「学校数学における文字式の理解に関する研究」

－式をひとまとまりと見ることに焦点を当てて－

東京学芸大学大学院

連合学校教育学研究科

（東京学芸大学）

博士論文

学校教育学専攻自然系教育講座

清水　宏幸

目　次

第３章　文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査

第４章　文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査

序　章
本研究の目的と方法

第１節　本研究の背景と目的

科学技術立国である我が国がさらなる発展を遂げるには，数学の力は必要不可欠である．この数学の力とは，単に計算が速く正しくできるという計算能力だけではなく，数学を活用して問題を解決する能力も含まれる．数学を活用する際には，数学の言語である文字式を使いこなせることが大切である．文字式を使いこなせるようになると，数学のみならず様々な分野での基礎となる論理的な思考を身に付ける大切な役割を果たすことにつながる．しかし，生徒にとって，数学の言語としての文字式を使いこなして数学的に問題解決を図ることには大きな困難を伴う（例えば，全国学力・学習状況調査中学校数学の主として「活用」に関する問題の結果）．

数学の言語である文字式を中学校の段階で理解できるようにすることに関して，福原(1981)は，「数学言語における簡潔で明快な表現が好まれて，日常言語の中に取り入れられるようになることは，科学技術がますます発達して，日常生活にさらに大きく影響を及ぼすであろうことを考えれば，むしろ望ましいこと」と，数学の中だけでなく日常生活の中でその効用があることを述べ，文字式の言語としての役割の指導の重要性を主張している．また，三輪(2002)は，「言語の使用者に関しては，言語の教育が適切になされないときに文盲が現れることが指摘されるべきである．文字式についての文盲は重大である．それが，数学を使わないこと，したがって，学問的と職業的の両方の将来の進路への扉を閉ざすことにつながるからである．数学に基礎を置くテクノロジー社会を予見するとき，数学教育者にとっての緊急の課題は，この種の文盲を防ぐことである．」と子どもたちが数学の言語として文字式を使いこなすことができるようにするためには，数学の学習の中で文字式の言語としての役割を意図的に指導することの必要性について述べている．そして，三輪は，「文字式は中等数学及びそれより上の数学の殆ど全ての系統で使われる．実際，それは，代数，初等関数と解析学，解析幾何，線形代数，有限数学，確率と統計等の全ての領域で広く使われる．より正確に言えば，文字式なしではその領域の数量的推論を展開するのは不可能なのである．文字式は定量的方法を利用する科学で必須であり，それは物理的科学や経済学に典型的に見られる．」と数学そのものや他領域の学習を系統的にみたときの文字式の役割や重要性についても述べている．

数学教育学の創成期から，文字式とその式に含まれている文字の理解に関しては，国内，外において，多くの研究がなされてきた．上述のように，数学の言語としての文字式は，数学の学習を進める上での基盤であるからである．しかし，文字式の理解のすべてが解明されているわけではない．

本研究では，生徒にとって数学言語の基礎として文字や文字式を使いこなし

て数学的な問題解決を図ることの困難点として，次の２つを取り上げる．

１つ目に，文字式を処理する場面における困難性である．特に，連立方程式の代入法に代表される文字に複数の項をもつ文字式を代入することの困難性である．筆者は，連立方程式の解法のうち，代入法を避け，すべて加減法を使って解くという生徒が全体の30％であったことを調査から明らかにしている(清水，1997，1998).

例えば，連立２元１次方程式 $\begin{cases} y=3x-1 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

を解くときにその様子が顕著に現れる．第１式が「$y=\cdots$」の形であるので，代入法が使いやすいと思われる．しかし，このような連立方程式を解く場面において，代入法を使わず，第１式の右辺にある $3x$ を左辺に移項し，加減法を使うのである．ここに，文字式を処理することの困難性が現れているのではないかと考えられる．

このことに関する日本全体の生徒の傾向に目を向け，国際調査の１つであるTIMSS の問題を見ることにする．この調査で出題されている多くの問題の正答率が諸外国より高い中，次のような正答率の低い問題がある．それは，「$a+b=25$ です．$2a+2b+4$ の値を求めなさい.」（M03_08）である．この問題は代数，応用，記述に分類される問題である．正答率は，2007 年では，37.8％，2011 年では，43.2％であり，5.4 ポイントの上昇は見られるものの課題が改善されているとはいえない状況である．この問題は，$a+b=25$ であることに着目し，$2a+2b+4$ を $a+b$ が現れるように $2(a+b)+4$ と変形することが要求される．この変形により $a+b$ を 25 に置き換え，式の値を求める．つまり，目的のある式変形をした後，２つの文字の項の和の形で表された式 $a+b$ を１つの値に置き換えるという処理を行うのである．

連立方程式の代入法は，１つの文字に単項式の和の形で表された文字式を代入することが求められ，TIMSS の問題は，単項式の和の形で表された文字式を１つの値に置き換えることが求められる．いずれの式の処理においても，文字式をひとまとまりと見ることが必要となる．この文字式をひとまとまりと見ることの困難性に関する文字や文字式の理解の様相を探りたいと考える．

２つ目に，事象における数量や数量の関係を，文字式，方程式に表すことの困難性である．「文章題から式をつくることが苦手.」これは算数・数学を学習している児童生徒から多く聞かれる声である．この事象における数量や数量の関係を，文字式に表すことに関して，三輪は，次のように述べている．文字式について，「言語の観点から『表されるもの』と『表すもの，文字式』の関係が考えられる．表されるものから表すものへの移行過程が『表す』過程であり，その逆が『読む』過程である．」と述べ，この２つの関係を図１のように示している．

表されるもの（事象） $\underset{\text{読む}}{\overset{\text{表す}}{\rightleftarrows}}$ 表すもの（文字式）

図１　事象における数量と文字式の関係

また，三輪(1991)は，文字式を使いこなす場面である方程式・不等式の利用について，「方程式・不等式は，その意味を知り，解くことができるようにすることだけでなく，それを用いること，つまり，応用して問題を解決することが重要視されているといえる．」と述べている．そして，その利用は図２のように捉えるのが適当であるとし，この図にある「作る」「解く」「検討・吟味」の３つの相それぞれに困難が伴うと述べている．そして，「この３つの相の中で最も困難なのは，おそらく，問題から方程式・不等式を作ることであろう．」と述べ，「逆算をフルに活用する小学校での算数的な思考方法とはかなり異なったものといえる．」とその理由に言及している．算数的な解き方は，文章問題の構造を理解した上で，逆算などを駆使して答えを得る．それに対して，中学校で学習する方程式は，文章問題から数量を読み取ってそれらの等しい関係を見つけ，等式で表すことが要求される．算数のときの解法より簡単であると考えられるが，生徒は，等しい数量の関係を見つけ，等式で表すことに苦労する．特に，両辺が，文字の項と定数項といった複数の項の和の形で表された文字式となる場合が最も難しいとされている(例えば，Filloy & Rojano，1989)．両辺に表された同じ数量を２通りの文字式で表すことに困難があると考え，この方程式の立式の場面において生徒の理解を探りたいと考える．

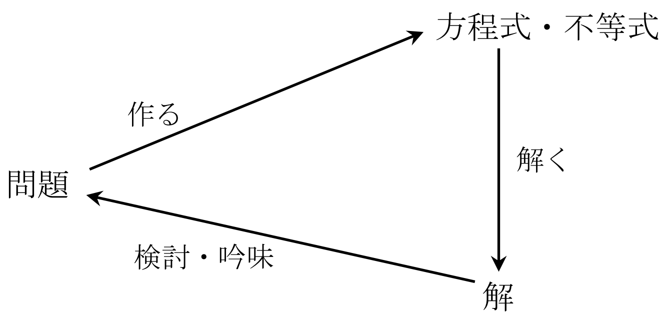


図２　方程式利用の図式

以上の２つの困難点を踏まえ，本研究では，図２の方程式利用の図式における，「解く」に当たる相を「式の計算」の相，「作る」に当たる相を「立式」の相とし，前者では，複数の項をもつ文字式を代入するなどの式を処理する場面，後

者では，事象における数量の中から等しい関係を見つけそれを方程式に立式する場面における生徒の理解の様相の顕在化に焦点を絞ることする．

文字式の理解を探る際に，その文字式における文字についての理解を捉える必要がある．文字の理解については，主に英語圏において，代数を学習する際の子どものミスコンセプションを明らかにする研究が多くなされている（例えば，Küchemann，1978a，1978b，1981；Rosnick，1981，Clement，1982；Lochhead ，1988 ; MacGregor & Stacey，1993，1996 ; Esty & Teppo，1996 ; Radford，2003）．しかし，英語圏では，使用している言語に使われる文字が代数に使われる文字と共通していたり，各国によって中等教育の数学のカリキュラムが異なっていたりすることから，特有のミスコンセプションが生まれていることも報告されており，日本の子どもたちとは異なった様相を示していることが多い．また，日本の生徒は，PISA 調査の数学的リテラシーにおいて，世界の中でも上位の成績を上げており，ある程度，文字式等を扱うことができ，他国の生徒の状況と異なった特徴をもっていると考えられる．その日本の子どもたち特有ミスコンセプション等についての研究（日本の研究では，例えば，久米ら，1990 ; 太田，1990，1992，2006；杜，1991；藤井，1992，1998；国宗ら，1997；小岩，2016）が数多く存在するが，他にも多くの解明されていないミスコンセプションが潜んでいると考えられる．

これら国内，外の研究は，子どもたちの文字や文字式の理解を探り，その様相を明らかにしているが，文字と，その文字を含んでいる文字式の理解を同時に分析し，それらを関連付けて精緻に考察している研究は見当たらない．

そこで，本研究では，文字式を学習する際に生徒から現れてくる多くの誤答や誤概念の背後にある文字式の理解の様相と，その式における文字の理解の様相を関連付けて顕在化することを目指す．それは，１つの具体的な問題について文字式の理解とその式における文字の理解の両方の顕在化を目指すことで，より精緻に生徒の文字式の理解の様相を探ることができると考えているからである．

これを，前述の，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と，文章問題から方程式を立式する場面において，共通している困難性として考えられる，文字式をひとまとまりと見ることに焦点を当て生徒の理解の様相を探ることとする．

したがって，本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することである．

第２節　研究の方法と構成

１．本研究の方法

上記の目的を達成するために，解決すべき課題とそれに対する方法は，以下の４点に整理できる．

(1)　数学を指導する上で，文字式の役割を明らかにし，現在の小・中・高等学校における文字式の学習指導について，その困難点について考察する．

文字式の機能と役割については，三輪(1991, 1996, 2002)の論文を考察する．そして，文字，文字式の困難点については，三輪の論文を基にして概観した上で，現在の中学校数学における文字式の理解に関する課題を全国学力・学習状況調査中学校数学の結果から捉える．

これらを踏まえ，本研究のリサーチクエスチョンを同定し，課題を焦点化する．

(2)　文字，文字式の理解に関する文献研究を行う．まず，式をひとまとまりと見ることに関わる文字式の理解の枠組みとして，Sfard(1991)，Kieran(1992)，Gray & Tall(1994)，Sfard & Linchevski(1994)，Tall(2016)の研究を分析し，「プロセス」と「プロダクト」，そしてその両方の見方である「プロセプト」の概念規定を行い，本研究の文字式の理解を捉える枠組みを設定する．等式の意味の理解については，Vergnaud(1984)，Kieran(1981)の研究，文章問題を方程式に立式することについては，Stacey & MacGregor(1999)の研究を取り挙げ，考察する．

次に，式における文字の理解について Küchemann(1978a，1978b，1981)の調査研究と，これと関連する研究 Clement(1982)，藤井(1998)，MacGregor & Stacey(1993，1996)，Radford(2003)，Esty & Teppo(1996)，また，文字の変数概念の二面性である特定性，不特定性についての研究，藤井(1992)をそれぞれ分析し，文献で報告されている子どもたちの反応から文字の意味の解釈を考察する．これらを踏まえて，本研究の調査結果を分析する文字の理解を捉える枠組みを設定する．

その上で，本研究の意義，特徴を明確にする．

(3)　(1)～(2)を踏まえ，文字式の学習を始める中学生を対象とする実態調査を実施する．具体的には，はじめに質問紙調査を実施し，その解答の傾向を分析し，生徒の文字式とその式における文字の理解に関して解明すべき点を同定する．その理解の様相の詳細を明らかにするために，生徒を抽出し，インタビュー調査を実施する．この方法で，単項式の和の形で表された文字式に焦点を当てた調査（実態調査Ⅰ）と，数字と文字の積の形で表された文字式に焦点を当てた調査（実態調査Ⅱ）の２つを計画する．インタビューはビデオに録画し，そのプロトコルを分析することにより理解の様相を顕在化する．

(4)　本研究の実態調査から導かれた結果を基に，式をひとまとまりと見ること

と文字の理解との関係を明らかにする．そして，その生徒の実態を踏まえた学習指導の示唆を得る．

２．本研究で行う実態調査の方法：教授実験

本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することである．

この目的に対して，理解の様相を顕在化させるには，インタビュー調査が最適であるが，本研究では，質問紙調査とインタビュー調査を実施する．質問紙調査とインタビュー調査を併用することにより，質問紙調査の記述で現れている生徒の考えの傾向をつかんだ上で，インタビューを実施することができ，あらかじめ用意した質問を投げかけることにより理解の様相を詳細に把握することができると考えたからである．実際，藤井(1992)や清水(1995)では，児童生徒の認識を詳細に把握するという目的に対しこの手法を採用し，藤井は，文字の特定性と不特定性，清水は，分数の除法に対する硬直性を顕在化している．

質問紙調査では，第三者の考えを提示し，その考えについて賛成か反対かを問う．清水の研究では，生徒が通常用いる計算方法とは異なる方法を提示しその方法の正誤を問うのに対し，本研究では，生徒が文字式を扱う際に困難性を感じる典型的な考えを提示し，それに対してどう思うかを問い，自分だったらどう解くかを尋ねる．なぜなら，生徒がどのようなところに困難を感じているのかを自ら言語化するのは難しいと考えたため，本調査に先立って実施したパイロット調査で明らかとなった典型的な考えを提示し，それを突破口にして生徒の理解を自らの言葉で引き出すことを意図したからである．

インタビュー調査では，Cobb & Steffe(1983)，Steffe(1991)の研究の基づき，教授実験の考えを取り入れる．教授実験は，第一に，研究者が教師として行動することである．子どもとの対話型コミュニケーションの参加者となり，常に子どもが何を学ぶことができるかを仮定し，この学習を促進する方法と手段を見つけることを目的としている．第二に，子どもの数学的知識がどのようなものであるかを探るために，子どもの数学的活動の様々な側面についての仮説を立て，子どもたちの頭の中で何が起こるのかを調査することを目的としている．この考えの基，インタビュー調査では，中学生の認識の実際を探るための「臨床的インタビュー」と，その認識を変容させようと試みる「指導的介入」を行う「個別指導的インタビュー」の両方から構成し，自由に問題を解かせる時間を与え，それについてあらかじめ用意した質問事項を用いて介入する．なぜなら，どのように考えたのか，なぜそのような解き方をしたのかを振り返らせるには，自分自身で問題を解くことが必要であると考えたからである．また，生徒自身の考えを明確にした上で，理解の変容を促す介入をした際に，その考えがどのように変わったの

かを生徒自身が自覚でき，それを言語化できるようにすることを意図したからである．その際，藤井(1992)，清水(1995)はともに，考えの異なる２人の生徒をペアにして同時にインタビューを実施しているのに対し，本研究では，１人の生徒に対してインタビューを実施する．なぜなら，本研究では，理解の様相を探ることを目的としているため，生徒の理解に応じた意図する質問がより明確にでき，その反応を分析できるようにしたからである．そして，その様相がつかめれば，式をひとまとまりと見ることができるようになるには，どのような見方が必要なのかを明らかにすることができる．

以上のように，質問者が指導的な介入をすることにより，対象者の考えを誘導してしまう恐れがある．しかし，インタビューを受けた生徒が，その前と後で何らかの文字式についての理解の変容を促すことが，学校における教育的な調査としては大切であると考える．よって，質問者とのやりとりで，被験者の認識に変化を起こしている可能性を認めつつ，インタビューの中での生徒の発言を分析し考察することにより，生徒の理解の本質は捉えることができると考え，本調査方法をとることとした．

３．本研究の構成

第１章では，第１節において，中学校，高等学校で学ぶ文字式の機能と役割について考察をする．文字式，方程式の利用について，文字式，方程式に「表す」こと，そして，表したものを「変形する」「解く」こと，その結果を事象に即して「読む」「検討・吟味する」ことという３つの相があることを基に考察する．この３つの相を，本研究では「立式の過程」，「式の計算過程」，「解釈」として，文字式の機能について論じる．

第２節では，主に本格的に文字を学習する中学校数学に焦点を当て，文字式の理解について，まず，文字式に表すこと（立式）と文字式を処理すること（式の計算）に関する生徒の理解の困難点を論じる．次に，日本の大規模調査である全国学力・学習状況調査の結果から現在の生徒の課題点を明らかにし，方程式に表すこと（立式）と方程式を解くこと（式の計算）に焦点を当て，これらに関する生徒の理解の困難点を考察する．ここで本研究のリサーチクエスチョンを設定する．

第２章では，式をひとまとまりと見ることに関して，重要な視点である文字式の二面性と文字の意味の理解についての先行研究を精査し，本研究の焦点を明確にする．

第１節では，先行研究を基にし，文字式の二面性に関する理解を捉える枠組みを設定する．まず，文字式の二面性について考察し，本研究で実施する調査結果の文字式の理解の分析の視点として「プロセス」「プロダクト」，そして，その両方で見ることができる「プロセプト」の概念規定を行う．この概念を本研究の文字式の理解を捉える枠組みとして用いるのは，文字式をひとまとまりと見る

ことは，式をプロセスの見方からプロダクトの見方への移行が必要であると考えられるからである. 次に, 方程式の理解について考察する. 方程式に表したり,それを解いたりする際には，等式や等号の意味をどのように生徒が捉えているかを踏まえる必要があり, それらに関する文献から生徒の理解を考察する. フレーズ型の文字式のみならず，センテンス型の文字式にも前述の「プロセス」「プロダクト」，そして，「プロセプト」の視点を用いる.

第２節では，文字式における文字の意味の理解についての先行研究を考察し，本研究における生徒の文字の理解を捉える枠組みを設定する．文字の理解に困難があることは，多くの研究者が報告している．それらの中でも，Küchemann(1978a，1978b，1981)が行ったイギリスの CSMS のプロジェクトによる中学生理解調査の代数分野の分析に着目する．Küchemann は，文字の意味の６つの解釈，すなわち，数値化された文字，使われない文字，物としての文字，特定の未知数としての文字，一般化された数としての文字，変数としての文字の解釈を調査結果から見いだしている．また，文字の理解の基礎になる文字の変数概念の二面性について，藤井(1992)を考察する．これらを本研究の調査対象の生徒の文字の意味の理解を分析する際の枠組みとして設定する.

第３節では，第１節と第２節を踏まえ，本研究において，文字式をひとまとまりと見ることについての生徒の理解を顕在化させるために，焦点化する事柄を明らかにする. すなわち，文字式とその式における文字の理解を捉える枠組みの両方を用いて生徒の理解を考察することを示し，その理解の顕在化の意図，本研究の特徴，独自性について明確化する．本研究では，文字式を利用する場面において，文字式の理解（３a や５x－２の式全体の意味や５x と－２の意味）と，その文字式における文字の理解（３a における文字 a や５x－２における文字 x の意味）を同時に分析することによって，生徒がどのようなところに困難を感じているか，どこに誤答や誤概念の原因があるのかを具体的に顕在化する.

第３章では，複数の単項式の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査 I を実施する．この調査は，文字式をひとまとまりと見ることについて，その理解の様相を顕在化し，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることを目的とし，中学校第３学年を対象に，文字式を１つの値として答えを求める問題（a+3b+5c＝25 のとき a+3b+5c－10の値を求める問題）を用いて調査を行う．そして，生徒の理解の様相を詳細に探るため，質問紙調査をもとに選出した11名を対象に，インタビュー調査を実施し，そのプロトコルを文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点で分析する.

本研究でのインタビュー調査方法については，序章第２節２ですでに述べた．このインタビュー調査の方法は第４章の調査でも用いられる．本章の調査結果より，本研究における問題において，単項式 a，3b，5c の和の形で表された文字式 a+3b+5c をひとまとまりと見ることが困難であること，そして，ひとまとま

りと見ることの要件を生徒のプロトコルから分析し，その理解の様相を明らかにする．

第４章では，文字式をひとまとまりと見ることについて，方程式を立式する場面，特に過不足の問題における立式過程に焦点を当てて実態調査Ⅱを実施する．この実態調査Ⅱは２つに分かれる．その２つとは，誤答の様子が解明されていない生徒の理解の実態を明らかにするために，立式できていない生徒を対象にその解答を分析した調査１と，この調査で立式できている生徒の中にも誤答の生徒と同様な文字式や文字の理解をしている生徒の存在が明らかとなったことから，立式できている生徒を対象にその理解を分析した調査２である．この２つの調査では，同じ問題場面を用い，それぞれ調査問題を開発し，質問紙調査とインタビュー調査を実施する．そして，インタビューのプロトコルから文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点から生徒の理解の実態を捉えることとする．

調査１では，これまでの先行研究では報告されていない，物としての文字の理解についての実態を顕在化する．質問紙調査の解答状況をみると，この章で明らかになった理解は，方程式を立式できていない生徒だけでなく，方程式を正しく立式できている生徒の中にも現れていることが明らかとなっている．

調査２では，インタビュー調査において，$3x+20$ といった単項式 $3x$ と定数 $+20$ の和の形で表された文字式について，さらに，$3x$ といった数字と文字の積の形で表された文字式について，ひとまとまりとして見ることができていない実態を明らかにし，その背後にある文字式とその式における文字の理解の様相を考察する．

第５章では，本研究の結論として，第１節で，本研究における文字式の理解の二面性と文字の理解の関係，つまり，式をひとまとまりと見ることについて，文字式の理解とその式における文字の理解との関係を明らかにする．すなわち，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面における，生徒の文字式とその式における文字の理解の様相の一端として，「プロセスのプロダクト化」「具象化途上の未知数としての文字」の理解を明らかにする．第２節では，本研究で明らかとなった生徒の理解の実態を踏まえて，小学校における乗法の意味の指導との連携が大切であることなどの学習指導への示唆について述べる．

終章では，第１節において本研究の総括を述べ，第２章において今後の課題を述べる．

序章の引用・参考文献

(1)　Clement,J.(1982).Algebra word problem solutions.Thought processes underlying a common mis-conception. *Journal for Research in Mathematics Education*,*13*,1,16-

30.
(2) Cobb,P & Steffe,L,P.(1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 83-94.
(3) Davis,R.B.(1975).Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations.*Journal of Children's Behavior,1*,3,7-35
(4) Esty,W & Teppo,A.(1996).Algebraic thinking, language,and word problem. Communication in Mathematics,*K-12 and Beyond, Yearbook NCTM*,45-53.
(5) Filloy,E. & Rojano,T.(1989).Solving equations: the transition from arithmetic to algebra.*For the Learning of Mathematics* 9, (2), 19–25.
(6) 藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査.数学教育学論究,臨時増刊,74,Vol.58,3-27.
(7) 藤井斉亮.(1998).学校数学における文字の理解について.「学生・教授問題」再考.山梨大学教育人間科学部研究報告,49,31-38.
(8) 福原満州雄.（1981）. 数学と日本語. 1−11. 共立出版.
(9) Gray&Tall.(1994).Duality,ambiguity,and flexibility:A"proceptual"view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education,25-2*,116-140.
(10) 小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究−文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて−.東京学芸大学博士論文.
(11) Kieran,C.(1981).Concepts associated with the equality symbol.*Educational Studies in Mathematics,12*,317-326.
(12) Kieran,C.(1992).The learning and teaching of school algebra, Douglas A.Grouws(Ed.),*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*,390-419.Macmillan.
(13) Kieran,C.(2007).Learning and teaching algebra at the Middle School through College Levels.F.K.Lester,Jr(Ed.),Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, *A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, 2*,707-762.
(14) 国立教育政策研究所.(2013).TIMSS2011算数・数学教育の国際比較−国際数学・理科教育動向調査の2011年調査報告書.明石書店.
(15) 久米成夫，松本吉陽，村上豊，高橋のぞみ.(1990).文字の理解に関する一考察−実態調査の結果を中心として−.学芸大数学教育研究,2,27-35.
(16) 国宗進編著.(1997).確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり5.明治図書.
(17) Küchemann,D.(1978a).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*,7(4),23-26.
(18) Küchemann,D.(1978b).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7(5),12.
(19) Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children’s Understanding of*

Mathematics,11-16,02-119.John Murray.
(20) Lochhead,J.(1988).From words to algebra:mending misconceptions.*The Ideas of Algebra,K-12*.National Council of Teachers of Mathematics,1988YearBook.127-135.
(21) MacGregor,M & Stacey,K.(1993).Cognitive models underlying students' formuration of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(3),217-232.
(22) MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students' interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.
(23) 三輪辰郎.(1991).式の指導内容の概観と問題点の考察.新・中学校数学指導実例講座,数・式,39-74.金子書房.
(24) 三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.
(25) 三輪辰郎.(2001).文字式指導に関する重要な諸問題.筑波数学教育研究,20,1-23.
(26) 文部科学省.(2005).小学校算数・中学校数学・高等学校数学　指導資料−PISA2003(数学的リテラシー)及び TIMSS2003(算数・数学)結果の分析と指導改善の方向−.東洋館出版社.
(27) 太田伸也.(1990).文字式に対する認識の発達について,日本数学教育学会誌数学教育,72,7,2-11.
(28) 太田伸也.(1992).中学生の文字式に対する認識について,日本数学教育学会誌数学教育,74,9,11-19.
(29) 太田伸也.(2006).数量関係の把握と立式に関する生徒の思考の様相についての一考察.学芸大数学教育研究.18.53-60.
(30) Radford,L.(2000).Signs and meanigs in students' emergent algebraic thinking:A semiotic analysis. Educational Studies in Mathematics. *An International Journal*,42,237-268.
(31) Radford,L.(2003).Gestures,speech,and the sprouting of sings:A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*,5(1),37-70.
(32) Rosnick,P.(1981).Some misconceptions concerning the concept of variable.*The Mathematics Teacher*,76,6,418-420.
(33) Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and　objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,22*,1-36.
(34) Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The case of algebra.*Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.
(35) 清水宏幸.(1997).中学校数学における文字式の理解に関する研究－文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあてて－,日本数学教育学会第

30回数学教育論文発表会論文集,247-252.
(36)　清水宏幸.(1998).中学校数学における文字式の理解に関する研究,山梨大学大学院修士論文.
(37)　清水美憲.(1995).分数除法に関する児童・生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題，日本数学教育学会誌 数学教育学論究,臨時増刊,77,63・64,3-26.
(38) 清水美憲.(2007).算数・数学教育における思考指導の方法.東洋館出版社.
(39) Stacey,K & MacGregor,M.(1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2),149-167.
(40) Steffe,L,P.(1991). The Constructivist teaching experiment:Illustration and Implications.von Glasersfeld,E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 177-194.
(41)　鈴木淳子. (2005).調査的面接の技法【第２版】.ナカニシヤ出版.
(42)　Tall,D.(2016).数学的思考－人間の心と学び,磯田正美・岸本忠之監訳,共立出版.
(43)　杜威.(1991).学校数学における文字式の学習に関する研究−数の世界から文字の世界へ−.東洋館出版社.
(44)　Vergnaud,G.(1984).Understanding mathematics at the secondary-school level.Theory, Bell,A., Low,B., Kilpatrick,J.(Eds.).Research & Practice in Mathematics Education,Report of ICME5.

第１章
学校数学における文字式

本章では，第１節において，中学校，高等学校で学ぶ文字式の機能と役割について考察をする．文字式，方程式の利用について，文字式，方程式に「表す」こと，そして，表したものを「変形する」「解く」こと，その結果を事象に即して「読む」「検討・吟味する」ことという３つの相があることを基に考察する．この３つの相を，本研究では「立式の過程」，「式の計算過程」，「解釈」として，文字式の機能について論じる．

第２節では，主に本格的に文字を学習する中学校数学に焦点を当て，文字式の理解について，まず，文字式に表すこと（立式）と文字式を処理すること（式の計算）に関する生徒の理解の困難点を論じる．次に，日本の大規模調査である全国学力・学習状況調査の結果から現在の生徒の課題点を明らかにし，方程式に表すこと（立式）と方程式を解くこと（式の計算）に焦点を当て，これらに関する生徒の理解の困難点を考察する．ここで本研究のリサーチクエスチョンを設定する．

第１節　文字式の役割と機能

序章で述べたように，本研究では，文字式などを含む数式が数学の世界を表現する主要な言語であるという立場をとる．平成20年の学習指導要領改訂時の中央教育審議会(2008)において言語活動について，「これらの学習活動の基盤となるものは，数式などを含む広い意味での言語であ」ると述べているように，数式が広い意味で言語であると考えられることは周知の事実となっている．これは，式が数学において，なにものかを表現する言語に等しい役割を果たしていると考えられるからである．三輪(1991)は，「表現という場合には，普通，表現されるなにものかとそれを表現するなにものかがあり，その２つが対応していることが前提になる．」と述べ，「式は，表現されるもの（事象）があったときそれを表現するものである．この面に着目すると，表現される事象とそれを表現する式との関わり合いを問題にしなくてはならなくなる．言語学で対応する用語を探せば，意味論ということになろう．」と主張している．これは，中学校段階でいうと，表現されるものは事象における数量や数量の関係，表現するものは文字を用いた式や方程式であると考えられる．数学的に表現された方程式等を事象に戻したときに，どのような関係を表しているのかを読み取ることが大切となる．前章でも提示している以下の図で示されている．

$$\text{表現されるもの（事象）} \underset{\text{読む}}{\overset{\text{表す}}{\rightleftarrows}} \text{表現するもの（式）}$$

図１　事象における数量と文字式の関係

三輪(1996)は，式の役割について「数学的事象においては，何らかのパターンを発見すること，それを表現すること，そのパターンが一般的に成り立つかどうかを調べることが鍵となっているが，その際，文字式を使うことはほとんど不可欠であり，文字式より優れた手段はないように思われるのである．」と述べている．つまり，パターンを発見したり，それを表現したり，それが一般的に成り立つかどうか調べたりする際に有効にはたらくのが文字式である．

なお，本研究では，この文字式について，数を代表とする文字，すなわち対象を表す記号と，「＋，－，×，÷」などの対象に対してどのような操作をするのかを表す記号とを適切に組み合わせてつくる式を，フレーズ型の式とよぶことにする．そして，フレーズ型の式同士を，「＝，＜，≦，＞，≧，≡」などの関係を表す記号で適切に結んだ形の式をセンテンス型の式とよぶことにす

る．

そこで，文字式の優れた点をもう少し詳しく探ることにする．優れた点として，次の２つが挙げられる．その２つとは，式表現のよさと形式的な処理のよさである．以下に，この２点について三輪(1991，1996)の論文より考察していくことにする．

１．式表現のよさ

第１に，式は，数学的な事象の簡潔かつ明瞭な表現であることである．それによって他人に伝達したり，自ら思考を進めたりする優れた手段となっている．例えば，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であるが，これを他の方法で正確にしかも，これ以上簡潔かつ明瞭に表現することはできない．

第２に，一般な表現であるということである．文字式のもつ特性であるといえる．つまり特定の数ではなく，ある範囲の中のすべてに適用可能なものを表そうとする働きがある．上述の２次方程式について解の公式は１つ１つの２次方程式だけでなく，すべての２次方程式について解を与えている．これは文字式が特定の個々をこえた一般を表現しているといえるからである．こうした表現は，次のような３つの新しい価値を生み出していると三輪は述べている．それを以下に示す．

１つ目は，表している数量がどんな数量に依存しているか，また依存していないかを明らかにしているということである．例えば，２次方程式の解の公式でいえば，解は２次方程式の係数 a，b，c だけによって決まることがわかり，当然，解の公式の意味もそこにある．

２つ目は，構造を明らかにしているということである．２次方程式の解の公式は，解が方程式の係数 a，b，c それぞれの値によってどのように決まるかを与えている．a，b，c がそれぞれ式でどんな働きをしているかは見れば明らかになる．さらに根号内の b^2-4ac の値によって解が２つか１つか，あるいは実数解か虚数解かを見ることができると述べている．

また，例えば，十の位を a，一の位を b とした２けたの整数を表す文字を用いた式 $10a+b$ は，十の位の数 a と一の位の数 b がそれぞれどのような役割を果たしているか，数の構造を明らかにしているといえるのである．

３つ目は，式の形に着目することが可能になるということである．数量の関係を数学的にみたときには，その形が問題となる．例えば，長方形の面積Ｓは，縦の長さを a，横の長さを b で表せば，Ｓ$=ab$ のように表される．また，一定の速さで自動車が進む距離 y は，速さを a，走る時間を x で表すと，$y=ax$ のように表される．これらではともに，式の形でみれば，２つの数量の積によ

って第３の数量が表されている．具体的な数量から抽象した立場でみれば，同じとみることができる．これは，長方形の場合，縦の長さ a が一定とすれば，面積Ｓと横の長さ b は比例の関係である．すると，式の形として同じであるときは，数学的に見れば同じということだから，自動車の場合も，速さ a が一定のとき，距離 y と時間 x も比例の関係であるといえる．式の形が同じとき，どれか１つについて考察したことは他にも適用できることを意味する．式の形を一般的に取り出して，抽象的に $z=xy$ と表現し，x，y，z の関係を研究することも大きな意義をもつといえる．

２．形式的な処理のよさ

文字式は変形によって初めに立てた式の表現とは異なった式が得られ，それを読むことによって新しい発見や洞察が得られるのである．そこで，次にこの変形，つまり形式的な処理について考察していく．形式的な処理は，変形の根拠が数学的に保証されているので，変形の途中でいちいちその変形がどういう具体的な場面に存在しているか戻ってみたり，根拠をいちいち振り返ったりする必要がないということである．大切なのは変形した後で，その変形の結果がどのような意味をもつのかを元の事象に戻って考察することができることである．

また，式を言語として扱うという立場では，必ず表現する際に，文法，つまり文字の表現の規約があると考えられる．生徒は初めこの規約に慣れず，多くの誤りが露呈してくるのである．

式の変形には，フレーズ型の式の変形とセンテンス型の式の変形がある．これらそれぞれについて考察する．

2.1　フレーズ型の式の変形

これは普通，式の変形とよばれ，取り扱われているものである．それは括弧をはずしたり，数の計算を実行したり，同類項をまとめたりして式の項の数を減らすなどで，式自身を見やすくするためになされる．例えば，$2a(a+1)-3a+5b$ は $2a^2+2a-3a+5b$，つまり $2a^2-a+5b$ と変形される．また，x^2+5x+6 は，$(x+2)(x+3)$ と因数分解することができる．初めの式と変形後の式は，見かけ上違っていても，実際はまったく同じ式である．したがって，当然一方を他方で置き換えてもよいはずであるし，初めの式と終わりの式で文字にどんな値を代入しても同じ値をとるのである．この変形は，数の場合と同様，数の計算に関する諸法則を根拠としている．

2.2　センテンス型の式の変形

この変形は，フレーズ型の式の変形と異なり，関係そのものの見方が変わるということができる．この式の変形の根拠は，等式の性質・不等式の性質である．このことを同値変形といい，終わりの式から変形によって再び初めの式に戻ることができる．方程式・不等式を解く場合にはこうしたセンテンス型の式

の変形が使われるが，それだけではない．解く途中で両辺それぞれにおいてフレーズ型の式の変形がなされているのである．

例えば，

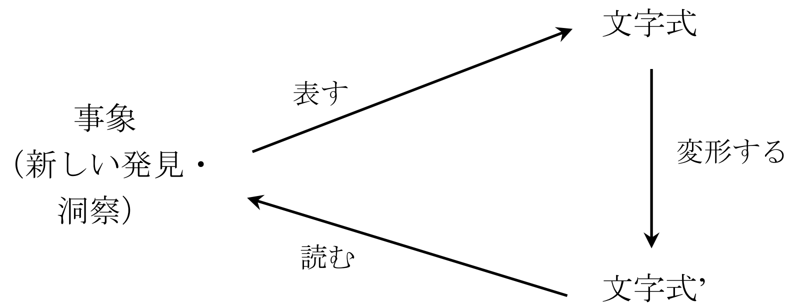
$$7(x+2)-25=3x-(9-2x)$$
$$7x+14-25=3x-9+2x \qquad ❶$$
$$7x-11=5x-9 \qquad ❷$$
$$7x-5x=-9+11 \qquad ❸$$
$$2x=2 \qquad ❹$$
$$x=1 \qquad ❺$$

初めの方程式から❶，❷までの変形は，括弧をはずす，数の計算をする，同類項をまとめるというフレーズ型の変形である．❷から❸への変形は，等式の性質を使ったセンテンス型の式変形である．❸から❹へは再びフレーズ型の式変形を使い，最後の❹から❺への変形はセンテンス型の式変形である．式ではこのように２種類の変形の仕方がある．それぞれのきまりに従う限り，自由に変形することが許される．

こうした形式的処理により，考察が進められるという点で式は偉大な力を発揮しているといえる．代数の役割といわれるものはまさにこの点なのである．

2.3　思考の道具としての文字式

以上のことをまとめ，文字式を数学における主要な思考方法として位置付け，三輪は，次のような図式を提案している．



＜図２　思考の方法としての，文字式利用の図式＞

三輪は，事象，文字式，文字式’の３つの過程を一廻りすることで，新しい発見や洞察が得られることが到達点であると考えられていると述べている．この図は数学の問題解決の過程を端的にモデル化したものであり，文字式とは何かという問いに明確に答えてくれるものである．このようにモデル化することにより，文字式を用いて問題解決する過程をメタレベルで眺めることを促し，数学的な思考を促進できるものと期待できる．

この文字式のもつよさを十分に活用するのは高校になってからと思われる．

しかし，中学校数学では，この基本的な考えをしっかり身に付けることができるようにすることが必要であると考える．また，筆者は，この過程が一廻りにとどまらず何回も廻ることによって，さらに深い洞察が得られ，思考の道具として文字式が機能していくと考える．これこそ文字式を活用することの意義やよさが現れる場面である．ここで三輪の扱っている例を取り上げ，式をひとまとまりと見ることと関連付けて発展的な思考を示す．

＜例＞　$(2^2+1)(3^2+1)=5\times 10=50=7^2+1$

$(3^2+1)(4^2+1)=10\times 17=170=13^2+1$

から，何がいえるかを考える．

まず，$(n^2+1)\{(n+1)^2+1\}=\mathrm{A}^2+1$

とおき，左辺を変形する．

$(n^2+1)\{(n+1)^2+1\}$　　　・・・①

$=n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2+1$

$=n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1+1$　　　・・・②

$=\{n(n+1)+1\}^2+1$

すると，$\mathrm{A}=n(n+1)+1$ とすればよいことがわかる．・・・③

ここでは①で，この式を分配法則を用いて展開するという処理を行う．$(n+1)$をひとまとまりとみて処理する．

そして②で，$n(n+1)$をひとまとまり（１つの文字）と見ると平方の公式を使って因数分解ができる．

最後に③で，$n(n+1)+1$ を１つの文字Ａと見ることによって，はじめの数での計算と統合的に見てこの式の解釈ができる．

～Ｐ～

次に，$(2^2+1)(3^2+1)$を$(3^2+1)(5^2+1)$と平方する数を２とびに変えたら結果はどうなるだろうかと考える．

$(3^2+1)(5^2+1)$

$(3^2+1)(6^2+1)$

$(2^2+1)(7^2+1)$　　　を取り上げる．

これらを計算すると

$(3^2+1)(5^2+1)=10\times 26=260=256+4$

$=(3\times 5+1)^2+4=16^2+4$

$(3^2+1)(6^2+1)=10\times 37=370=(3\times 6+1)^2+9=19^2+9$

$(2^2+1)(7^2+1)=5\times 50=250=(2\times 7+1)^2+25=15^2+25$

となることから，$(a^2+1)(b^2+1)=\mathrm{C}^2+\mathrm{D}$

とおき，左辺を変形する．

$(a^2+1)(b^2+1)$
$=a^2b^2+a^2+b^2+1$　　　　　・・・④
$=(ab+1)^2-2ab+a^2+b^2$
$=(ab+1)^2+(a-b)^2$

すると，Ｃ$=ab+1$であり，Ｄ$=(a-b)^2$　・・・⑤

つまり，aとbの差の２乗であることがわかる．$4=(5-3)^2=2^2$，$9=(6-3)^2=3^2$，$25=(7-2)^2=5^2$ということがわかる．

ここでは，④でabという文字同士の積の形で表された文字式をひとまとまりと見る．さらに，⑤で$ab+1$をＣ，$(a-b)$をＤとひとまとまりと見て１つの文字と置くことによって，最初と同じ解釈ができる．

～Ｑ～

さらに，$(2^2+1)(3^2+1)$を$(3^2+2)(3^2+2)$と括弧内の加える数を変えたら，結果はどうなるだろうかと考える．

$(2^2+2)(3^2+2)=6\times11=66$
$=(6+2)^2+2(3-2)^2$

より，$(a^2+n)(b^2+n)=$Ｅ$^2+$Ｘ

とおき，左辺を変形する．

$(a^2+n)(b^2+n)$
$=a^2b^2+n(a^2+b^2)+n^2$
$=(ab+n)^2-2abn+n(a^2+b^2)$
$=(ab+n)^2+n(a-b)^2$

すると，Ｄ$=ab+n$，Ｘ$=n(a-b)^2$であることがわかる．

つまり，Ｘの部分は，aとbの差の平方にnをかけてできたものであることがわかった．一番最初の問題の１というのは$+1\times(3-2)^2$でつくられていたことがわかる．

ここでは，特に，Ｘ$=n(a-b)^2$となったことから，最初の問題を見直すと③の式Ａ$=n(n+1)+1$のうしろについている$+1$は，$+1\times(3-2)^2$と表されると解釈でき，数の式もひとまとまりと見ることで，これまでの一連の思考の過程と結果を統合的に捉えることができる．

