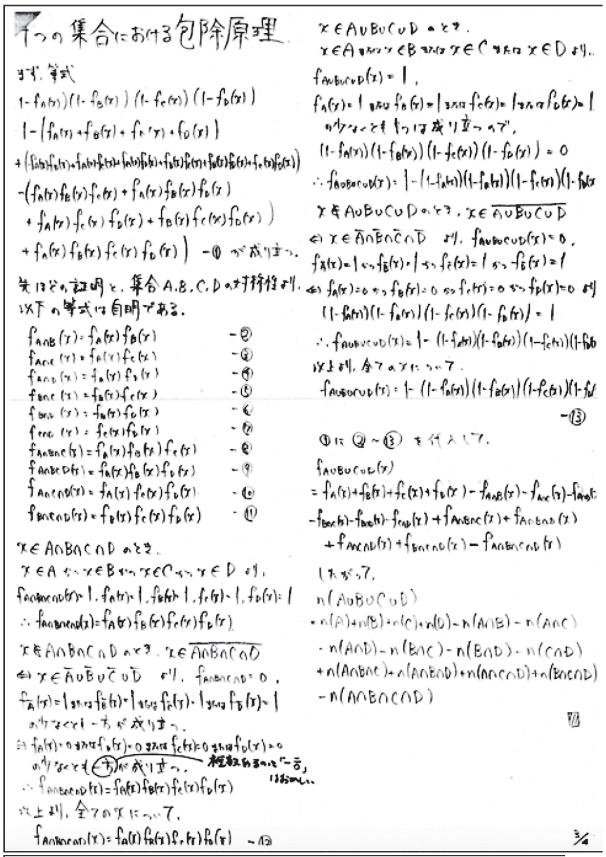
高等学校の数学と大学以降の（現代）数学との架け橋を考えることも，高等学校の教育としては重要であり，集合を題材とした本教材は，難しい計算も基本的には不要で，しかも拡張できるため，よい材料である．

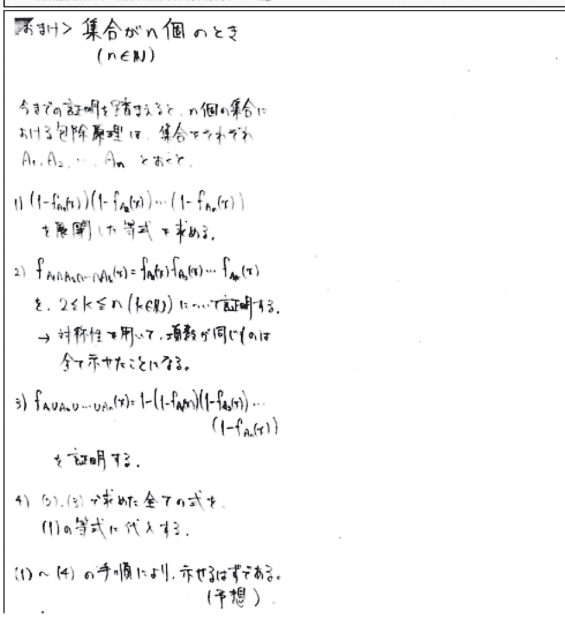
生徒へどのように取り組ませることが，主体的に取り組む態度などを効果的に養えるかについては，今後も改善が必要であるが，通常の高等学校の数学では扱うことが少ない写像の考え方を扱うことは，パターン学習では得られにくい未知の内容へ取り組む力の養成の一助になり，大学での数学の架け橋になることも期待できると考えている．