～Ｒ～

Ｐ，Ｑ，Ｒの過程それぞれに命題を「表し」，「変形」し，式を「読」んだ過程が対応し，少なくとも３回はこのモデルを廻ったことになる．廻るごとに思考を展開でき，新しい発見が加わって，さらに深い考察が得られている．文字式には，思考を展開する道具としての機能があると考えられ，そのときに文字式をどのように見るかが重要となる．$n+1$といった２つの項の和の形で表

された文字式やabといった２つの文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見ることが要求されている．さらに，変形した結果のある部分をひとまとまりと見て１つの文字として考え，それを計算の対象として次なる変形を行い，その変形によって得た結果の式の一部をひとまとまりと見ることで，前の結果と関係付けることができる．このように式を操作として見たり，ひとまとまりと見たりすることを繰り返す．この両方の見方で式変形していくことが必要となるといえる．

以上のように文字式で表して，計算結果を得るだけでなく，その結果を表した式から新たな解釈が生み出され，それを基に一般化したり，統合させたり，発展させたりしながら思考を深める道具として価値があると考える．正確に計算できるようになるだけでなく，このような価値に基づいて，項を１つ１つ分解して見たり，式をひとまとまりとして見たりするといった式の見方を含めて思考の道具として文字式を使いこなせるように指導していく必要がある．

第２節　文字式の理解の問題点

１．文字式に表すことと文字式を処理すること

本研究に関わる，事象における数量や数量の関係を文字式に表すこと，そして，文字式を処理することに関する生徒の理解の問題点を３つ述べることにする．

1.1　生徒の文字式の使用についての消極性

教師から見て，問題解決において文字式を使用することが適当であり，可能であると見られるときでも生徒は進んで文字式を使おうとはしないのである．多くの生徒にとって文字式は「問題解決における主要な方略ないし，思考の道具にはなっていないと言わざるを得ない」と三輪は述べている．数学の言語としての文字式を多くの生徒は使わず，違う方法で解こうとするということである．

これについて三輪(1991)は，「生徒が文字式について自信をもっていないのではないか」と述べている．そして「文字式がどんなものであるか，また，その学習において，何のために何をしているのかが明確にとらえられていないのではないだろうか．あるいは，計算処理などの技能の習熟が中心になっていて−これも非常に大切なことではあるが−文字式の意味や利用についての理解が十分でないのではないだろうか．その結果，生徒は，文字式についてのみずから

の能力に自信がもてないからではないかと考えるのである．」と述べている．

海外の研究では，MacGregor & Stacey(1996)が方程式を立式して答えを求める文章題に対して，代数をまったく使わない「非代数」の生徒と，未知の数量を１つの文字に表すだけのような代数の「部分的使用」の生徒がいたことを，オーストラリアの９年生と10年生を対象にして調査し報告している．これらの生徒は，10か月間に渡る代数の授業の後でも「非代数」の生徒が61.1%，「部分的使用」の生徒が22.1%，「方程式」を用いた生徒が16.7%であった．この結果について問題場面が理解できなかったのではなく，数量や数量の関係を把握しそれを方程式に書き直すことが困難であったと結論付けている．

この結果は，日本の生徒とは傾向が異なると考えられるが，そこには文字の使用を避けるという共通の困難性が潜んでいるのではないかと考える．それを特定し，解消させる手立てを講じていくことが，生徒に自信をもたせることにつながり，積極的に文字式を活用する生徒を育成できると考える．

1.2　生徒の捉える文字の意味の理解

イギリスのCSMSのプロジェクトによる中学生理解調査の代数分野において(Küchemann，1978a，1978b，1981)，生徒の捉えている文字の意味が報告されており，この文字の意味の解釈は現在の文字の理解の研究の基本となっている価値ある結果であるとされている．教師は，文字を未知数，一般化された数，変数という３つの本来の意味を柔軟に使い分けながら扱うことができるようになることを目指して指導する．しかし，Küchemannの研究では，生徒が本来の意味とは異なる意味で文字を捉え，扱っているということを明らかにしている．すなわち，数値化された文字，使われない文字，対象（物）としての文字である．本来の意味とは異なった文字の理解をしたまま，生徒がそれを用いていくことにより，多くの誤答が生まれていると考えられる．このことについては，本研究の基礎となる主要な先行研究であるので，第２章第２節で詳述する．教師は当然，文字について生徒がその意味を正しく理解していると考えているのであるが，指導する側と文字を理解して扱う側との間で，文字の意味の理解のずれがあることが大きな問題であることを指摘している．このずれがどのようなものかを明らかにしなければ，それを改善するような指導を行うことができず，文字式の理解が十分になされることはない．そして，生徒が文字式に対して自信をもって扱えるようになることはないと考えられる．三輪は，「今後生徒が文字をどのようにとらえているかの立ち入った研究が望まれるわけである．」とその研究の重要性を述べている．

1.３　算術的な見方から代数的な見方への移行

数の式，例えば，３＋５＝８は，３に５を加える所作あるいは過程が８という所産あるいは結果を生んだとみることが多い．この算術的な見方に固執すると文字式$a+b$が過程と結果の両方を表すことに強い抵抗を感ずるのである．このことについては，中学校第１学年の文字式の単元初めの式の表し方を学習する際に，x個の正方形を横に並べたときの各辺におく棒の数を数える場面で，「１＋３×xという式は，棒の本数の求め方を表すとともに，求めた結果を表していると考えることができる．」と教科書(藤井ら，2016)に記述されている．しかし，生徒は式を過程と見て計算するという算術の考えから抜け出せないのである．これは，文字式の理解の二面性に関することであり本研究の式をひとまとまりに見ることとも深く関わる．このことについて第２章第１節で詳述することにする．

また，松原元一(1990)は，「小学校１年生や２年生は『答え』を重視する．３＋５＝８では８が最大の関心事で，子どもによっては８さえ正しければ３や５はどうなっていてもよいほどの勢いである．」として指摘している．これは，教師の指導にもよるが，この傾向は消し難いと述べている．そして，「次第に３や５に関心を持つようになってくるが，『＋』や『＝』などの記号に対して数以上の関心をもち，これを重視するようになるには心理的な発達段階を必要とする．」と述べている．このとき「数が強烈に浮かんで『＋』や『＝』は沈んでしまっている．」と述べている．「『＋』や『＝』などの記号が数以上に浮かびあがるのは四年生以上であろう」という研究結果についても触れている．そして，「『今年いくつかの年齢の子どもが何年か後にはいくつになるか』というとき，やはり年齢に年数を加えさえすればよいと納得して初めて$x+y$が理解できる．xは年齢，yは年数である．考えてみると，12歳の子どもが５年後にはいくつになるかという具体からみると，$x+y$ははなはだしい一般化であり，抽象化であったのである．具体的な数よりも加えるという所作が重要であると気付くまでは，やすやすとわかるはずがない．」と異なった視点からも算術的な見方から代数的な見方への移行の困難性を述べている．さらに「『変わる』ことを直接に説明して変数の意識が高まるのではない．計算などの所作と数とを比較して数よりも所作が重視できる段階に到達している子どもに，所作を重視するよう仕向けるのが，最も適切な変数の指導であろう．」と述べている．

三輪は，「問題は，文字式という抽象の場面になったときに困難を感じることである．この困難を解消するには，やはり文字式のもつ抽象性を具体的場面にひき戻すことがどうしても必要のように思われる.」と述べている．これは式を読む活動であり，確かに授業の中では軽視されがちである．

以上３点がこれまでの文字式に表すことと文字式を処理することに関する問

題点とされ，これまでも種々の議論が行われている．

２．方程式に立式することと方程式を解くこと

ここでは，特に，センテンス型の式，すなわち方程式（不等式）に絞り，立式と式の計算に当たる「方程式に立式すること」と「方程式を解くこと」に関する生徒の理解の困難点について，三輪(1991,1996)の研究からの考察と調査における生徒の実態の考察について述べることとする．

2.1　三輪(1991，1996)の研究

三輪の研究では，特に，方程式に立式することについての困難点を考察する．

2.1.1　方程式に立式すること：事象における数量や数量の関係の複雑さ（センテンス型の式の表し方）

具体的な事象における数量の関係の表し方が問題になる．関係としては，相等関係と大小関係がある．前者は等式，後者は不等式でそれぞれ表される．三輪(1996)は，次のように指摘している．

2.1.1.1　相等関係の分析

相等関係は，対称的，推移的である．これらは意識されないで使われていることが多いが，後述の大小関係と対比すると明らかになる．相等関係については，加法と和のように，加減乗除の四則計算とその結果の相等，単価・数量・値段や速さ・時間・距離のような数量の間の公式の適用の他に，典型的な場合がいろいろあるとして，次のような例が挙がっている．

ア　ある数量の大きさＡが変化してＢになる．

例１　a 円もっていたが，x 円の本を買ったら，残りがはじめの半分になった．　$a-x=\frac{1}{2}a$

イ　ある数量Ｃが存在し，それに等しいような２つの数量ＡとＢは等しい．これは，ある１つの数量が２通りに見られることに対応する．

例２　何人かの子どもがいる．鉛筆を１人５本ずつ分けると３本余るが，７本ずつにすると５本足りないという．子どもは何人いるか．

子どもを x 人とすると，鉛筆が y 本あるとして，　$y=5x+3$，$y=7x-5$

これから，　$5x+3=7x-5$

例３　家から学校まで $a$km ある．母が家から学校へ毎時 $v_1$km で，子どもが学校から家へ毎時 $v_2$km で，同時に出発して歩き，x 時間後に出会ったとする．出会うまでに２人が歩いた距離の和は家と学校の距離に等しい．これから，$v_1x+v_2x=a$

2.1.1.2　大小関係の分析

まず，次の２点は相等関係と対比しながら注意しておかなくてはならない．

ア　反対称性　「a は b より大きい」は「b は a より小さい」と同じこと

イ　推移性　「a は b より大きく，b は c より大きいとき，a は c より大きい」

大小関係の分析では，まず，数量の大小がいろいろな表し方で示されることを理解しておく必要がある．

例えば，・余る，足りない

・越える，越えない

は，大小の言葉は使っていないが，いずれも数量の大小関係を表している．

また，　・買える，買えない

もそのような例である．

例１　a 円もっていたが x 円の本と y 円の本を両方買うことができなかった．

$a<x+y$

以上のように，数量の関係を把握し，そろえをセンテンス型の式で表すことが難しいとされている．

2.1.1.3　方程式と（解く）不等式の意味とその解の意味

等式や不等式でそれらに当てはまる文字の値を求めることを考える場合がある．それが，方程式，（解く）不等式である．

ある文字，例えば，x を含む等式があるとき，その等式に当てはまるように，x の値を決めることを考える場合がある．その時，この等式が x についての方程式であり，当てはまる値が方程式の解である．方程式の解は有限個であるのが普通である．いくつかの文字を含む等式があるとき，１つの文字を決め，他を定数とみて，等式をその文字についての方程式と見ることができる．

ある文字，例えば，x を含む不等式があるとき，その不等式に当てはまるように，x の値を決めることを考える場合がある．そのとき，この不等式が x についての（解く）不等式であり，当てはまる値が不等式の解である．不等式の解は，a より大きい数のすべてのように，ある範囲の数全体であるのが普通である．それは，数直線上に表すことが多い．

方程式を解くことができる中学生が，ここに上げるような方程式等の意味とその解の意味の理解が抜け落ちてしまっているという課題があることが諸調査からわかっている．

以上，三輪は方程式に立式することについての困難点を述べている．

2.2　全国学力・学習状況調査から見える生徒の実態

全国学力・学習状況調査（以下，全国調査）中学校数学は平成 19 年度から現在（平成 31 年度）まで３年生を対象に調査が行われてきた．この結果を分析することで，「方程式を解くこと」と「方程式を立式すること」に関する生徒の理解の困難点を見いだしたいと考える．

2.2.1　方程式を解くこと

方程式を解くことについては，連立方程式に焦点を当てる．なぜなら，これらの問題についての正答率が他の問題に比べ際立って低いわけではないが，連立方程式を解く際には，前節で述べたように等式の性質，同値変形，代入と式の値，

１元１次方程式を解くことなどの既習事項を使うことが求められ，文字式を扱うことに関する様々な誤答が散見されるからである．また，これらの連立方程式を解くことは，今後の学習には欠かせない，多くの生徒に習得してほしい基本的な技能であると考えるからである．よって，生徒の不十分な理解を捉えてその改善策を明確にすることが必要であると考える．連立方程式を解くことについて出題されている全国調査の過去の問題と正答率を以下に示す．

表５　過去の全国調査の連立方程式を解くことを求める問題の正答率

出題年度	問題番号	問題	正答率（%）
H19	A $\boxed{3}$(4)	$\begin{cases} 5x+7y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$	72.7
H20	A $\boxed{3}$(4)	$\begin{cases} y=3x-1 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$	77.4
H21	A $\boxed{3}$(4)	$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$	73.5
H22	A $\boxed{3}$(3)	$\begin{cases} 3x+2y=9 \\ x+y=4 \end{cases}$	79.6
H24	A $\boxed{3}$(2)	$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=11 \end{cases}$	81.7
H26	A $\boxed{3}$(4)	$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=2x+3 \end{cases}$	68.0

これらの問題の中で，類型９（想定されていない誤答が集められている類型）または，類型０（無解答）の反応率が 10%以上の設問は以下の４問である．以下に，問題と反応率を詳しく見てみる．

H19　A $\boxed{3}$(4)　連立方程式　$\begin{cases} 5x+7y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$　を解きなさい．

解答類型と反応率

問題番号			解答類型	反応率(%)	正答
$\boxed{3}$	(4)	1	$(x=)$ 2，$(y=)$ -1　と解答しているもの	72.7	◎
		2	x，y のいずれか一方のみを正しく解答しているもの	6.3	
		3	$(x=)$ -1，$(y=)$ 2　と解答しているもの	0.3	
		9	上記以外の解答	11.2	
		0	無解答	9.4	

(参考)昭和39年度調査(３学年)※1　正答率　53.4%
昭和57年度調査(２学年)※2　正答率　65.7%
平成６年度調査(２学年)※3　正答率　70.0%
平成13年度調査(２学年)※4　正答率　68.3%

H21　A $\boxed{3}$(4)　連立方程式　$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$　を解きなさい．

解答類型と反応率

問題番号			解　答　類　型	反応率 (%)	正答
$\boxed{3}$	(4)	1	($x=$) 2，($y=$) 1　と解答しているもの	73.5	◎
		2	x の値のみを正しく解答しているもの	3.6	
		3	y の値のみを正しく解答しているもの	2.9	
		4	($x=$) 1，($y=$) 2　と解答しているもの	0.3	
		9	上記以外の解答	9.4	
		0	無解答	10.3	

H20　A $\boxed{3}$(4)　連立方程式　$\begin{cases} y=3x-1 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$　を解きなさい．

解答類型と反応率

問題番号			解　答　類　型	反応率 (%)	正答
$\boxed{3}$	(4)	1	($x=$) 2、($y=$) 5　と解答しているもの	77.4	◎
		2	xの値のみを正しく解答しているもの	1.6	
		3	y の値のみを正しく解答しているもの	2.0	
		4	($x=$) 5、($y=$) 2　と解答しているもの	0.2	
		9	上記以外の解答	8.2	
		0	無解答	10.7	

（参考）平成15年度調査（第２学年）※1　正答率　73.3%

H26　A $\boxed{3}$(4)　連立方程式　$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=2x+3 \end{cases}$　を解きなさい．

解答類型と反応率

問題番号			解　答　類　型	反応率 (%)	正答
$\boxed{3}$	(4)	1	($x=$) 5，($y=$) 13　と解答しているもの。	68.0	◎
		2	x の値のみを正しく解答しているもの。	3.2	
		3	y の値のみを正しく解答しているもの。	1.6	
		4	($x=$) 13，($y=$) 5　と解答しているもの。	0.1	
		9	上記以外の解答	17.4	
		0	無解答	9.7	

この４問をみると，４問ともに誤答の解答類型２～４の反応率は小さく，想定された誤答に生徒の解答が当てはまっていないことがわかる．また，無解答はいずれも 10%前後である．この４問の中で，特に，H20 A $\boxed{3}$(4)の問題のように片

方の式が「y＝」になっている問題に注目する．このような形の連立方程式を加減法に直して解く生徒の割合が３割近くいることがこれまでの調査(清水, 1997, 1998)から明らかとなっているからである．これは代入法を避けることが原因であると考えられるが，この問題の正答率は 77.4％と他の問題よりも高い結果となっている．これは，加減法を使う生徒が，第１式の右辺の $3x$ を左辺に移項すると，第２式の x の係数と絶対値が等しいため，難なく正しい処理ができるからである．出題する側は，この問題で代入法を使って処理することを想定していたと思われるが，多くの生徒が加減法を使ったと考えられる．加減法の方が簡単に処理できる問題となっていことが，正答率の高さとなって現れていると考えられる．しかし，全国調査の連立方程式を解く問題は，解答欄に解を記入するのみのであるため，その解だけから生徒が実際にどのような解法をしているのかわからないのが現状である．連立方程式は，当然，代入法，加減法どちらを用いて解いてもよいのであるが，式の形に応じて柔軟に解法を使い分けてほしいと考えるので，片方の式が「y＝」になっている問題には代入法を使うことを促す指導をする．その指導の成果を確かめる問題とはなっていない．よって，生徒が連立方程式を解く過程を調査する必要がある．これについては，本研究で改めて調査をし，代入法を使う際の生徒の文字や文字式の理解を探りたいと考える．

また，H26A$\boxed{3}$(4)の「y＝，y＝」型の連立方程式を解く際には，等置法を使えば，前述の過不足の問題を解くために立式した１次方程式の形と同様になる．被験者によっては，生徒の人数を x 人，折り紙の総数を y 枚として，この連立方程式と同様な「y＝，y＝」型で立式する生徒もいる．この問題の反応率を見ると，正答率が 68.0％と低く，類型９（想定されていない誤答が集められている類型）の反応率が 17.4％と大きい．つまり，この問題を解く際に，生徒が，教師側が想定した誤答の類型に当てはまらない様々な誤答をしているということである．

このようなことから本研究では，生徒が用いる連立方程式の解法に焦点を当てたい．その上で，現れてくる誤答がどのような文字や文字式の理解から生じているのか，そして，この解く過程のどこに困難があるのかを探る必要がある．

連立方程式のように１つの文字に複数の項をもつ式を代入するなどの式の処理を行う際に，文字式や文字をどのように捉えているのかを本研究の１つ目のリサーチクエスチョンとして設定する．

2.2.2　方程式を立式すること

方程式を立式することについて，１次方程式の利用の場面での過不足の問題に焦点を当てる．これは，両辺が文字の項と定数項の和の形で表される式となる１次方程式を立式することに課題があるからである．このとき，両辺に表された数量をひとまとまりと見ることができるかどうかが問題を分析するときの注目する視点となる．平成 20 年度全国調査に出題された問題を以下に示す．

A$\boxed{3}$(2)　折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．
生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，方程式をつくりなさい．ただし，つくった方程式を解く必要はありません．

この問題の解答類型と反応率は，表１に示す．正答率が 60.5%，類型９の反応率が 12.1%，類型０（無解答）の反応率が 18.5%である．類型２～４の誤答類型の反応率はいずれも５%以下であり，想定されていない誤答が集められている類型９の反応率が無解答の割合と合わせて 30%以上であることから，誤答の様子が明確にわかってないのが現状である．生徒が方程式を立式をする際，両辺に表した数量を等しい関係として見ることができているのか，また，そのことに関する困難性はどこにあるのかを明らかにしたいと考える．

表１　平成 20 年度A$\boxed{3}$(2)の解答類型と反応率

問題番号			解答類型	反応率(%)	正答
$\boxed{3}$	(2)	1	$3x+20=5x-2$　または　$\begin{cases} y=3x+20 \\ y=5x-2 \end{cases}$　と解答しているもの （同値な式であればよい。枚数は y と異なる文字で表していてもよい。以下同様。）	60.5	◎
		2	$3x-20=5x+2$　または　$\begin{cases} y=3x-20 \\ y=5x+2 \end{cases}$　と解答しているもの	4.1	
		3	$\frac{1}{3}x+20=\frac{1}{5}x-2$　または　$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+20 \\ y=\frac{1}{5}x-2 \end{cases}$　と解答しているもの	0.2	
		4	上記以外の一元一次方程式を解答しているもの	4.7	
		9	上記以外の解答	12.1	
		0	無解答	18.5	

この出題の前年度である平成 19 年度では，次のような連立方程式の立式（A$\boxed{3}$(3)）が出題されており，その正答率が 71.2%であるので，上述の１次方程式の立式の問題の正答率の方がこれより 10.5 ポイントが低い．この問題の立式では，２つの式ともに右辺は数値のみとなる．両辺に文字を含んだ式となる過不足の問題の方が生徒にとって立式が困難であると分析できる．また，類型９と類型０の反応率は，それぞれ 8.4%，11.8%で合計 20.2%となっており，立式の際に何をしてよいのかわからない生徒が一定数いることがわかる．これらの生徒の理解については何もわかっていないのが現状である．この点は，上述の１次方程式の立式の問題と同様である．

A$\boxed{3}$(3)　１個 120 円のりんごと１個 70 円のオレンジを合わせて 15 個買ったら，代金の合計は 1600 円になりました．買ったりんごの個数とオレンジの個数を求めるために，りんごの個数を x 個，オレンジの個数を y 個として連立方程式をつくりなさい．ただし，つくった連立方程式を解く必要はありません．

表２　平成 19 年度Ａ$\boxed{3}$(3)の解答類型と反応率

問題番号			解答類型	反応率(%)	正答
$\boxed{3}$	(3)	1	$\begin{cases} x+y=15 & (\cdots①) \\ 120x+70y=1600 & (\cdots②) \end{cases}$ と解答しているもの （２つの式が①、②と同値な式ならばよい。以下同様。）	71.2	◎
		2	$\begin{cases} x=11 \\ y=4 \end{cases}$ と連立方程式の解を求めているもの	0.2	
		3	上記１で、①だけを正しく解答しているもの (式を１つだけ解答してるものを含む。)	4.6	
		4	上記１で、②だけを正しく解答しているもの (式を１つだけ解答しているものを含む。)	3.7	
		5	$120x+70(15-x)=1600$ または $120(15-y)+70y=1600$ など、一元一次方程式を解答しているもの	0.0	
		9	上記以外の解答	8.4	
		0	無解答	11.8	

次に，平成 20 年度の過不足の問題と同様な問題場面で立式を問う，平成 29 年度Ａ$\boxed{3}$(2)を見てみる．問題は以下の通りである．

折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 16 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ると４枚たりません．

生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，方程式をつくりなさい．ただし，つくった方程式を解く必要はありません．

この問題の解答類型と反応率は表３に示す．正答率は 53.6%と，平成 20 年度より低くなっている．この問題の類型では，新たに類型５の「$6x+16$ または $8x-4$ を解答しているもの」が加わった．これは，左辺と右辺となるフレーズ型の式 $6x+16$ または $8x-4$ を立てることはできたが，その２つの文字式を等号で結んでセンテンス型の式として立式することができなかった生徒の割合を把握するためであると考える．また，各類型をみると，類型４の上記以外の１元１次方程式を答えた生徒が４ポイントほど平成 20 年度よりも多いが，他の類型の反応率は，平成 20 年度とほとんど同じ傾向にあるといえる．

表３　平成 29 年度Ａ$\boxed{3}$(2)の解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率(％)	正答
$\boxed{3}$	(2)	1	$6x+16=8x-4$　または $\begin{cases} y=6x+16 \\ y=8x-4 \end{cases}$ と解答しているもの。 (同値な式であればよい。枚数は y と異なる文字で表していてもよい。以下同様。)	53.6	◎
		2	$6x-16=8x+4$　または $\begin{cases} y=6x-16 \\ y=8x+4 \end{cases}$ と解答しているもの。	3.6	
		3	$\frac{1}{6}x+16=\frac{1}{8}x-4$　または $\begin{cases} y=\frac{1}{6}x+16 \\ y=\frac{1}{8}x-4 \end{cases}$ と解答しているもの。	0.3	
		4	上記以外の一元一次方程式を解答しているもの。	8.5	
		5	$6x+16$　または　$8x-4$　を解答しているもの。	4.4	
		9	上記以外の解答	13.6	
		0	無解答	16.2	

さらに，これらの問題に関連して平成 21 年度Ａ$\boxed{3}$(3)において，次のような問題が出題されている．問題文は平成 20 年度の過不足の問題とまったく同じである．これには，平成 20 年度の立式の問題での正答率が低かったことから，さらに掘り下げて調査しようとする意図があると考えられる．以下に問題を示す．

Ａ$\boxed{3}$(3)

次の問題と考え方を囲んで，下の$\boxed{}$に当てはまる言葉を書きなさい．

問題

折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．

生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，方程式をつくりなさい．

考え方

方程式をつくるために，x を使って，上の問題の数量のうち，$\boxed{}$を２通りの式で表すと，$3x+20$ と $5x-2$ になります．

この２つの式が等しいので，方程式は $3x+20=5x-2$ です．

表４　平成 21 年度Ａ$\boxed{3}$(3)の解答類型と反応率

問題番号			解答類型	反応率(%)	正答
$\boxed{3}$	(3)	1	折り紙の枚数　　と解答しているもの （枚数と解答しているものを含む。）	36.3	◎
		2	折り紙　　　　　と解答しているもの	4.7	
		3	生徒の人数　　　と解答しているもの （生徒，または人数と解答しているものを含む。）	19.3	
		4	配り方　　　　　と解答しているもの	2.3	
		9	上記以外の解答	19.5	
		0	無解答	17.9	

この問題では，$3x+20$ と $5x-2$ の式の意味を読み取ることが求められる．誤答である解答類型３の解答，つまり，$3x+20$ と $5x-2$ を生徒の人数（生徒，または人数も含む）と記述している解答が 19.3%であった．この反応率から，生徒の人数を x 人として立てた式 $3x+20$ と $5x-2$ も x と同じ数量である「生徒の人数」として捉えている実態が現れていると考えられる．本研究ではこの誤答に着目する．両辺それぞれに文字を含む項と定数項の和の形となる方程式を立式する場面で，この文字式をひとまとまりと見て１つの数量を表していると把握できていない実態が浮かびあがっていると考えられるからである．上述の平成 20 年度Ａ$\boxed{3}$(2)の過不足の問題の立式の正答率が 60.5%に対し，$3x+20$ と $5x-2$ の表している数量を正確に記述できた割合が 36.3%である．この結果から，年度が異なるので単純な比較はできないが，正しく立式できている生徒の中に，その数量や数量の関係を正しくつかめていない生徒がいる可能性があることが示唆される．表面上は正答なのであるが，その背後で誤概念をもったままになっている，指導が必要な生徒が多数存在しているのではないかという疑念が生じる．これは，表面上正しく立式できてしまうという日本の子どもたちの独特の反応であると考えられる．この誤答の背後で，どのように問題における数量や数量の関係をつかんでいるのか，また，どのように文字を使い，方程式を立式しているのかを探りたいと考えた．そのことが，学習指導の在り方を考える基になると考えるからである．本研究では，過不足の問題の立式過程において，生徒の誤答や誤概念がどのような理解から現れているのか，そして，それらの生徒の文字と文字式の理解の様相がどのようになっているのかを２つ目のリサーチクエスチョンとして設定する．

３．本研究のリサーチクエスチョン

全国調査の結果に基づく生徒の実態 2.2.1 と 2.2.2 から，本研究の目的に照らして次の２つの解明したい事柄をリサーチクエスチョンとして設定する．

１つ目に，方程式を解く場面において，連立方程式の代入法に焦点を当て，１つの文字に複数の項の和の形で表された文字式を代入すること，また，複数の項

をもつ文字式を１つの値であると見ることについての生徒の理解はどのような様相であるのか，その一端を明らかにし，文字式をひとまとまりとしてみることの要件を探ることである．

２つ目に，文章問題から方程式に表す場面，特に，過不足の問題の立式過程に焦点を当て，生徒の誤答や誤概念の背景にある文字と文字式の理解はどのような様相であるのか，その一端を明らかにすることである．方程式に立式した際に，文字の項と定数項の和の形で表された文字式を１つの数量として捉えることに関する生徒の理解の様相を顕在化することである．

この２つはいずれも文字式を１つの値としてみること，すなわち，式をひとまとまりと見ることにつながっていると考えられる．これらを本研究の本質的な問いとして設定する．そして，これらの理解の様相を，文字式とその式における文字の両方の視点で顕在化することを目指し，研究を進めることとする．

第１章の引用・参考文献

(1)　阿部浩一他.(1978).新・中学校数学指導講座,式.金子書房.

(2)　中央教育審議会.(2008).幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）.

(3)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学１.平成27年検定済教科書,東京書籍.

(4)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学２.平成27年検定済教科書,東京書籍.

(5)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学３.平成27年検定済教科書,東京書籍.

(6)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(7)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(8)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(9)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成22年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(10)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成26年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(11)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成29年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(12)　Küchemann,D.(1978a).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*,7(4),23-26.

(13)　Küchemann,D.(1978b).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7(5),12.
(14)　Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children’s Understanding of Mathematics*,11-16,02-119.John Murray.
(15) MacGregor & Stacey.(1996).Learning to formulate equations for problems *Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,Vol.3,289-296.
(16)　清水宏幸.(2012). 全国学力・学習状況調査の結果にみる中学校数学科の指導上の課題－記述式問題に焦点を当ててー. 日本数学教育学会誌数学教育, 94,9,38-41.
(17)　松原元一.(1986).考えることわかること.国土社.
(18)　松原元一.(1990).数学的見方考え方ー子どもはどのように考えるかー.国土社.
(19)　三輪辰郎.(1991).式の指導内容の概観と問題点の考察.新・中学校数学指導実例講座,数・式,39-74.金子書房.
(20)　三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.
(21)　三輪辰郎.(2001).文字式指導に関する重要な諸問題.筑波数学教育研究,20,1-23.
(23)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(24)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(25)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(26)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成22年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(27)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成26年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
(28)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成29年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

第２章
式をひとまとまりと見ることに関する先行研究と本研究の焦点

本章では，式をひとまとまりと見ることに関して，重要な視点である文字式の二面性と文字の意味の理解についての先行研究を精査し，本研究の焦点を明確にする．

第１節では，先行研究を基にし，文字式の二面性に関する理解を捉える枠組みを設定する．文字式の二面性について考察し，本研究で実施する調査結果の文字式の理解の分析の視点として「プロセス」「プロダクト」，そして，その両方で見ることができる「プロセプト」の概念規定を行う．

第２節では，文字式における文字の意味の理解についての先行研究を考察し，本研究における生徒の文字の理解を捉える枠組みを設定する．また，文字の理解の基礎になる文字の変数概念の二面性について，藤井(1992)を考察する．これらを本研究の調査対象の生徒の文字の意味の理解を分析する際の枠組みとして設定する．

第３節では，第１節と第２節を踏まえ，本研究において，文字式をひとまとまりと見ることについての生徒の理解を顕在化させるために，焦点化する事柄を明らかにする．本研究では，文字式を利用する場面において，文字式の理解（３aや５x－２の式全体の意味や５xと－２の意味）と，その文字式における文字の理解（３aにおける文字aや５x－２における文字xの意味）を同時に分析することによって，生徒がどのようなところに困難を感じているか，どこに誤答や誤概念の原因があるのかを具体的に顕在化する．

第１節　式をひとまとまりと見ることの理解を捉える枠組み
：文字式の二面性

１．プロセスとプロダクトの概念に関する研究

Sfard(1991)は，数学の概念が２つの根本的に違う方法で考えられることができると示唆している．その２つとは，（過程としての）操作的なものと，（対象としての）構造的なものである．第１章第２節の1.3で述べた，式を所作あるいは過程と見るか，所産あるいは結果と見るかと同様な見方である．Sfardは，人々が新しい数学の概念を学習する最初の段階で，まず，操作的な考えを用いると述べている．その操作的な考え（過程の考え）から構造的な考え（対象の考え）への移行は，徐々に行われ大きな困難を伴うことがあると述べている．しかし，その２つは互いに排他的ではなく，表向きは相反していても実際には相補的 (complementary)であると述べている．そして，数学的概念を操作的な見方と構造的な見方の両方で捉えることが，数学をよく理解し活用するために不可欠であると主張している．

Sfardは「操作的概念作用と構造的概念作用の間に，深い存在論的なギャップがある．」とし，過程としてある数学の概念を解釈することは，それを実際的な存在よりむしろ潜在的な存在とみなすことである．それは活動の系列自体であるので目に見えないということを主張している．これと対比すると，対象としての数学の存在は，それはどこかの空間や時間に存在する静的な構造である．一目見ただけで考えを認知することができ，全体として巧みに扱うことができることを意味している．それは細かいところまで探ることなしにである，と述べ，このように「操作的な考えは，動的で連続的で詳細なものであるのに対し，構造的な考えは，静的で瞬間的で統一的である」と述べている．

また，「数学的概念を詳しく調べる見方をすれば，それが操作的にも構造的にもはっきりさせることができる」と述べ，次のような例を挙げている．

表１　数学的概念についての操作的見方と構造的見方

数学的概念	操作的	構造的
関数	計算的過程　あるいは　１つのシステムから他のシステムを得ることの明確な方法（skemp, 1971）	順序対の集合
対称	幾何の形状の変換	幾何の形状の性質

自然数	0，あるいは任意の自然数に1を加えること（数えた結果）によって得られた数	集合の性質，あるいは同じ有限の濃度をもつすべての集合のクラス
有理数	整数同士をわること（わった結果）	整数の対（特別に定義された対の集合の要素）
円	コンパスを，固定した点の回りを回転すること（回転することによって得られた曲線）	与えられた点から等距離にあるすべての点の軌跡

さらに，Sfardは，操作的な見方と構造的な見方の両方の見方ができる段階に至るまでを内面化，凝縮化，具象化という３つの段階のモデルをつくり，その最後の具象化によって最終段階である両方の見方ができるようになると述べている．

内面化(interiorization)の段階とは，より簡単なレベルの数学的対象に実行された操作について熟練する方法を知る段階であると述べている．その方法を熟練すれば新しい概念を引き起こすことができる準備となると考えられている．

凝縮化(condensation)の段階とは，操作の手順を自分なりの方法でよりよく遂行できるようになる「詰め込む時期」であると述べている．この段階では，その過程を他の価値と結び付けること，比較すること，一般化することが容易になる．この段階は，新しい実体が，ある過程にしっかりと結び付けられている限り続くと述べている．

そして，具象化(reification)の段階とは，概念を成熟した対象と考えることができるようになったときのみをいう，と述べている．具象化は，存在論的変化が起こり，なじみの深い何かをまったく新しい見地から突然見ることができるようになることと定義している．

内面化と凝縮化は，質的な変化というより量的で段階的な長い連続であるが，具象化は瞬間的な大躍進である．すなわち，過程は，対象として，そして静的な構造として見ることができるようになると述べている．

この３つの段階について，Sfardが挙げている複素数の例を述べる．

複素数の場合において，内面化は，学習者が平方根を使用しているうちに，平方根の中の数が負になるときに複素数になるという操作として理解し，複素数を用いた計算に熟練する段階であるとしている．凝縮化は，平方するという操作を逆にすることが平方根を求めることであることや，その計算を理解すること，$5+2i$ のような記号を，ある手続きに対する省略記号として取り扱っていながらも，複素数のアルゴリズムの一部として使用できるようになる段階であるとしている．具象化は，記号$5+2i$ が，一定の操作のための説明としてだけではなく，ある正当な対象として，そして，ある明確な集合の要素として解釈さ

れる段階であると述べている．

そして，Sfardは，この３つの段階は，前の段階全体が理解できないと次の段階には進めないとし，次のようなサイクルの図式を提案している．

過程と対象のサイクル

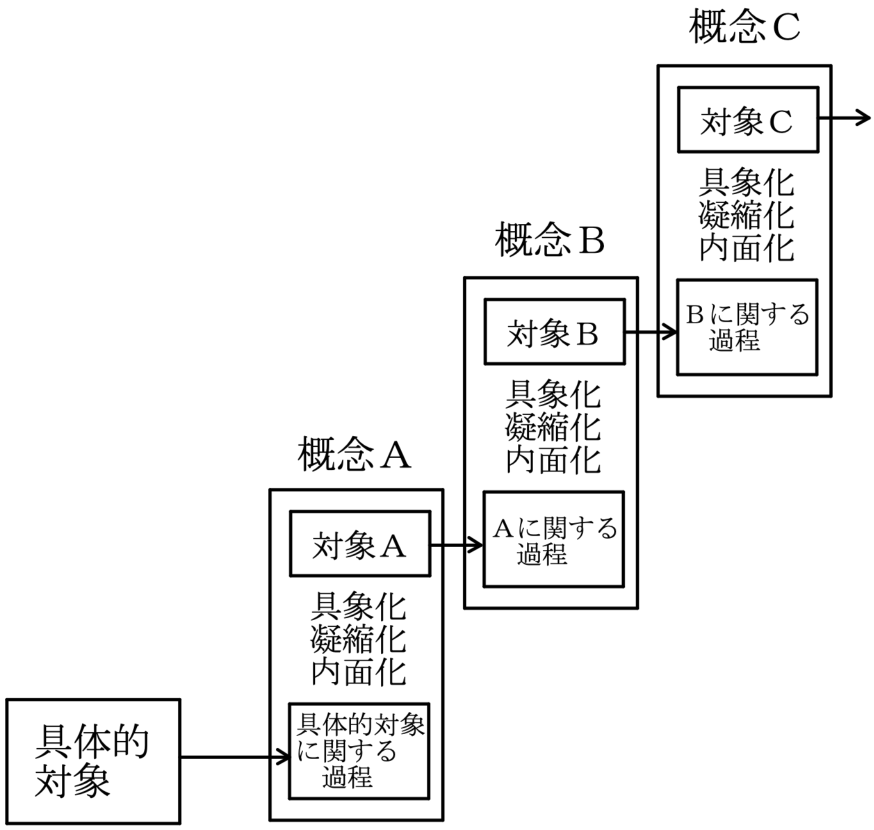


図１　概念形成の一般的なモデル（Sfard(1991)）

この理論を，Sfard & Linchevaki(1994)は，代数の場合に焦点を当て調査結果を報告している．この中では，代数的な思考の発達は，２つの重要な移行があるとし，この２つの移行とは，すなわち，操作的代数から（未知数の）「固定された値の」構造的代数へ，そして，ここから，（変数の）関数的代数への移行であると述べている．これを実験上のデータによって例証している．

Sfard＆Linchevskiは，文字式，特にフレーズ型の式についての理解の移行の具体例を，$3(x+5)+1$を用いて次のように説明している．まず，最初の操作的代数は，$3(x+5)+1$を計算上の過程の簡潔な記述であると見ることであると述べている．$3(x+5)+1$は，命令(instruction) の連続とみなす．それは，まず，その数に５を加えよ，その結果を３倍せよ，そして１を加えよというものである．このような式の理解は操作的であることがわかると述べている．

次に，（未知数の）「固定された値の」構造的代数は，３(x＋５)＋１をある特定の数を表すと見ることであると述べている．それは，計算それ自体よりもむしろ計算の所産であると見ることである．この所産が，構成要素の数 x が未知数であるという事実のために，当座は特定され得ないとしても，それは依然として数であり，表現全体(whole expression)は，一物（one）のように作用することが期待されると述べている．

最後に，（変数の）関数的代数は，３（x＋５）＋１を，１つの関数，すべての数 x を別の集合への写像であると見ることであると述べている．このとき，その式は，任意の固定された（未知数であれ）値を表さない．むしろそれは１つの変化を反映すると述べている．すなわち，文字 x を集合の代表元として扱うことができる段階であると捉えられる．

特に，Sfardらは，操作的代数から構造的代数への移行について，文章から方程式を立式し，解くことまでの生徒の実態を捉えるために，次のような実験を行っている．

まず，先行研究から，$ax+b=c$の形をした方程式の解法は多くの生徒にとって直観的に受け入れやすいものであるのに対して，$ax+b=cx$，$ax+b=cx+d$のように，未知数が両辺に現れる方程式は明らかに問題を引き起こすものであるとしている．$ax+b=cx$，$ax+b=cx+d$のような方程式を，左辺の所産として右辺が表されているといった過程として見ている見方では，方程式は多くの意味をもち得なくなると述べ，「ある数を15倍してそれに12を加えたとき，それがその数を８倍してそれに47を加えたものに等しいとき，そういう数を見つけなければならない．」という問題を用いて被験者へインタビューを行い，その反応を記録している．

この問題に対して被験者Snirは，方程式$15x+12=8x+47$を立式する．そして，xを求めるために，簡単なものから始めようと言い，左辺のxの上に３を書き，右辺のxの上に１を書く．このわずかなやりとりから多くのことがわかったと述べている．それは，Snirの発言から，この１つの方程式を「２つの方程式」と見ていることである．そして，この方程式の等号が成り立つ x の値は，左辺と右辺で異なっていると捉えていることである．この学習の段階で，被験者たちは，与えられた式における同じ文字の異なる出現(occurreces)が同じ数字を意味しているという規約を既に知っている．しかし，上述のような，この性質が予備知識に基づいて解釈できない等式に直面し，この原理が適用できなかったとしている．

このように，この被験者の文字に対する理解の分析は行っているが，両辺の文字式をどう捉えているかの分析を行っておらず，式を過程として捉えていることは前提とされており，真にそのように捉えているかどうかは分析されていない．また，操作的代数の被験者が，どのように構造的代数に移行するのかの記録もこの研究では報告されていない．

さらに，彼らはもう１つ別の調査を行っている．イスラエルの学校での代数の調査において，高い得点を上げている生徒の中に，意味論的に低下した概念，あるいは，非構造的概念と名付けている概念を獲得している生徒がいることを報告している．「$x^2+x+1>0$を解きなさい」という問題のとき，２次不等式と２次方程式の差異に無関心であり，これを解いている生徒に解決の糸口を与えたのは，左辺の式x^2+x+1の形であったと報告している．この生徒は，機械的に２次方程式の解の公式を適用し，方程式を解くときにいつも利用したようにその結果を解釈するのみで，この場合の文字が変数的な役割をもっていることや関数的なアプローチで解集合を求めるといった構造的な見方を用いることをしなかったと述べている．Sfard & Linchevskiはこの例をもとに，関数や集合といった抽象的対象は，既習の知識と新しく獲得する知識との間をつなぐ役割を果たすと述べ，図２(a)を示している．これは，操作的な見方から構造的な見方への移行としての数学的な概念の発達の「健全な」発達の連鎖として示している．一方，一旦発達の連鎖が壊れてしまえば，その学習過程はつぶれる運命にあるとし，図２(b)のように，抽象的対象なしに，第２の過程は「宙にぶらさがった」ままになるであろうと述べている．さらに，操作することが求められる数学的な，頭の中にしか存在していない実体（関数，集合）をイメージすることができないために，その生徒は図や記号を代用する．つまり，関数のグラフ，あるいは代数的式，数の名前，文字「φ」や「x」は何も表していないのであり，これらの記号各々は本質的にある物に変わるであろうと述べている．図２(b)は，壊れてしまった連鎖として，過程Ｂが具象化されていないのでＢとＣとの間をつなぐ対象となるものが存在しない状態を表している．具象化は，数学の対象に対しての概念形成の過程の１つとして既に述べている(Sfard，1991)．それは，ある数学の具体的な対象を概念Ａとして獲得する際の最終の段階で，（過程としての）操作的な見方と（対象としての）構造的な見方の両方で理解できることを指している．

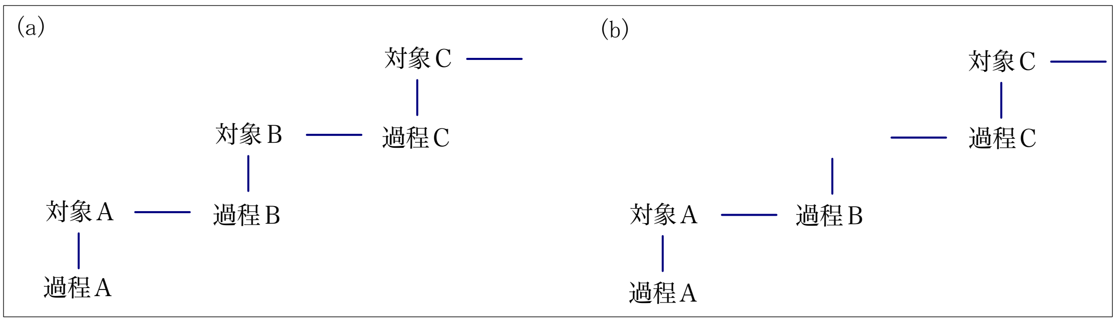


図２　操作的な捉え方から構造的な捉え方への移行としての数学的な概念の発達（Sfard(1991)）

Sfard & Linchevskiは，この移行の考えを基にして，過程と対象の移行の段階

を細かく設定し，その変容を捉えようとしている．しかし，前述のように全体的な概略としてインタビュー調査の被験者の反応を取り上げて論じているが，１つの具体的な問題において，詳細に被験者一人一人の理解の様相やその変容を捉える報告はしていない．

　また，Kieran(1992)は，代数において，Sfard(1991)の主張する過程と対象について，前者を手続き的，後者を構造的として扱っており，Sfardの概念とほぼ一致する．

　さらに，Gray & Tall(1994)は，過程と対象を，過程と概念とよび，算術においては，過程（3＋2のような２つの数の加法）とその過程の所産（和3＋2）であると述べている．また，代数においては，「『3a＋4b』という式表示は，『aの3倍とbの4倍を加える』という過程と，『１つの対象として心的に操作され得る代数式である』という概念を表していると，彼らの考えもSfardの概念とほぼ一致する．そして，「発展的な見方では，過程と概念との間を柔軟に移行できるとし，操作と概念双方ともの見方ができ，その双方の見方で文字式を柔軟に扱うことができる」と述べている．これをGray & Tallは，プロセプトと名付けている．そしてこのプロセプトという概念が算術や代数，微積分にまで適用されることを確認したと述べている．さらに，代数の表記について，手続き的な見方をする子どもたちは，文字を含む式に混乱するであろうと述べており，その文字の値がわかるまでそれは処理され得ないし，もしも文字の値がわかったら，それらは余分なもので，すべてはその数値を用いて算術として行われてしまうからであると指摘している．

　以上のように，ここに取り上げた先行研究では，用いている言葉は若干異なるが，いずれも文字式の理解の二面性を同様に捉えている．

　そこで，これらのことを踏まえ，本研究では，例えば，式3a＋4bを，3にaをかけたものと4にbをかけたものをたすのように計算の過程として操作的に捉える見方を「プロセス」，式3a＋4bそのものが１つの値であり，対象であるという見方を「プロダクト」と名付けることとする．また，この両方の見方ができることを「プロセプト」と名付ける．

　では，このプロセスとプロダクトの視座で，文字式で表現しそれを処理することの理解に焦点を当てた先行研究を見てみよう．

　Bell，Malone，Taylor(1987)は，14 歳における文字を用いた問題解決のアプローチの５つのレッスンを計画した．そのときに用いた問題の１つを以下に示す．

問題　岩が積み重なってできている，３つのかたまりＡ，Ｂ，Ｃがあります．そのかたまりの岩の数は，ＢはＡより２つ多い．ＣはＡの４倍の岩がある．合計の岩の数は，14 個である．それぞれの積み重なっている岩の数を求めなさい．Ａ，Ｂ，Ｃそれぞれを x として３つの方法で解きなさい．

この問題に対して，すべての生徒がＡの岩の数をxとし，その他２つを$x+2$，$4x$と表すことから答えを求めたとしている．そして，次の指示では，Ｂの岩の数をxとして式を立てることを要求している．すると，生徒は残った２つを$x-2$，$4x-2$と書いた．$4(x-2)$と括弧を使った生徒は誰もいなかったと報告している．そして，答えを導く方程式を$x-2+x+4x-2=14$と書いている．この問題で，Ｂの岩の数をxとして方程式を立式するとき，Ｃの岩の数を求める式は，Ａの岩の数$(x-2)$をひとまとまりと見て，その４倍とするので，$4(x-2)$と表す．この括弧で表現することが，生徒が式$(x-2)$を１つのまとまりであると捉えている証左であると考えられる．しかし，この式をひとまとまりと見る見方ができなかったという生徒の実態の報告であるとみることができる．

この論文では最終的に，この課題を通して被験者が，例えば，「xより 15 大きい」を式で表現できたが，「$(x-30)$より 15 大きい」を表現することができなかったと報告している．「xより 15 大きい」は，この言葉の通りに操作的に式を立てることができる．つまり，式をプロセスと見ていても正しく立式できる．しかし，「$(x-30)$より 15 大きい」は，一旦，プロセスとして見ていた式$(x-30)$を１つの値，すなわちプロダクトとして見直し，この値より 15 大きいことを式で表現しなければならない．つまり，式を過程，プロセスとして見る見方から対象，プロダクトとして見る見方へ転換しなければならない．多くの生徒は，これができなかったと考えられる．

また，MacGregor & Stacey(1996)の調査では，問題に対し，多くの生徒は数量を文字におくことや１つの変数でいくつかの数量を表すことはできたが，与えられた情報から正しい数量の関係を表す方程式を立式できなかったことを報告している．例えば，場面における数量を$x+7$や$x+13$と表現することはできたが，$x+(x+7)+(x+13)=80$と方程式を立式することができなかったと述べている．xより７多いことやxより 13 多いことは，x，７，13 を用いて問題の文章通りに表せばよいので，それらの数量を$x+7$，$x+13$と式に表現することが容易であった．しかし，立てた式を１つの値として，x，$x+7$，$x+13$の和が 80 であるという関係を表す等式で表現できなかったのである．そして，「xより７多い」，「xより 13 多い」と操作的に立てた式$x+7$，$x+13$を対象，つまりプロダクトして見て，それをたし合わせるという操作によって，最終的に$x+(x+7)+(x+13)=80$という等式をプロダクトとして立式することに困難があったと結論付けられる．つまり，プロセス・プロダクトの視点でみると，$x+7$や$x+13$といった，複数の項の和の形で表した式をひとまとまりと見て１つの値を表していると捉え，それが 80 と等しいという関係として理解することが困難なため，方程式を立式することができなかったと解釈できる．

これらの先行研究の調査結果から，文字式を１つの値，つまりプロダクトとして捉えることに困難があることが浮き彫りとなっている．

そして，文字式をひとまとまりと見ることとは，複数の項をもつ文字式を，プロセスとプロダクトの二重の見方，プロセプトとして見ることができることであるといえる．さらに，等式全体もプロセプトとして見ることができることである．

このプロセプトの見方に関する日本の研究についてここで考察することとする．プロセスの見方に関する先行研究として，田中(2003)の研究がある．田中は，調査対象の中学校第３学年の生徒の 27%が Gray＆Tall が主張しているプロセプト的見方ができていないことを明らかにし，その指導法を提案している．

また，小岩(2004)の研究では，プロセス・プロダクトの特徴をもとに，それに関して生徒の実態を顕在化させるために，$6(x+y)+100=3820$ と立式して，$x+y$ の値を求める文章問題を提示し，$x+y$ は x と y の和を表すことをプロダクトとして認識できるかどうかを調査する問題を開発している．この調査問題では，生徒が立式した等式に含まれている $x+y$ をひとまとまりとして意識できるかどうかを探っていると考えられる．つまり，立式の過程でプロセスとプロダクトの両方の見方ができるかどうかをみることを意図していると考えられる．しかし，その調査結果については触れられておらず，生徒がどのような理解の様相であったかの報告はなされていない．

２．方程式の理解に関する研究

この項では，等式，すなわち，センテンス型の式に絞り，特に，中学校数学で主に扱う方程式についての生徒の理解に関する研究を考察する．

Kieran(2007)の研究の中で，文章問題を方程式を用いて解決することには，伝統的に２つの相を含むと考えられていると述べている．それは，その文章問題に内在している関係を表現するために方程式を立式する相と，方程式を実際に解く相である．これは，序章で述べた三輪の図式（図３）でいう，問題から方程式を作る相と解く相と一致する．

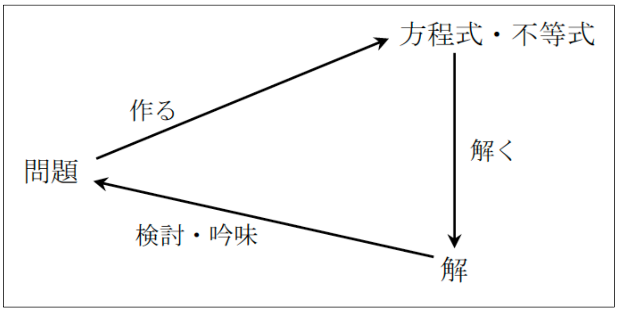


図３　方程式利用の図式

方程式の理解を前述のプロセス・プロダクトの視座で探る上で，先行研究として考察するのは，まず，等式の意味を生徒がどのように理解しているかである．次に，文章問題から方程式を立式する場面について生徒がどのように理解しているかである．以下にそれらについて考察する．

2.1　等式の意味

例えば，$3x+2=8$ のような方程式の形に着目する．この方程式は，左辺に文字の項と定数項があり，右辺に定数項のみの形である．この方程式は，「ある数

を 3 倍し，2 をたしたら 8 になった．そのある数は何か.」といったプロセスとして見ることができる．子どもは，この方程式を，等式の性質を使った解き方をせず，逆算の方法で解くことができる．子どもにとっては，上の例のような x が一方の辺のみにある（「$ax+b=c$」の形の単純な）方程式を解くことは，比較的簡単である．これに対し，両辺に x のある「$ax+b=cx$」の形，さらには，「$ax+b=cx+d$」の形の方程式では，代数記号の操作が要求され難しいことが先行研究で明らかとなっている．このことは，１．の Sfard & Linchevski(1994)の中でも報告されている．また，Filloy & Rojano(1989)では，このことを算術と代数の間の「教授学的切断」と名付けている．方程式をプロセスとして見ている生徒が，等号をどのように捉えているのかを先行研究を精査することにより，つかんでおくことが必要であると考える．つまり，１次方程式を解くことは，等式の性質を根拠として同値変形を行っているということを理解していることが求められるが，その理解には，等号をどのように理解しているかが大切になるからである．そこで，これらのことを踏まえて，Vergnaud(1984)の研究と Kieran(1981)の研究の２つの研究の等号の意味について考察することとする．

2. 1. 1　Vergnaud(1984)の研究

Vergnaud は，中学校段階での等号を次の３つの意味で理解しなければいけないとしている．すなわち，１つ目に，右辺の値と左辺の値が同じであるという意味の同一性，２つ目に，式に記述された操作が同じであるという意味の操作の同値性，そして，３つ目に，互いに置き換えることができるという意味の記号の同値性である．連立方程式の代入法には，この３つ目の意味の理解が必要である．これらの同一性あるいは，同値性としての等号の両方の解釈は，対称性と移行性の性質を支えていると述べている．そして，その理解が不十分である例として，次の３点を挙げている．

１点目は，$64-36=x$ と $x=64-36$ は，同値の式として認められていないこと，２点目は，$23+x=37$ は，x が等号の１つの辺に孤立されていない（$x=\cdots$となっているのではなく，$23+x=\cdots$となっている）ので，すぐに理解できるものではないこと，３点目に，$64-36=28-9=19$ のような記述に見られ，子どもたちが，方程式の対称的で移行的な性質を破っていることである．

これらのことに対して，Vergnaudは，等号と同時に不等号も導入すること，文章問題と具体的な場面を方程式に表したり，方程式を文章問題と具体的な場面に翻訳したりする活動を取り入れることを提案している．

左辺と右辺が互いに置き換えることができるという同値性が１つの文字に複数の項をもつ文字式を代入する際には必要となる理解である．等式を，同値な式として認められないという実態は，式をプロダクトとして見ることができないことが関わっていると考える．方程式の理解を捉える上では，大事な視点であると考える．しかし，この研究では，その見方の根拠となる子どもの等式の

見方やその両辺を構成している文字式の理解の実際を，調査等によって明らかにすることは行われておらず，プロセス・プロダクトの視座で，生徒が文字式をどう捉えているか，それらの具体を考察することはできない．

2.1.2　Kieran(1981)の研究

この研究では，小学校修学前の「同等」の概念・小学校での等号の扱い方・中等学校と大学での等号の使用について考察し，その指導の実践を提示している．この先行研究によって等号の意味が生徒にどのように理解されているかを探ることとする．

ここでは，特に，小学生の等号の意味の理解と，誤った等号の意味の理解に起因する中学生の誤答について述べることにする．

まず，小学校では，＋と＝を「実行される行動」として解釈していると述べている．例えば，3＋5＝8という式を子どもは「3と5が8をつくる」と読んでいる．また，１年生と２年生は，□＝3＋4の式は後ろ向きだと言って，3＋4＝□に書き直して解釈する．このことから等号は，左辺で行われた計算の結果を右辺に書くという方向性のあるものとして理解されていると述べている．そして，６年生になっても等号は「何かを行うシグナル」と見ていることが報告されている．それは例えば，「4＋5＝3＋6」のような式は認めず，等号の後ろには答えがくるべきだと発言し「4＋5＝9」，「3＋6＝9」と最初の式を書き換えて，その２つの式を比較するという子どもの実態について記録している．4＋5＝3＋6のような式を６歳から10歳の子どもたちは取り扱うことができなかったと記述している．そして，10歳から13歳の子どもたちは経験的に，4＋5＝3＋6を前述のように「＝9」と置き換えることをせずとも理解することができるようになると報告している．

さらに，中学校段階は，等号は「何かを行うシグナル」という解釈から，「同値を示す記号である」という解釈への移行の期間であると述べている．この期間でかなりの混乱が起こり，誤りも生まれてくるのである．例えば，次のような問題での生徒の解答にそれらが見られると述べている．

問題　森に425本の新しい木が植えられた．２，３年後，217本の古い木が切られた．そのため森の木は1063本になった．新しい木が植えられる前には，何本の木があったでしょうか？

生徒は，1063＋217＝1280－425＝1063という誤った式を書いてしまうことを報告している．これは等しい関係を捉えずに，計算過程を次々に等号につなげて書いてしまう誤りで，小学生によく見られる．Vergnaudの研究でも指摘されていることである．ここでの等号は「何かを行うシグナル」と考えられている．同値を表す記号とはなり得てはいないと述べている．これは具体的な場面

のある文章題を数学的な記号に翻訳し答えを求めるとき，手続きとの間にギャップがあるという例であると指摘している．

また，方程式のところでも次のような変形の誤りが記録されている．

xについて解きなさい．：

$$
\begin{aligned}
2x+3&=5+x\\
2x+3-3&=5+x-5\\
2x&=5+x-x-3\\
2x-x&=5-3\\
x&=2
\end{aligned}
$$

一見するとこの生徒は正答を導いていると判断されがちであるが，２番目の式から３番目，４番目の式へは同値変形をしていない．このことについて，両辺のつり合いが，同じ操作をすることによって保たれているという意識が欠落していると考えられると述べている．

次に，微分積分学を学んでいる大学生でさえ，等号を誤って使っていると指摘している例を挙げる．

次の関数の導関数を求めよ．：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+1}\\
&= (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\\
&= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx(x^2+1)\\
&= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)\\
&= x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\\
&= \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

この場合の導関数は，正しく導けている．しかし，単に次の式への段階をつなぐものとして等号を使っており，それを求める過程の式は誤っている．３行目の式からは導関数を求めているにもかかわらず，最初の式からすべて等号でつないでいる．計算した結果を書くために等号を使っているように考えられると指摘している．

このようにKieranは，小学生だけでなく，高校生・大学生に至るまで，等号が「何かをするシグナル」であるという解釈を引きずっていることを報告している．子どもたちが年を重ね，方程式で等式の対称性を学習した後もこの等号

の誤った解釈が残っていることを指摘している.

Kieranは，この論文で生徒の等号の意味の解釈について各発達段階に分けて探り，その有効な指導について示唆している．しかし，等号を含む式全体の意味を子どもたちがどのように捉えているのかまでは考察が及んでいない.

本研究は，等号を含む等式全体，そしてその等式の両辺を構成している文字式の理解に踏み込んでいこうというものである.

これら等号の意味の理解についての２つの研究の報告は，等式を操作的に捉えるプロセスの見方と，両辺の数値を等しい関係であると捉えるプロダクトの見方で説明可能であることが明らかとなった.

2.2　文章問題の文脈における方程式の立式の研究

次に，文章問題から方程式を立式することに関する研究について先行研究を考察する. 典型的な文章問題において, 関係を表すために方程式を生成することは, 代数を学ぶ生徒にとって難しい分野であることはよく知られている. 文章問題は, 代数的対象に意味をもたせる手段として使われ続けているだけでなく, 生徒に代数を導入する手段として，これまで強調されてきたと述べている．そして, この分野での研究は, 生徒が算術的推論を好むことと文章問題を解決するために方程式を用いることに困難があることを報告している. (例えば，Bednarz & Janvier,1996 ; Cortes, 1995 ; Swafford & Langrall,2000).

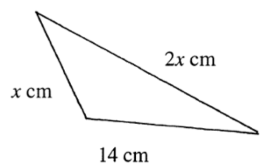
本研究では, 文章問題から方程式を立式する際に, 生徒がその文字式や文字をどのように理解しているかを探る調査を実施する. そこで, このことに関する先行研究を精査しておく必要があると考えている. これについては, 様々な外国での調査があるが，そのうちの代表的な研究である，Stacey & MacGregor(1999)の研究に絞って考察する.

Stacey & MacGregorは，オーストラリアの子どもたちが，代数によって問題を解く過程のすべての段階において，算術的な問題解決の方法を背景にした思考に戻ることによって代数的な思考を避けていることを報告している．Stacey & MacGregorの調査問題は次の４問である.

(1) 三角形（TRIANGLE）

この三角形の周の長さは44㎝です.

方程式をつくってxを求めなさい.



(2) MARK

Mark と Jan はお小遣いをもらいました．Jan は x ドルもらい，Mark は Jan より５ドル多くもらいました．Jan と Mark のもらったお小遣いの合計金額は 47 ドルです． Mark のもらったお小遣いの金額を表すために代数を用いなさい．また，Jan と Mark がそれぞれいくらもらったのか求めなさい.

(3) バス（BUS）

ある学校の生徒たちは，３日間のバス旅行をしました．２日目のバスの走行距離は，１日目より 85km 多かったです．３日目のバスの走行距離は，１日目より 125km 多かったです．３日間の走行距離の合計は 1410km でした．１日目の走行距離を $x$km としなさい．それぞれの日の走行距離を，代数を用いて求めなさい．

(4) 数（NUMBER）

ある１つの数を思い浮かべます．その数に８をかけて３をひきます．そして，３でわったら，思い浮かべた，もとの数の２倍になりました．その数はいくつでしょうか．

［ヒント：方程式をつくってそれを解きましょう］

この４問の方程式を使った割合と正答率は次の通りであった

表２　10 歳の生徒の各設問の方程式の立式と答えの正答率

TABLE 1. Percentages for Equation/s Correct and for Answer Correct by Any Method, for Students in Year 10

	TRIANGLE		MARK		BUS		NUMBER	
Year	Equation (%)	Answer (%)	Equation (%)	Answer (%)	Equation (%)	Answer (%)	Equation (%)	Answer (%)
10	38	63	30	73	32	60	30	17

Note: MARK and BUS were attempted by 524 students in nine schools. TRIANGLE was attempted by 188 students in three schools. NUMBER was attempted by 180 students in four schools.

(1) から (3) までの問題では，方程式を正しく立式した割合より答えの正答率の方が大きい．つまり，方程式を立式せずに正答を得ている生徒が多数存在するということである．(4) は，方程式を正しく立式している生徒が他の問題とほぼ同様にいたが，方程式を立式する以外の算術的に解いた生徒の正答率は低くなっていることがわかる．生徒の解法を調べるために，代数をまったく使わず算術的に解いたグループ，代数をまったく使わず試行錯誤で解いたグループ，表面的には代数を使っている（思考は算術的）グループ，方程式を立式したところまでのグループ，方程式を立式して解いているグループに分けて分析している．そしてインタビュー調査を行っている．その結果，文字や方程式を使うときに算術的な思考が影響していることを報告している．

使われている方程式は，(1) から (3) までは，例えば，$x+x+5=47$ のように，右辺は定数のみとなる方程式である．そして，(4) は，$\frac{8x+3}{3}=2x$ と両辺に文字が入る方程式である．

この論文で，Stacey らは，「私たちの一般的に使用される教科書に現れる問題のほとんどは，算術的推論または試行錯誤によって容易に解決できる」と指摘し，「この態度は合理的である」と述べている．この調査で子どもたちが使用した算術的な方法（数値的に解く，数式を書く，方程式を物語としてのみ解釈する，未知のものを使って計算されるものを表す）などの手法を先生が教えている可能性があると指摘し，「このアプローチでは，問題を解く代数的方法を使う力がほとんど身に付かない」と述べている．そして，「問題解決ツールとしての代数の価値を理解するには、代数なしでは簡単に解決できない問題に取り組む必要がある.」と主張している．

逆算や問題の過程を辿っていくといった数値の操作を行う算術的な解法は，式をプロセスとして扱っていると考えられ，問題場面における数量の等しい関係を捉えて方程式を立式する代数的な解法は，式をプロダクトとして扱っていると解釈することができ，プロセス・プロダクトで説明可能であることがわかった．

以上，先行研究を精査した結果，式をひとまとまりと見ることの理解には，文字式の理解の二面性である過程と対象，つまり，プロセス・プロダクトの見方で式を見ることが関連していることが明らかとなった．

本研究では，プロセスの見方とプロダクトの見方の両方の見方ができることをプロセプトの見方と名付け，式をひとまとまりと見ることにはこの見方が必要であるとし本研究の文字式の理解を捉える枠組みにも位置付けることとした．

また，本研究で取り上げる問題は方程式であるため，等号の意味の理解について，文章問題を，方程式を用いて解決することにおいて，生徒が，算術的な解法を代数的な解法より好む傾向であることについてもプロセス・プロダクトの視点で説明可能であることが明らかとなった．

そこで，生徒の文字式の理解を捉える枠組みとして，プロセス・プロダクト，そして，プロセス・プロダクトの両方の見方ができるプロセプトの用語を使って生徒の理解の様相を探る枠組みを設定することとする．

第２節　文字の意味に関する理解を捉える枠組み

１．文字の意味の解釈

1. 1 Küchemann による文字の意味の６つの解釈

文字式の理解を探る上で，その式における文字をどのように捉えているのかを明確にしておく必要がある．そこで，この項では，現在の文字の理解の研究の基となっている調査報告について考察を加えることとする．それはイギリスの CSMS のプロジェクトによる中学生理解調査として実施された中等学校数学の

10 の研究のうちの１つである代数分野の調査報告である．この代数分野の調査の分析を担当した Küchemann(1978a，1978b，1981)は，その調査結果から子どもたちの反応から文字の意味の６つの解釈が見分けられたと述べている．以下にその解釈を示す.

○数値化された文字 文字に数値を割り当てて計算している.
○使われない文字 文字を無視，あるいはその存在を認めたとしても意味を与えることなしに扱っている.
○物としての文字 文字を物に対する略字かそのものとして扱っている.
○特定の未知数としての文字 文字を未知の数であるものとしてみなし，それを直接操作している.
○一般化された数としての文字 文字を再現することのできる，あるいは少なくともたった１つではなく，いくつかの値をとることができるものとして扱っている.
○変数としての文字 文字を不特定の範囲を表すものとして見ている．そして規則正しい関係は２つの値の集合の間で存在するとみて扱っている.

これら文字の意味の６つの解釈は，この調査で出題された問題に対する生徒の反応で分類されている．それぞれの文字の意味の解釈を問題と対応させて，以下のように詳しく述べている.

1.1.1　数値化された文字

６(ⅰ)「a＋5＝8 のとき，a＝. . .」（正答率 92%）の正答の中の，a の数値を単純な試行錯誤によって直接求めていることを，数値化された文字として解釈する．5 から 8 のよく知っている数のつながりを思い出すこと，あるいは，5 から 8 にたどり着くまで数えることによって正答を導いている．未知数として文字 a が扱われている形跡がないと判断できる文字の理解である．さらに，11(ⅰ)「u＝v＋3，v＝１のとき，u＝. . .」（正答率 61%）と 11(ⅱ)「m＝3n＋1，n＝４のとき，m＝. . .」（正答率 62%）において，11(ⅰ)では v＝１，11(ⅱ)では，n＝４を見た途端，単純に 1＋3＝4，3×4＋1＝13 という具体的操作しか要求されていないと捉えている子どもたちの反応である.

14 では，誤答の r＝10 と答えた生徒は，r＋s＋t＝30 の文字 r，s，t を数値化して 10＋10＋10＝30 と考え，r＝10 と解答している．この式の s＋t を r に置き換えるという操作を避けている.

このような生徒の反応を，数値化された文字としての理解と述べている．下の表３(Table8.2)が取り上げた問題の結果である.

表３　子どもの反応と反応率(14 歳)

Table 8.2　Children's responses (14 year olds)

6(i) (Level 1)		11(i) (Level 2)		11(ii) (Level 2)		14 (Level 3)	
What can you say about a if a + 5 = 8		What can you say about u if u = v + 3 and v = 1		What can you say about m if m = 3n + 1 and n = 4		What can you say about r if r = s + t and r + s + t = 30	
a = 3	92%	u = 4	61%	m = 13	62%	r = 15 r = 30 − s − t	35% 6%
		u = 2	14%	other values	14%	r = 10	21%

1.1.2　使われない文字

５(ⅰ)「$a+b=43$ のとき，$a+b+2=...$」（正答率 97%），(ⅱ)「$n-246=762$ のとき，$n-247=...$」（正答率 74%）の正答の中で，文字を無視して解いていることを，使われない文字として解釈する．無視された文字ともいう．5(ⅰ)は，（２変数なので）複雑であるかのように見えるかもしれない．しかし，実際にはほとんどの生徒が正答している．式 $a+b$ は両方の式にあるので，子どもは+2 の操作に焦点を当てるだけが必要とされているとし，式 $a+b$ は本質的には無視されていると述べている．それは，２つの式の間の違いにだけで注目しているからである．そして 43 に操作を適用している．$a+b$ が無視されているというには適切でないかもしれないが，見つけたものの中でベストな用語であると Küchemann は述べている．子どもはおそらく $a+b$ の存在を記述しなければならないのであるが，$a+b$ が１つの辺（左辺）にありながら式を操作することを思い出すことさえしていないと捉え，使われない文字，無視された文字と名付けている．

表４　子どもの反応と反応率(14 歳)

Table 8.3　Children's responses (14 year olds)

5(i) (Level 1)		5(ii)		5(iii) (Level 3)	
If a + b = 43 a + b + 2 = . . .		If n − 246 = 762 n − 247 = . . .		If e + f = 8 e + f + g = . . .	
45	97%	761	74%	8 + g	41%
		763	13%	15	2%
		Other values	8%	12	26%
				8g	3%
				9	6%

５(ⅱ)はもっと難しい．：数が大きく−246 から−247 にするために（−1）という操作が暗に示され，たし算ではなくひき算を伴っている．しかし，その他の点では，５(ⅰ)と同様であると述べ，再び文字は無視されていると主張する．247 が 246 よりも 1 大きいと考え，762 に 1 を加え 763 と誤答している生徒が 13% いる．５(ⅲ)「$e+f=8$ のとき，$e+f+g=...$」（正答率 41%）も同様な形である

としているが，$e+f$ は無視されているが，g はそうではないと述べている．g は数値化することができないので，特定の未知数として扱わなければならないからである．未知の数である，答えの $8+g$ は”不完全”，”答えがでない”という意味で，Collis は，このタイプの式を進んでうまく処理することを「Lack of Closure の容認」と名付けていると，Collis の主張を引用して述べている．さらに，この調査を受けたほとんどの子どもは $8+g$ をうまく処理できなかったとし，多くは g のもっともらしい答えを見つけることによって，問題を解こうと試みた．（Closure を生み出す.）と主張している．26%が 12（4＋4＋4＝12）という誤答をし，その他９（１をたして）や 10（？），さらに 15（g はアルファベットの７番目の文字なので）という誤答を導いたと報告している．

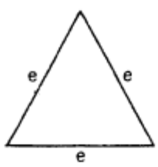
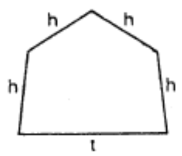
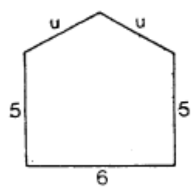
1.1.3　物としての文字

1.1.3.1　物の名前を簡略化した記号としての文字

９において，簡単に一緒にまとめられるはずの文字そのものを（辺の未知の長さとみているのではなく）辺の名前か，表示とみなしていることを，物としての文字として解釈している．具体的には，９(ⅱ)で「子どもたちは，$4h+t$ よりも $4h+1t$ と書いた．また，子どもの 20%は $4h$，t，あるいは $4ht$，あるいは $h\,h\,h\,h\,t$ のような答えを与える解答の類型を生んだ.」と述べている．

表５　CSMS 代数テスト　質問９の正答（14 歳）

Table 8.1　Correct responses to Question 9 (14 year olds)

9(i)	9(ii)	9(iii)	9(iv)
			 Part of this Figure is not drawn. There are n sides altogether all of length 2
3e　94%	4h + t　68% 4h + 1t	2u + 16　64% u + u + 16 2u + 25 + 16	2n　38% n2

特に，９(ⅲ)で，「子どもの 27%が，$2u+16$ の代わりに，$2u+25+16$ のような答えを与えた.」と述べている．９(ⅰ)～(ⅲ)の３つの図形の問題で文字が与えられた図形の未知の辺の長さではなく，図形の辺そのものを示すものとしてみなされていると分析している．９(ⅳ)で調査問題として実際に子どもたちに与えられた図は右のようである．

そして，Küchemann は問題９の中で，９(ⅰ)と９(ⅳ)の結果に着目している．この２つの問題の答えはそれぞれ $3e$ と $2n$ であり，同じような数字と文字の積の形で表される．しかし，正答率を見ると子どもにとっての難易度は，９(ⅳ)の方が高い，つまり難しい問題となっていることが顕著に現れている．この２つの項目で求めていることにどのような違いがあるのかについて分析している．９(ⅳ)では，「n はその値がわからないのであるが，（図形が n 個の辺を持つという）操作されるはずの数として定義づけられている．」とし，「18％の子どもたちが 32，34 など数値化して答えている様子が見られた．実際に問題にかかれている辺を数えることによって，あるいは，そこには 16 本と途中までの辺がかかれているので，それにいくつかの辺をさらに付け加えた図として考えることによって，数値化した答えにたどり着いたと見られる．これらの子どもたちは，数そのものの実在として文字を使うことをしていない.」と指摘している．一方，９(ⅰ)では，「未知の数を表す文字として捉えられているのではなく，文字がもっと簡単な何かを表すものとして捉えられていると考えられる．その何かとは，辺の名前やラベル（表示）である．辺の未知の長さと見ているのではない.」と述べている．この見方は９(ⅲ)において，全体の 27％の子どもが $2u+16$ の代わりに $2u+25+16$ のような誤答をし，９(ⅱ)でも 20％の子どもが $4h,t$ あるいは $4ht$ や $hhhht$ のような誤答をしていることも同様であると述べている．

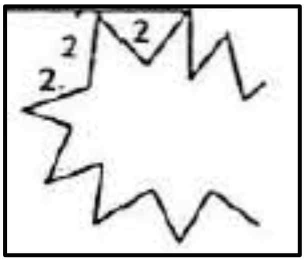


図１　９(ⅳ)の図

９(ⅰ)のように図形が示されていて，その１辺の長さを文字においている場合，文字が辺の名前や辺そのものを表していると捉えやすい．Küchemann は，このとき，物としての文字の理解が現れていると解釈している．一方，９(ⅳ)は，辺の数を文字におく場合，いくつかわからないものを文字として表すので，この調査では，具体的な数値に置き換えている子どもが多く，このとき，数値化された文字としての理解が現れていると解釈している．このように，Küchemann は，９(ⅰ)と９(ⅳ)の子どもの誤答を検討する中で，物としての文字の解釈が生まれたと考える．本調査の問題 13 における子どもの解答については次のように分析している．

表６　CSMS 代数テスト　質問 13 の正答（14 歳）

Table 8.4　Correct responses (14 year olds)

13(i) (Level 1)		13(iv) (Level 2)		13(viii) (Level 3)		13(v) (Level 4)	
$2a + 5a =$		$2a + 5b + a =$		$3a - b + a =$		$(a - b) + b =$	
$7a$	86%	$3a + 5b$	60%	$4a - b$	47%	a	23%

この問題について，「13(ⅰ)と 13(ⅳ)は，$2a+5b+a$ が 2 個のリンゴと 5 個のバ

ナナともう 1 個のリンゴを合わせて, 3 個のリンゴと 5 個のバナナになるということからリンゴ(apple)とバナナ(banana)の簡略化した記号として文字を捉えることによって解くことができる.」と述べ，*a* は apple の頭文字，*b* は banana の頭文字であると考え，リンゴとバナナを連想して計算していると考えている．このように物としての文字には，簡略化した記号としての文字の解釈が含まれると述べている．さらに，その文字が，それらのありのままのものとして捉えられている実態も報告している．つまり，2 つの *a*，5 つの *b* ともう 1 つの *a* として計算している実態である．文字 *a*，*b* を物として見ていると解釈している．

そして，簡略化した文字としての解釈と文字をありのままの物としての解釈の両方のアプローチは 13(ⅷ)（Level 3）で打ち破られると述べ，直接の感覚ではありえない 3 個のリンゴから 1 個のバナナを取り去っている．(そこにいくつかのバナナがあるのなら話は別であるが)，*b* が数として考えられていない限り，3 つの *a* から 1 つの *b* を取り去ることはできないのであると主張している. そして，まさにこれと同種の困難さは，13(ⅴ)の（$a-b$）にも起こっている，と述べている．このような子どもの実態に対して，「物として文字を使うことは，文字本来の意味として使わなければならないとき, それがうまく解釈できない, 処理できない多くの子どもたちに，それに正確に答えることを許した.」と述べている．本来は，未知数や変数として文字の表す数量を捉えた上で，文字式に表したり, 処理したりできるようになるのが理想であるが, そうでなく物として文字を解釈して扱うことによって，物としての文字を超えた使い方ができるようになり, 子どもが正答を導くことができたことを報告している. 本来の文字の意味を理解するための橋渡しとなると考えられる. その一方で, このように正答を導けたことにより物としての文字の意味の捉え方のまま，文字本来の意味に転換することなく先の学習に入ることとなった場合，複雑な数量の関係を扱う場面で誤りが生じてしまう可能性があると説明している．全体としてこの調査によく正答している子どもでさえ，問題 22（表 7 (Table8.5)）において，この混乱が起こっているという．

表 7　CSMS 代数テスト　問題 22 の子どもの反応（14 歳）

Table 8.5　Children's responses (14 year olds)

Question 22 (Level 4)

Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence.

If b is the number of blue pencils bought and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b and r?