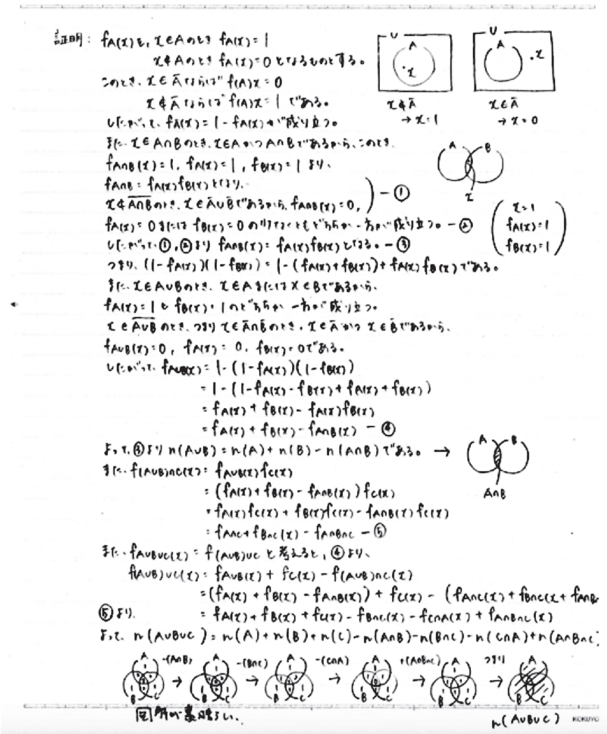
参考文献

[1] 松坂和夫，『集合・位相入門』，岩波書店，1968

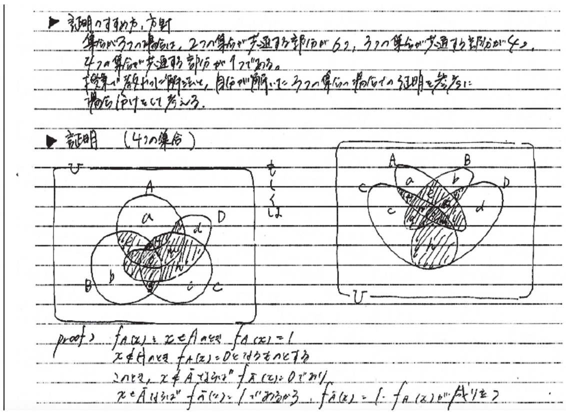
[2] 岡本和夫他，『数学Ａ（新訂版）』，実教出版，2016





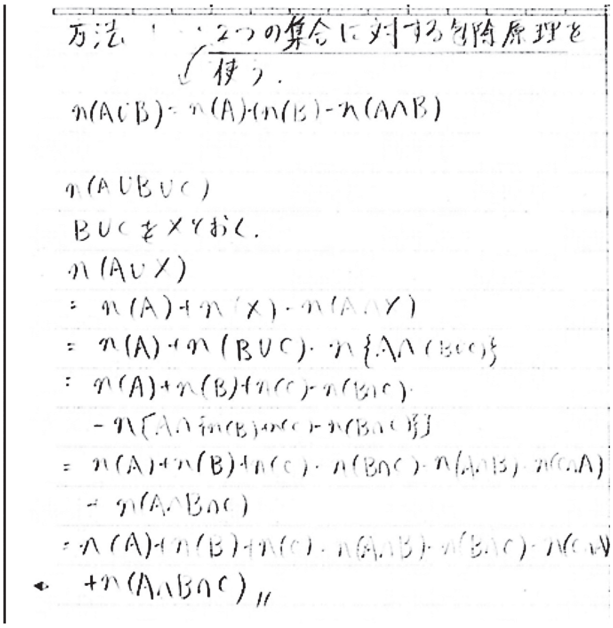

証明：$f_A(x)$を，$x \in A$のとき $f_A(x)=1$
$x \notin A$のとき $f_A(x)=0$となるものとする。
このとき，$x \in \bar{A}$ならば $f_{(\bar{A})}x=0$
$x \notin \bar{A}$ならば $f_{(\bar{A})}x=1$である。
したがって，$f_{\bar{A}}(x)=1-f_A(x)$が成り立つ。
また，$x \in A \cap B$のとき，$x \in A$かつ$A \cap B$であるから，このとき，
$f_{A \cap B}(x)=1$，$f_A(x)=1$，$f_B(x)=1$より，
$f_{A \cap B}=f_A(x)f_B(x)$となり，
$x \notin \overline{A \cap B}$のとき，$x \in \bar{A} \cup \bar{B}$であるから，$f_{A \cap B}(x)=0$，　－①
$f_A(x)=0$または$f_B(x)=0$の少なくともどちらか一方が成り立つ。－②
したがって①，②より $f_{A \cap B}(x)=f_A(x)f_B(x)$となる。－③
つまり，$(1-f_A(x))(1-f_B(x))=1-(f_A(x)+f_B(x))+f_A(x)f_B(x)$である。
また，$x \in A \cup B$のとき，$x \in A$または$x \in B$であるから，
$f_A(x)=1$と$f_B(x)=1$のどちらか一方が成り立つ。
$x \in \overline{A \cup B}$のとき，つまり$x \in \bar{A} \cap \bar{B}$のとき，$x \in \bar{A}$かつ$x \in \bar{B}$であるから，
$f_{A \cup B}(x)=0$，$f_A(x)=0$，$f_B(x)=0$である。
したがって $f_{A \cup B}(x)=1-(1-f_A(x))(1-f_B(x))$
$=1-(1-f_A(x)-f_B(x)+f_A(x)+f_B(x))$
$=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)$
$=f_A(x)+f_B(x)-f_{A \cap B}(x)$　－④
よって，④より $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$である。
また，$f_{(A \cup B) \cap C}(x)=f_{A \cup B}(x)f_C(x)$