5b + 6r = 90	10%
Two correct pairs, of (6, 10), (12, 5), (18, 0), (0, 15).	1%
b + r = 90	17%
6b + 10r = 90 or 12b + 5r = 90	6%

この問題は以下の通りである．

> 問題 22　青い鉛筆は１本５ペンス，赤い鉛筆は１本６ペンスの値段です．私はいくつかの青い鉛筆といくつかの赤い鉛筆を買い，あわせて 90 ペンス払いました．もし b が青い鉛筆を買った数で，r が赤い鉛筆を買った数とすると，あなたは b と r についてどのような式に表すことができますか．

1.1.3.2　１つの物としての文字

この問題に対して「$6b+10r=90$」という式を答えている子どもが，１つの物としての文字として解釈していると分析できると述べている．この式は，「6 本の blue（青い）鉛筆と 10 本の red（赤い）鉛筆の代金が 90 ペンスである」という意味であると述べている．そして，この子どもは，文字，b，r が青い鉛筆の数と赤い鉛筆の本数を表していると捉えているのではなく，１本の青い鉛筆と１本の赤い鉛筆という 1 つの物を表していると捉えていると報告している．

正答である $5b+6r=90$ と立式した生徒の中にも「5 本の blue（青い）鉛筆と 6 本の red（赤い）鉛筆の代金が 90 ペンスである．」と捉えて立式している子どももがいるのではないかと考えられるが，このことについて何の言及もしていない．正答しているが，本来の解釈をしていない子どもは，見過ごされてしまうので，そのような子どもの理解を顕在化することは価値があると考える．

1.1.3.3　物の集合としての文字

「$b+r=90$」という答えをしている子どもが物の集合としての文字として解釈をしていると分析できると述べている．この式は「blue （青い）鉛筆と red（赤い）鉛筆で 90 ペンスになる．」という意味であると述べている．(「$b+r=90$」は，「青い鉛筆と赤い鉛筆の買った数の代金が 90 ペンスである．」と読むことができる．このときは，青い鉛筆，赤い鉛筆の１本１本を表しているのではなく，青い鉛筆の集合と赤い鉛筆の集合を表している．この解答は，まだ問題の具体的な事実と強く結び付いており，数についての「純粋な」言明となっていない．数の $b+r$ は，数の 90 と等しくはならない．)」と指摘している．これは，b と r の数の間の関係より「青い鉛筆に赤い鉛筆をたすと 90p（ペンス）の代金になる．」ということから得られている式であろうと分析している．

1.1.4　特定の未知数としての文字

特定の未知数としての文字は，未知数にもかかわらず特定なものとして考えられている．それは数値化することなしに操作され得る数としてである．特定の未知数の考えは，未知数の初期の観念としている．４(ⅱ)「$3n$ に 4 を加えよ」（正答率 36%）の誤答は興味深い．全体の 31%の子どもは $3n+4$ としないで $7n$ と答えている．問題文で与えられた数値が何を表しているかに関係なく，3 と 4 で 7 になり，最後に n をつけたのである．このように本質的に文字 n は使われず無視されている．さらに 16%は 7 という解答をしている．n はまったく無視

されている．このとき，n は未知数であるが特定の数であるとして，$3n+4$ を１つの数として答えを表していると認められることが，特定の未知数として文字を扱えることであると述べている．

４(ⅲ)「$n+5$ に４をかけよ」（正答率 17％）も同様に全体の 31％の子どもが $n+20$ という解答をし，15％が 20 と解答している．しかしながら，４(ⅰ)「$n+5$ に４を加えよ」（正答率 68％）には，このストラテジーが正しい答えを導くこととなる．68％が $n+9$ という正しい答えを出している．

特定の未知数として議論されたすべての問題は，$8+g$，$2n$，$3n+4$ などの解答を求めている．それは，子どもが $8+g$ や $3n+4$ などが”不完全”であると考えてしまう答え（先述の「Lack of Closure」）となることを容認できないことが議論されている．

表８　生徒の反応（14 歳）

Table 8.6　Children's responses (14 year olds)

4(i) (Level 2)		4(ii) (Level 3)		4(iii) (Level 4)	
Add 4 onto n + 5		Add 4 onto 3n		Multiply n + 5 by 4	
n + 9	68%	3n + 4	36%	4n + 20 or 4(n + 5)	17%
				4n + 5 or 4 × n + 5	19%
		7n	31%	n + 20	31%
9	20%	7	16%	20	15%

1.1.5　一般化された数としての文字

一般化された数としての文字はただ１つの値をとるのではなく，連続した数をとることができたり，表すことができたりすることが特定の未知数と異なっている．特定の未知数としての文字と対比してみると，その文字がある特定な（しかし未知数であるが）値をとると考えられているのであるが，一般化された数として使われる文字は，１つの値より多くの値をとることができると考えられている（その区別は，順々にいくつかの値をとる文字の考えと同時に起こる値の集合を表現する文字の考えによってなされる）．問題 16 で 30％（正答としている）が $c<5$，または，１,２,３,４のような規則正しいリストの答えを出している．しかし，多くの共通した答えは c にただ１つだけの値（例えば $c=4$（39％））を与えている．

18(ⅱ)は，目立って難しいことが明らかとなった．それは，子どもの目では共通ないくつかの値をもっている文字（ＭとＰ）の未知の集合について，その区別がつかないことが現れている．

表９　生徒の反応(14 歳)

Table 8.7　Children's responses (14 year olds)

16 (Level 3)	%	18(ii) (Level 4)	%
What can you say about c if c + d = 10 and c is less than d?		L + M + N = L + P + N is Always　Sometimes　Never true (when)	
c < 5 c = 1, 2, 3, 4 (systematic list) c = 10 − d	11 19 4	Sometimes, when M = P	25
Unsystematic list	1	Sometimes. Or M and P given a specific value	14
One value only (usually c = 4)	39	Never	51

1.1.6　変数として文字

変数として文字を解釈することは，文字間に種々の関係があることに気付くことが必要であるとし，上述の問題 22 を再度考察している．ここでの正答は，変数としての文字を扱うことを必要としていない様々な方法でたどり着くこともでき，解釈することもできる $5b+6r=90$ である．例えば，b と r が特定の未知数として考えられることができたら，b は青い鉛筆を買った本数，r は赤い鉛筆を買った本数と認識できる（この時点でたまたまわかるのではない)．青い鉛筆の代金は「青い鉛筆の１本の値段 (ペンス)」×「買った青い鉛筆の本数 (本)」によって与えられる．$5\times b$ が青い鉛筆の代金として得られる．赤い鉛筆の代金も同様に得られる．

そして，変数として文字を捉えるには，問題の条件を満たす，数対のリストによってその思考が始まるであろうと述べている．b と r は 6，10 や 12，5 や０，15 などとすることができることに気付く．しかし，それは $5b+6r=90$ が，これらの値の一般として見られ，b と r が一般化された数として見られている場合であるとしている．この段階でそれぞれの数対は次々に $5b+6r=90$ を満たすが，それらの数対は全体として考えられているのではない．この段階は，一般化された数としての文字の理解であると考えられる．この段階から，数対が”co-ordination（対等関係）”あるいは”structuring（構造）”として見られるようにになることが変数としての文字の理解であると主張している．例えば「b が増えれば r は減る」という付加的な洞察を導くものである．このレベルの理解の最適な調査項目は問題３（正答率 6%）であろうと述べている．子どもの 71%は $2n$ が $n+2$ より大きいと書いた．このとき子どもは,「なぜなら，かけ算だから」と理由を書いている．それはおそらく直観的に我々の多くが同意してしまうであろう．また，その他の子どもは $n=5$ という n の値を選び，$10>7$ という１つの場合から $2n>n+2$ とし「$n+2$ の方が小さいので $2n$ の方が大きい」と解答してい

ると報告している．以下にその問題を示す．

問題３　２n と n＋２はどちらが大きいでしょうか？説明しなさい．

この問題の鍵は，$n=2$ のとき２つの式が等しくなるという事実である．しかし，子どもはこれをどのように発見するだろうか？考察してみると一般化された数として文字をうまく処理できる子どもは $2n$ と $n+2$ が，$n=5$ と $n=9$ のとき，それぞれ 10，7 と 18，11 になるというように，n にいくつかの値を選び，それぞれの場合が $2n>n+2$ であることから結論を導く．そして，多くの子どもはこれが $2n$ と $n+2$ の間の適切な関係の発見であると満足するであろうと述べている．この場合は，$n=5$ と $n=9$ の場合のそれぞれの式の値は分離している．このような文字の扱いから，10＞7 と 18＞11 の場合の関係，すなわち n の増え方と $2n$ と $n+2$ の増え方の違い（18－11＞10－7）があることに気付き，$2n$ と $n+2$ の間の関係は実際に n とともに変わっていくことを理解していく．これが，「第二次関係（second order relationship）」（あるいは第二次操作）に気付くことであると述べている．このように，文字 n が変数として考えられ，$2n$ が $n+2$ と等しいときや $2n$ が $n+2$ よりも小さいときのいくつかの n のとる値を広げることが，変数としての文字の理解であると述べている．

なお，「変数としての文字」に関して，小岩(2016)は，文字を変数として扱うことについて掘り下げ，1. 1. 6 で取り上げている問題 3 の「$2n$ と $n+2$ はどちらが大きいでしょうか？」に加え，「$2a$ と $a+2$ はどちらが大きいでしょうか？」と問題文の文字 n から a に変えたり,「$3a$ と $a-3$ はどちらが大きいでしょうか？」と比較対象とする文字式を $3a$ と $a-3$ に変えたりして調査を行っている．その調査結果から，この問題で顕在化した理解を，可変性と特定性，「漠然とした可変性」「構造化された可変性」「凝縮化された可変性」の視点から考察している．そして，新たに「第二次関係を言及しているが，境界の特定がない」という実態の理解を特定し，それを「部分的に構造化された可変性」と特徴づけ，文字の可変性についての水準を「漠然とした可変性」「部分的に構造化された可変性」「構造化された可変性」「凝縮化された可変性」の４つに精緻化している．これは，Küchemann の第二次関係で特徴付けられる変数の理解を，「部分的に構造化された可変性」「構造化された可変性」「凝縮化された可変性」の３つに精緻化したものであり，Küchemann の「式の値の捉え方」とは異なる視点，で「文字の理解」を検討した成果を報告している．

1. 1. 7　Küchemann の研究における物としての文字についての考察

数学本来の文字の使用である未知数，一般化された数，変数という解釈がすぐにできるようになるのではなく，特に，変数として文字を理解することには，困難を伴うことが先行研究からわかる．この本来の文字の意味の解釈ができなくても正答を導けるのは，本節で考察している物としての文字の理解が大きく関

わっている．前述のように，文字を未知数や変数などの本来の意味として捉えるのが難しい場合，文字を物として解釈することで正答に導けることがあると述べられているように，文字を未知数や変数などとして見られるようになる途上の段階でこの解釈が起こると考えるが，これについて Küchemann の研究ではその証拠が明らかとなっていない．したがって，本研究で，生徒の実態を詳細に捉えるために，物としての文字の解釈について詳しく考察しておくことが大切であると考え，以下で詳述する．

学校での文字の指導について，Küchemann(1978a，1978b)は「例えば，変数を含む方程式を立式すると我々は，その解き方について「x の項を集める」あるいは「x を，辺を移して符号を変える」などと子どもに説明する．つまり，x を物のように扱っているかのような誤解を与えてしまう．指導の困難さは，子どもが物として文字を扱うことが比較的簡単であり，これが本来の文字の意味の解釈ができるまでの途上の段階であるという事実を覆い隠してしまっていることである．」と述べている．教師側で子どもが捉えやすいように解釈して式を扱ったり表現したりすることで，子どもに文字を物として捉えて処理してよいと勘違いさせてしまっているのではないかということである．さらに，「文字の解釈のより高いレベルが獲得されることを，この物としての文字の使用が阻んでいるかもしれない．」と指摘している．「a が apples を表す．」は，次第に高いレベルへ近づいていくどころか a が apples の個数を表しているという考えと強い矛盾を生んでしまっている．」と指摘している．子どもたちが文字を未知数や変数として捉えることができることを手助けしなければいけない，学習の途上のステップとして，物としての文字の理解があるというのではなく，もちろんそのような段階を経て文字を未知数や変数と見ることができるようになる子どももいると考えられるが，物としての文字の捉えが，多くの子どもにとっては数学本来の文字の使用を促進させるのではなく逆に障害となり，いつまでもその文字の捉え方から抜け出せないでいるのではないかと述べている．この論文から物としての文字の理解に次の①～③の３つがあることがわかる．

① 物の名前を簡略化した記号としての文字

例えば，文字式４h+t に対して，４h，t，あるいは４$h\,t$，あるいは $h\,h\,h\,h\,t$ のように捉える理解である．多角形の１つの辺自体に h や t の名前が付いていて，全体はその寄せ集めと捉えていることから表された式であると考える．物の名前として，その名前の簡略化した文字を操作しようとしていると考える．

また，例えば，$2a+5b+a$ の計算をするときに，a は apple の頭文字，b は banana の頭文字であると考え，りんごとバナナを連想して計算することもこの理解である．主に，表現された式の意味を読むときに起こる．これは，英語圏ならではの解釈であると考える．なぜなら，例えば，a を見てすぐに apple を連想することは日本の生徒にはあまり見られないと考えるからである．

②　１つの物としての文字

前項で考察したが，例えば，問題 22 において，$6b+10r=90$ を事象に戻してその意味を解釈するとき，「6 本の青い鉛筆と 10 本の赤い鉛筆は 90*p*（ペンス）の代金になる.」と答える生徒の理解がこれに当たる．*b* は青い鉛筆そのもの，*r* は赤い鉛筆そのものであると捉えていると考えられる.

③ 物の集合としての文字

例えば，$b+r=90$ を事象に戻してその意味を解釈するとき，*b* と *r* の数量の間の関係より「青い鉛筆に赤い鉛筆をたすと 90*p*（ペンス）の代金になる.」と答える生徒の理解がこれに当たる．等式を立式するときに，青い鉛筆の全体と赤い鉛筆の全体を *b*，*r* と表現していることがわかる．このときの文字は数量を表しているのではなく，鉛筆という物の集合を表している.

1.2　物としての文字に関するその他の研究

本項では，特に物としての文字に関する研究に焦点を当てる．前項でも Küchemann の研究による物としての文字の解釈について詳細に考察を加えた．なぜなら，子どもが先に述べた数学本来の文字の意味，すなわち，未知数，一般化された数，変数として文字を捉える途上の段階として物として文字を扱っている実態が報告されているからである.

1.1.3 において考察した Küchemann の分析結果から得られた，物としての文字には，次の３つがあった.

① 物の名前を簡略化した記号としての文字

② １つの物としての文字

③ 物の集合としての文字

この Küchemann の提案している物としての文字以外に，ラベルとしての文字，一般的な指標としての文字，インデックスとしての文字についての先行研究を考察する.

1.2.1 ラベルとしての文字の研究（Clement(1982)，藤井(1998)）

様々な校種や地域で同様の誤答が現れている有名な問題におけるミスコンセプションとしてこの文字の理解の研究を取り上げる.

Clement(1982)は，150 人の工学専攻の学生へ 45 分間の記述テストを実施し，その中で６つの質問をしている．そのうちの１つが「学生・教授問題」である．問題は以下の通りである.

問題　「この大学には教授の６倍の学生がいます.」これを学生の数にはＳを使い，教授の数にはＰを使って書きなさい.

この問題の正答は，Ｓ＝６Ｐであり，正答率は 63％である．典型的な誤答は，６Ｓ＝Ｐであり，リバース・エラーとよばれている．この結果の原因となる認知

的な事柄を実証するために，彼は 15 名の１年生にインタビュー調査を実施している．リバース・エラーの２つの概念的な原因，統語論的な文章の順序にあったアプローチ（1. 2. 1. 1）と，意味論的な静的な比較のアプローチ（1. 2. 1. 2）を特定している．このときに立式した式における文字Ｓ，Ｐをラベルとして扱っている様相が現れていると主張している．

1. 2. 1. 1　統語論的な文章の順序にあったアプローチ

学生は，問題文中のキーワードの順序が直接方程式を表す記号の順序でつくられるだろうということを当然のことと思っている．これは，式の意味に依存していない式の記号を配置するための規則に基づいているという点で統語論的なストラテジーであると述べている．例えば，対象実験者Ｓ１は，問題文を読んで直ちに６Ｓ＝Ｐと書き，「うーん，問題が「６倍の学生」と言っています．だからＳの６倍が教授とイコールになります.」と言ったことを報告している．これは問題の文章の順序に方程式の記号の順序を機械的に合わせていると述べている．これは，［６］，［倍］，「学生」，「教授」の言葉の連続を記号化することとして方程式を立式するというアプローチであると分類している．このとき，学生Ｓ，教授をＰとするといった①の理解であると考えられる．確かにこのように立式していくと，リバース・エラーになりやすいと考えられるが，Clement は，リバース・エラーはこれだけで生まれるのではないとしている．

1. 2. 1. 2　意味論的な静的な比較のアプローチ

正しい方程式は，２つの等しくないグループの比較をし，何とかして２つの等しいグループを表す方程式の表記法へ強制的に当てはめようとしているのである．正しい方程式Ｓ＝６Ｐを立式することは，逐語的な，あるいは直接的な場面を記述することによってできるのではなく，ある特定の仮定の操作，すなわち現実での数ではなく教授の数を６倍にするグループをつくることを実行し，それによって生ずる同値の関係を記述することによって正しい方程式を立式することができる．これを静的な比較のアプローチと名付けている．

誤答している学生は，ⓈⓈⓈⓈⓈⓈ＝Ⓟ と，右から左へ，その中にＰがかいてある１つの〇と，等号と，Ｓがある中にかいてある６つの〇をかいたので，この図の意味について尋ねると，「１人の教授（中にＰがある〇をかいて）がいます．中にＰがかいてある〇の次に「＝」を置きます．そして１人の教授に対して６人の学生がいますということです．だからその中にＳがある６つの〇をおくと，（等号の左に６つの〇をかき，その中にそれぞれＳを書いて）等しくなります.」と答えている．この反応は，単に統語論的や文章の順序にそったストラテジーに基づいているのではなく，１人の教授と関連付けられた６人の学生のグループを表現することとして認識されている．この解釈に基づいて，等号は，同値ではなくむしろ対応や関係を表している．これは，「学生の数にＳを使いなさい」ということを，「１人の学生にＳを使いなさい」と解釈しているので

あろう．このとき，ラベルとして文字を解釈していると考えられると述べている．代数の文字が対象のラベル（例えば，Ｐは「教授」を意味すること，あるいは，１人の教授を記号化していること）であるという信念は，共通のミスコンセプションとなっていることを示している．これをラベルとしての文字とよんでいる．このように立式している学生の絵をみると，文字Ｓ，Ｐは単に名前の省略として使っているのではなくⓈⓅのように文字をラベルのように使っていることから①の物の名前を簡略化した記号としての文字とは区別しているが，①と類似していると考えられる．

藤井(1998)は，リバース・エラーを起こす学生の文字の取り扱いは，「物としての文字であり，Ｓはひとりの学生を表していると考えられる．すなわち，文字は数を表しておらず，学生や教授それ自体を表している」と述べており，「この問題では，学生と教授の人数の関係を等号で結ぶという操作を行うことによって，学生の物としての文字の理解が顕在化している」と主張している．この解釈でいくと，②の理解と一致するということである．この問題では，数量の等しい関係を見いださなければならず，この問題で多くの生徒が誤答している原因が文字の理解にあることが現れているといえると述べている．

日本では，久米ら(1990)のチームがアメリカと日本の学生の文字の使用に対する実態を明らかにするために，同様の問題を用いて日本の中学生と大学生を対象に調査を行っている．その結果，文字に対する理解がしっかりできている日本の大学生でもリバース・エラーの誤答の割合が多かった．つまり，方程式において，具体的な実在を示すラベルとしての文字とみなすミスコンセプションは，なかなか解消されにくいことが明らかとなったと述べている．

この文字の理解を Clement はラベルとしての文字の理解とし，藤井は，１つの物として文字の理解であると主張している．本研究では，①や②の理解と類似，あるいは一致していると考えられるが，Clement の主張から物としての文字の４つ目とする．

1.2.2　一般的な参照としての文字の研究（MacGregor & Stacey，1993，1996）

MacGregor & Stacey(1996)の研究では，「David は Con より 10ｃｍ身長が高い．Con は h ｃｍの身長である．David の身長を記述しなさい．」という問題に対して，生徒が，h を使わず，C＋10＝D と記述する例を示し，C は「Con の身長」，D は「David の身長」を意味する数量に関連したラベルとしての文字の理解を調査結果から報告している．これも，Küchemann が捉えている物としての文字の３つの意味の「物の名前を簡略化した記号としての文字」に近いが，Con の身長や David の身長を文字で表していることから，単に名前の簡略として使っているのではなく，前述と同様にラベルとして文字を使っていると解釈できる．さらに，$h=h+10$ と記述する誤答例を示し，h は「David の高さ」「Con の高さ」双方の意味を表すという様々な内容を含む一般的な参照として文字を理解していると主張している．

1.2.3　インデックスとしての文字の研究（Radford(2003)）

Radford(2003)は，下の図４のようなつま楊枝で作った三角形のパターンをFigure1〜3 を見せ, Figure 5, Figure 25 のときのつま楊枝の数を実際に求めた後, Figure *n* のときのつま楊枝の数を尋ねている.

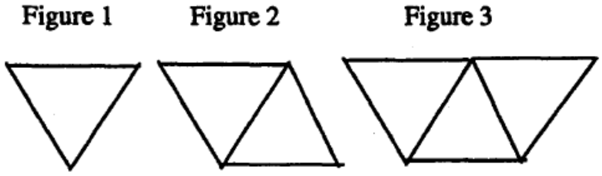


図４　つま楊枝パターン

このとき，生徒は，Figure *n* のときのつま楊枝の数を，$(n+1)+n$，$(n+n)+1$ と文字 *n* を使って表しているが，つま楊枝の数として *n* を使っているのではなく，図に示されている Figure 1，Figure 2，・・・・・・，Figure *n* の *n* を使って表したに過ぎず，このときの文字 *n* は，インデックス（指標）として用いられていると主張している.

以上，Küchemann の提案している物としての文字３つ，すなわち，

① 物の名前を簡略化した記号としての文字
② １つの物としての文字
③ 物の集合としての文字

に，

④ ラベルとしての文字
⑤ 一般的な参照としての文字
⑥ インデックスとしての文字

を加え，物としての文字の解釈を６つに分類する.

1.3　文字の変数概念の二面性についての研究

1.1 と 1.2 で考察してきた Küchemann の研究を基にした文字の意味の解釈の他, 本研究と関わりのある文字の理解についての他の研究として，文字の変数概念の二面性の研究について考察する.

1.3.1　文字の変数概念の二面性の理解：不特定性と特定性

藤井(1992)は，「文字には任意の数が当てはまる」というミスコンセプションを見いだす調査を実施しており，その中で，変数概念の二面性について議論している．変数は，中学校の教科書では普通「いろいろな値をとる文字」と定義されており，これは，文字に対してある数範囲が対応し，その範囲のどの数をとるかということを不問に付している点を強調して表現されていると述べ, 変数概念のこの側面を藤井は，「不特定性」と名付けている.

一方，「変数概念は『不特定性』に対して『特定性』とよぶことのできる側

面を備えている」とも述べている．この変数概念の「特定性」は，「計算」が関与した文脈でより顕在化するとしている．「なぜなら『特定性』は文字，特に『不特定性』をもつ文字が計算の対象となった際に，その計算が実行できる前提にほかならないからである．文字*a*，*x*などは計算の対象となり，その文字の具体的な意味を離れて，統辞論(syntacics)に文脈で形式的に処理できるという優れた長所を持っている．計算の対象になるということは，そこでの文字が終始一貫同じ値を保っていることを前提とする．」と述べている．文字のこの側面こそ不特定性に対して特定性とよぶことのできる変数概念の特徴であるとしている．

そして，この二面性は，一見すると矛盾しているように思われるが，表裏一体のものであり，文字理解の礎となる性質であると述べている．このことについて，加藤(1965)は，前者を可変性，後者を不変性と名付けているが，着眼点は同じであると言えよう．

藤井の述べている，文字の変数概念の二面性の考えを基に，授業実践を行った吉野（1993）は，前述のKüchemann(1978a,1978b,1981)が見いだした文字の意味の解釈，すなわち，①未知数としての文字，②一般化された数としての文字，③変数としての文字を，不特定性と特定性に位置付けて，次のように解釈している．

① 未知数としての文字は，「特定の未知の数」を文字で表しているので，特定性を重視している．
② 一般化された数としての文字は，「場合場合に応じていろいろな数となる可能性を含んでいるが，ある１つの場面ではこれと決めることのできるような数」を文字で表しているので，「不特定性」と「特定性」をともに重視している．
③ 変数としての文字は，「いろいろな値をとる」文字であるので，不特定性を重視している．

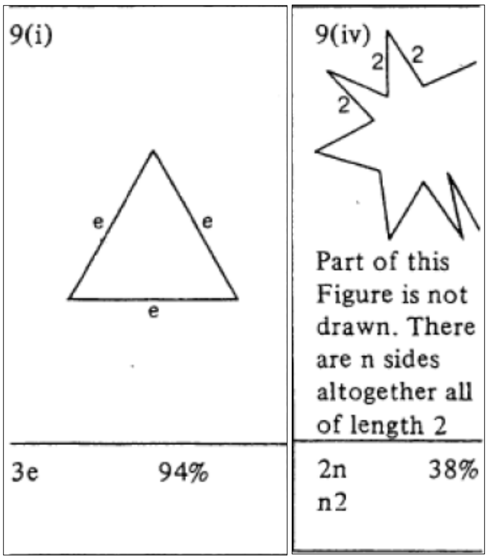
文字の変数概念の二面性である特定性と不特定性の視点で，Küchemannの問題の分析を見直し，問題９(ⅰ)と(ⅳ)に注目する．以下にその分析について述べることとする．

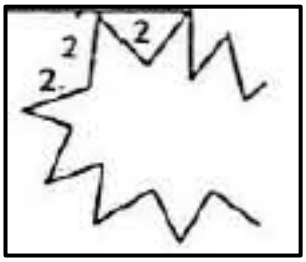
Küchemann は，次の問題を取り上げ，三角形や五角形など，多角形の辺の数は与えられていて１辺の長さを文字において辺の長さの合計について式で表す９(ⅰ)と，１辺の長さは与えられていて辺の個数を文字において辺の長さの合計について式で表す９(ⅳ)を対比させ，前者は，物としての文字の理解，後者は，数値化された文字の理解が顕在化されていると主張している．これについては，本省第２節の 1.1.3 で述べている．

９(ⅰ)では，図で３つの辺の長さが *e* と示されている．つまり，*e* が３個であ

るため，辺そのものが e であると解釈されやすく，物と見ても辺 e が３つあると考えられ，３e を容易に導くことができ，正答となる．このとき，e と答えの３e は，いずれも同じ数量である辺の長さを表している．

一方，９(ⅳ) では，辺の長さが２と示され，その個数を n と表す．つまり，２が n 個あるとみる．この場合は，図のように図形が途中で途切れており，n を図で明示できない．この調査では，子どもたちが特定の数値にして答えていることを報告している．長さ２の辺が 10 個や 20 個などと特定の数値であると周の長さは求めやすいが，n 個あることはイメージしにくい．文字の不特定性に対して特定性を見いだすことが生徒たちに困難であることが現れている．また，n は辺の個数を表しているのに対して，答えの２n は周りの長さを表しているので，２n とこの式における文字 n の表している数量が異なる．





９(ⅳ)で調査問題として実際に子どもたちに与えられた図

1.3.1.1　文字式の意味を解釈に関する研究

変数の概念の二面性である不特定性，特定性について，文字式を事象に即して解釈する場面で子どもの様子を考察する．式 $8c+6t$ の意味を読み取る問題10（キャベツとかぶの問題《以下に示す》）では，c と t がキャベツとかぶそれぞれの個数を表していると解釈せず，文字それぞれがキャベツとかぶそのものであると捉えている実態が報告されている．問題10のキャベツとかぶの問題は以下の通りである．

問題 10　キャベツとかぶの問題 キャベツは１個８ペンスで，かぶは１個６ペンスの値段です．このとき，c を買ったキャベツの個数とし，t を買ったかぶの個数とすると，$8c+6t$ は何を表していますか？買った野菜の合計は何個ですか？

この問題は，キャベツとかぶそれぞれ１個の値段が定数として与えられ，個数が変数（未知数）となっているので，おいている文字の数量と文字式の表す数量が異なる９(ⅳ)型の問題であると見ることができる．この問題の文字式は，１個８ペンスのキャベツc個と１個６ペンスのかぶt個を買ったときの代金の合計を表している．しかし，文字cとtの不特定性をうまく捉えられないため，子どもは，定数の８と６を値段ではなく個数を表すと解釈し，文字をキャベツとかぶそのものと捉えて意味付けている，つまり，９(ⅰ)型に意味を変換しており，文字を解釈する場面で物としての文字の理解として現れている．

1.3.1.2　文字式を立式することに関する研究

xを用いた式を操作するとき，何かわからないものを取り扱うため抵抗を示す子どもたちが存在することが報告されている．その子どもたちは数では立式ができるのであるが文字式になるとその意味がわからなくなり，立式ができなくなってしまう．このような困難性を示す生徒は日本にも少なからず存在していると考えられる．これについての興味深い調査が，Esty & Teppo(1996)の研究である．彼らの調査における結果を考察することにする．彼らは，文字式の操作ができないのは算術的な思考から代数的な思考へ移行できないことに関係すると主張している．次の問題で彼らは数から数の演算や数の関係への思考の移行に焦点を当てている．そして，この問題が，文章問題の答えを見つけるために，数を用いて初歩的な対象を考察して立式することより，文字を操作して立式することが大切であることが明らかとなっている．また，代数的な思考と算術的な思考に隔たりがあることも明らかにしている．

問題
(a) １辺が100ｍの正方形の土地に内接するように円の道を作ります．その外側に庭を作ります．庭の面積を求めなさい．
(b) 円の外側の庭の面積を1400㎡とすると１辺の長さは何ｍになるでしょうか．（実際の問題では単位はフィート）

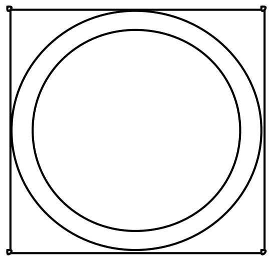


図５

(a)の答えは，$100^2-\pi(50)^2$である．

(b)の答えは，$x^2-\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=1400$となり，解は，$x=\sqrt{\frac{1400}{1-\frac{\pi}{4}}}$　である．

(a)が算術的な思考で解ける問題，(b)が代数的な思考を要する問題と位置付けることができる．

この結果を見てみると，算術的な思考で解くことと代数的な思考で解くこ

ととが劇的に異なることが明らかになっている．(a)は正答率が63.4%に対し，(b)はわずか7.6%になってしまう．１辺を x として立式することが，生徒たちにとって困難であることがよくわかる．(b)の解答を詳しく見てみると，正答した7.6%の生徒はすべて正しく立式した生徒で，その後の２次方程式の計算では１人も間違っていないのである．誤答のうちの13.6%は立式で失敗している．残りの78.8%の生徒は文字式の立式ができないのである．事象における数量の関係を数学の舞台にのせて解決するために，文字を用いた式に表すことが，算術的な思考から代数的な思考への移行の中で子どもたちにとって困難であるということがよく現れた事例である．

また，わからないものを，x を用いた式に表すことがいかに困難であるかということがよく現れている．文字の変数概念の二面性である不特定性，特定性の視点で述べると，わからないものという文字の不特定性が意識されている．文字に特定の数が存在すると見て，その文字を用いて式に表すことができない生徒の実態が浮かびあがっている．

1.3.1.3　文字を操作する（方程式を解く）ことに関する研究

前項でも議論をした，形式的な処理において生徒がわからないもの，つまり，不特定性であることが強調された文字を操作することに抵抗を示している事例を挙げる．Davis(1975)は７年生のHenryという１人の子どもと15分間のインタビュー調査を行っている．彼は，Henryの問題を解く過程をインタビュー時のプロトコルをもとに分析している．彼がHenryに提示した課題は，$\frac{3}{x}=\frac{6}{3x+1}$ の方程式を解くことである．その中で次のようなやりとりが行われている．

質問者：え〜，左辺から３を得ましたね．

$$\frac{3}{x}=\frac{6}{3x+1}$$

$$3=$$

質問者：今，xを左辺にもかけなければならないですね．何を得ますか？

Henry：xが何かわからないのに，どのようにxをかければいいのですか？

Henryのこの発言は，まさしく何かわからないもの x を操作することに抵抗を示しているものであると考えられる．$x \neq 0$ という条件で，数と同じように考え方程式の両辺に x をかけて分母を払うことはできるはずである．彼は，左辺には x をかけ３を得ることができたのであるが右辺にも x をかけるとき，「どのように x をかければよいか」という疑問が生じたのである．x は何かわからないという意識が，数と同様な操作を妨げていると思われる．このインタビューで用いられている問題では，日本の中学校数学では出てこない x が分母にくるという分数方程式を解くことを求めている．この被験者の反応を，変数概念の二面性の視

点で述べると，x を両辺にかけるということは，$x \neq 0$ という条件のもと，x の値を不問に付して計算する必要がある．つまり，文字の不特定性を理解した上で，特定な数値があると考えないと処理を行えないという典型的な場面である．被験者の Henry の理解は，その困難性が顕在化していると考えられる．

1. 3. 1. 4　生徒自ら立式した方程式の意味の解釈に関する研究

文字の解釈を変える生徒の実態が報告されている Stacey & MacGregor (1997) の研究を見ることとする．彼らは，方程式の立式の場面で，子どもが与える文字の意味について研究している．彼らは，オーストラリアの９年生 249 人と 10 年生 700 人に文章問題の立式に関する質問紙調査を実施し，そのうちの６人の生徒（14，15 歳）を対象にインタビュー調査を行っている．この調査は，代数的方法を使おうとすることに影響する「未知数」を文字として使用することがいかに難しいかを示すことを目的に行われている．このとき用いた質問紙調査の問題の１つは次の MARK の問題である．前節で考察した，Stacey & MacGregor (1999)の中でも取り上げている問題である．

MARK の問題
Mark と Jan はお小遣いをもらいました．Jan は x ドルもらい，Mark は Jan より５ドル多くもらいました．Jan と Mark のもらったお小遣いの合計金額は 47 ドルです．　Mark のもらったお小遣いの金額を表すために代数を用いなさい．また，Jan と Mark がそれぞれいくらもらったのか求めなさい．

この問題に対して，インタビュー調査の被験者である６名中２名が Mark のもらっている金額を x＋５と表し，方程式を５＋x＝47 と立式している．そして，この２名の被験者は，インタビューの中で，例えば，x が「２人のもらったお金の総額」「Jan のもらった金額」「47 ドル」を表すというように x の指し示す数量を変えている実態が現れている．また，もう１名の被験者は，x＋５と Mark の金額を表し，方程式を５＋x＝x と立式している．彼は x を「Jan の金額」「合計」「合計の半分」を意味しているものというように x の指し示すものをインタビューの中で変えている．そして，最後に彼は，「x を半分で割ると x と等しくなります．」と発言し，［$x \div \frac{1}{2} = x$］のように記述している．

この調査では，それぞれの被験者が立式した方程式に用いた x の指し示す数量をインタビューの中で変えているという実態が報告されている．問題場面が金額を問う場面であるので，他の数量は出にくいとは思われるが，変えている x の指し示す数量はすべて「金額」という同質の数量である．ここでも被験者たちの反応を，変数概念の二面性の視点で述べると，文字 x が同じ文脈の中では終始一貫して同じ数量を表していると理解していないと見ることができる．つまり，不特定性は捉えられているが，特定性が捉えられていない生徒の文字の理解が

顕在化していると見ることができる．特に，同じ式における文字 x を異なる数量として見ている実態が現れている．

この項で取り上げた様々な場面における被験者の反応は，文字の変数概念の二面性である，特定性と不特定性の両方の理解が十分でないことに起因するとみることができる．つまり，この二面性について理解するには困難が伴うということである．

また，この二面性は，Küchemann の述べている文字の意味の６つの解釈と関連している．そこで，本節で精査した先行研究を踏まえ，Küchemann の研究で示されている文字の意味の６つの解釈と，文字の変数概念の二面性を基にして，生徒の文字の理解を捉える枠組みを設定することとする．

第３節　本研究の焦点：文字式の二面性と文字の意味の理解

本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することである．生徒の理解をこの２つの視点で分析する際には，それぞれの理解を捉える枠組みが必要となる．

本章では，文字式をひとまとまりと見ることの理解には，文字式の理解の二面性である，過程と対象の見方が必要であると考え，このことに関連する先行研究を考察し，それらから理解を捉える枠組みを導出することをねらいとしている．また，文字の意味については，６つの解釈，すなわち，数値化された文字，使われない文字，物としての文字，特定の未知数としての文字，一般化された文字，変数としての文字を精査する必要があると考え，先行研究を考察し，文字の理解を捉える枠組みも導出することをねらいとしている．

第１節では，文字式の理解の二面性として，文字式を計算の過程，操作を表すものとしてみる見方をプロセスの見方，そして，文字式自体が対象であり，１つの値，結果を表すものとしてみる見方をプロダクトの見方と名付け，それぞれの見方の根源となる研究を考察し，これらについて定義した．そして，このプロセス・プロダクトの視座で捉えているこれまでの研究を取り上げ考察した．先行研究の中では，プロセス・プロダクトの両方の見方ができる発展した見方について言及している研究があり，プロセス・プロダクトの両方で見ることができることをプロセプトと定義している．本研究で焦点を当てる，式をひとまとまりと見ることは，プロセス・プロダクトの両方の見方ができることである．そこで，本研究でも先行研究と同様，プロセス・プロダクト両方で見ることができる見方をプロセプトと定義する．

これらプロセス・プロダクトの視座から文字式の理解を検討した研究には，具体的な代数の計算等の場面において，生徒の文字や文字式の理解の進展の状況を深く掘り下げ，その様相を捉えている報告はなされていない．また，プロセスとプロダクトの移行により，両方の見方が二重にできるプロセプトの段階にどのように移行するのか，その理解の様相の具体は報告されていない．

そこで，本研究では，文字式の二面性であるプロセス・プロダクト，そしてその両方の見方のできるプロセプトの視点で，生徒の文字式の理解を捉えることを意図し，これを文字式の理解と捉える枠組みとして設定することとする．

また，本研究では，プロセスからプロダクトへの移行の段階をプロセスのプロダクト化と名付けることとし，この移行についての理解の様相を捉えることに焦点を当てることとする．

文字式の理解を捉える研究は第１節で述べた．文字式の理解を捉える上で，その式に含まれている文字の理解を考察することが必要であると考える．

そこで，第２節では，Küchemann の提案している文字の意味の６つの解釈を中心に考察し，特に，本研究に深く関わる「物としての文字」についての先行研究を詳細に考察し，それらで報告されている生徒の理解を分類した．さらに，文字の理解の礎となる性質である文字の変数概念の二面性について考察し，文字をわからないものとして扱う不特定性に対し，特定であることを見いだして文字を扱うことに困難を感じている生徒の実態や文字の意味をインタビューの中で変えていくという実態について考察した．この中では，Küchemann が分析している調査問題，例えば，９(ⅰ)のように，文字式３e を１辺の長さ e(cm)の３個と捉えて立式する文字式を本研究では（変数の定数倍）型と名付けることにする．このとき，文字 e と結果を表す３e が同じ数量を示しているまた，９(ⅳ)のように，文字式２n を１辺の長さ２(cm)の n 個と捉えて立式する文字式を本研究では（定数の変数倍）型と名付けることにする．このとき，文字 n と結果を表す２n が異なる数量を示している．見かけ上は同じ数字と文字の積の形であるが，特に，定数の変数倍型の立式を事象に戻して解釈するときに，例えば，２の n 個を捉えるのが難しいと考えられる．前述のように n 個あることを図に表すことができないからであり，文字はわからない数を表しているという不特定性が意識されているからであると考えられる．文字の変数概念に二面性が関わっている．これについても，これまでの研究をこの視点で分析した．

以上のことから，本研究の生徒の文字式における文字の理解を捉える枠組みを， Küchemann の提案している文字の意味の６つの解釈と，その基礎にある変数概念の二面性である特定性と不特定性を加えて設定することとした．

なお，枠組みを設定するために考察したこれらの先行研究は，1980 年代から 1990 年代に報告されたものが多く，2020 年現在から 20 年以上前の論文を引用している．最近の論文を当たると，それらの引用・参考文献から文字や文字式の理解の研究の根源は，本研究で取り上げている Küchemann，Kieran，Sfard，Gray&

Tall，そして，日本では藤井の研究であることが明白である．よって，本研究では，文字式とその式における文字の理解の枠組みを設定する際に，本質的なこれらの研究を基にすることとした．

これらを生徒の文字式とその式における文字の理解を捉える枠組みとして，インタビューのプロトコルを分析し，理解の様相を明らかにすることとする．

以下に，本研究で焦点を当てる式をひとまとまりと見ることの理解を捉える枠組みを示す．

表 10　式をひとまとまりと見ることの理解を捉える枠組み

文字式の理解	文字の理解
プロセス	数値化された文字
	使われない文字
プロダクト	物としての文字
	・簡略化された記号としての文字
プロセプト	・ラベルを表す文字
（Sfard ら，Gray ら）	・１つの物を表す文字
	・物の集合を表す文字
	・一般的な指標を表す文字
	・インデックスを表す文字
	$\left.\begin{array}{l}\text{特定の未知数としての文字}\\ \text{一般な数としての文字}\\ \text{変数としての文字}\end{array}\right\}$ 特定性と不特定性（藤井）
	（Küchemann ら）

表 10 で示した先行研究は，文字式の理解と文字の理解は別々に論じられており，同じ具体的な場面で文字式の理解とその式における文字の理解を同時に分析している研究は見当たらない．しかし，文字式の理解を捉える際に，その式における文字の意味を生徒がどのように捉えているかを顕在化すれば，生徒の実態をより精緻に捉えることができ，そこから学習指導へ示唆を得ることができるはずである．なぜなら，文字と文字式は同時に指導されているからである．

そこで，本研究では，具体的な問題について，生徒が文字を用いた式を活用して問題を解決する過程において見られる理解の様相を，文字式の理解の二面性であるプロセス･プロダクトと，その文字式における文字の意味の６つの解釈と文字の変数概念の二面性という，文字式の理解を捉える枠組みと文字の理解を捉える枠組みの２つを設定し，同時に分析することとする．

これを質問紙調査の記述とインタビュー調査の記述とプロトコルから行う．これが，他の研究にはない本研究のオリジナリティーである．このことを図にす

ると次のように表される．

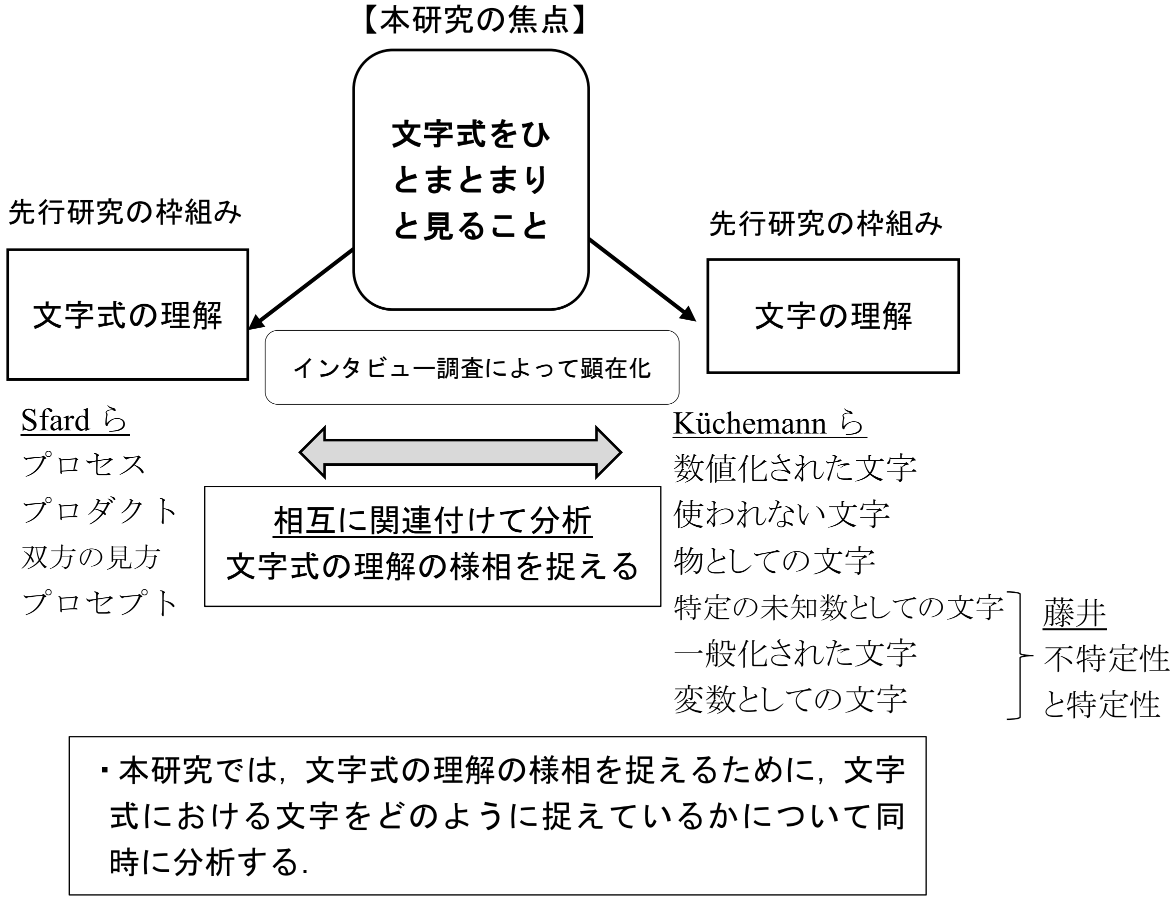


図６　式をひとまとまりと見ることに関する文字式とその式における文字の理解の分析の視点

本調査では，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面の２つの調査を計画する．

前者の場面では，問題「$a+3b+5c=25$ のとき，$a+3b+5c-10$ の値を求めなさい．」を用いてその解決の過程を記述させる調査を行う．この問題の a，$3b$，$5c$ は a が１つ，b が３つ，c が５つと捉えることで，解決することができる．つまり，（変数の定数倍）型と見ることができる．

後者の場面では，問題「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．」を用いて立式と解決の過程を記述させる調査を行う．この問題の立式によって出てくる文字式 $3x$，$5x$ の解釈は，３の x 個（倍），５の x 個（倍）と見ることが要求され，x の表す数量と $3x$，$5x$ の表す数量は異なる．すなわち，（定数の変数倍）型である．

本研究で用いる調査問題には次のような関連をもたせている．

前者の問題で，文字式 $a+3b+5c$ をひとまとまりと見ることができるかどう

かを問う．この式の a，b，c は何を表しているのかはわからない．よって，$3b$ も $5c$ もわからない．しかし，これらの単項式の和の形で表された式 $a+3b+5c$ は 25 と等しいことが示されている．

一方，後者の問題では，生徒の人数を x 人とおくと，$3x+20=5x-2$ と立式ができる．この方程式の両辺である $3x+20$ と $5x-2$ をひとまとまりと見ることができるかどうか，そして，$3x$，$5x$ もひとまとまりと見ることができるかどうかを問う．特に，左辺である $3x+20$ に着目すると，この式において３も x も 20 も何を表しているかは示されている．しかし，単項式の和の形で表された $3x+20$ は，何を表すかは明示されていないのでわからない．さらに，３と x の積の形で表された $3x$ についてもわからない．

このように, 式をひとまとまりと見ることに関する２つの異なった場面, すなわち, 複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と, 方程式を立式する場面において, 扱う式に関連をもたせて調査を実施することを計画し, その理解の顕在化を目指す.

第３章において，前者の問題を，第４章において，後者の問題を用いて，調査問題を開発し，実態調査を実施することとする．

第２章の引用・参考文献

(1) Bell,A.,Malone,J.＆ Taylor,P.C.(1987):Algebra-an exploratory teaching experiment,Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.

(2) Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In Nadine Bednarz,Carolyn Kieran, & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. *Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

(3) Clement,J.(1982).Algebra word problem solutions.Thought processes underlying a common mis-conception. *Journal for Research in Mathematics Education*,13,1,16-30.

(4) Cobb,P. & Steffe,L.P.(1983). The Constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14, 83-94.

(5) Cortes,A.(1995). Word problems: Operational invariants in the putting into equation process.International Group for the Psychology of Mathematics Education. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*.2.58-65.

(6) Davis,R.B.(1975).Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations.*Journal of Children's Behavior*,Vol.1,3,7-35.

(7) 榎本哲士.(2010).中学校数学科における文字式の理解に関する一考察−方程式とその解の意味に焦点をあてて−.第43回数学教育論文発表会論文集,567-572.

(8)　榎本哲士.(2013).学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築.日本数学教育学会誌数学教育学論究,臨時増刊,95,145-152.

(9)　Esty,W & Teppo,A.(1996).Algebraic thinking, language,and word problem. *Communication in Mathematics,K-12 and Beyond*, Yearbook NCTM,45-53.

(10)　Filloy,E. & Rojano,T.(1989).Solving equations: the transition from arithmetic to algebra.*For the Learning of Mathematics* 9, (2), 19–25.

(11)　藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査.日本数学教育学会誌数学教育学論究,臨時増刊,74,58,3-27.

(12)　藤井斉亮.(1998).学校数学における文字の理解について.「学生・教授問題」再考.山梨大学教育人間科学部研究報告,49,31-38.

(13)　Gray&Tall.(1994).Duality,ambiguity,and flexibi-lity:A"proceptual"view of simple arihtmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*,25-2,116-140.

(14)　加藤國雄.(1965).　数学の問題解決における思考（その11）−代数的思考について−.　山梨大学学芸学部研究報告.199-204.

(15)　小岩大. (2004). 文字式の理解を捉えるための調査問題の開発－process-productに焦点を当てて－，第37回数学教育論文発表会論文集，256-264.

(16)　小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究−文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて−.東京学芸大学博士論文.

(17)　Kieran,C.(1981).Concepts associated with the equality symbol.*Educational Studies in Mathematics*,12,317-326.

(18)　Kieran,C.(1992).The learning and teaching of school algebra, D. A.Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*,A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,390-419.Macmillan.

(19)　Kieran,C.(2007).Learning and teaching algebra at the middle school through college levels.F.K.Lester,Jr(Ed.),*Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,Volume 2,707-762.

(20)　久米成夫，松本吉陽，村上豊，高橋のぞみ.(1990).文字の理解に関する一考察-実態調査の結果を中心として-.学芸大数学教育研究,2,27-35.

(21)　Küchemann,D.(1978a).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*,7(4),23-26.

(22)　Küchemann,D.(1978b).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7(5),12.

(23)　Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children’s Understanding of Mathematics*,11-16,102-119.John Murray.

(24)　MacGregor,M & Stacey,K.(1993).Cognitive models underlying students’formuration of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(3),217-232.

(25) MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students' interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.
(26) 三輪辰郎.(1991).式の指導内容の概観と問題点の考察.新・中学校数学指導実例講座,数・式,39-74.金子書房.
(27) 三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.
(28) Radford,L.(2000).Signs and meanigs in students' emergent algebraic thinking:A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*. *An International Journal*,42,237-268.
(29) Radford,L.(2003).Gestures,speech,and the sprouting of sings:A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*,5(1),37-70.
(30) Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*,22,1-36.
(31) Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.
(32) Stacey,K.& MacGregor,M.(1997).Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra.*Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.4.14-19.
(33) Stacey,K & MacGregor,M.(1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2),149-167.
(34) Steffe,L,P.(1991). The Constructivist teaching experiment:Illustration and implications.von Glasersfeld,E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 177-194.
(35) Swafford,J,O. & Langrall,C,W.(2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 1, 89-112.
(36) 田中泰慶.(2003).中学校「文字式」領域におけるプロセプト的見方の実態とその指導法の研究，第36回数学教育論文発表会論文集，127-132.
(37) Tall,D(2016).数学的思考−人間の心と学び,磯田正美・岸本忠之監訳,共立出版.
(38) Vergnaud,G.(1984).Understanding mathematics at the secondary-school level.Theory, Bell,A., Low,B., kilpatrick,J.(Eds.)research & practice in mathematics Education,*Report of ICME5 Working Group on Research in Mathematics Education*,27-35.
(39) 吉野恭子.(1993).文字式の導入の一考察.日本数学教育学会誌算数教育,75,10,19-26.

第３章
式をひとまとまりと見ることについての実態調査Ｉ：単項式の和の形で表された文字式

本章では，複数の単項式の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査Ｉを実施する．この調査は，文字式をひとまとまりと見ることについて，その理解の様相を顕在化し，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることを目的とし，中学校第３学年を対象に，文字式を１つの値として答えを求める問題（$a+3b+5c=25$ のとき $a+3b+5c-10$ の値を求める問題）を用いた調査を行う．そして，生徒の理解の様相を詳細に探るため，質問紙調査をもとに選出した 11 名を対象に，インタビュー調査を実施し，そのプロトコルを文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点で分析する．

第１節　実態調査Ｉについて

１．調査の意図と目的，調査問題

1.1　調査の意図

本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することである．

本章では，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面における生徒のの理解を探る調査を実施する．この調査を実態調査Ｉとする．

筆者は，本調査に先立って，平成８年に質問紙とインタビューからなる実態調査を実施している．この調査では，公立中学校２校の第２学年の生徒を対象に本調査と同じ形の連立方程式を解くことに見られる理解についてその結果をまとめている(清水，1997，1998)．この研究では，連立方程式を代入法，加減法の順で学習している長野県の中学校と加減法，代入法の順に学習している山梨県の中学校１校ずつにおいて質問紙調査を同時期に実施した．その結果，解法の指導の順序に関係なく，代入法を避ける生徒が30％近くいたことを報告した．また，インタビュー調査を，質問紙調査の記述から選出した18名を対象に実施し，代入法のように複数の項をもつ文字式を１つの文字に代入する際に，その式をひとまとまりとして見ることに困難を伴うことを報告した．この研究では，文字式をひとまとまりと見ることは，式を計算の操作を表すものと同時に，式自体が１つの値，結果を表すものと，二重の見方ができることであることを明らかにし，その事実を捉えることができた．しかし，その理解の様相や式をひとまとまりと見ることの要件は明らかにできていない．すなわち，これらを明らかにすることが課題として残されている．

1.2　本調査の目的

上の研究の意図を踏まえ，本研究では，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面において，式をひとまとまりと見ることの理解の様相を顕在化し，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることを目的とする．

1.3　調査問題

本章で実施する実態調査Ｉは，質問紙調査(調査１)とインタビュー調査(調査２)に分かれる．これらについての詳細を以下に述べる．

調査問題は，以下の問題1，２で構成されている．
問題１，２は１問ずつ用紙を別にして印刷されている．

問題１　次の連立方程式を解いて下さい.

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ y=13-3x \end{cases}$$

問題２　さちこさんは文字と式の勉強をしているとき次のような問題に出会いました.

a+3b+5c＝25 のとき a+3b+5c－10 の値を求めなさい.

この問題を見てさちこさんはこう考えました.

さちこさんの考え

「a と b と c に入る数がそれぞれいくつになるかわかっていないので，a+3b+5c－10 がいくつになるかわからない．だから答えは，わからない．」

○このさちこさんの考えにあなたはどう思いますか. これについてあなたの考えを書いて下さい.

○あなただったらこの問題をどう解きますか．解いて下さい.

問題１の連立方程式では，第２式が「y＝･･･」の形になっている．これを生徒が代入法，加減法どちらで解くかに焦点を当てる.

問題２は，a+3b+5c をひとまとまりと見て，１つの値 25 に置き換え，式の値を導く問題である．この問題は第２章で述べたイギリスの CSMS のプロジェクトによる中学生理解調査の代数分野（Küchemann，1978a，1978b，1981）において出題された問題を参考に作成したものである．原問題は次の㋐㋑の２問である.

㋐「a+b＝43 のとき，a+b+2＝･･･」

㋑「e+f＝8 のとき，e+f+g＝･･･」

この CSMS のプロジェクトの調査の目的は，子どもが問題を解く際に捉えている文字の意味を探ることにある．この２つの問題の正答率は㋐97%，㋑41%であった．第２章第２節で述べた Küchemann（1981）の子どもたちが捉えている文字の意味の６つの解釈の中で，㋐の問題では，a+b が使われない文字であると主張している．つまり，２つの未知数を含んでいる a+b についてはまったく無視していても，単に+2 に 43 を加えるだけで答えが導けると述べており，正答率は高いが，正答の中に文字をまったく使わず解答している子どもがいると分析している．㋑の問題では，e+f に 8 を代入した後の 8+g の g は数値化された文字としての解釈であると主張している．8+g の処理の困難性を主張している．この問題を多くの子どもは 12 と答えている(26%)．これは，子どもが g を 4 と勝手に数値化し，e+f＝８であることから，e，f もそれぞれ 4 であるとし 4+4+4＝12 と考えることにより，8+g を扱う困難さを解消しようとしたと分析している.

本研究での式をひとまとまりと見るという視点で，これらの問題をみると，㋐は，a+b+2 の a+b を 42 に，㋑は，e+f+g の e+f を 8 に置き換えて式の値を求める問題であり，いずれも a+b，e+f という複数の項をもつ文字式をひとまとまりと見て１つの値に置き換えることが要求されていると解釈できる.

上述のように，Küchemann の出題は子どもが捉えている文字の意味の理解を探るために意図されているのに対し，本研究では，与えられた文字式に対しての理解とその式における文字をどのように捉えているかを同時に探ることを意図して問題を開発した. すなわち，文字を無視して単に数値の計算として正答が導けないように，a+3b+5c と文字を３つとし，b と c の係数をそれぞれ 3 と 5 とした 3b と 5c を含む式を用いる問題を作成した．このように簡単に文字式をひとまとまりと見ることができないように敢えてすることにより，この見方ができるようになる過程を追うことができ，理解の実態を顕在化しやすくなると考えた．ここでは，さちこさんの考えとして「a と b と c に入る数がそれぞれいくつになるかわかっていないので，a+3b+5c－10 がいくつになるかわからない．だから答えは，わからない.」を提示する．このように文字式をどのように捉えているかと同時に，文字 a，b，c をどう捉えているかも聞き取りを行う．この考えはパイロット調査で見られた生徒の典型的な反応である．この考えについての意見を質問紙で記述できるようにし，インタビューで被験者の考えを詳しく聞き取ることにより，文字式の理解と関連付けてその理解を引き出すことを試みる.

第２節　質問紙調査

１．対象，実施時期，方法

1.1　対象：山梨県内の公立中学校１校　第３学年 186 名.

中学校３年生を対象としたのは，中学校の文字式の学習を一通り終えた生徒が文字式をひとまとまりと見ることについてどのような困難性を示すのかを探り，その様相を顕在化することを意図したからである.

1.2　実施時期

2018 年 7 月下旬．連立方程式は２年生で学習済み，２次方程式は解き方まで学習済み.

1.3　方法

問題用紙２枚からなる質問紙を用いた筆記形式の調査を，通常の授業時間の 30 分間を使って実施する.

２．調査結果

本調査では，問題１は連立方程式の解く過程を含めた解答，問題２はさちこさ

んの考えについての解答を分析する．さらに，加減法，代入法の解法と問題２の解答を関連付けて考察するために，それぞれを分類してクロス集計をする．

まず，問題１で生徒が用いた解法の結果を表１に示す．等置法は代入法に含めて集計した．

表１　問題１の結果（計 186 名）

	解法を用いている生徒 [人(%)]	正答[人(%)]
加減法	43(23.1)	24(12.9)
代入法	130(69.9)	104(55.9)
解のみ	1(0.5)	1(0.5)
無解答等	12(6.5)	0(0)
合　計	186	129(69.3)

※(　)内は全数に対する割合

表１から，問題１において加減法を使う生徒が全体の４分の１程度いることがわかる．これにより中学校第３学年でも一定数の生徒が，連立方程式のどちらかの式が「$y=$」の形になっていても加減法を使うという実態が明らかとなった．

次に，問題１の解法と問題２の正答数の関係を表２に示す．問題２は，さちこさんの考えに反対をした上で，答え 15 を導いているものを正答とした．さちこさんの考えに賛成しているものは，答えの値の正誤にかかわらず誤答として集計した．それは，その解答をした生徒は文字や文字式について何らかの理解の特徴があると考えられることから，正答と判断することによって，その解答が埋もれてしまうことを避けるためである．正答率は，全体の人数に対する正答数の割合をそれぞれ示している．

表２　問題１の解法と問題２の正答数

		問題２	
		正答数	正答率(%)
問題1	加減法で解いた 43 名中	22	11.8
	代入法で解いた 130 名中	96	51.6
	解のみ１名中	0	0
	無解答等 12 名中	2	1.1
合計 186 名中		120	64.5

また，表３は問題２の解答をさらに分析し，賛成，反対，無解答あるいはわからないと解答している生徒の内訳を表している．正答率は，その解法で解いた生徒の人数に対する正答の人数の割合である．加減法を用いている生徒の問題２

の正答率が低い傾向にあることがわかる．

表３　問題１の解法と問題２の解答の内訳

		問題２　さちこさんの考えに対して		
		賛成	反対	無解答等
問題１	加減法で解いた 43 名中	12	23(正答 22) 正答率 51.2%	8
問題１	代入法で解いた 130 名中	12	106(正答 96) 正答率 73.8%	12
問題１	解のみ 1 名中	0	1(正答 0)	0
問題１	無解答等 12 名中	2	3(正答 2) 正答率 16.7%	7
合計 186 名中		26	133(正答 120) 正答率 64.5%	133(正答 120) 正答率 64.5%

※正答率は問題１の解法の人数に対する正答の人数の割合

３．生徒の記述にみられる文字の理解の分析

問題２でさちこさんの考えに賛成している生徒は「a と b と c に入る数がわからないとこの問題は解けない」と考えている．その生徒は全体で 26 名いる．

一方，さちこさんの考えに反対している生徒の中には，等式 $a+3b+5c=25$ が成り立つように，例えば，文字 a, b, c それぞれに３，４，２を割り当て，$a+3b+5c-10$ の文字にそれらの値を代入して，答え 15 を導いている解答が見られる（図１，２）．

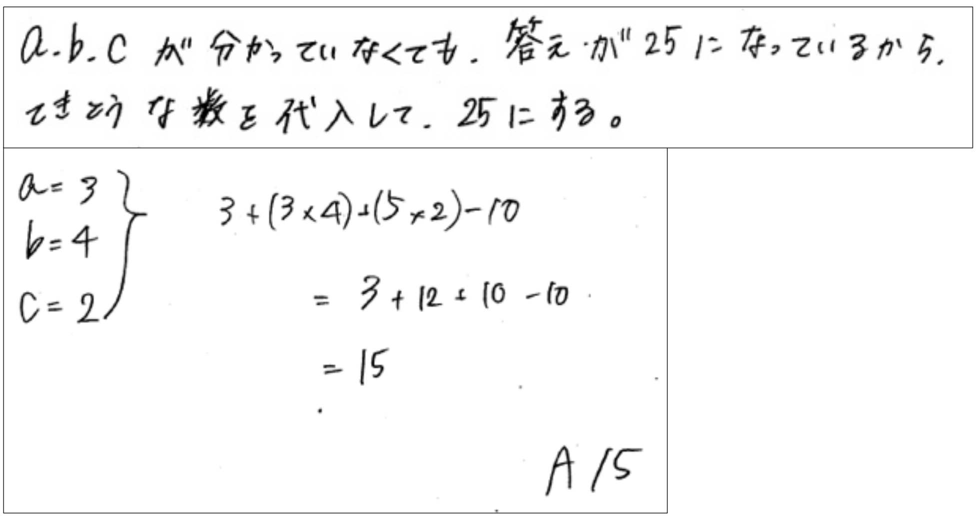


図１　N.H の解答

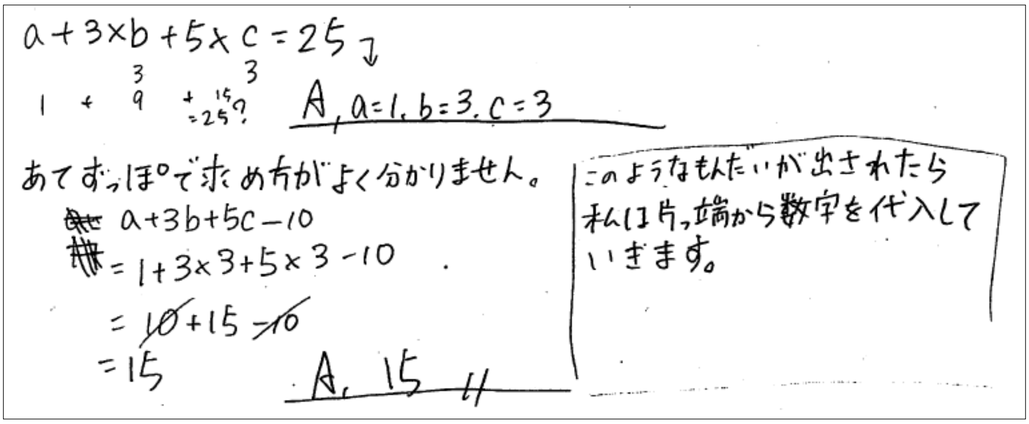


図２　M.K の解答

このような生徒は 27 名いる．これらの解答は，前述の Küchemann の文字の意味の６つの解釈でみると，「特定の未知数としての文字」の理解が顕在化していると考えられる．文字に適当な値を当てはめているのではなく，等式 $a+3b+5c$ ＝25 を満たす a，b，c の値を１組見つけ，それを代入しているのである．しかし，未知数である文字のそれぞれにただ１つの値を当てはめているのみである．これらの生徒は，文字に数を代入し，文字式を具体的な計算の過程，つまり，プロセスとして見ている様子が現れている．

また，等式 $a+3b+5c$＝25 を，図３のようにイメージしている様相も見られた．この生徒は a＝2.5，b＝2.5，c＝3 として，$a+3b+5c$－10 の値 15 を求めているので，「特定の未知数」として文字を扱っている一方で，図のように，例えば，3b について，b を３つの○で表しているように 3b を b の３個分と解釈しており，文字を「物」として解釈している様子が見られる．このようにこの生徒には「物としての文字」と「特定の未知数としての文字」の両方の理解が認められる．これは，未知数として文字を捉える途中の段階の理解が現れていると考えられる．

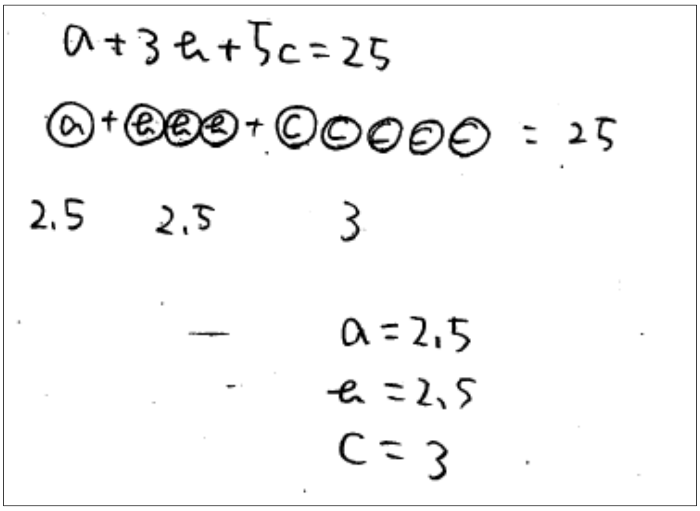


図３　M.K の解答

また，この 27 名のうちの５名は，$a+3b+5c=25$ を満たす文字 a，b，c の値の組を複数挙げている．これらの生徒は文字式を具体的な計算の過程と見ている一方で，文字を，１つの数の代わりとしてではなく，複数の数の代わり，すなわち，Küchemann の文字の意味の６つの解釈でいうと，一般化された数として文字を捉えているといってよいと考える．ただし，規則的に値の組を求めるまでには至っていない．文字，文字式の理解が図１の生徒よりも進展している様相が現れている（図４）．

aとbとcに入る言葉は分からないけど、
てきとうに数字を入れて、25になる組み合わせ
を見つける。

$8+3\times4+5\times1=8+12+5$
$=25$
$25-10=15$

$2+3\times1+5\times4-10=2+3+20$
$=25-10$
$=15$

$6+3\times3+5\times2-10=6+9+10$
$=25-10$
$=15$

図４　K.K の解答

以上，27 名の問題１の解答と問題２の正誤等の様子は表４のようにまとめられる．

表４　27 名の問題１の解法と問題２の正誤等の様子

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td colspan="5">問題２</td></tr>
<tr><td colspan="2">答え</td><td colspan="3">さちこさんの考えに対して</td></tr>
<tr><td>15</td><td>その他</td><td>賛成</td><td>反対</td><td>無解答等</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問題1</td><td>加減法</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>代入法</td><td>16</td><td>1</td><td>3</td><td>14</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">合計</td><td>22</td><td>5</td><td>5</td><td>21</td><td>1</td></tr>
</table>

これらの結果から，表３において，問題２でさちこさんの考えに賛成し正答し

ている 120 名の中には，文字や文字式の理解として十分ではない生徒が含まれていることがわかる．これらの理解の様相を精緻に分析する必要があると考える．

さらに，図５のように $a+3b+5c$ を $15abc$ とまとめている解答が見られた．これは，$(1\times3\times5)abc$ としていると考えられる．このような生徒は２名いた．これは，複数の単項式の和の形で表された文字式 $a+3b+5c$ を１つの値，つまり，プロダクトとして捉えられず，記号「＋」を省いて単項式にまとめて答えを得ようとしている現れであると考えられる．$a+3b+5c$ のような多項式をひとまとまりと見ることができないことの証左であると考えられる．

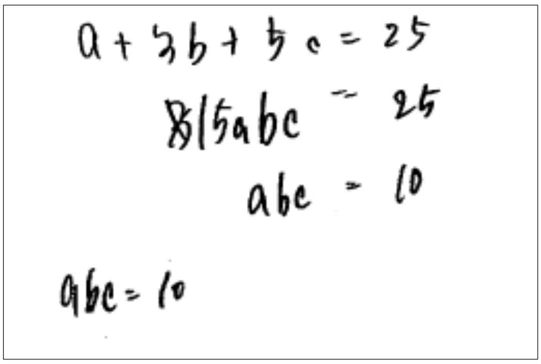


図５　H.M の解答

以上，質問紙調査の記述より，$a+3b+5c$ に含まれている文字 a，b，c の値や文字式の計算結果に注目している生徒が一定数存在し，文字式 $a+3b+5c$ をひとまとまりと見ることができず，計算の操作，つまりプロセスとして見ている生徒がいることが明らかとなった．

第３節　インタビュー調査

１．対象，実施時期，方法

1.1　対象

前節で述べたように，式をひとまとまりと見ることができていないと考えられる記述がみられたが，その理解の様相は精緻に捉えてはいない．そこで，質問紙調査の記述をもとに 11 名の生徒を選出し，インタビュー調査を実施した．質問紙調査における解答状況の内訳は，表５の通りである．

この内訳は，問題２でさちこさんに賛成し，15 を導けなかった生徒の中で，問題１を，加減法を用いて解いている生徒３名，代入法を用いて解いている生徒４名を選出した．また，問題２で反対とした生徒の中で，問題１を，加減法を用

いて解いている生徒２名，代入法を用いて解いている生徒２名を選出した．前者の内訳は 15 を導けなかった生徒と，上述の式の各文字に数値を代入している生徒を１名ずつ，後者の内訳は，式の各文字に数値を代入している生徒と $a+3b+5c$ を 25 の置き換えている生徒１名ずつである．

表５ インタビュー対象生徒の質問紙調査の解答状況

		問題２　さちこさんの考えに対して			
		賛成	反対		
		15 を導けない	15 を導けない	各文字に数値代入 15 を導く	$a+3b+5c$ を 25 に置き換え正答
問題1	加減法	M.T,Y.K K.M	I.S	R.S	
	代入法	M.A,Y.Ik M.U,H.M		Y.W	Y.Ic

1.2　実施時期

2018 年 10 月上旬．２次方程式は学習済みであり，その解を平方完成して平方根の考えで求めるとき，式をひとまとまりと見る経験をしている．

1.3　方法

インタビューは，１人 20 分〜30 分とし１対１の問答式で非構造化面接法（鈴木，2002）を用いた．この方法は，序章第２節２で述べた被験者の理解を顕在化させることを意図した「臨床的インタビュー」と，被験者の理解を深めることを意図した「個別指導的インタビュー」である．質問紙調査と同一の問題を１問ずつ提示し，その都度，考える時間を３〜５分与えて問題を解かせ，その解法に応じて質問をする．具体的なインタビューの手順は以下に示す通りである．

① 問題１を提示し，しばらく問題を解くよう指示する．
② ①で解いた解法と別の解法でも解けるかどうかを尋ね，実際に解くよう指示する．その上で，なぜその解法を用いたのかを問う．また，ある生徒の意見として「y という１つの文字に 13－3x という２つの項の文字式を代入することに対して抵抗がある」を紹介し，これについての考えを尋ねる．これにより被験者の代入法に対する心理的な抵抗を顕在化させる．
③ 問題２を提示し，さちこさんの考えに賛成か反対かとその根拠を問う．与えられた２つの式のどこに注目したかを尋ねる．賛成した被験者には $a+3b+5c=25$ を満たす a，b，c の値は求められないか，また，a，b，c の値を求めて正しい式の値 15 を導いた被験者には a，b，c の値がわからないとこの問題が解けないかを質問し，被験者の文字の理解を引き出す．場合によっては質問紙調査

時の本人の記述を見せ，そのときの考えを思い起こさせる．正答を導けた被験者には，解けた過程を振り返ってそのときに考えていたことを尋ねる．

２．調査結果と分析

2.1　インタビュー後の生徒の解答状況

対象の被験者 11 名を，インタビュー実施後，表６の４つのタイプに分類した．特に，タイプＣの被験者は，理解の変容の様子に特徴が見られた．

表６　インタビュー後に分類した４つのタイプ

		問題２　さちこさんの考えに対して		
		a，b，c の値がわからないと求められない	個々の文字に数値を代入して 15 を求める	a，b，c の値に関係なく a+3b+5c を 25 に置き換え
問題１	加減法	タイプＡ M.T		タイプＣ I.S K.M R.S
	代入法	M.A	タイプＢ M.U Y.Ik	Y.K H.M Y.W タイプＤ Y.Ic

※表中の矢印はインタビューの中での移行を示す．

2.2　プロトコルの分析

問題１については，代入法をどのように捉えているかに関する発話を取り上げる．問題２については，等式 $a+3b+5c=25$ の両辺をどのように捉えているか，与えられた２つの式に共通している $a+3b+5c$ についてどのように解釈しているかに関する発話を取り上げる．それらの発話を，特に，文字式 $a+3b+5c$ をプロセスとして見ているか，プロダクトとして見ているか，そして，この式における文字をどう捉えているかに注目して分析する．

以下では，表６のタイプＡからＤのそれぞれの被験者の特徴的な発話を分析し，タイプ分けの根拠と，それぞれのタイプの文字式の理解の様相の特徴を述べることにする．

2.2.1　タイプＡ

このタイプの被験者には，文字式をプロセスと見ている様子が見られる．M.T は加減法を使い，さちこさんの考えに賛成している．この被験者は，問題１において，代入法を使うかと尋ねると，首を横に振って次のように述べている．

（S は被験者，Ｉは質問者，以下同様.）

14S：いつもなんか解けない．ここまで（代入するところまでを指して）はできるけど，この後がどうなるかわからなくて，ごちゃ混ぜになってしまう．

この被験者は，代入すること自体ではなく，代入した後，式が「ごちゃ混ぜ」になってしまうと式操作の困難点を述べる．代入法は，複数の項の和の形で表された式を一旦ひとまとまりとして文字に代入した後に，それを１つ１つの項を単位としてその和でできていると見て，同類項をまとめるなどの操作をすることが必要となるが，この被験者は，代入した後，文字の項と定数項が乱雑に並ぶ式となってしまい，それを１つ１つの項として捉えることに抵抗を感じていることが見て取れる．ここから式をプロセスとプロダクトの見方で切り替えることの困難性が現れている．そして，問題２においてさちこさんの考えに賛成している理由を次のように述べている．

22S：a，b，c がわかっていないんだったら，連立方程式のもう１個の式がつくれないから．

連立方程式として a，b，c の値を求めようという考えがこの発言から見られる．そして，どのように答えを出すのかを尋ねた後，$a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c-10$ の式の違いについて尋ねたところ，次のように答えた．

30S：a，b，c の記号を移動させる．
31I：移動させる．どういうこと．
32S：うふふ，この記号を１個ずつずらしていて，３を a にして，５を b にして，10 を c にすれば，とりあえずには数字になるから，その数字の計算をすれば出てくるかもしれない．
33I：でもさ，これ，イコールがないから，勝手に３をかけられないよね．a に．方程式だったら，こっち（左辺）に３をかけたら，こっち（右辺）にも３をかければイコールはそのままじゃん．でもこの式はイコールの式ではないんだよね．勝手に３をかけて，こっちをずらして５にしちゃったりしたら，値が変わっちゃうんだよね．それは，どう．
34S：そうか．
35I：この式（$a+3b+5c=25$）とこの式（$a+3b+5c-10$）の違いはわかりますか．
36S：イコールがない．
37I：あとは．
38S：ここの＝25 と－10 が違う．

どのようにして値を求めるかを尋ねると，３，５，10 という式に含まれている係数や定数を，文字 a, b, c に代えて答えが求められないかと考えている(32S).

また，式を計算の操作と見て，どうにかして値を出そうとする様子が見られる(30S，32S)．そこで，$a+3b+5c=25$ は等式（センテンス型）であり，$a+3b+5c-10$ は多項式（フレーズ型）であるので，式全体を見てその違いを述べられるかを尋ねた．すると，式の定数部分にのみ着目してその違いを答えた(38S)．すなわち，このことから式を全体として捉えていないことがわかる．その後，この２つの式をどのように解釈するかを問うと次のように答えている．

60S：違う記号の計算はできない．
＜中略＞
68S：a と３b と５c をたしたら 10 になる．
69I：ん，これはイコールじゃあないよ．
70S：あっ，から 10 をひく．
71I：じゃあ，同じようにこっち（$a+3b+5c=25$）は？もう１回聞くけど．
72S：こっちは，a と $3b$ と $5c$ をたすと 25 になる．

このように，式は「違う記号の場合は計算できない」(60S)と発言し，式について何らかの計算をしようと考えている様子が見られる．そして，$a+3b+5c=25$ の解釈は，「a と $3b$ と $5c$ をたすと 25 になる」(72S)と，項１つ１つを対象として捉えている様子が見られる．また，左辺を計算してその答えが 25 であると発言する．これらから $a+3b+5c$ の値が 25 と等しいと捉えるのではなく，項ごとに計算した結果が 25 となると捉えており，左辺の式は操作を表し，その答えが右辺であると理解していると考えられる．したがって，式をプロセスと見ていると判断できる．

質問者は，この生徒に対して，これ以上の指導的介入は思考の誘導になってしまうと判断し，ここでインタビューを終了した．

このタイプのもう１人の被験者 M.A は，問題１を，代入法を用いて正答している．問題２ではさちこさんの考えに反対と言うが，その根拠を述べられず解答していない．この被験者は，次のように問題２を解こうとしている．

32S：･･･．え～と，$a+3b+5c=25$，$a+3b+5c-10$ をひいたときに，この，ここが，ここまでが同じじゃないですか．
33I：どこからどこまでですか．線を引いてくれれば，印をつけてもらうとありがたいんですけど．
34S：（$a+3b+5c=25$ の）$a+3b+5c$ と（$a+3b+5c-10$ の）$a+3b+5c$．（その部分に下線を引いて）
35I：なるほど．
36S：ひいたら，0 になって，25－10･･･．

この被験者は，a+3b+5c が共通であることは見抜いた．それは，問題文の２つの式にある a+3b+5c に下線を引いていることからわかる．そして「ひいたら，０になって，25－10･･･」(36S)とつぶやく．そこで，質問者が a+3b+5c－10 は等式ではないことを確認すると，その後，２つの式を縦に並べて書いてしばらく考え込み，次のように述べる．

43I：今，どこまでわかったの．もう１回言ってくれる，わかったことを．
44S：なんかこのイコールがあって，こっちにはないから，わからない．
45I：で，どこまでが共通ってわかったの．
46S：共通は，この a+3b+5c が一緒というのはわかって．
47I：うん，わかったんだ．あとわかることはないですか，この２つの式から．
48S：わからないです．

この被験者は，２つの式にある a+3b+5c に着目している．そこで，与えられた２つの式は方程式（等式）であると見誤り，連立方程式の加減法を使おうとした．しかし，式の形の違いを指摘され，それに気付くことができたのであるが，48S 以降進展が見られなかった．２つの式の形の違いについて，イコールがあるかないかという式の見方に止まっており，２つの式それぞれの全体を捉えて考察するところまで至っていないと考えられ，式をプロダクトとして見ることができていない．よって，この被験者も式をプロセスと見ていると判断できる．

2.2.2　タイプＢ

このタイプの被験者は，文字式をプロセスと見ているが，文字に数を代入して等式を満たす値を見つけられている．この生徒は，問題１は代入法を用いて正答している，Y.Ik，M.U の２名である．

Y.Ik は最初，さちこさんに賛成，M.U は反対と言うが，この２名とも自分では答えを求められず，a，b，c の値が１つ１つ求められないとわからないと述べる．そして，質問者に促されて，等式 a+3b+5c＝25 を満たす a，b，c の値を 1 組探し，それを a+3b+5c－10 に代入して答えを 15 と導く．しかし，最後までこのやり方でないとこの問題は解けないと考えていた．以下に，Y.Ik のプロトコルを示す．

41I：まず，賛成ですか，反対ですか．
42S：賛成．
43I：賛成．理由は．
44S：わからないから．
45I：どこがわからないの．
46S：この a と b と c の入る数がわからないから，その通りだと思う．

47I：その通りだと思う．なるほど．じゃあ解けない．次はさ，あなただったらどう問題を解きますかだけど．
48S：解けない．すみません．
49I：解けない．なんか考えてみようか．
50S：（しばらく考える）45 秒後
51I：本当に a と b と c がわからないとできないのかということですよね．そこどうですか．
52S：わからないとできない．
53I：できない．この式を２つ見比べてどうですか．さちこさんの考えはちょっとこっちに置いておいて．自分ならこの問題どうやって解きますか．
54S：ん，すみません．解けません．
55I：もし，a と b と c がわからなければ，a と b と c を考えてみるということはできませんか．

この被験者は，しばらく考えて，$a=1$，$b=3$，$c=5$ とし，それを $a=1$，$b=3$，$c=3$ と訂正する．そして，この値を $a+3b+5c-10$ に代入して答え 15 を求めた．しかし，この後は，進展せずにインタビューを終えている．

次に，M.U のプロトコルを示す．

46S：こっち（$a+3b+5c=25$）の式が求められれば，こっち（$a+3b+5c-10$）の式が求められるから．
47I：こっちの式が求められるというのは，具体的にどういうことですか．
48S：･･･．
49I：求めるって，何が求められればいいのですか．
50S：a と b と c が･･･．
51I：なるほど．それはどうですか，その方針で．
52S：（考える）30 秒後
53I：今，U さんが言ってくれたのは，a と b と c に何か入れて 25 になるようにしたいんでしょ．どう，探せる？
54S：１個１個やらないとわからないから･･･．
55I：じゃあやっぱりさちこさんと同じ？でも反対なんでしょ．
56S：時間をかければできる．
57I：いいよ．うん．ちょっと考えてみようか．

この被験者も $a=1$, $b=3$, $c=3$ と見つけて答え 15 を求めた(78S)．そして，この後，「a と b と c がわからないとこの問題解けないのですか」と尋ねると，「ぱっと見じゃあわからないかもしれないけれど，a と b と c だったら，一番求めやすい５倍とかになっている c から見つければいい．」(80S)と $5c$ を c の５倍

とみていると発言する．このように *a*，*b*，*c* の値の求め方を答えている．式をプロセスとして見ている発言であると考える．以下に，そのプロトコルを示す．

77I : そうだよね．それは 25 になっていますよね．*a* と *b* と *c* に入れて．OK．じゃあ，そっち考えてみようか．

78S :（「１＋９＋15＝１＋９＋５＝15，値は 15」と書く）

79I : ああ，そうだね．そしたら，今，探すのが面倒くさいよね．本当にこのさちこさんが言っているように *a* と *b* と *c* がわからないとこの問題解けないのですか．そこがちょっと知りたいのですけれど．

80S : ･･･．30 秒後　ぱっと見じゃあわからないかもしれないけれど，*a* と *b* と *c* だったら，一番求めやすい５倍とかになっている *c* から見つければいい．

この２名は，質問者に促されてではあったが，文字 *a*，*b*，*c* に数値を代入して式の値を求めることができた．一方，タイプＡの M.A は a+3b+5c が共通していることはつかめたが，文字に数を代入することができず，式の違いを明確に捉えることができなかった．文字に数を代入してみることによって等式の意味や式の値の意味をつかむことができたという点でこの２名はインタビュー後にはタイプＡの被験者よりも文字式について理解は進んでいるものと考えられ，タイプＢとした．しかし，この式における文字 *a*，*b*，*c* それぞれの値に着目するという考えに止まっており，式全体を捉えてその値を考察するという考えには至っていない．したがって，等式について，左辺の文字に数を代入して計算した結果が右辺であると捉えていると考えられ，式をプロセスと見ていると判断できる．

2.2.3　タイプＤ

文字式の見方が最も進んでいると見られるのがタイプＤの Y.Ic１名である．このタイプの被験者は，文字式をプロセプトとして見ることができている．タイプＣより先にこのタイプの被験者の理解をみていく．Y.Ic は，問題１は代入法で解き加減法でも解くことができた．そして，問題２について次のような反応をしている．

30S :（しばらく考えた後）a+3b+5c が 25 のときだから，ここが一緒で，25 になるから．

31I : どこが一緒なの．

32S : a+3b+5c が 25 だと思うから，25－10 をして 15 だと思う．（a+3b+5c＝25 だから，a+3b+5c－10 の a+3b+5c のところは 25 になると思うから 25－10 をして 15 で答えが出るので違うと思う．）と記述．

＜中略＞

35I : どんなふうに考えたのですか，解くときに．

36S : a+3b+5c＝25 のときと書いてあるので，ここ（a+3b+5c－10）も a+3b+5c と書いてあるから，ここが 25 になるから，そこから 10 をひけば値が求められると思った．
37I：なるほど，この式をどんなふうにみたのか，鉛筆で入れてくれる．こういうふうに囲っていたよね．どんなふうにみたの．１個１個別々．
38S：一緒．
39I：鉛筆で囲むと，どういうふうにみた．
40S：ここ（a+3b+5c＝25 の a+3b+5c）イコール 25．25 は答え．ここ（a+3b+5c＝25 の a+3b+5c）とここ（a+3b+5c－10 の a+3b+5c）が一緒．
41I：そうするとこれはまとまってみているの．
42S：このときと書いてあるので，ここ（a+3b+5c－10 の a+3b+5c）も 25 だろうなと思って．
43I：（中略）a+3b+5c は a と+3b と+5c はバラバラ？それとも今囲ってくれたようにこういうふうに見えているの．見え方だから難しいけどね．見え方っていうことは考え方なんだけど．どういうふうにこの式を見ているのかなということに興味があるんだけど I 君が．どう．
44S：一緒にみている．
45I：一緒というのは．
46S：これ（a+3b+5c）がなんか１つの文字として．
47I：１つとみているんだ．
48S：それが両方にこっちにも同じやつがあったから．
49I：なるほど．あったから．
50S：25 とみた．

この被験者は等式の a+3b+5c と 25 が等しいことを「一緒」という表現で説明している(30S)．その後，与えられた２つの式に a+3b+5c が共通していることをこれも「一緒」という表現で説明している(36S)．この「一緒」という表現について，その見方に踏み込んで尋ねると，「これ（a+3b+5c）がなんか，１つの文字として」(46S)と a+3b+5c を１つの文字と見ていると発言する．そして，この a+3b+5c が２つの式に共通しているので，a+3b+5c－10 の a+3b+5c を 25 に置き換えて答え 15 を求めたと述べている．これらの発言から，この被験者の文字式をひとまとまりと見ている様子が顕在化していると考えられる．その後，a+3b+5c を１つの文字と同様に見ていると発言している．このとき，文字 a，b，c それぞれの値については言及しておらず，さちこさんの考えは違うと明言している．これは式全体を１つのまとまりとして捉えているプロダクトの見方である．また，「25 は答え」(40S)とプロセス的にも解釈しており，両方の見方，つまり，式をプロセプトとして見ていると判断できる．