$=(f_A(x)+f_B(x)-f_{A \cap B}(x))f_C(x)$
$=f_A(x)f_C(x)+f_B(x)f_C(x)-f_{A \cap B}(x)f_C(x)$
$=f_{A \cap C}+f_{B \cap C}(x)-f_{A \cap B \cap C}$　－⑤
また，$f_{A \cup B \cup C}(x)=f_{(A \cup B) \cup C}$と考えると，④より，
$f_{(A \cup B) \cup C}(x)=f_{A \cup B}(x)+f_C(x)-f_{(A \cup B) \cap C}(x)$
$=(f_A(x)+f_B(x)-f_{A \cap B}(x))+f_C(x)-(f_{A \cap C}(x)+f_{B \cap C}(x)+f_{A \cap B}$
⑤より。$=f_A(x)+f_B(x)+f_C(x)-f_{B \cap C}(x)-f_{C \cap A}(x)+f_{A \cap B \cap C}(x)$
よって，$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$

図解が素晴らしい。


▶ 証明のすすめ方，方針
集合が3つの場合は，2つの集合が共通する部分が6つ，3つの集合が共通する部分が4つ，
4つの集合で共通する部分が1つである。
授業で教わった解法と，自分が解いた3つの集合の場合の証明を参考に
場合分けをして考える。

▶ 証明　（4つの集合）

proof）$f_A(x)$ は $x \in A$のとき $f_A(x)=1$
$x \notin A$のとき $f_A(x)=0$となるものとする
このとき，$x \notin \bar{A}$ならば $f_{\bar{A}}(x)=0$であり
$x \in \bar{A}$ならば $f_{\bar{A}}(x)=1$であるから，$f_{\bar{A}}(x)=1-f_A(x)$が成り立つ


方法：2つの集合に対する包除原理を使う。
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$n(A \cup B \cup C)$
$B \cup C$をXとおく。
$n(A \cup X)$
$=n(A)+n(X)-n(A \cap X)$
$=n(A)+n(B \cup C)-n\{A \cap (B \cup C)\}$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B \cap C)$
$-n\{(A \cap B) \cup (C \cap A)\}$ ……
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B \cap C)-n(A \cap B)-n(C \cap A)$
$+n(A \cap B \cap C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)$
$+n(A \cap B \cap C)$ //