2.2.4　タイプC

このタイプの被験者は，表６で示したように，インタビューの最中に問題２を正答し，文字式をプロダクトとして見られるようになった．問題１で，加減法を使う生徒 I.S，K.M，R.S の３名，代入法を使う生徒 H.M，Y.K，Y.W の３名，計６名である．これらの被験者は，問題２において，具体的な数値を代入して *a*，*b*，*c* を求めることによって答え 15 を得ている．この６名を次のように分けて分析することとする．

①I.S と K.M
②R.S
③H.M と Y.K
④Y.W

まず，このタイプの代入法に対する考えを，加減法で解いている①の I.S と K.M の発話から見ることとする．

2.2.4.1　I.S と K.M

I.S は，問題１では加減法を用いて x を消去している．y はどちらも係数が１であるので，そのまま辺々をひけばよいのであるが，わざわざ x の係数をそろえている．（図６）それについては，次のように述べている．

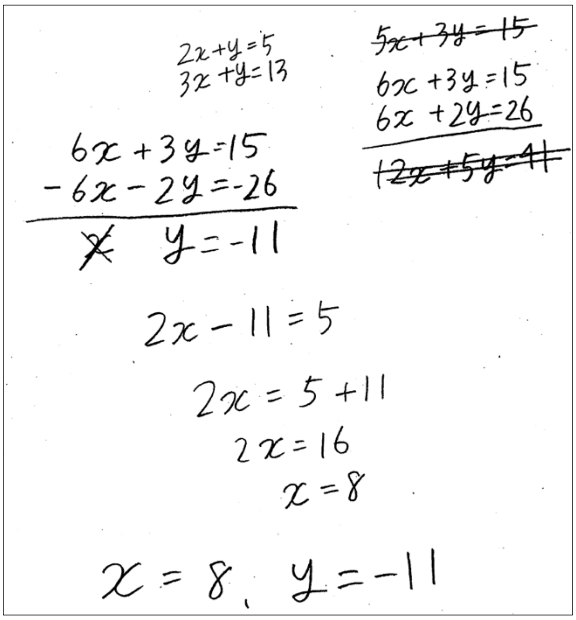


図６　I.S の連立方程式を解いた様子

10S：えっと，まず，y の答えを出すために，x を消そうと．
11I：この段階で，y を消そうと思わなかったの．
12S：ああ，そっか．いつも x を消しているから．
13I：いつもそうやっているんだね．

14S：はい．

上の発言からこの被験者はどのような連立方程式であっても，いつも加減法で x を消去するという方法をとっているということがわかる．解法についての固定的な観念が表出している．この被験者は，代入法で解くこともできたが，代入法はやりづらいと答える．そこで，１つの文字に２つの項の文字式を代入することについて尋ねると，次のように答えた．

43I：で，これ今どういうふうにそれやったのかな．

44S：$y=13-3x$ ってあるから，ここ（$2x+y=5$）の y に入れた．

45I：その入れるときに，y って１個じゃん，だけど，$13-3x$ って２個ここに入れることになる，そういうのが嫌だという人がいるんだけど，それはどうですか．わかる気がしますか．

46S：すごいわかる．

47I：すごいわかる．どんなふうにそれが嫌なのかな．

48S：あんまりはっきりしていない．

49I：何がはっきりしていない．

50S：いっぱい数字があるから，数字がごちゃっといっぱい出てきて，ぐちゃぐちゃになる．

51I：これ自体があまりはっきりしていない．はっきりしていないってどういうこと．

52S：なんか，x とか文字がくっついていて，わからない．

２つの項をもつ式を１つの文字に代入すると文字や数字が混ざった式が現れる．それを「はっきりしていない」と言い，「ぐちゃぐちゃ」になると発言している．代入した後の式を，項を単位としてその和でできているとみることができず，それらを操作することに抵抗を感じている様子が見て取れる．タイプＡのM.T と同様の発言である．そして，問題２については，最初「もしかしたら，なんかの方法で解けるかもしれない．」(60S)と述べ，さちこさんの考えに反対するが，実際には解けなかった．式の違いや式のイメージについては，次のように述べている．

67I：この式で何か気が付くことはないですか．

68S：a と b と c と普通の数の４種類．

69I：何，４種類っていうのは．

70S：文字が a，b，c で違って，何にも文字がついていない数があるので．

71I：なるほど，他には．この２つの式を見比べてどうですか．

72S：ん～．

73I：この式の中で気が付くことはないかなということなのですが．この問題文の四角で囲んだところね．
74S：ん〜．－10 がよくわからない．
75I：－10 がよくわからないってどういうこと．
76S：いきなり出てきたから．
＜中略＞
83I：じゃあこっち（$a+3b+5c=25$ の式を指して）はどうですか．
84S：a と b と c に数が入っている．

文字 a，b，c １つ１つに着目している発言(68S，70S)があり，－10 がいきなり出てきてよくわからない(74S)と述べる．そして，「やっぱり賛成」と意見を変える．その後，質問者が $a+3b+5c=25$ になるように a と b と c を見つけられませんかと尋ねる．$a+3b+5c=25$ については，「a と b と c に数が入っている．」(84S)と特定の値の存在に気付いている発言をする．そして，$a=6$，$b=3$，$c=2$ と a，b，c に入る数を見つけて，次のように $a+3b+5c$ が 25 であることを見いだした．

106S：６＋９+10 は 25．おお，適当でいいんだ．
107I：そしたら，適当でいいかどうかわからないけど，一応，６，３，２．ということをイメージして，そっち（$a+3b+5c-10$）のここ（a と b と c）ですよね．今，いくつになるかわからないから賛成と言ったけど，これいくつになるか値はわかりますか．
108S：あっ，ん，あっ，わかった．
109I：いくつになります．そのわかったことを書いてみて．
110S：$a+3b+5c$ が 25 でそれに－10 がくっついた形だから．
111I：式書いて答え書いてみて．
112S：（$a+3b+5c-10=25$ と書く）
113I：説明して．
114S：$a+3b+5c$ は 25．
115I：じゃあそこに書いてみて図でも何でも．どうなっているの．この書いてくれた式を説明してみて．
116S：えっと．
117I：いきなりこれ＝25 といっちゃっているよね．この間に計算の式が入るでしょ．
118S：ああ，なるほど．（$\underset{25}{\underline{a+3b+5c}}-10=25-10=15$ と $a+3b+5c$ に下線を引き，その下に 25 と書く．）ここが 25 だから．

次に，K.M のプロトコルを分析する．K.M は，連立方程式の代入法のやり方はわかるが自分では解けないと述べる．そして，代入することについて尋ねると，y という１つの文字に，13－３x という２つの項のある式を代入することを嫌だと述べた．以下の発話から，連立方程式の代入法について，代入することに抵抗を感じていることが見て取れる．

28S : なんか，わかりにくそう．解きにくそうだから，こっちの方が好きだから，こっちの方で解いています．

29I :（中略）どういうところが解きにくいのですか．

30S : 解きにくい･･･．これ，代入してからはできるんですけれど，そこ（代入するところ）までがたどり着かないんです．

＜中略＞

34S : どんなところに～．どこに何を代入するのかがわからない．

この被験者は，代入した後の計算はできると述べているが，「どこに何を代入するのかがわからない」(34S)と代入すること自体に抵抗を感じていることが見て取れ，そのため，代入は解きにくいと述べている．

さらに，問題２について，この被験者がどのように文字式とその式における文字の理解に変容が見られたかを見ていく．

49I : まず，なんで賛成だと思ったのですか．

50S : いや，この３つ（a と b と c）が，３つが完全にわからないから．

51I : なるほど，この３つは本当にわからないですかね．

52S : う～ん．(しばらく考える)いやわかりません．

この後,質問者が質問紙調査時の K.M の記述を見せる. 15 は導けていないが,「a と b と c に何か数を入れる」と書いてあり，特定の数の存在に気付いている．そこで，これを参考に答えを出せないかと問いかけた．

しばらくすると，図７のように $a+3b+5c=25$ を満たす a，b，c の値を見つけ，$a+3b+5c-10$ が 15 であることを導いた．そして，質問者と次のようなやりとりをしている．

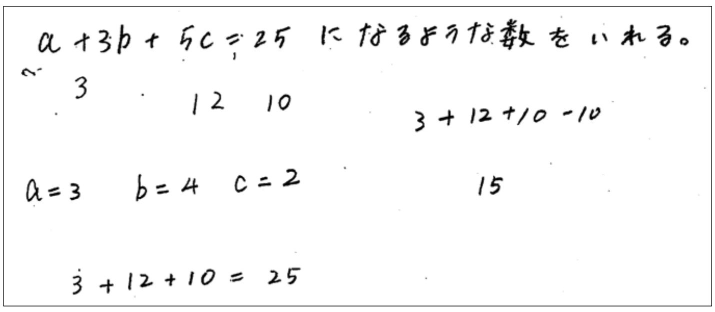


図７　K.M の記述

105I：今さ，数を３と４と２とやったよね．これ本当にこの具体的な数がわからないとできませんか．今のその計算の式から見て．

106S：ああ．

107I：わかった．

108S：いや～，なんとなく，何でもできると思う．

109I：どうして．

110S：え～，どうして，難しいな．これは，何を入れても答えは必ず 25 になるのをつくれば，それは全部あっているということだから，これに代入しても一緒．

111I：おお，すごい．それで，何を入れても 25 になればいいんだね．そのときにこの式（a+3b+5c＝25）とこの式（a+3b+5c－10）のどこに着目したのですか．どういうふうにそれに気付いたの．

112S：ああ，これに入れると．

113I：うん，こっちに入れるといいということでしょ，結局．25 になるように，a，b，c は何でもいいということにどうして気付いたの．

114S：えっ，とりあえず，25 の答えになるように入れればいいと思って．

115I：それで，今度この式（a+3b+5c－10）と比べるんだよね，どういうことに気付いたの．

116S：このとき，この値は，だから．それを普通に入れればいいかなと思いました．

117I：入れるといったって，見て何か気が付かないと入れられないよね．どういうことに気付いたのですか．

118S：これですか．

119I：－10 の前のここ（a+3b+5c）に入れたんでしょ．なんでそこに入るの，25 が．

120S：ん～．

121I：２つの式を見比べてみて．

122S：ここの形が同じだから．

123I：どこまで．

124S：ここまで（両方の式の a+3b+5c に下線を引いて）同じだから．

この被験者は，a と b と c に３と４と２の値をそれぞれ入れて，答えを求めた後，質問者の問いかけに対して，「何を入れても答えは必ず 25 になるのをつくれば，それは全部あっているということだから，これに代入しても一緒．」(110S) と，等式が他の a，b，c の値の組でも成り立つことを理解し，文字の値は１つに決めなくてもよいことについて発言している．この被験者が，文字の不特定性に目が向き，一般化された数としての文字として認識できた瞬間が現れている．そ

して同時に，$a+3b+5c$ がひとまとまりと見ることができている．それが，「これに代入しても一緒」という発言となって表出している．さらに，「ここ（式 $a+3b+5c$）の形が同じだから」(122S)という表現を用いて $a+3b+5c$ が共通していることに気付いたことも述べている．

以上の被験者２名は，問題１において，複数の項をもつ文字式を１つの文字に代入することについて，代入自体に抵抗をもっている生徒と代入した後の式の処理に抵抗をもっている生徒であることが明らかとなった．

また，この２名の被験者は，問題２において，最初 a，b，c の値に注目し，これらの値がわからないので，答えがわからないと述べている．このとき，計算の過程として式を見ている様子が現れている．この時点では式をプロセスと見ている．それは，問題で提示されている２つの式 $a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c-10$ について，式全体ではなく，文字 a，b，c それぞれや１つ１つの項を単位にして見たり，定数項である 25 と－10 に注目していたりしている発言からわかる．また，文字に関していうと，不特定性に意識が向いている様子が見られる．質問者に $a+3b+5c=25$ を満たす a，b，c の値を求めることを促されると，この等式を満たす a，b，c の値を１組見つけ，それらを代入して $a+3b+5c-10$ の値 15 を求めている．ここで文字に数を入れることによって，特定の未知数としての文字として捉えることができた．

その後，式を見比べることにより $a+3b+5c$ は具体的な数を入れなくても 25 であると理解できた．a，b，c に数を代入することにより，その値が１組のみではなく，等式を満たすならば，a，b，c に入る値は決めなくてもよいと理解でき，文字の理解が進展した様子が顕在化した．ここでは，一般化された数としての文字として捉えている様子が見て取れる．そのことにより，$a+3b+5c$ と 25 が等しいことを捉えることができたと考える．それは $a+3b+5c$ に下線を引いて，その値が 25 であることを認識している表現からわかる．

しかし，２つの式に $a+3b+5c$ が共通していることについて，K.M が両方の式の $a+3b+5c$ に下線を引いて式の形が同じと発言したのに対し，I.S は見いだせていない．被験者によって，文字式の理解にいくつかの相があることが明らかとなった．

2.2.4.2　R.S

R.S は，問題２において，$a+3b+5c$ を 25 に置き換えることができるようになった．その変容が現れているプロトコルを以下に示す．

65I：なぜ反対かもう１回理由を言ってもらえる．

66S：え～と，a と b と c には何かしらの数字が入らないと，この式やこういう式にはならないから何かしら式が，というか数が入ると思います．

67I：なるほど．それに基づいてできないですか．

68S：え～と，a が１で，b が３で，c が２だと，この式は，あっ，違う違う．･･･

たすから･･･，c が３かな(２を３と書き直す)．多分これ(c)が３だと１＋９＋15 になってこれが多分これで 25 になるんですよ．
69I：で，その方針でどうですか．
70S：あるはある．
71I：そうすると，この値は求められるんですか．
72S：･･･，あっ，そういうことか．このー10 があるということですか．･･･，15．
73I：どんなふうに考えたのですか．
74S：え〜と，今適当にこの式を成り立たせるために，a を１，b を３，c を３と考えて，１＋９＋15＝25 という式がつくれて，両方とも等しくなったから，え〜，１＋９＋15 にこのー10 を加えてみると，15 になりました．

この被験者は，最初から a+3b+5c＝25 を満たす a，b，c の値を見つけ，それを a+3b+5c－10 の文字に１つ１つ代入して，式の値を求めている(74S)．この被験者が a+3b+5c＝25 を満たす a，b，c の値の存在を理解していることがわかる．そして，質問者がこのやり方を見直してみようと促すと次のように述べている．

83I：もうちょっと，よりよい方法を，せっかく答えが出ているので，見つけてみようね．
84S：あっ，あっ，わかりました．（笑いながら）え〜と，ここ（a+3b+5c＝25 の a+3b+5c）とここ（a+3b+5c－10 の a+3b+5c）とが等しいということは，この 25 と a+3b+5c は等しい関係なので，普通に 25－10 をすれば 15 と答えが出ます．
85I：それはどういうふうに見たのですか．図にかいたりなんかして，今考えたことを書いてくれるといいんだけど．
86S：ここここが等しいということは，このー10 を抜かした，ここ（a+3b+5c）が 25 ということがわかっているので，25 からー10 をすれば 15 と出ます．

82S までは，a，b，c の値がわからないと解けないと発言していたが，84S で「あっ，わかりました」と笑いながら声を上げる．84S，86S の説明から，ここで，a+3b+5c と 25 が等しいと捉えたことで，２つの式にある a+3b+5c が共通として見えたと考えられる．66S でこだわっていた a，b，c の値については何の言及もせず，「ここが 25 ということがわかっているので」(86S)と，文字式全体を構造的に捉えている発言に変わっている．この文字式の見方の変容の瞬間が現れているのが 84S であり，この被験者のインタビューの特徴である．そして，この見方を振り返り，次のように述べている．

87I：そうすると，今 S 君が一番最初に見ていた a+3b+5c ね，これと，よりよいやり方がわかったときのこの a+3b+5c の見方は違いますか．
88S：違います．

89I：どんなふうに違いますか.
90S：え～何て言うんだろう．最初は，25 を隠してみると，よくわからない数字で, 何を当てはめればいいかわからなかったけど, ここ（$a+3b+5c$）とここ（25）の関係がわかったので，これが，括弧になって，このままひとまとまりで 25 に見えて，そこから 10 をひけばいいということが見えるようになりました.
91I：それ，ちょっとそこに書いてくれるかな，自分の考えを．それで終了しよう．最初はどういうふうに見えたの.
92S：これ，感想みたいな感じで書けばいいですか.「最初は，$a+3b+5c$ がわからない文字にみえたけど，問題を解いていくにつれて $a+3b+5c$ をひとまとまりの 25 に見えて, 25－10＝15 という僕が思っていた式より簡単にできました.」と書く.
93I：ありがとう. それで，ここの最後ね. わからない文字に見えたというのは，もう少し詳しく言えますか.
94S：えっと a，b，c って３つ文字があって，普通なら x と y なら２文字，２つしかないからどっちかを解けば，どっちかが出てくるんですけど，３つあるとこんがらがっちゃっていたけど，こういう感じで問題を代入してみて解いてみると，こっちとこっち左辺と右辺が等しいということがわかってきたので，そうすると $a+3b+5c$ が１つのまとまりに見えてきました.
95I：こっちは１つのまとまりと見たんだよね．そう見える前は，それに対してどんなふうに見えていたのかな.
96S：なんか，１つ１つの区切りで見えていて，これとこれとこれをたしたら，これになるという感じだったんですけど.

この被験者は，文字の値がわからないことにこだわっていたときを振り返って，式を「１つ１つの区切りで見えていて，これ(a)とこれ($+3b$)とこれ($+5c$)をたしたら，これ(25)になる」(96S)と項を単位としてその和でできていると操作的に見ていた，すなわち，a，$+3b$，$+5c$ それぞれを対象と見ているプロセスの段階であったことがこの発言から見て取れる．そして，$a+3b+5c＝25$ の左辺と右辺が等しいことがわかった(94S)ので，$a+3b+5c$ がまとまりとして見え，２つの式の共通部分として把握できたと述べている．ここでプロダクトの段階に至ったと判断できる．この被験者が「ひとまとまりで 25 に見えて」(90S)と発言していることがその証左である.

2.2.4.3　H.M と Y.K

H.M は，$a+3b+5c＝25$ について $a+3b+5c$ は計算しなくても 25 であると解釈している．それは，問題２を解くときの次のような発言から見られる.

60S：$a+3b+5c$ だけで，25 なんだから，それひく 10 をすれば 15 になるから，答えは 15 になるんじゃないかと.

＜中略＞
76S：ええと，まず，これを全体で見て．(a+3b+5c を○で囲んで)
77I：こういうふうにまとまって見えた．
78S：はい，見えました．それで，これは後で置いておいていいかなと思って，これ(a+3b+5c＝25 の a+3b+5c)とこれ(a+3b+5c－10 の a+3b+5c)が一緒なら，これ(a+3b+5c－10 の a+3b+5c)は頭の中で 25 になって，そのわきで－10 が付いてくるだけだから，25－10 をすればそれが答えになるということを頭の中でやりました．
79I：なるほど，それでいいよね．a と b と c はわからなくてもいいんだよね，この問題．
80S：はい，そうです．

与えられた２つの式のうち，a+3b+5c の部分が「一緒」という表現を使って共通であると述べており，それを○で囲んでいる．そして a，b，c の値がわからなくてもよいことに同意している．

Y.K は，問題１の連立方程式を，質問紙調査時は加減法で解いていたが，このインタビューでは代入法で解いている．そして，問題２では，さちこさんの考えに反対し，次のように発言した．

63I：答は．
64S：15
65I：それ，どういうふうに考えましたか．
66S：えっとまずここが，ここがわかっているので．
67I：ここって何？
68S：25 です．
69I：あっ，はい．
70S：25 がわかっているので，a と b と c に入る数を何でもいいから適当に振っていって．
71I：そうしたら，どうなったの？
72S：そしたら，a が４で，b が２で，c が３になって，全部ここでかけて（b が３倍，c が５倍）たしていくと25になるので，ここの数が＝25とあったので，25－10は15かなと思いました．

この被験者は，a＝４，b＝２，c＝３と値を求めて正しい値 15 を求めている．この時点では，まだ a，b，c に入る数に着目している．そして，他に方法はないかを考えさせる．すると，次のように発言している．

84S：a+3b+5c は 25 ってなっているので，ここは，求めなくっていいので，この

$a+3b+5c$ は 25 って書いてあるので，ここは 25.
85I：ここっていうのは.
86S：$a+3b+5c$ は 25．でもここは計算しなくていいです.
87I：なるほど．いいのね．それで.
88S：で，ひく 10 ってあるので，25－10 をして 15 になりました.
89I：なるほど．さっきやったときと文字式の見方は違いますか．今，こっちのやり方と違いますか.
90S：こっちの方が楽．これ，いちいちこんなことしなくていいので.

84S で $a+3b+5c$ は計算しなくても 25 であると考えを変える発言をしている．この見方に移行している様子がタイプＢの生徒とは異なっている点である．さらに，具体的に数を代入していたときとの文字式の見方の違いを次のように振り返っている.

91I：その $a+3b+5c$ の見方は違いますか.
92S：はい.
93I：どんなふうに違いますか.
94S：え～と，さっきは，ここを求めようとして.
95I：ここというのは.
96S : a と b と c を求めようとして，なんで 25 になるのかを求めようとしていたのですけれど, a と b と c に入る数がわかっていないけど, 答えが 25 なので，求めなくていいということが思い浮かんで，で，ここに.
97I：どこに着目したんですか.
98S : $a+3b+5c$ がまたここ（$a+3b+5c-10$）に書いてあったので，ここと，$a+3b+5c$ と一緒なので，ここは，イコール 25 になっているので，ここ（$a+3b+5c-10$ の $a+3b+5c$ を指して）が 25 だと思って，25－10 をして 15 になりました.
99I : なるほど．さっき，こっちの方だと，a と b と c に注目したといったよね．こっち（a と b と c に入る数がわかっていなくても解けるとした方を指して）はどこに注目したのですか.
100S：この式のここです．$a+3b+5c$ は 25 に着目しました.
101I：じゃあ，a と b と c，1 個 1 個に着目したのではなくて，これは？
102S：式全体.
103I：を見たのですか.
104S：はい.

96S で, a, b, c の値を求めてから答えを求めようとするプロセスの見方から，$a+3b+5c$ の値が 25 であるというプロダクトの見方へ変容したことについて述べている．そして，２つの式に $a+3b+5c$ が共通していることに気付いたことを「こ

こと, $a+3b+5c$ と一緒なので」(98S)という表現で説明している．さらに,「$a+3b+5c$ は 25 に着目しました」(100S)と等式の左辺と右辺が等しいことを捉えている発言をしている．そして，式全体に着目した(102S)と述べる．式をプロダクトとして見ている発言であると考えられる．

そして Y.K は，最初，a＝４，b＝２，c＝３として，答えの15を求めていたが，H.M と同様に，$a+3b+5c$＝25について，$a+3b+5c$ は計算しなくても25であると解釈し直している．それは次のような発言から見て取れる．

105I：そしたら，a と b と c は求めなくていいと．
106S：求めなくていい．
107I：なるほど．そうすると，今やった，a が４で，b が２で，c が３，他のときも考えられるよね．
108S：はい．
1091I：１個じゃないよね．
110S：この４と２と３がってことですよね．はい．
111I：だから，それをわざわざ求めなくても．
112S：これはもう全部何にでもできるので，わざわざ数にしなくて，この式に注目した感じです．

この２名は，$a+3b+5c$＝25と $a+3b+5c$－10の $a+3b+5c$ が「一緒」という表現を使って共通であることを述べている．さらに，$a+3b+5c$＝25について，この等式の両辺が等しい関係であることを理解したと述べている．また，文字 a と b と c から，式全体を注目した(112S)と式の着目するところを変えたと，まさしくプロセスからプロダクトへその見方を変える様子が発言として現れ，これらのプロトコルから文字式の理解の様相が明らかとなった．

2.2.4.4　Y.W

Y.W は，問題１では代入法を用いて解き，加減法でも解けた生徒である．この被験者は，H.M ，Y.K（2.2.4.3）と同様に問題２でインタビューの最初は，a，b，c の数を代入して，a＝17，b＝1，c＝1 を導き，$a+3b+5c$－10 に代入して答え 15 を求めている．そこで，質問者が「もっとよりよい方法はないですか」と尋ねると，次のような反応であった．

52S：これ，a＝－$3b$－$5c$+25 にして，ここに代入してできるかな．
53I：ああ，なるほど．
54S：（－$3b$－$5c$+$3b$+$5c$+25－10＝15）と書く．
55I：うん，だから，まだそこからいけますか．わざわざ代入しないとだめですか．
56S：･･･．ああ，わかった．

57I：おお，わかった．
58S：えっと，ここ（$a+3b+5c=25$ の $a+3b+5c$）のところをA，そしたらこっち（$a+3b+5c-10$ の $a+3b+5c$）も同じなので，Aで，A＝25ということは，25－10なので，15となります．
59I：なるほど．最初に a と b と c を代入していたときと今の文字式の見方は，同じですか，違いますか．振り返って．
60S：同じかな．
61I：同じ．どういうふうに考えたの．
62S：ここ（$a+3b+5c$）が同じとき，文字で置き換えられるということを教わって，それでこっち（$a+3b+5c-10$）はイコールがなくて，こっち（$a+3b+5c=25$）はイコールで，A＝25のときということは，これ（$a+3b+5c-10$ の $a+3b+5c$）がイコール25ということだから，それに代入してだから，代入することは変わらないから．

52S，54Sでは式変形をして a に代入することにこだわっていたが，56Sで「ああ，わかった」と声を上げ，$a+3b+5c$ を１つの文字 A におき，$a+3b+5c-10$の $a+3b+5c$ を「同じ」という表現で共通していることを説明している．そして，$a+3b+5c=25$をA＝25とし，$a+3b+5c-10$の $a+3b+5c$ を25と置き換えて答えを導くことに気が付いている．

そして，このように見られたときと見られなかったときの文字式の見方の違いについて尋ねると，次のような反応であった．

63I：代入するということは変わらないね．今，ここの見方は．ここ（$a+3b+5c$）に線を入れたよね．そういうふうに見たときと，こっちでやろうとしていたときとでは，見方が同じですか．
64S：違う．
65I：どんなふうに違いますか．
66S：こっちはなんか，いろいろ考えちゃって．代入とかいろいろ面倒くさくやっちゃったんですけど，こっちはまとめて見やすい感じにして，それで，自分のわかる感じにした．
67I：これはまとめている．どういうふうにまとめて見ているの．
68S：１つの文字として．
69I：何を．
70S：$a+3b+5c$ という式をAという１つの文字で置き換えて見ている．
71I：こっちの見方は，今の見方と比べてどんなふうに説明できる．この $a+3b+5c$ をどういうふうに見ていたの．
72S：こっちは１つ１つにある数字を代入していって，ああ，b と c に代入していって，それで，あと何をたせば25になるかということを考えた．

このようにインタビューの最中に，文字式の理解が変容したことを端的に述べている．Y.W は a+3b+5c を具体的に文字 A に置き換えると発言(62S，70S)している．大文字の A に置き換えるというところに式 a+3b+5c をひとまとまりと見ているこの被験者の文字式の見方が明らかとなり，さらに，この式が１つの値を表していることを認識している様相が顕在化している．

以上のようにこのタイプの被験者のプロダクトの見方への移行が確認できた．

第４節　分析結果の考察：式をプロセプトとしての見ることと文字の理解の様相

１．式のプロセス・プロダクトの見方とその式における文字の理解

タイプＡからＤのそれぞれのタイプの被験者のプロトコルを，プロセス・プロダクトの視点，さらに文字式における文字をどう捉えているかという視点で分析した．タイプＡは，式 a+3b+5c を a と 3b と 5c をたすと，項を単位としてその和であると見ており，式が答えを出すための操作を示していると見ている．つまり，a と 3b と 5c を対象として，加法の記号「＋」を操作として見ており，等式は左辺から右辺を導く過程と見ている．この理解の様相は，先行研究でも明らかとなっており，本研究では，これを「プロセスの段階」と名付ける．

タイプＢについては，等式 a+3b+5c＝25 を満たす a，b，c の値を試行錯誤して求めるものの，それぞれの文字の値を固定的に見ており，この他に等式を満たす文字の値があることには気付いていない．このときの文字は，ある特定の数に置き換えられるという特定性が強く意識されていると考えられる．そして，この等式を，文字に数を代入して計算した結果が右辺であるという見方をしている．文字１つ１つに目が向き，式全体として１つの値に置き換えられると見ることができていない様子が見て取れる．したがって，このタイプＢの被験者も「プロセスの段階」であると考える．

一方，タイプＤは，a+3b+5c をひとまとまりの対象として見て，各々の文字の値を１つに決めなくてもよいことを理解している．このとき，１つ１つの文字に具体的に数値が入るという特定性の理解に加え，その値の組はいくつも存在することが理解できているという不特定性の理解もできている．一般化された文字としての理解の段階である．また文字式については，式を１つ１つの項として捉え，同類項をまとめ，具体的な数の代入による式の値の計算もできるし，式全体を１つの値に置き換えるなどの式操作もできる．したがって，式を計算の過程とも見ることができるし，文字式全体あるいは，等式全体を対象と見ることがで

きている．すなわち，このタイプの文字式の見方は，プロセスとプロダクトの両方の見方ができる「プロセプトの段階」である．

タイプＣは，文字式をプロセスとしての見方からプロセスとプロダクトの両方としてみる見方への移行の段階に当たると考えられる．この移項をインタビューの最中に確認した．この段階を本研究では，「プロセスのプロダクト化の段階」と名付けることにする．これは Sfard が提案している数学的概念を対象として捉えるための過程，すなわち，内面化，凝縮化，具象化を１つの問題において具体的に明らかにしようとするものであると見ることができる．この理解の様相を顕在化するとともに，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることが目的である．以下でこの段階の生徒の式をひとまとまりと見ることと，その式における文字の理解の両方に焦点を当てて考察する．

２．プロセスのプロダクト化と文字の理解

タイプＣは，最初，問題２に対して，複数の項をもつ文字式をそれらの項を１つ１つ分解して捉えているとともに，等式の左辺を計算した結果が右辺の値になると動的に捉えていた．つまり，「プロセスの段階」であったといえる．

これらの被験者のプロセスのプロダクト化の過程を詳細に述べる．まず，被験者は等式 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組を見つけ，答え15を導いている．そして，生徒は質問者からの促しにより，a，b，c の値の組は一通りではなく，他の場合もあることに気付きそれを求めることができている．

最初は，このタイプＣの被験者の多くは，特定性が意識されているにもかかわらず，その特定したい数を見つけることができなかったので，解決には至らない様子が見られた．しかし，具体的に数を代入することによって等式を満たす文字の値を見つけ，文字に入る数が特定されると，$a+3b+5c-10$ の値の存在を認識することができた．このことが，$a+3b+5c-10$ の式全体を対象として捉えるきっかけとなったと考えられる．さらに，他にも $a+3b+5c=25$ が成り立つ a，b，c の値の組があることに気付いていく．これによって，一般化された数としての文字の理解へと進展している．

この過程を経て，$a+3b+5c$ における a，b，c の値を特定しなくても式全体に注目することで，$a+3b+5c-10$ の値が25であることを理解できた．このことを，被験者は $a+3b+5c$ と25が等しいこと（生徒の言葉では「一緒」）に気付いたからと述べている．そして２つの式の共通部分が $a+3b+5c$ であることも理解している．

このように文字式における文字に数値を代入したり，等式を満たす文字の値を探したりすることを通して文字式の理解の変容が起こっている．つまり，多項式における複数の項をひとまとまりと見て１つの数値に置き換えることができるという理解が，その式における文字の個々の値は１つに決めなくても処理できるという理解と連動しているということである．このことを本研究では明らかにした．このような理解を報告している先行研究は見当たらない．

以上のプロトコルの分析から，式をひとまとまりと見ることに必要な要件として次の３つが挙げられる．

１つ目に，式 $a+3b+5c=25$ における文字 a，b，c それぞれに入る値は１つに決めなくても処理できることを理解することが必要であるということである．この理解に至るには，具体的に，$a+3b+5c=25$ を満たす a，b，c の値の組を見つける活動や文字に数を代入する活動が重要であった．被験者は，a，b，c の値を１組見つけたら，その値によって式を固定的に扱う．つまり，文字に特定の数が存在していることがわかると，その数を代入することによって，等式の両辺の値が求められ，等式が成り立っていることを実感として理解する．このとき，被験者は，文字式を全体として捉えているのではなく，あくまで式の値が存在していることを理解している段階であり，１つ１つの項を単位として対象と捉えている．このとき，文字を特定の未知数として扱っている．

そして，この等式を満たす文字の値は他にもたくさんあることに気付くと，a，b，c に入る数はわからなくてもよいこと，文字式全体が１つの値に置き換えられることへ理解が進展していく．このとき，文字式は式全体を対象と捉え，文字は一般化された数として扱っている．インタビューの中で被験者の発言には見られなかったが，最終的には，等式を満たす a，b，c の値の組は無数にあると理解できることが大切となる．これは，文字を変数として捉えることや，不定方程式とその解の意味の理解へとつながる．

２つ目には，等式 $a+3b+5c=25$ の左辺 $a+3b+5c$ と右辺25が等しいと捉えることである．このことは１つ目と連動しており，$a+3b+5c=25$ の左辺は計算で，右辺は答えであるという見方からの脱却である．

３つ目に，センテンス型の $a+3b+5c=25$ とフレーズ型の $a+3b+5c-10$ の２つの式に共通な部分 $a+3b+5c$ を見いだすことである．このことと等式の両辺が等しいことは，被験者の言葉ではどちらも「一緒」あるいは「同じ」と表現されている．プロセスの見方からプロダクトの見方へ移行する過程において，この見方を表現する生徒なりの理解が表出したものと考えられる．

以上をまとめると，文字式 $a+3b+5c$ をひとまとまりと見ることができる要件は次の３点である．

① 文字 a，b，c それぞれに入る値を１つに決めなくても処理できることを理解すること．

② $a+3b+5c=25$ の両辺 $a+3b+5c$ と25が等しいことを理解すること．

③ $a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c-10$ の２つの式に，$a+3b+5c$ が共通していることを見いだすこと．

要件①～③は相互に関連している．例えば，$a+3b+5c=25$ について，この等式を満たす a，b，c の値の組をいくつも見つけるという活動が，式 $a+3b+5c$ の値を意識させ，$a+3b+5c$ を構造化してみることを促す．すなわち，$a+3b+5c$ を文字 a，b，c の個々の値に注目することなく，式全体を１つのまとまりとして見るこ

とを促すのである．このように見ることにより，$a+3b+5c=25$の左辺 $a+3b+5c$ と右辺25が等しいことを理解でき，$a+3b+5c=25$と $a+3b+5c-10$の２つの式にある $a+3b+5c$ が共通していることを見いだすことができるようになる．このとき，$a+3b+5c$ における文字 a，b，c は「特定の未知数」から「一般化された数」としての理解に移行しており，この移行によって，文字式をひとまとまりとして見ることができるようになることを示した．この過程を「プロセスのプロダクト化」とした．式における文字について，当てはまる具体的な数の存在を確認しながら，最終的には１つ１つの文字には着目せず，特定の値を決めなくても処理できるようになる．つまり，これが，文字の特定性と不特定性の理解である．このような様相が，この問題におけるプロセプトの見方であり，式をひとまとまりとして見ることである．

第５節　本章の総括

本章での実態調査の目的は，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面において，式をひとまとまりと見ることの理解の様相を顕在化し，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることであった．

本調査では，中学校の文字式の学習を一通り終えた第３学年の生徒を対象に調査を行った．質問紙調査の問題２における解答から，具体的に等式を満たす a，b，c の値を見つけ，それをもとに式の値を導く生徒や，誤った計算を行い，式を単項式にまとめてしまう生徒の実態が明らかとなった．いずれも複数の項をもつ文字式をひとまとまりの対象として見ていない実態である．これらを含めた生徒の理解の様相を精緻化するため，選出した11名を対象に，インタビュー調査を実施し，そのプロトコルを先行研究で述べられている文字式の理解の二面性であるプロセス・プロダクトとその式における文字の理解の２つの視点で分析した．

その結果，連立方程式の代入法を用いるとき，代入すると項が多くなってしまって難しくなると考えている生徒が一定数存在し，文字式をひとまとまりと見る理解には，式を計算の過程として見るプロセスの見方から，計算の結果，対象として見るプロダクトの見方へ移行する必要があることが，その困難性とともに明らかとなった．また，文字の理解では，特定の未知数から一般化された数としての文字への進展が認められ，文字の特定性と不特定性の理解がこの進展に関連していることが明らかとなった．

特に，インタビューの分析により，本調査で用いた問題における文字式のプロセスの見方とプロダクトの見方の具体を明らかにするとともに，プロセスの見方からプロダクトの見方への移行をインタビューの最中に確認し，その移行の

途中の段階である「プロセスのプロダクト化の段階」の生徒の理解の様相を明らかにした．また，式をひとまとまりと見るために，第４節の２．で述べた①～③が必要であることを明らかにした．これを文字式の見方と文字の解釈の双方を関連付けると，次の表７のようになる．

表７　複数の単項式の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ること

<table>
<tr><td>Sfard, Gray, Tall</td><td colspan="3">著者（実態調査Ｉより）</td><td>Küchemann ら</td><td>藤井ら</td></tr>
<tr><td>文字式の二面性</td><td colspan="2">文字式の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の二面性</td></tr>
<tr><td>プロセス</td><td colspan="2">・項１つ１つが対象，加法の記号「＋」が操作を表す
・左辺の操作の結果が右辺と見る</td><td>・文字に入る数がわからないと答えは求められない→文字はわからないもの
・等式を成り立たせる文字に入る数の組を１組見つけ，その値を代入して式の値を求められる</td><td>・特定の未知数としての文字</td><td>・不特定性
・特定性</td></tr>
<tr><td></td><td>プロセスのプロダクト化</td><td>①等式の両辺が等しいと捉えること
②２つの式に共通している式をまとまりとして見ること
①②のどちらか一方が理解できている</td><td>・等式を成り立たせる文字の値の組がいくつもあることに気付く</td><td>・一般化された数としての文字</td><td>・特定性
→不特定性</td></tr>
<tr><td>プロセプト</td><td colspan="2">・複数の単項式の和の形で表された文字式全体を対象と見る
・式をひとまとまりと見る
①等式の両辺が等しいと捉えること
②２つの式に共通している式をまとまりとして見ること
①②が同時に理解できている</td><td>・文字に入る数を１つに決めなくても処理できることを理解する</td><td>・変数としての文字に近づく</td><td>・不特定性と特定性</td></tr>
</table>

Gray＆Tall(1994)，Tall(2016)のプロセプトは，プロセスの見方とプロダクトの見方の間を「簡単に楽々と移行する」ことができることである．本研究で明らかとなったプロセスのプロダクト化は，このプロセプトに至るまでの段階の理解の様相であり，この移行に必要な見方について顕在化したものである．

このことが明らかになったことで，連立方程式の代入法の位置付けや指導する上での扱いが変わると考えられる．代入法の指導を通して，その解き方だけでなく，文字式をその式の形によって柔軟に扱えるようにすることが重要である．そのために式を計算の過程と見るだけでなく，意図的に式をひとまとまりと見ることができるように促す指導が大切であると考える．そして，その見方への進展には，等式を満たす文字の値を求めたり，文字に数を代入し式の値を求めたり，多項式における複数の項を１つの値として考察したりすることを多く経験させることが重要であると考える．また，連立方程式の代入法の指導を通して，目的に応じて式をひとまとまりと見て操作できるようにすることが大切である．このようなことが式をプロセプトとして見ることにつながる．日々の授業で，生徒が文字式をどのように捉えているかと同時に，扱っている文字式における文字をどのように捉えているかを探ることで生徒の文字式の理解の段階が把握でき，指導に役立てられると考えられる．

第３章の引用・参考文献

(1)　Bell,Malone & Taylor.(1987).Algebra-an exploratory teaching experiment,Shell Centre for Mathematical Education.

(2)　榎本哲士.(2015).中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析－数学的概念の二面性を視点として－日本教材学会誌,教材学研究,第26巻,49-56.

(3)　藤井斉亮.(1985).「理解」とは何か−R.R.Skempのモデルを手掛かりに−,日本数学教育学会,数学教育学論究,43・44,34-37.

(4)　藤井斉亮.(1986).理解と認知的コンフリクトについての一考察,日本数学教育学会,数学教育学論究,45・46,24-28.

(5)　藤井斉亮.(1989).認知的コンフリクトによる理解の分析と評価.日本数学教育学会,数学教育学論究,71臨時増刊,53,3-31.

(6)　藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査,日本数学教育学会誌数学教育学論究(第74巻臨時増刊),58,3-27.

(7)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学１.平成27年検定済教科書,東京書籍.

(8)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学２.平成27年検定済教科書,東京書籍.

(9)　藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学３.平成27年検定済教科書,東京書籍.
(10)　Gray,E & Tall,D.(1994).Duality,ambiguity,and flexibi-lity:A"proceptual"view of simple arihtmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*,25-2,116-140.
(11)　加藤國雄.(1965).　数学の問題解決における思考（その11）−代数的思考について−.　山梨大学学芸学部研究報告.199-204.
(12)　Kieran,C.(1992).The learning and teaching of school algebra,D. A.Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,*A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,390-419,Macmillan.
(13)　小岩大.(2004).文字式の理解を捉えるための調査問題の開発－process-productに焦点を当てて－，第37回数学教育論文発表会論文集,256-264.
(14)　小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究－文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて－,東京学芸大学博士論文.
(15)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(16)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(17)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(18)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成22年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(19)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2011).平成23年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(20)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2012).平成24年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(21)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2013).平成25年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(22)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成26年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(23)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2015).平成27年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(24)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2016).平成28年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(25)　国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成29年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
(26)　国立教育政策研究所.(2013).TIMSS2011算数・数学教育の国際比較,国際数学・理科教育動向調査2011年調査報告書,明石書店.
(27)　Küchemann,D.(1978a).Children’s understanding of numerical variables,

*Mathematics in School,*7(4), 23-26.

(28) Küchemann,D.(1978b).Children's understanding of numerical variables, *Mathematics in School,* 7(5),12.

(29) Küchemann,D.(1981).Algebra,Hart,K.M(Ed.),*Children's Understanding of Mathematics*,11-16,102-119,John Murray.

(29) Linchevski,L & Vinner,S.(1990).Embedded figures and structures of algebraic expressions,*Proceedings of theFourteenth International Conference for the Psycholgy of Mathematics Education*,Vol.2,85-92.

(30) MacGregor & Stacey.(1996).Origins of students' interpretations of algebraic notation,*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,Vol.3,297-304.

(31) 三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.

(32) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(33) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(34) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(35) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成22年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(36) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2012).平成24年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(37) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2013).平成25年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

(38) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成26年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

(39) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2015).平成27年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

(40) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2016).平成28年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

(41) 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成29年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.

(42) Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions:Reflections on processes and objects as different sides of the same coin,*Educational Studies in Mathematics*,22,1-36.

(43) Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification-The case of algebra-,*Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.

(44) 清水宏幸.(1997).中学校数学における文字式の理解に関する研究－文字式

をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあててー，日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集,247-252.

(45)　清水宏幸.(1998).中学校数学における文字式の理解に関する研究,山梨大学大学院修士論文.

(46)　清水宏幸.(2019c).文字式とその式における文字の理解に関する研究−式をひとまとまりとみることに焦点を当てて−. 日本数学教育学会誌,101,11,2-13.

(47)　清水美憲.(1995).分数除法に関する児童・生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題，日本数学教育学会誌数学教育学論究,77,臨時増刊,63･64,3-26.

(48)　清水美憲.(2007).算数・数学教育における思考指導の方法.東洋館出版社.

(49)　Skemp,R,R.(1973).数学学習の心理学.藤永保・銀林浩訳,新曜社,初版８刷.

(50)　Tall,D.(2016).数学的思考－人間の心と学び,磯田正美･岸本忠之監訳,共立出版.

(51)　田中泰慶.(2003).中学校「文字式」領域におけるプロセプト的見方の実態とその指導法の研究,第36回数学教育論文発表会論文集,127-132.

(52)　和田義信.(2007).理解とは何か.和田義信　著作・講演集４　考えることの教育,251-263.東洋館出版社.

(53)　Wagner,S.(1981).Conception of equation and function under transformations of variable.*Journal for Research in Mathematics Education*,Vol.12,2,107-118.

第４章
式をひとまとまりと見ることについての実態調査Ⅱ：数字と文字の積の形で表された文字式

本章では，文字式をひとまとまりと見ることについて，方程式を立式する場面，特に過不足の問題における立式過程に焦点を当てて実態調査Ⅱを実施する．この実態調査Ⅱは２つに分かれる．その２つとは，誤答の様子が解明されていない生徒の理解の実態を明らかにするために，立式できていない生徒を対象にその解答を分析した調査１と，この調査で立式できている生徒の中にも誤答の生徒と同様な文字式や文字の理解をしている生徒の存在が明らかとなったことから，立式できている生徒を対象にその理解を分析した調査２である．この２つの調査では，同じ問題場面を用い，それぞれ調査問題を開発し，質問紙調査とインタビュー調査を実施する．そして，インタビューのプロトコルから文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点から生徒の理解の実態を捉えることとする．

第１節　実態調査Ⅱについて

１．調査の意図

本章で実施した実態調査は，過不足の問題の解決に向けての立式過程における文字，文字式の理解を探るものである．第１章で分析した全国調査の結果から，過不足の問題のような両辺に文字の項と定数の項をもつ方程式を立式することが生徒にとって難しいことが明らかとなっており，想定されていない誤答や無解答が多いことが認められた．また，方程式を正しく立式できている生徒の中に，両辺の表している数量を把握できていない生徒がいる可能性があることも明らかとなっている．そこで，実態調査Ⅱは，立式できない生徒の理解に焦点を当てた調査（調査１）と立式できている生徒の理解に焦点を当てた調査（調査２）に分けて実施する．まず，立式できていない生徒の誤答の原因を特定し，その誤答の背後にある文字式とその式における文字の理解の一端を顕在化する．次に，立式できている生徒の中に，方程式の両辺の表している数量を適切に把握できていない生徒を特定し，それらの生徒の文字式とその式における文字の理解の一端を顕在化する．

第２節では，立式できていない生徒の文字の理解の調査１，第３節では，立式できている生徒の文字の理解の調査２について結果の分析と考察をそれぞれ行う．本研究で実施した実態調査は次のような構造である．

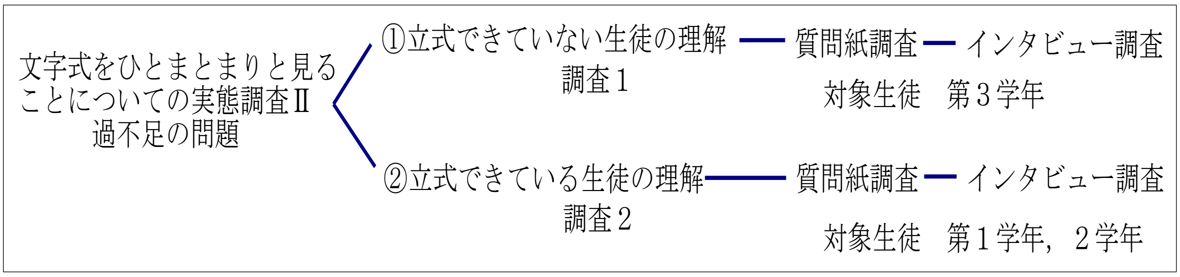


図１　本章で実施した実態調査Ⅱの構造

第２節　方程式の立式過程における物としての文字の理解の実態：立式できていない生徒の理解の分析

１．立式できていない生徒の理解に焦点を当てた調査（調査１）の意図と目的，

方法

第１章で述べたように，平成 20 年度全国調査Ａ$\boxed{３}$(2)の結果から，過不足の問題について，方程式の立式の問題としては低い正答率となっているにもかかわらず，出題者があらかじめ想定した誤答の類型に当てはまる解答が少なく，生徒の誤りの様子がつかめていない．そこで，本節の調査では，過不足の問題の立式過程に焦点を当て，立式を誤答した生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を顕在化することを目的とする．

この目的に対して，調査問題を開発し，中学校第３学年の生徒を対象に質問紙調査とインタビュー調査を実施し，その記述と発話の両面から生徒の理解の様相を顕在化する方法をとる．

質問紙調査とインタビュー調査の関係については，まず，質問紙調査をスクリーニング調査として行い，その記述を基に選出した生徒を対象にインタビュー調査を実施することとする．具体的には，質問紙調査では，後述の全国調査と同様の過不足の問題を出題し，それを生徒に解くよう指示する．その解答状況を見て，方程式を立式できていない生徒を選出しインタビュー調査を行う．そして，そのプロトコルから理解の様相を分析する．

２．調査１の質問紙調査

2.1　質問紙調査の対象，方法

2.1.1　対象：山梨県内公立Ａ中学校第３学年 115 名，公立Ｂ中学校第３学年 91 名，合計 206 名．本調査において第３学年の生徒を対象とした理由は，２次方程式までの学習を終えた生徒が，それまで多くの文字式を扱っているにもかかわらず，本研究で用いる過不足の問題に立式できていないということは，文字式や文字について何らかの誤概念や困難性を有していると考えられ，それを顕在化することにより，学習指導への示唆を得ることができると判断したからである．

2.1.2　実施時期：平成 27 年７月中旬．２次方程式の解き方まで学習済み．

2.1.3　方法：Ａ４版１枚の問題用紙からなる筆記形式の質問紙調査を通常の数学科の授業時間内の 30 分間を利用し，当該校の担当教諭により実施した．

2.1.4　調査問題：以下の問題である．

ひろしさんは，次のような問題を考えています．

問題

折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．
生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．

ひろしさんは，この問題を見て次のように考えました．

ひろしさんの考え

この問題を解くために，どうやって式をつくればよいかわからない．だから，

問題を解くことはできない．
(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか．
　　どちらかに○をつけなさい．賛成　・　反対
　　また，そのように考えた理由を書いてください．
(2)　あなただったらこの問題をどう解きますか．解く過程を丁寧に書き，答えを求めてください．

問題は，全国調査と同一の場面であるが，そのまま立式を問うのではなく，(1)で「この問題を解くために，どうやって式をつくればよいかわからない．だから，問題を解くことはできない．」というひろしさんの考えを提示し，これに対しての意思表示と理由を記述させる．

この問題は，１次方程式，連立方程式のどちらでも立式できるので，(2)で「あなただったらこの問題をどう解きますか．」と問い，自分のできる方法で自由に解くことを求めた．

問題文より，生徒の人数を x 人とおくと，$3x+20=5x-2$ と立式ができる．両辺を構成している文字式，左辺の $3x+20$，右辺の $5x-2$ に着目すると，単項式の和の形で表された $3x+20$，$5x-2$ は，何を表すかは明示されていない．このような文字式 $3x+20$，$5x-2$ を１つの数量としてひとまとまりと見ることができるか，さらに，単項式である $3x$，$5x$ をも１つの数量としてひとまとまりと見ることができるかを問うことを意図した．

2.2　質問紙調査結果と分析

2.2.1　立式の正答率と答えまでの正答率

問題１について，賛成，反対，無解答の人数と全数に対する割合，それぞれの中で立式を正答している人数と全数に対するその人数の割合，そして，答えを正しく導いている割合（(2)の正答率）を以下の表１に示す．なお，無解答は，賛成，反対いずれも選ばずに(2)に答えている生徒である．

表１　本調査と全国調査の正答率

(1)ひろしさんの考え	人数（反応率%）	立式を正答している人数(正答率%)	全国調査正答率(%)
賛　成	39(18.9)	18(8.7)	
反　対	161(78.2)	128(62.1)	
無解答	6(2.9)	1(0.5)	
合　計	206	147(71.4)	60.5
(2)　正答率（答えまで）（%）		67.0	

※括弧の反応率，正答率は，全数に対するその人数の割合

賛成，反対いずれを選んでも立式できた生徒と立式できなかった生徒がいる．表１から本調査では 71.4％の生徒が正しく立式できたことがわかる．また，67.0％の生徒が答えを正しく求められている．この中には，方程式を立式せずに正答を導いた生徒も含まれている．

2.2.2　問題場面から立式することについての分析

立式までを考察の対象として生徒の解答状況を見ていくことにする．本調査の質問紙調査の結果を平成20年度の全国調査Ａ$\boxed{3}$(2)で示されている解答類型に当てはめて集計し，それと比較すると，結果は表２の通りである．

表２　本調査と全国調査平成20年度Ａ$\boxed{3}$(2)の反応率

	番号	解答類型	本調査人数 (反応率％)	平成 20 年度 反応率％
立式	１◎	$3x+20=5x-2$　または， $\begin{cases} y=3x+20 \\ y=5x-2 \end{cases}$　と解答しているもの	147 (71.4)	60.5
	２	$3x-20=5x+2$　または， $\begin{cases} y=3x-20 \\ y=5x+2 \end{cases}$　と解答しているもの	2 (1.0)	4.1
	３	$\frac{1}{3}x+20=\frac{1}{5}x-2$　または， $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+20 \\ y=\frac{1}{5}x-2 \end{cases}$　と解答しているもの	3 (1.4)	0.2
	４	上記以外の１元１次方程式を解答しているもの	2 (1.0)	4.7
	９	上記以外の解答	30 (14.5)	12.1
	０	無解答	22 (10.7)	18.5

※括弧の反応率は，全数に対するその人数の割合

本研究の調査でも平成20年度全国調査と同様に，類型２～４の解答類型に該当する生徒はほとんどいないことがわかる．

2.2.3　質問紙調査の解答の分析

誤答の様子がわかっていない解答は，表２の類型の番号４（類型の番号１～３以外の１元１次方程式を解答しているもの）と番号９（想定されていない誤答が集められたもの）に入っている．次の項では，これらの解答から生徒の立

式の際の誤答の様子を探ることとし，加えて誤答である番号２と３の解答にも注目する．さらに，賛成・反対の理由についても分析する．

2.2.3.1　類型の番号４の生徒の解答

この類型の生徒２名は，類型の番号１～３以外の１元１次方程式を解答している．その生徒の１人がS.Sである．この生徒は，図２の式を書いている．文字xについて解答の中で規定はしていないが，おそらく生徒の人数を文字xを使って表していると考えられる．しかし「３枚ずつ配って20枚余る，５枚ずつ配ると２枚たりない」を３x＝20，５x＝－２としており，問題文で示されている言葉を出てくる順序通りに式に表していると考えられる．また，等号は，左辺と右辺が等しいことを表すためではなく，単に結果を表すために使っていると考えられる．この生徒は，ひろしさんの考えに賛成し「生徒の人数か折り紙の枚数が最初にわかっていないから」と記述しており，文字を用いて求める２つの数量を方程式として表現することに困難があった様子が見られる．もう１人の生徒は，－３x＋20＝－２という１次方程式を立式している．

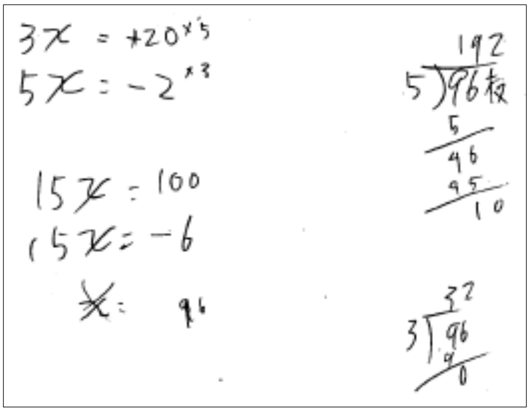


図２　S.Sの解答

2.2.3.2　類型の番号９の生徒の解答

この類型の生徒30名は，想定されていない誤答が集められた類型に入る解答，つまり類型の２～４のどこにも入らない解答をしている．生徒の解答の内訳は次の㋐～㋒である．

㋐　言葉や数値の計算だけで文字式を立式していない生徒12名．

㋑　文字式を使い表を作っている生徒５名．

㋒　類型の番号２，３，４を除いた文字を用いて立式しているがそれが誤りである生徒10名．

なお，上述した㋐～㋒のどの分類にも入らない生徒の解答は，一度式を書いたが，それに×がしてあったり消してあったりするものや，正しい式の他，誤った式も一緒に書いてあるもの，数値を書き間違っているものであり，分析の対象とならないと判断した．その生徒は３名いた．

以下で，㋐〜㋒のそれぞれの代表的な解答を見ていくこととする.

2. 2. 3. 2. 1　言葉や数値の計算だけで文字式を立式していない生徒 12 名

図３の解答をしている S.T は，人数を５人と仮定して折り紙の枚数を求め始め，次に８人で考えている．そして，最終的に９人と答えを出している．具体的な数値で計算している記述を見ると，２枚たりないので，全体の折り紙の総数から２をひかなければならないところを，２をたしてしまっている．生徒の人数を仮定して，配った折り紙の数を計算し，それを比較するという発想はこの問題の答えを求めるためには有効な手段であるが，文字を用いて立式してはいない.

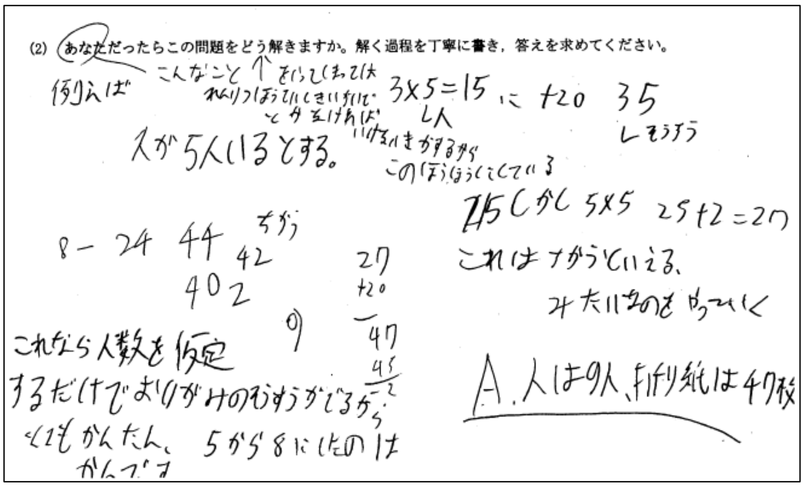


図３　S.T の解答

一方，図４の T.S は，折り紙の総数を 50 枚と 53 枚と仮定してそれぞれの生徒の人数を求め正答している．この生徒はひろしさんの考えに賛成し，「この問題は式を使わないと解けないと思うから」と記述している．このように数値の計算をしたり，言葉で説明したりして考えた生徒は，S.T，T.S を含めて７名であった.

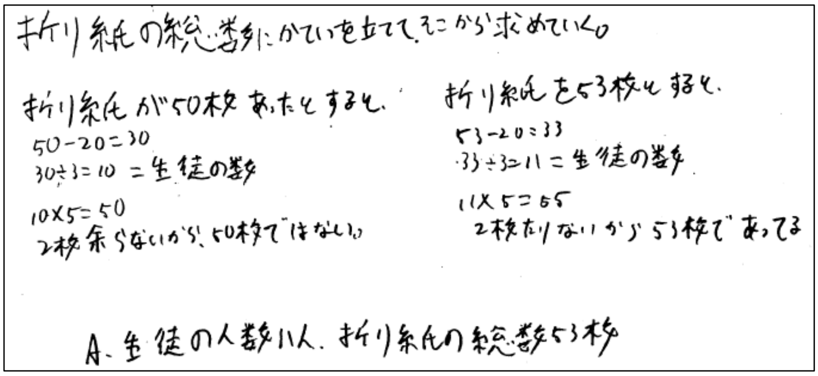


図４　T.S の解答

次に，Y.Oは，実際に図５のように配り方を図で表して解こうとしている．この生徒は変数を文字におくこともなく，数値を用いた式表現もしていない.

また，図の上の方に書かれている「１人に３枚＝20枚あまる」「１人に５枚＝２枚足りない」は，図２の生徒が記述している方程式と類似した表現である．

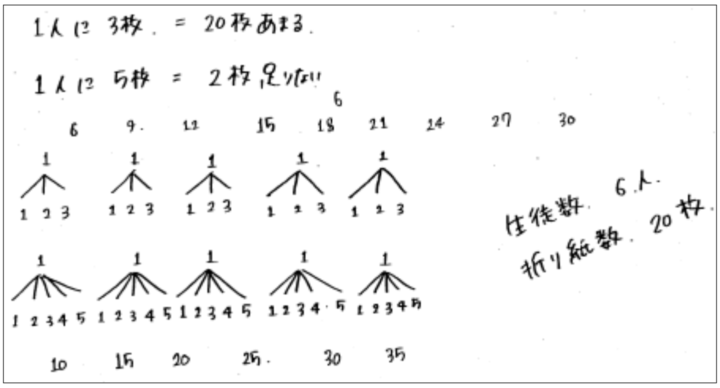


図５　Y.O の解答

図６のA.Tは，生徒の人数を10人，折り紙の枚数を50枚と数値を仮定して，その配り方を図にかいて表そうとしている．この生徒は３枚ずつ配る，５枚ずつ配ることを図のように３×10＝30，５×10＝50と数の式を用いて表している．しかし，文字を用いて数量を表現する記述は見当たらない．このように求める数量を，文字を用いずに図や絵などをかいて具体的な数値で解こうとしている生徒が５名であった．この生徒たちは，生徒の人数や折り紙の枚数を固定して仮定し考えようとしている点は，㋐の図３，図４の生徒と同様であるが，図や絵を表現方法として用いている点が特徴的である．

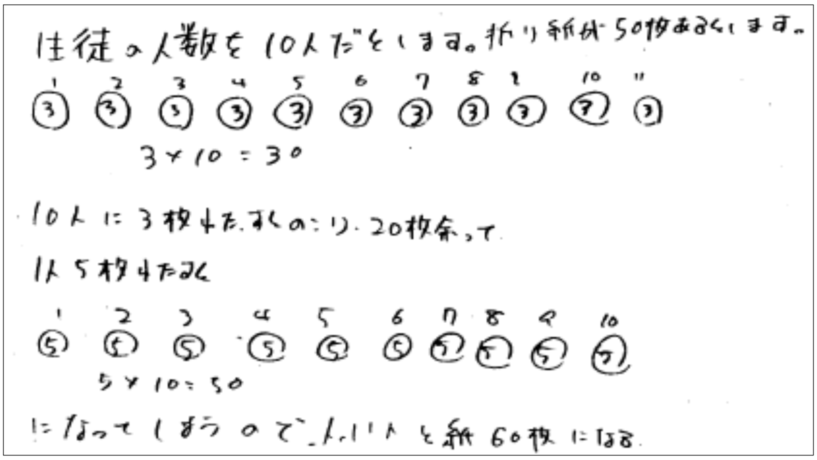


図６　A.T の解答

これらの生徒の本問題を解決する際の発想や着眼点はよい．しかし，文字や文字式を使おうとせず，具体的な数値を用いて数の式で解決しようとしている様子が見られる．

2.2.3.2.2　文字式を使い表を作っている生徒５名

図７の Y.I の解答は，表を使って正答している生徒の典型的なものである．彼は，ひろしくんの考えに賛成し「自分のまわりに教えてくれる人がいないなら

ば，とけないから」と理由を述べ，図７のような方法で生徒の人数と折り紙の枚数を求めている．この生徒は，左上に，折り紙の枚数を表す２つのフレーズ型の式３x＋20 と５x－２を書いている．そして，３x＋20 と５x－２の値を書く行を逆にしているが，生徒の人数１人から順に表のように数を並べて書き，２つの値が一致しているところを探している．彼は，等号を用いて方程式として表現できていないが，３x＋20 と５x－２の２つの数量とその関係については捉えている．

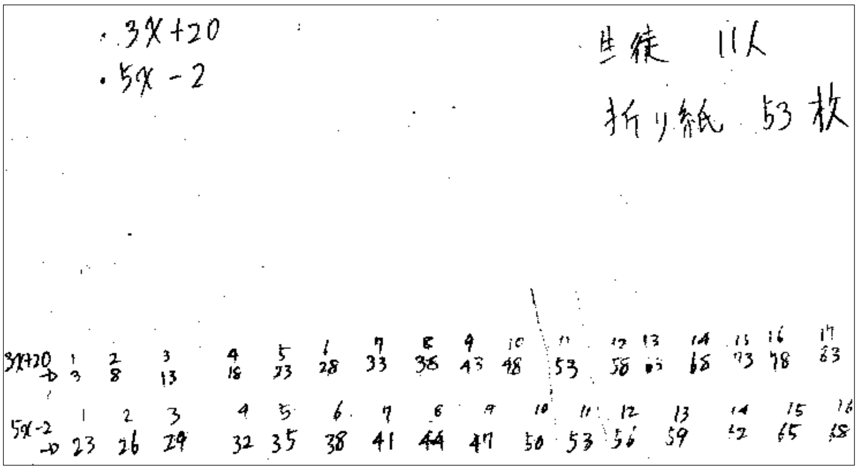


図７　Y.I の解答

このように文字に代入する数を規則的に動かして，式の値を比較するという方法は，関数につながる有効な手段であると考える．文字を変数的に見ている証拠であり，式の値が一致しているところを探すことが本問題の答えを導く方法であることも理解していると考えられる．しかし，この方法を，３x＋20と５x－２を等号で結んでその方程式を解くということと関連付けて理解できておらず文字式をプロセスとして理解していると考えられる．

2.2.3.2.3　文字を用いて立式しようとしているが，他の類型に当てはまらない誤りの生徒 10 名

図８の S.A は，文字 x と y の数量のみを記述している．求めたい未知の数量を文字におくことはできている生徒である．つまり，文字を用いて立式しようとする意識はあると考えられる．しかし，x や y を使って数量を式表現することはできていない．記述がここで止まっている生徒は，この生徒を含めて３名であった．

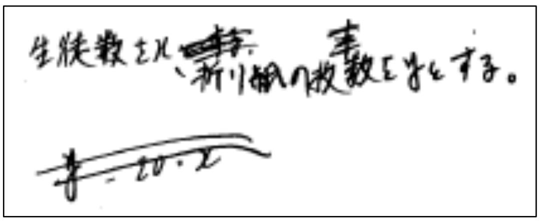


図８　S.A の解答

次に，図９の M.W は，配り方を除法の式で表そうとしている．文字 x，y を

どのような数量においたのかは書かれていないが，この記述から推測すると，xを生徒の人数，yを折り紙の総数として，yを３枚ずつ配った３xでわると20になると捉えて立式していると見られる．数量の関係を捉えたのではなく，文章に書かれたことを順番に式に表現しようとしたと考えられる．この問題場面を文字を使って表そうとしているが，何人かに配るという操作を除法と捉えて式表現をしていると考えられる．このように文字を用いて除法の式を立式しようとしたのは，この生徒を含めて３名であった．

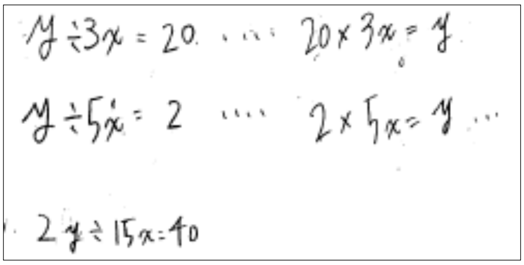


図９　M.W の解答

図10の S.H は，連立方程式を立式している．問題文にでてくる順番に式に表していると考えられる．つまり，xが生徒でyが折り紙とすると，１人の生徒に３枚の折り紙を配ると，20枚余ることが，x＋３y＝＋20と表され，１人の生徒に５枚ずつ折り紙を配ると２枚たりないことが，x＋５y＝－２と表されていると考えられる．問題文に出てくる数量を文字や数値として順に表したと思われる．同様の式の生徒はこの解答を含めて４名であった．文字x，yを生徒，折り紙という物を表す記号として使用していると考えられる．

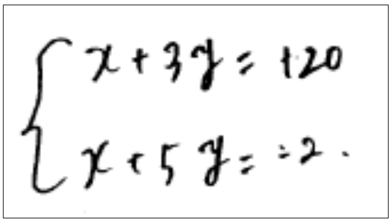


図 10　S.H の解答

以上，これら分類した解答の数を表にまとめると以下のようになる．

表３　類型の番号９の解答の様相（計 30 名）

	解答の様子	人数
①数値のみの式	a. 人数または，折り紙の枚数を仮定して求める	7
	b. 絵や図をかく	5
②文字式を使って表をつくる		5

③文字を用いた式	a.　言葉の順に式に表す	4
	b.　除法の式を立式する	3
	c.　文字 x，y の表す数量のみ記述する	3
④その他（分析対象外）		3

2.2.3.3　類型番号２と３の生徒の解答

類型番号２の解答の生徒２名は，x 人の生徒に，３枚ずつ配ったときに20枚余るを $3x-20$，５枚ずつ配ったときに２枚たりないを $5x+2$ と加法と減法を逆に表している．また，類型の番号３の解答をした生徒は，３枚配ったときを $\frac{1}{3}x$，５枚配ったときを $\frac{1}{5}x$ と乗法と除法を逆に表している．これは第２章第２節1.2.1の「学生・教授問題」において，正答 $\mathrm{P}=\frac{\mathrm{S}}{6}$ あるいは，$\mathrm{S}=6\mathrm{P}$ に対して，$\mathrm{P}=6\mathrm{S}$ と誤答するリバース・エラーと類似している．

前者は，正答 $y=3x+20$，$y=5x-2$ に対して，$y=3x-20$，$y=5x+2$，あるいは，正答 $3x+20=5x-2$ に対して，$3x-20=5x+2$ とそれぞれ誤って立式している解答で，例えば，$y=3x+20$ と $y=3x-20$ を見ると，20をたすべきところを20をひいており，加法と減法を逆にしていると考えられる．

図11の M.M は，類型の番号２の生徒であるが，この生徒は，折り紙の枚数を x，生徒の人数を y として立式したが，解いているうちにうまくいかないことに気付き，×を付けて再度立式している．それは，生徒１人に３枚ずつ配った折り紙の枚数 $3y$ が折り紙の枚数 x に，20枚余っているからそれにたすという式である．本来は，20をひかなければならないところを逆の操作をしている．もう一方の式も同様である．ここでも加法と減法を逆にしている誤りが顕在化している．このような生徒は，数量とその関係を捉えられていないと判断できる．

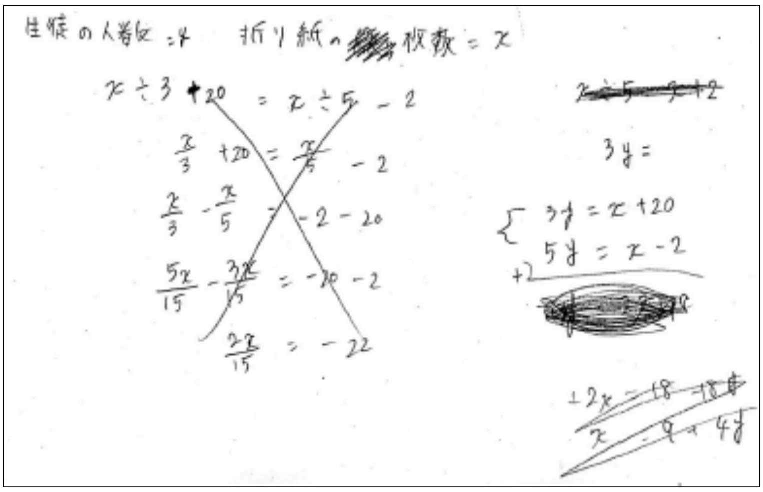


図 11　M.M の解答

そして後者は，正答 $y=3x+20$，$y=5x-2$ に対し，$y=\frac{1}{3}x+20$，$y=\frac{1}{5}x-2$，

あるいは，正答３x＋20＝５x－２に対し，$\frac{1}{3}x$＋20＝$\frac{1}{5}x$－２とそれぞれ誤って立式している解答である．例えば，y＝３x＋20とy＝$\frac{1}{3}x$＋20を見ると，xに３をかけるべきところを３でわっており，乗法と除法を逆にしていると考えられる．

図12のS.Yの解答は，類型の番号３であり，上述の乗法と除法を逆にしている誤りが現れている．生徒の人数xに３枚ずつ配ることをxを３でわると式で表現し，それに20をたしたものが，xを５でわって－２したものと等しいと捉えている様子が見られる．

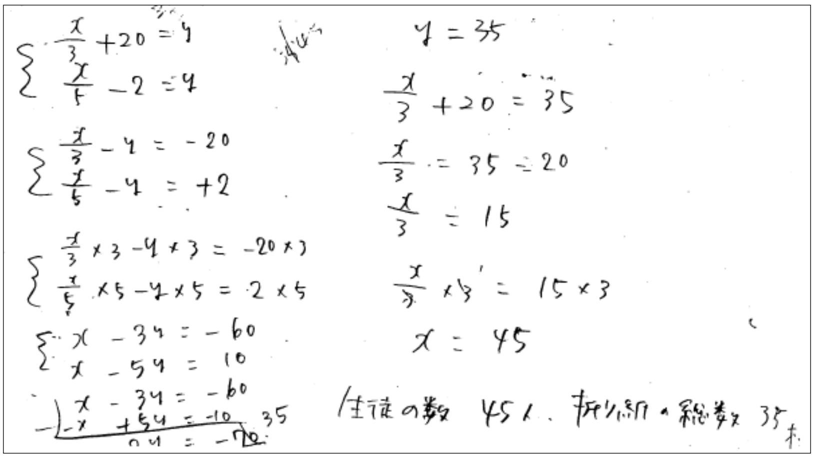


図12　S.Yの解答

類型の番号２と３の解答をしている生徒は，それぞれ２名，３名と少ない．しかし，これらの類型には入らないが，これらと類似した解答，加法と減法を逆にして立式した解答や，除法の式を立式した解答は，類型の番号９の表３の③a，bの解答に見られ，この解答に分類されている生徒は７名いる．

過不足の問題では，「配る」という操作と「余る」「たりない」という折り紙の枚数の状況を式に表現したとき，文字式の表す数量について考慮していないためにこのリバース・エラーが起こっていると考えられる．

2.2.3.4　賛成を選んでいる生徒の記述

表１より賛成を選んだ生徒は39名(18.9%)である．ひろしさんの考えに賛成した生徒の中で，19名(48.7%)は正しく立式できており，20名(8.6%)は立式できていない．

立式できていない20名の中には，なぜ，立式できないかの理由として「自分もこの問題の意味が全然わからないから」「どうやって式をつくればよいかわからないから．まず解けないから」と率直に記述している生徒が多い．その中で，立式できないことについて，核心に触れている記述はいくつか見られる．それは，「生徒の人数か折り紙の総数のどちらかがわかっていないと式をつくることができないと思うから」「生徒の人数位は数を表示しなければ解けない

から」「生徒の人数，折り紙の総数どちらもわかっていないから」「折り紙の総数がわからないから」という記述である．この記述から，求める数量が２つあることから，これを求めるためにどのように未知の数量２つを式に表すかに戸惑っている様子が見られる．このような生徒は，求める数量２つのうち，どちらか一方の数を確定したいという考えがこれらの記述に現れている．文字の特定性に意識が向いている．しかし，実際にはどちらの数もいくつであるのかはわからないので，一方の数を当然特定できず，この問題の答えが求められないと捉えている．わからない数量が１つであるときは，１元１次方程式を簡単に立式できる生徒が，未知の数量が２つあることで，わからない数量を不特定のまま扱うことができなくなるという様子がこの立式の際に顕在化したと考えられる．しかもその２つの数量は，生徒の人数と折り紙の枚数と，異なった数量であることも立式ができないと考えた理由であると考えられる．

一方，ひろしさんに反対して，１次方程式で立式している生徒は，「生徒の人数を x 人とすると，折り紙の総数を式で表すことができるから」と記述し，また，連立方程式で立式している生徒は，「生徒の人数を x とし，折り紙の総数を y とすると，１人に３枚ずつ配り20枚余る場合，$y=3x+20$ と式をつくることができて，１人に５枚ずつ配り２枚たりない場合，$y=5x-20$ と式をつくることができるし，このできた式を連立方程式にすれば答えがでるから」と的確に立式とそれを解く手順を記述している．このとき生徒は，特定性と同時に，具体的な数がわからなくても等しい関係は成り立っているという不特定性も，２つの文字に適用して立式している様子が見られる．

2.3　分析結果の考察

以上, 過不足の問題の立式過程における文字式の理解の困難性を探るため, 生徒の質問紙の解答を分析した. 特に, 解答の状況がつかめていない類型の番号９の解答を中心に分析した. この類型の中には, 文字を用いて式に表そうとしている解答と数値のみの式で解決しようとしている解答が見られ，その２つの中にも生徒の立式過程におけるいくつかの様相が見られることが明らかとなった．これらの様相から本問題の立式の際の困難性として次の３点が浮かび上がった．

① 問題で示されている数量や数量の関係を捉えること
② 捉えた数量や数量の関係を文字を用いて立式すること
③ ある数量を２通りに表したフレーズ型の式を等しい関係として等式に立式すること

これら①～③について，以下に考察を加える．

①について

問題の場面に含まれている数量や数量の関係を捉えることに困難があると考えられる．問題文に書かれている数量や数量の関係を把握せずに立式するために，問題文の１つ１つの言葉を数や文字に置き換える生徒の存在が明らかとな

った．また，加法と減法，乗法と除法を逆にして立式するリバース・エラーが見られる．この誤りも数量や数量の関係を把握せず，問題文に書かれている言葉や数値を当てはめて立式することに起因すると考えられる．そして，生徒が文字を未知数や変数を表しているのではなく，例えば，x は１人の生徒を表しているという物として捉えて立式しようとしている様子が見られた．

また，除法で式を記述しようとする生徒は，配るという操作から除法を選択していると考えられる．これは，小学校３年生の算数で習う余りのあるわり算の場面の，「色紙が23まいあります．１人に６まいずつ分けると，何人に分けられますか．また，何まいあまりますか．」という問題に対して，式を23÷６＝３あまり５と立式する場面が想起されていると考えられる．この学習でも，除法の答えが正しいかどうかを確かめる方法として，６×３＋５＝23と立式して検算することを学習しているが，これら整数の除法についての理解が不十分であると考えられる．

これは，文字を用いることについての理解ではなく，数量や数量の関係の把握についての課題であると考えられる．

②について

これまでの先行研究（例えば，MacGregor & Stacey ,1996）でも指摘があるように，文章問題を代数的に解決するのではなく，文字を使用することを避け，算術的に具体的な数値のみで解決する様相が本研究でも明らかとなった．しかし，まったく文字を使わないで解決しようとする生徒は12名であり，全体の6%である．MacGregor らの研究で報告されているオーストラリアの子どもたちとは傾向が異なっている．本研究において文字をまったく使わない生徒の中には，わからない数量を文字を用いて表すことに抵抗がある生徒がいると考えられる．場面の状況や，数量の関係は把握できていることはその解答からわかるが，具体的な数値を仮定し，その値を動かすことによって計算結果が一致するときの値を探すという方法をとっている．また，生徒の人数を規則的に1，2，3，･･･として折り紙の総数を求める表を作るという方法も見られる．このように数量が把握できていても，問題解決のために求める数量を，x，y といった文字を用いて方程式を立式することをしていない．文字を用いて立式することに困難を示す生徒の実態が確認された．確かに，具体的な数値を用いて解決することは，文字を変数として見ることにつながる重要な方法であると考える．しかし，このような方法が，方程式を解くことと関連付けて理解できていない様子が浮かびあがった．

また，この問題では，生徒の人数と折り紙の総数といった２つの異なった数量を求めることが要求されている．このとき，求める数量が２つあるため，その未知の数量をどのように式で表してよいか戸惑っている様子が見られた．生徒はこの未知の数量の２つのうち，どちらかがわかっていれば，式に表すこと

ができたり，答えを求めることができたりすると考えていることが明らかとなった．２つの未知の数量が異なっていることが，これらを文字において方程式に表すことの障害となっていることも明らかとなった．

③について

問題文で示されている数量を，文字を用いてフレーズ型の式でそれぞれ表すことができているが，その２つの文字式を等しい関係として等号で結ぶことができていない生徒の存在が明らかとなった．これらの生徒は，生徒の人数を x 人として，２つの式を立式することができている．しかし，この２つの式が同じ折り紙の総数を表していることに着目して等しい関係として方程式に表すことができない様子が確認できた．すなわち，それらの文字式の表している数量を把握し，さらにその関係を等式に表すことに困難があることが明らかとなった．しかし，２つの文字式に表した数量がどちらも折り紙の総数であることなど数量をどのように理解しているかは質問紙調査からは明らかとなっていない．

この生徒の様子は，第２章第２節1.2.1の「学生・教授問題」における立式の際の困難性としてMacGregor & Stacey(1993)が指摘している．MacGregorらは，２つの数量を等しいと見ることが最も困難であると主張している．また，MacGregorらの別の文脈での研究でも，各数量を文字を用いて表現できてもそれを方程式に立式できないことを報告している（MacGregor & Stacey,1996）．

本研究で用いた過不足の問題における生徒の解答は，MacGregorらの研究で指摘されている，等しい数量の関係を等式で表すことに困難を示すということと類似している様相が現れていると考えられる．このことから，問題で示された数量を２通りのフレーズ型の式で表すことはできたが，この２つの式が折り紙の総数を表しているので，それが等しい関係であると捉えて等号で結ぶことができていない様子が顕在化したものと考えられる．

$3x+20$，$5x-2$ を等号で結ぶことが困難であるという証拠は，図15のY.Hの解答から見て取れる．この生徒は最終的には正しく方程式を立式している（類型の番号１の解答として分類している）が，その過程で方程式を立式して解くまでに試行錯誤している様子が解答から見られる．

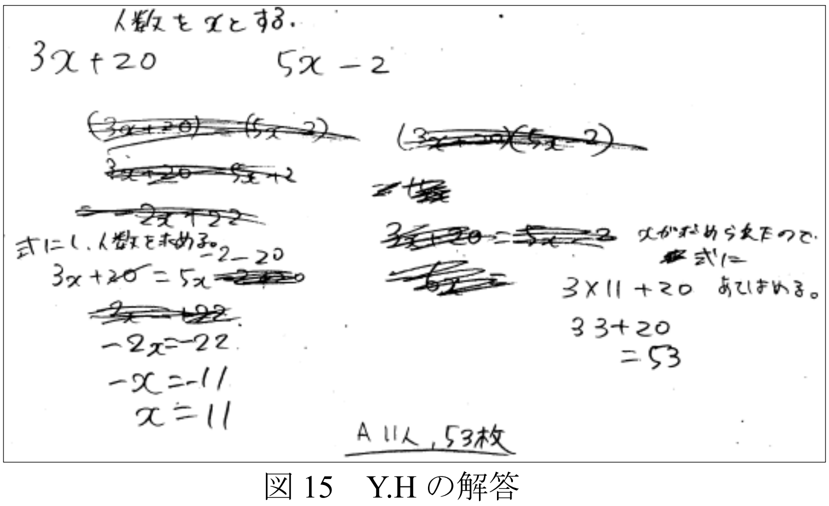


図 15　Y.H の解答

この生徒は，人数を x として，３x＋20，５x－２と書いた後，(３x＋20)－(５x－２)と書き計算をして消している．次に，(３x＋20)(５x－２)と書き計算を始めるが，それも消している．その後，３x＋20＝５x－２と等号で結ぶ式を書き，正答を導いている．この様子からも，３x＋20，５x－２を等号で結ぶことにすぐに向かわず，試行錯誤している様相が浮かび上がっている．この生徒は最終的には正しい方程式を立式できたが，３x＋20と５x－２がいずれも折り紙の総数を表していること，そしてそれを等しい関係であることを理解しているかどうかについては疑問が残る．

これに対して，３x＋20，５x－２と表してそれを等号で結んでいる（類型の番号１に分類している）生徒の解答は，図16のようである．T.I は「下線部のように３x＋20，５x－２について「折り紙の総数は同じなので２つの式を合わせ」と等しい関係を捉えている記述をし，３x＋20＝５x－２と方程式を立式することができている．フレーズ型の式が折り紙の総数を表すと同時にこの２つの数量が等しいと捉えている様子が見て取れる．

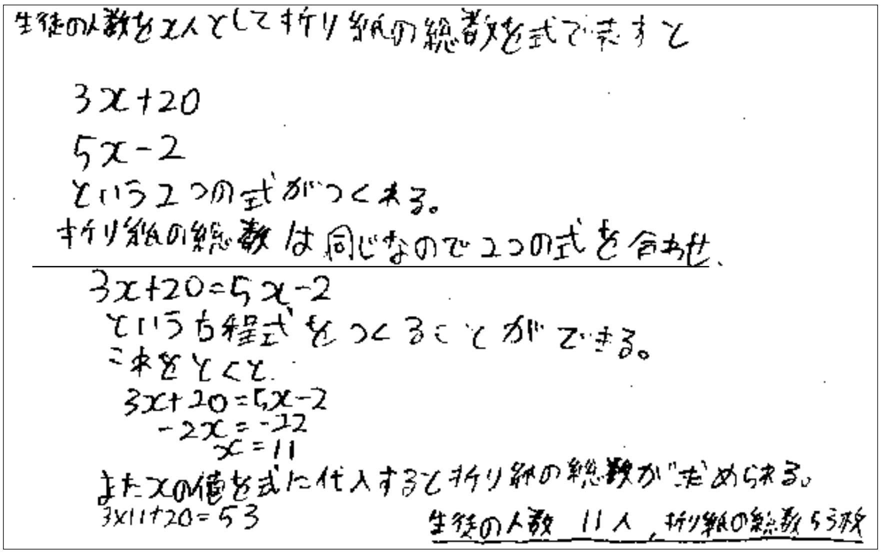

生徒の人数をx人として折り紙の総数を式で表すと
3x+20
5x−2
という２つの式がつくれる。
折り紙の総数は同じなので２つの式を合わせ、
3x+20=5x−2
という方程式をつくることができる。
これをとくと
3x+20=5x−2
−2x=−22
x=11
またxの値を式に代入すると折り紙の総数が求められる。
3×11+20=53
生徒の人数 11人，折り紙の総数53枚

図 16　T.I の解答

３．調査１のインタビュー調査

質問紙調査の解答より，本問題において，問題文から数量や数量の関係を見いだし文字を用いて立式することの困難性を明らかにすることを試みた．しかし，３x＋20，５x－２をどのように捉えているのか，そして，どうしてこの２つの式を等号で結んで方程式として立式できないのかは解明されていない．すなわち，これらを精緻に捉えることがインタビュー調査を行う目的である．そこで，次の対象と方法でインタビュー調査を実施することとした．

3. 1　インタビュー調査の対象・方法

3. 1. 1　対象

本研究では質問紙調査の解答の類型（表２）に基づいて，以下の類型の番号の解答をした生徒12名を選び，１人ずつインタビュー調査を行った．これら生徒の質問紙調査の解答状況は，ⓐ～ⓓに分類される．次の表４に内訳を示す．

表４　インタビュー対象生徒の質問紙の解答状況

類型の番号	記述した内容	解答の様子	生徒
9	ⓐ数値のみの式	a. 人数または，折り紙の枚数を仮定して求める	
		b. 絵や図をかく	A.T，Y.O
	ⓑ文字を用いた式	a. 言葉の順に式をつくる	S.H
		b. わり算の式をつくる	M.W
		c. 文字 x，y の表す数量のみ記述	R.I
1	ⓒ式は正答，答えは誤答		A.K
0	ⓓ無解答	K.T，H.S，M.Ta，T.K，M.Ts，M.Y	

3. 1. 2　実施時期

平成 27 年 10 月，11 月．関数 $y=ax^2$ まで学習済み．

3. 1. 3　実施日時と対象生徒：次のような日程と対象生徒（表５）で実施した．

表５　実施日とインタビュー対象生徒

※(1)～(4)：A 中学校　(5)，(6)：B 中学校

	日時（平成 27 年）	類型の番号１	類型の番号０	類型の番号９
(1)	10 月 8 日（木）放課後		K.T，H.S，M.Ta	
(2)	10 月 16 日（金）放課後			R.I，M.W
(3)	10 月 22 日（木）放課後	A.K		A.T，Y.O
(4)	10 月 29 日（木）放課後		T.K	S.H
(5)	11 月 24 日（火）放課後		M.Ts	
(6)	11 月 25 日（水）放課後		M.Y	

3. 1. 4　方法：インタビューは１人約 20 分程度とし，１対１の問答式で行う．被

験者の解答の様子に合わせて，場面を理解しているかどうかをみるために絵をかいたり補助問題に取り組んだりすることを促す．また，ヒントカードを提示して被験者自らの言葉で理解を引き出すことも試みた．インタビューの様子は，ビデオとＩＣレコーダで記録し，そのプロトコルをおこし，被験者の問題に取り組む様子や発話から文字式とその式における文字の理解について分析する．

インタビュー調査は，次の手順で行った．

① 問題１の書いてあるプリントを読むよう指示する．

② 問題(1)どうやって式を立式すればよいかわからないというひろしさんの意見に対して賛成，反対の理由を記述するよう指示し，その理由を尋ねる．

③ 問題(2)を解いて，プリントにその過程を記述するよう指示する．

＜式が立てられない生徒＞

・自分のできる方法でやってみるよう促す．図，表，式，グラフ等何を用いてもよい．できるところまで解くようにする．

・場面を絵や図で表すこと，線分図や表をかくことを促す．

・この問題からわかることは何か，わからないことは何かを尋ねる．

・難しいと感じていることはどこか尋ねる．

＜式が立てられた生徒＞

・立てた式の中の文字や文字式の意味について尋ねる．

・式を立てられなかったときを振り返ってどこに困っていたのかを尋ねる．

・式が立てられなかったときはどのようなことに難しいと感じていたのかを尋ねる．

・どうして式が立てられなかったのかを尋ねる．

④ 前回の解答を確認して，そのときに考えていたことを尋ねる．(後半のインタビューではこのことについて尋ねていない)

・これを解いたときにどのようなことを考えていたのかを尋ねる．

⑤ この問題の式を立てることについて，どんなことが難しいのか．難しいと考えていること，よくわからないことを尋ねる．

3.1.5　インタビューの内容

無解答の生徒は，言語による表現，数式による数学的な表現のどちらも苦手としており，インタビューを進める中で，自分の考えをうまく表出できない可能性が高い．そこで，これらの生徒の文字や文字式に対する理解の一端を少しでも表出させることができるよう，場面を絵や図で表すことを促すことを計画し，実行する．しかし，それでも被験者の理解が引き出せない場合がある．また，質問者が誘導することが多くなり，文字や文字式をどのように考えているかが聞き出せない状況が考えられる．そこで，表５の(4)の T.K と S.H のインタビュー時には，補助問題を用意し，(5)，(6)のインタビュー時には，ヒントカードを用意しそれを提示することで思考を促す工夫を行った．このようにインタビューを実施しながら試行錯誤し，被験者の理解の様子を引き出すことをねらったため，生

徒によってインタビューの内容が多少異なる．

3.1.5.1　補助問題とヒントカードの設定

インタビューの中で，$3x+20$ と $5x-2$ を立式した後，この２つの式を等号で結ぶことに戸惑っている生徒の様子が想定される．これは質問紙調査の記述から明らかとなっている．また，先行研究から $3x+20=5x-2$ のように両辺に文字が入る等式を立式することに抵抗があることも明らかとなっている．そこで，問題場面における数量やその関係を捉えて，文字を用いて等式を立式できない生徒の理解の様相を明らかにするため，それより簡単と考えられる，一方の辺は定数となる方程式を立式する問題を提示することにより，両辺に文字が入る方程式の立式のどの過程に困難を示しているのかを特定できると考え，以下の補助問題を用意した．

折り紙が全部で 62 枚あります．生徒に一人４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい．

なお，被験者の手が止まり，解答に困っているとき，質問者が，指導的介入をし過ぎることを防ぐため，該当するヒントを被験者自らで読むことによって，理解を進展し解決できるようにすることを意図してヒントカードを作成した．その表には，どこがうまくできないのか被験者自身が自覚できるよう，例えば，「何を文字に表していいかわからない」といったわからないところを示し，裏には，「生徒の人数と折り紙の総数を文字にできるか考えてください」のように，わからないところについての考え方のヒントを書いたものを用意した．

以下に示すように，手がつかない被験者用のヒントカードとして５枚（Ａのカード），$3x+20$ と $5x-2$ を立式しているがそれを等号で結ぶことができない被験者用として５枚（Ｂのカード），計 10 枚用意した．Ａのカード５枚は，フレーズ型の式 $3x+20$ と $5x-2$ を立式するまでの過程を，Ｂのカード５枚は，$3x+20$ と $5x-2$ まで立式した後，方程式を完成するまでの過程を，それぞれ５つの段階に分けて作成した．ヒントカードの内容は以下の通りである．

＜Ａのカード：手がつかない被験者に対して＞

１枚目

表　問題文の意味がわからない．

裏　折り紙を何人かの生徒に配る．

　　１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．

　　１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．

　　求めるものは，生徒の人数と折り紙の総数です．

　　これを求めるために，式をつくることにこだわらず絵や図や表などを使って考えてみてください．

２枚目

　表　求めるものが何かわからない.
　裏　求めるものは，生徒の人数と折り紙の総数です.
３枚目
　表　何を文字に表してよいかわからない.
　裏　生徒の人数と折り紙の総数を文字にできるか考えてください.
４枚目
　表　文字を１つ使うか，２つ使うかわからない.
　裏　文字が１つだと１次方程式，文字が２つだと連立方程式をつくることができます.
５枚目
　表　文字を１つ使うとき，何を文字におけばよいかわからない.
　裏　文字 x を使います．この文字 x を，生徒の人数をしてみて下さい.
＜Ｂのカード：$3x+20$ と $5x-2$ を立式しているがそれを等号で結んで方程式にできない被験者に対して＞
１枚目
　表　x，y が何を表しているかわからない.
　裏　x を生徒の人数，y を折り紙の総数として式をつくって下さい.
２枚目
　表　$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない.
　裏　$3x+20$ も $5x-2$ も折り紙の総数を表しています.
３枚目
　表　$3x+20$ と $5x-2$ はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない.
　裏　$3x+20$ と $5x-2$ が表している数量は何かを考えます．どちらも折り紙の総数を表しているので等しいと言えます．すると式はどうなりますか.
４枚目
　表　求めた解は，どんな数量を表しているかわからない.
　裏　最初においた文字が何を表しているかを確認して下さい．x，y は何に起きましたか.
５枚目
　表　答えが正しいかどうかをどのように確かめればよいかわからない.
　裏　求めた値を最初につくった式の文字に代入し，左辺と右辺が等しいことを確かめます.

このヒントカードは，表５(5)(6)の M.Ts と M.Y のインタビュー時に使用した．M.Ts には，Ａのカードを５枚並べて，その中から今の自分が一番当てはまるものを選ぶという形で利用した．M.Y は，Ｂのカードの２枚目と３枚目を提示し，この２つのカードから選ぶという形で利用した.

3.２　調査結果と分析

3.２.１　12 名のインタビューの概観

表４の類型の番号９の生徒５名（A.T，Y.O，S.H，M.W，R.I）と正しく立式している類型の番号１の生徒１名（A.K），そして，質問紙調査の解答が無解答の生徒（類型の番号０）６名（K.T，H.S，M.Ta，T.K，M.Ts，M.Y）のインタビューの内容の概略を次の表６で示す．

表６　類型の番号９の生徒５名と類型の番号１の生徒１名のインタビュー概略

生徒	問題に対して	生徒の行動	立式	文字式等の理解についての言動
A.T	手がつかない	場面を絵にする	―	・折り紙の総数を x として，式を立式しようとするができない． ・生徒の人数と折り紙の総数の２つを求めなければいけないから．
S.H		補助問題を考える	○	・補助問題を解き終わった後，$y=3x+20$, $y=5x-2$を立式する． ・補助問題は，わからないものが1つだけだったので，式が立てやすかった．
Y.O	誤った式を立式	$x\div3=20$ と立式	×	・配るからわり算にした． ・補助問題も 62÷4と立式する．
R.I	正しい連立方程式を立式	$3x+20$ と$5x-2$を立式して手が止まる．しばらく考え，$3x+20=5x-2$を立式．	○	・イコールでつないで移項するやつを使う． ・連立方程式かなと思ったが，そうではないので，イコールでつなぐ．
A.K				・あっ，そうかと言って立式する． ・2つの式を指して同じだと思った．
M.W		$3x$ 配ると余りは20 枚，$5x$ 配ると2枚たりないと書いてしばらく考える． その後，$3x+20=5x-2$を立式．		・ここにxを代入したときの，このどっち($3x+20$，$5x-2$を指して)も折り紙の総数になると思う． ・折り紙の総数か生徒の人数どちらかが書いてあれば，解きやすくなるが，どっちも書いていないということで，文字を入れるとなるとわからなくなる．

※立式について　ー…式がつくれない，×…式をつくったが誤り，○…正しい式をつくる

表７　無解答の生徒６名のインタビューの概略

生徒	問題に対して	生徒の行動	立式	文字式等の理解についての言動
H.S	手がつかない	場面を絵にする	―	・生徒の人数か，折り紙の総数のどちらの数がわからないと式がつくれない． ・文字をまったく使っていない．
M.Ta			―	・x と y がどこにあてはまるのかわからない．
M.Ts		ヒントカードにより場面を絵にして立式	― ヒントを見て ○	・ヒントカード「何を文字に表していいかわからない」「問題文の意味がわからない」「$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない」「$3x+20$ と $5x-2$ はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない」を利用する．
M.Y		ヒントカードにより立式	― ヒントを見て ○	・$3x+20$ と $5x-2$ は自力でつくる．ヒントカード「$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない」「$3x+20$ と $5x-2$ はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない」を利用する． ・この2つ（$3x+20$ と $5x-2$）は等しいと言えると（ヒントカードに）書いてあったので，同じ文字でイコールにする．
K.T	誤った式を立式	$\begin{cases} x+3y=20 \\ x+5y=-2 \end{cases}$ と立式． ・その後，場面を絵に表し，$x\div 3=20$，$x\div 5=-2$ を立式	×	・x に3枚ずつ配るからプラス3で y をつけて，イコール余りで 20． ・x プラス1人に5枚だから $5y$ で，2枚たりないから -2 ・配るはわるのかなと思った．
T.K	正しい連立方程式を立式	$\begin{cases} y=3x+20 \\ y=5x-2 \end{cases}$ を立式	○	・一人を y にして，3枚ずつ配ったら 20 枚余ったから $y=3x+20$ と言う． ・問題文の「１人に3枚ずつ配ったら」の「１人に」を y とおくと言う．

※立式について　―･･･式がつくれない，×･･･式をつくったが誤り，○･･･正しい式をつくる

3. 2. 2　本調査で分析する対象生徒

インタビューを行った 12 名は，１人を除き質問紙調査では立式できていなかった．本節では，過不足の問題において，正しく立式ができていない生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を精緻に捉えることを目的としているため，この 12 名のうち，インタビュー調査の中で文字を用いて式を立式できた生徒がどのように立式できたのかその理解を探る．立式できた生徒は，立式できなかったときを振り返って何がわからなかったのか，何がわかったから式を立てることができたのかをより明確に言語化できると考え，それらの生徒に焦点を当てることとした．本研究では，その中で特に，T.K，A.K，S.H の３名のインタビューのプロトコルを分析し，その理解の様相を探ることとする．

3. 2. 3　分析対象者のプロトコルの分析

3. 2. 3. 1　問題文にそって，言葉に数や文字 x，y を当てはめて立式（T.K）

この被験者は，連立方程式を立式するのであるが，その過程での文字の扱いが特徴的であった．プロトコルは，以下の通りである．

28S：（しばらくして）連立？１人を y にして･･･．

29I：どうぞ．自分のやっていることを書いてもらうといいね．思ったことを書いてもらって，そしてやってくれるといいです．

30S：はい．（書き始める（右図 14））

31I：はい，そのあとどうですか．

32S：（続きを書こうとする）普通に解けばいい．答えが･･･．

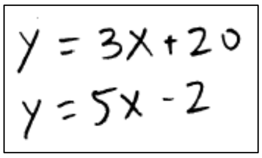


図 14　T.K の記述１

33I：どうぞ，どうぞ．

34S：（書き始める）

（図 15）

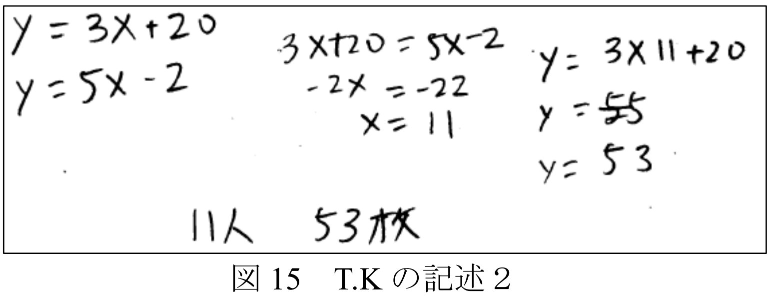


図 15　T.K の記述２

35I：はい，今，何を考えたのか，教えてもらっていいですか．

36S：１人に３枚ずつ配ったら 20 枚余ったから，１人を y にして，･･･．

37I：じゃあちょっと何を y にしたのか書いてみて．

38S：１人を y.

39I：１人を y.

40S：人を y に.

41I：それをそこの下に書いて，言葉で，何をどうしたのかを．

42S：（書く（図 16））

1人をyにして 3枚配ったと言っているのでそれを$3x$
にして20枚余ると書いてあるので+20とした。
それと同じようにして式を使って連立方程式で
解いて人と枚数を出した

図 16　T.K の記述

＜中略＞

45I：聞いていい．１人にyにしてってどういう意味ですか．
46S：え～と，なんか，思いつき．
47I：何をyとしているの．
48S：生徒の人数
49I：生徒の人数をyにしているの．
50S：はい．
51I：じゃあxは．
52S：xは，３枚配る枚数．
53I：xは枚数．どういう枚数．
54S：３枚配る枚数．
55I：３枚配る枚数．
56S：配るって書いてあるから．１人に３枚って書いてあるから，その３枚をxとした．
57I：３枚をx．xは３ってこと．
58S：なんか．
59I：そうすると今，$3x$じゃんね．$3x$って何を表しているんですか．
60S：１人に配った枚数．
61I：１人に配った枚数がx．
62S：なんか．

「１人をyにして」という発言に象徴されるように文字x，yを言葉の置き換えとして使っている．T.K は次のように立式していると考えられる．

１人に	３枚ずつ配る	と	20 枚余ります．
↓	↓		↓
y　＝	$3x$		＋20

この被験者は，yは生徒の人数，xは１人に配った枚数であると発言している．人数，枚数と答えているが，数量を表していると捉えておらず，一貫して言葉を

文字や数に置き換えている様子がある．このとき，文字を物として使っていると考えられる．なぜなら，何を y にしているのかを尋ねられると，「１人を y にして」から「y は生徒の人数」と解釈し直しており，このことから「１人の生徒を y」と捉えていると考えられるからである．しかし，この問題では，１人の生徒を文字に置き換えているのであるが，，この生徒が３人いるので，３x と表しているでのはないので，Küchemann の報告している１つの物としての文字とは異なっている．また，言葉の通りに置き換えてはいるが，１人に３枚配るということを置き換えているので，Clement の報告しているラベルを表す物としての文字とも異なっている．

また，インタビューの最後に振り返って，T.K は，式の意味について，立式した方程式の「＝」を指さし，「ここが曖昧だったからわからなかった．」と述べており，方程式は正しく立式しているが，その発言から立てた式について，その数量の関係を明確に捉えていないことが明らかとなった．

3.2.3.2　３x＋20 と５x－２を問題場面の状況や状態を捉えて立式（A.K）

この被験者は，問題を読んだ後，３x＋20 と５x－２を立式することはできたが，この２つの式を等号で結ぶことに時間を要しており，その際に特徴的な反応をしている．インタビューの様子は，次のようであった．

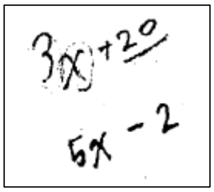


図 17　A.K の記述

52S：式．（式を書き始める）（右図17）
53I：これがこの場面か．
54S：うん．
55I：なるほど．で，どうしますか．
56S：やり方覚えていない．
57I：ちょっと考えてもらうとありがたいんだけどね．
58S：（しばらく考える）
59I：この上の，３x＋20って書いてくれたんだよね．これは何を表していますか．
60S：３枚ずつ１人に配ると，20枚余る．
61I：うん，３xって何を表しているの．
62S：３枚ずつ配った人数．
63I：ん，３xは人数なの．
64S：違う．えっ．
65I：いいですよ．
66S：折り紙の数．
67I：どこが，３x．
68S：（うなずく）
69I：３x＋20は何を表しているのですか．

70S：折り紙の数.
71I：折り紙の，さっきも折り紙の数って言ったけど，違うんだよね.
72S：折り紙の合計.
73I：うん，折り紙の合計，なるほど．じゃあ，３xは.
74S：配った数.
75I：なるほど，じゃあこっち（５x－２）は．５x－２は？
76S：こっちと一緒.

この被験者は，３x＋20 と５x－２を縦に並べて書いた後，しばらく考え込んでいる．そして，質問者が３x＋20 が何を表すかを尋ねると，「３枚ずつ１人に配ると，20 枚余る」と問題文のままを答えている．この被験者は，問題文に書かれている操作から場面の状況を捉え，３x＋20 と５x－２を立式したと考えられる．しかし，この２つを等号で結ぶところまではいかなかった．そして，３xは何を表しているかを尋ねると，「３枚ずつ配った人数」（62S）と答えている．このとき，A.K は手で何かを配るジェスチャーをしながら答えている．この様子から，折り紙を生徒に配る操作をイメージしながら式３xを３枚ずつ配った人数と答えたとみられる．したがって，３x＋20 を３xは人数，20 は枚数と別々の数量であると解釈し，１つの数量を表していると捉えていなかったと考えられる．

この後，「違う，えっ．」といい，10 秒ほど考え込む．そして，66S の通り折り紙の枚数であることに気付いている．３x＋20 を，折り紙を配るという操作としての見方から，折り紙の枚数を表していると見られるようになり，5x－２も「こっちと一緒」(76S)と認識するに至る．そして，３x＋20＝５x－２と立式した．この被験者の様子から３x を，「１人の生徒に３枚ずつ配る」ことや「３枚ずつ配る人数」と，１人の生徒が３枚の折り紙を持っている状況をイメージしている発言をしており，その数量を正しく把握できていない様子が見られる．方程式を立式するに当たって，３x，５xの解釈が障害となっている様子が見られた．

3.2.3.3　折り紙の総数 62 を文字に置き換えて立式（S.H）

この被験者は，折り紙の総数が 62 枚とわかっている補助問題を解いた後，立式できなかった最初の問題に戻り再び考えると，方程式を立式することができた．そのとき何が起こっているのかを探る．

この被験者は，インタビューの最初に提示された問題には手を止め，何も書いていない．そこで，新たな問題として折り紙の全部の枚数が 62 枚であるとわかっている下の補助問題を提示した．

折り紙が全部で 62 枚あります．生徒一人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい.

この問題に対して，S.H は，すぐに図 18 のように立式し解くことができた．その後，再度，最初の問題に戻って考えさせた．S.H はこのとき補助問題と最初の問題を何度も見比べている．そして，「x＝」と書いてしばらく考え込む．再び補助問題で自分が書いた式と見比べながら式を２つ書き，図 19 のように立式して解いた．

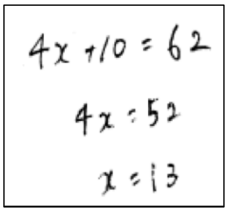


図 18　S.H の記述１

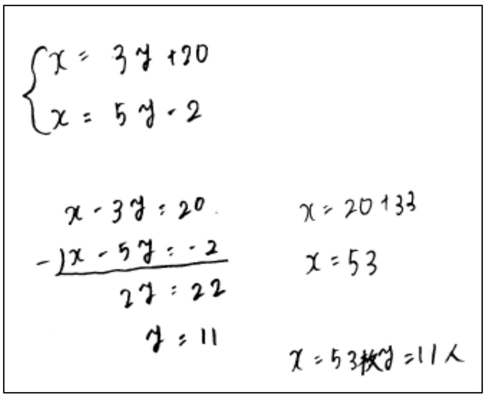


図 19　S.H の記述２

このことについて，S.H は次のように話している．

36I：･･･なるほど．で，今さ，ずっと手が止まっていたんだけど，この問題やったら思い浮かんだよね．何が変わりましたか．今，振り返って．

37S：この問題は，折り紙の全部の枚数が 62 枚ってわかっていたから，こっちは折り紙の枚数がわからなかったから，x にして，同時に生徒の人数がわからないから，生徒の数を y と置いてやりました．

38I：そうすると，これをやったことによって思い浮かんだということですか．

39S：はい．

40I：うん，最初これ手が止まったよね．どんなところに困ったの．

41S：なんか，どうやって式を立てていいかわらなかったから．

42I：そこが，何が原因かな．こっちはすぐにできたよね．どうしてその式が思い浮かばなかったのかな．

＜中略＞

45S：え～と，こっちは，わからない，求めたいものが２つあったからできなかったけど，こっちの問題は１つしかわからないものがなかったから式が立てやすかった．

注目すべきところは，図 18 で $4x+10=62$ と折り紙の全部の枚数 62 を右辺にしているのに対し，図 19 では，まず，「x＝」と左辺に書いているところである．$4x+10=62$ は，生徒 x 人に４枚ずつ配って 10 枚余っているのでその結果が 62 枚であると，左から右へ操作的に考えても容易に立式できると考えられる．一

方，最初の問題に戻るとまず，折り紙の総数を x として左辺に固定しているのである．このとき，左辺においた x は，折り紙の総数を表している，62 という数の置き換えとして用いていると考えられる．これは，37S で補助問題は折り紙の総数が 62 枚とわかっていたが，最初の問題は折り紙の総数がわからなかったから，それを x とおいたと発言していることと，立式の際に真っ先「$x=$」と書いたことからわかる．このときの文字 x は，未知数や変数として使っているのではなく，単に数値を x に置き換えたと考えられる．つまり，問題文から折り紙の総数を未知数と捉えて，その数量から文字を使ったのではなく，62 が折り紙の総数を表していると認識したことからそれを x に置き換えたと考えられる．何度も図 18 で立てた式を眺めることによって，この理解に至ったと考えられる．この被験者の様相は，１つの数値を単に文字に置き換えをしただけであるので，文字を物として理解していると考えられる．しかし，１つの数を，一般化された数の 1 つとして見ることができるようになれば，一般化された数としての文字へその理解を進展する可能性のある一歩であったと考えられる．

また，求めたい未知の数量が２つあることに戸惑っている発言があり，前項 2.2.3.4 と 2.3②で分析した生徒の理解の困難性と一致している．

3.3　分析結果の考察

インタビュー調査の目的は，$3x+20$，$5x-2$ をどのように捉えているのか，そして，なぜこの２つの式を等号で結んで方程式として立式できないのかを精緻に捉えることである．インタビュー調査の被験者の発話から，問題文に書かれている言葉を順に数や文字に置き換えて立式している被験者，数値では理解されている折り紙の枚数を文字に置き換えることによって立式している被験者，そして，$3x+20$ と $5x-2$ を，折り紙が，１人の生徒が３枚持っていて 20 枚余ることと，１人の生徒が５枚持っていて２枚たりないことというこの問題場面の生徒や折り紙の状況や状態を表すこととして立式している被験者の存在が明らかとなった．文字を未知数としてではなく物として捉えているため，２つの式 $3x+20$，$5x-2$ を数量として捉えられず，等しい関係として方程式を立式できないことが明らかとなった．すなわち，以下の３つの文字の理解の様相である．

(1)問題文の言葉を置き換えた文字
(2)数値を置き換えた文字
(3)物の状況や状態を表した文字

それは一律に同じように物として見ているのではなく，それぞれの見方は異なっている．つまり，物としての文字の見方にいくつかの相があるといえる．

本研究で実施した質問紙調査における被験者の記述をこの観点で分析してみると，正しく方程式を立式している生徒の中にも上で挙げたような文字の理解をしていると考えられる記述が見られる．以下に正しく立式できている生徒の

の記述をみていくこととする．

3. 3. 1　問題文をそのまま式にしている記述（M.N）

図 20 の M.N の記述を見ると，生徒に折り紙を配るという操作を言葉の置き換えによって，式に表現していると考えられる．「『何人かの生徒に配る』という所がわからないので，x や a に置きかえて考える」と記述しているが，何を置き換えたのかは明記されていない．このように立てた２つの式を数量として捉えていない．よって，数量の関係も捉えていると考えられる．この記述は，問題文にそって，言葉に数や文字 x，y を当てはめて立式していると考えられる．これまでの先行研究と同様の反応であると考えられる．前述の T.K は，言葉の通りに置き換えてはいるが，１人に３枚配るということを置き換えているので，これとは異なる反応であると考えられる．

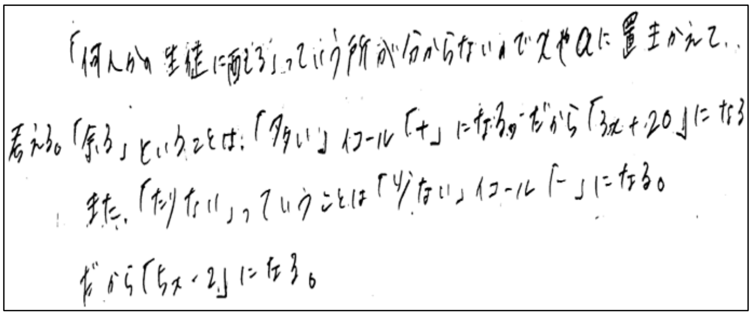


図 20　M.N の記述

3. 3. 2　配るという操作を表現するとき文字が物として扱われている記述

3. 3. 2. 1　S.K の記述

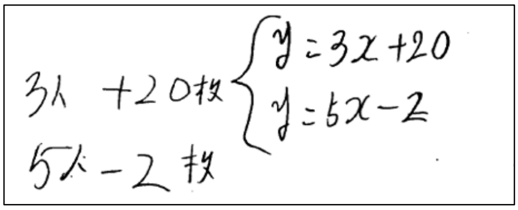


図 21　S.K の記述

図 21 の S.K は，「３人　＋20 枚」，「５人　－２枚」と書いている．そして，ここから $\begin{cases} y = 3x + 20 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$ を立式している．この記述から「人」を x に置き換えて３x，５x と立式している様子が見られる．このとき，３x，５x は人数，20，－２は枚数を表していると考えられ，それぞれが別の数量を表している式として３x＋20 と５x－２を捉えていると考えられる．つまり，この２つの式が１つの数量を表していると捉えられておらず，A.K と同様に，３x と＋20 を分離して異なる数量として解釈していると考えられる．また，「y＝」としているこの y を何においているのかの記述はない．

3.3.2.2　R.K の記述

図 22 の R.K は，「人を x」と記述しており，１人の生徒の絵をかき，その人が３枚もらうというこの問題場面の状況を表現していると考えられる．この絵から折り紙を持っている生徒というイメージで文字 x を捉えていると考えられる．つまり，生徒そのものを文字 x と表していると考えられ，１人の生徒の折り紙を持っている状況を表していると考えられる．その横に「20 枚余り」と「２枚たりない」と書いている．これは，A.K の文字の使い方を同様である．方程式は正しく立式できている．

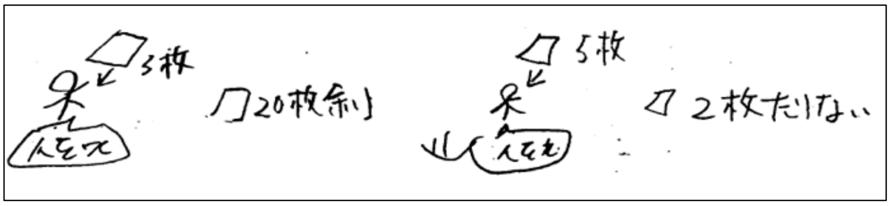


図 22　R.K の記述

図 23 の R.K も同様に捉えていることがこの図からわかる．

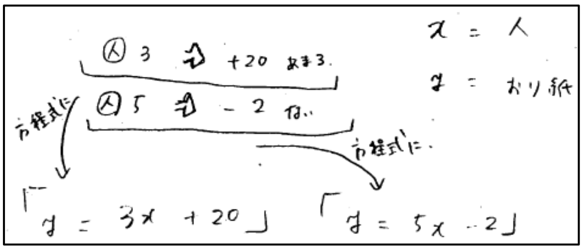


図 23　R.K(図 22)と同様に「人を x」としている C.M の記述

3.3.2.3　S.S の記述

過不足の問題において，生徒に折り紙を配るという操作としてイメージしている様子が現れているのは，第２節 2.2.3.2 で分析した S.S の解答(図 24)にかかれた図である．この被験者は，質問紙調査では，$3x=+20$，$5x=-2$ と立式している．図 24 のように折り紙の枚数ではなく，生徒が図として浮かびあがっている様子がわかる．生徒が折り紙を５枚ずつ，そして３枚ずつ持っている様子を表していると考えられる．この被験者の図の中に文字 x はどこにも出てこない．

１人３枚の折り紙を持っている生徒が８人，１人５枚の折り紙を持っている生徒が８人いる図をかいている．このように人数が確定しているときの絵はかけイメージもしやすい．しかし，生徒 x 人になったとき，そのイメージができず，$3x$ を，「３枚の x 人分」ではなく，「x 人が３つ」と解釈するので，x の表す数量である生徒の人数や生徒を表していると答えてしまうことが考えられる．この３枚が x 人分あると捉えることに生徒たちが困難を示している様子が見られる．

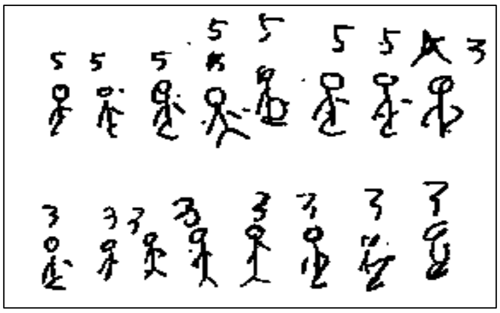


図 24　S.S の記述

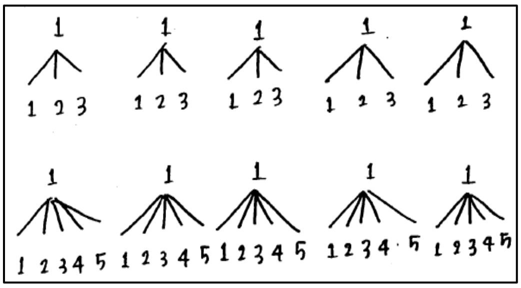


図 25　S.S と同様の１人が折り紙を３枚ずつ，５枚ずつ持っている様子を絵に表している Y.O の記述（再掲図５）

４．結論：物としての文字の理解の様相

本調査の目的は，過不足の問題の立式過程に焦点を当て，立式を誤答した生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を顕在化することであった．このことを探るため，調査問題を開発し質問紙調査とインタビュー調査を実施した．質問紙調査で方程式を立式できていない生徒を対象にしたインタビュー調査において，２つの未知の数量を求めるために文字を用いることについて，$3x+20$ と $5x-2$ をどのように捉えているのかを探った．インタビューの中で同一の問題に立式できた被験者のプロトコルを分析すると，$3x+20$ と $5x-2$ の意味について，２つの文字式が何を表すかを問題文の言葉や数をそのままなぞって解釈していることがわかり，表している数量を明確に捉えていない様子が明らかとなった．この背後には，文字式に含まれている文字を物として捉えている生徒の実態が浮かびあがった．さらに，物としての文字の理解にいくつかの相があることが明らかとなった．

この文字の理解については Küchemann(1981)によって提案されている．Küchemann の主張している物としての文字は，以下の３点であった．（第２章第２節 1. 1. 3）

① 物の名前を簡略化した記号としての文字

② １つの物としての文字

③ 物の集合としての文字

同じく，第２章第２節 1. 2. 3 に示したように，この３つに加え，物としての文字には，その他の研究から次の３点が挙げられた．

④ ラベルとしての文字

⑤ 一般的な参照としての文字

⑥ インデックスとしての文字

本調査では，これら６点の物としての文字以外の物としての文字の理解の様相を明らかにした．それは，次の３つである．

(1)問題文の言葉を置き換えた文字
(2)数値を置き換えた文字
(3)物の状況や状態を表した文字

この３つの文字の物としての文字の理解と同時に，文字式については，例えば，$3x+20$ を，「３枚ずつ１人に配ると 20 枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり，生徒の人数 x を使った $3x$ は人数を表し 20 は枚数を表すといったように文字の項と定数の項を別々の数量を表す式と捉えていたりするといった理解が明らかとなった．$3x+20$，$5x-2$ の文字式の解釈が正しくできない要因の１つとして，$3x$，$5x$ の捉え方にあることが明らかとなった．それは，例えば，$3x$ は，x 人に３枚ずつ配った折り紙の枚数であると正しく捉えられていない実態である．これが２つの文字式が同じ数量を表しそれが等しい関係として立式できない原因であると結論付けた．また，文字 x をどのように捉えているかによってこれらの捉え方が変わることも明らかとなった．しかし，その理解の様相まで踏み込めていない．

質問紙調査の解答状況を見ると，このような理解は，方程式を立式できていない生徒だけでなく，方程式を正しく立式できている生徒の中にも現れていることが明らかとなった．

第３節　方程式に含まれている単項式，多項式とその式における文字の理解の実態：立式できている生徒の理解の分析

１．立式できている生徒の理解に焦点を当てた調査(調査２)の意図と目的，方法

前節では，過不足の問題において，中学校第３学年を調査対象とし，12 名の生徒にインタビューを実施した．その中で，質問紙調査では方程式の立式ができていない生徒がインタビューの中で立式できた生徒３名に絞って，それらの生徒の立式過程における文字式とその式における文字の理解について考察した．

この結果，例えば，$3x+20$ を，「生徒１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ること」を表しているというように，式が「配る」という操作や「20 枚余る」という問題場面の状態を説明していると捉えていたり，生徒の人数 x を使った式なので，$3x$ は生徒の人数を表し，20 は枚数を表していると文字式を分離して捉えたりする実態を明らかにした．また，このときの文字の理解では，前述の①から⑥の物としての文字に対して，問題文の言葉を置き換えている物としての文字，数値を置き換えている物としての文字，生徒が３枚の折り紙を持っているというように物の状況や状態を表している，物としての文字の理解を明らかにしたことになる．

これらの点を踏まえ，本節では，過不足の問題において方程式を立式できている生徒を対象に，その立式過程に見られる生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を明らかにすることを目的とする．正しく立式できていることにより見過ごされ，誤った理解が解消されないまま学習が進んでいくと，複雑な数量関係を読み取る場面で，文字を用いて方程式等に表すことができなくなってしまう可能性があると考えるからである．よって，誤概念が生じやすい，文字式等の学習の最中である学年の生徒の理解の様相をより精緻に明らかにすることにより，今後の学習指導への示唆を得ることができると考える．特に，前節で明らかとなった $3x$，$5x$ といった数字と文字の積の形で表された文字式をどのように理解しているかに踏み込んで調査したい．

本研究の方法は，以下の通りである．

文字式の理解を精緻に分析するための調査問題を新たに作成する．その問題を用いて公立中学校２校の第１学年，第２学年の生徒に対して質問紙調査を実施する．調査１の対象生徒を，文字式や関数の学習が一通り終了している第３学年の生徒を対象としたのに対して，調査２は，立式できている生徒を対象にし，文字式や関数の学習の最中における生徒の理解を探るため，学年を下げて調査することとした．質問紙調査を分析することによって，インタビュー対象生徒を選出し，それらの生徒に同一の問題をインタビューの中で解くよう指示し，そのときの文字式とその式における文字の見方について聞き取りを行う．そのプロトコルを分析することにより生徒の文字式の理解の一端を明らかにする．

２．調査２の質問紙調査

2.1　調査問題　問題は以下の２問で実施する．

問題１

> 折り紙を何人かの生徒に配るのに，1 人に 3 枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．
> 生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．

この問題を，方程式をつくって解いてください．

※方程式で解けない人は，どのような方法でも自分が思いつく方法で答えを求めてください．

考え方や答えをどのように求めたのかがわかるように解いた過程をていねいに書いてください．

問題２

次の**問題**と**考え方**を読んで，問いに答えなさい．

> **問題**
> 折り紙を何人かの生徒に配るのに，1 人に 3 枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．

生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，方程式をつくりなさい.

考え方

方程式をつくるために，x を使って，$3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくりました.

この問題の考え方の中でつくった２つの式 $3x+20$ と $5x-2$ についてききます.

１．$3x+20$ について

①$3x$ は何を表していますか.

②$3x+20$ は何を表していますか.

２．$5x-2$ について

①$5x$ は何を表していますか.

②$5x-2$ は何を表していますか.

2.2　質問紙調査の内容と方法

2.2.1　目的・方法

調査２の質問紙調査では，インタビュー対象生徒を選出するため，上述の過不足の問題の解決の過程を記述させる問題（問題１）と，立式した１次方程式の中の文字式の意味を問う問題（問題２）を用いる．問題 1 では，解答から方程式の立式ができている生徒，できていない生徒を選別する．問題２では，問題１と同様な問題場面において，１次方程式の両辺となる $3x+20$ と $5x-2$ の意味をどのように捉えているかについての理解を精緻化するために，まず $3x$，$5x$ の意味を尋ね，その上で，$3x+20$ と $5x-2$ の表す数量について尋ねることとした.

問題２は，問題１の解答に影響を与えるため，問題１を終えた後，質問紙を回収し，その後問題２を配付し取り組ませることとした.

2.2.2　調査対象

山梨県内公立Ａ中学校第２学年 88 名，Ｂ中学校第１学年 88 名，第２学年 97 名．第１学年は１次方程式，比例・反比例まで，第２学年は第１学年の全範囲と連立方程式，１次関数までがそれぞれ学習済み.

2.2.3　実施時期：平成 29 年 11 月下旬～12 月上旬.

2.2.4　調査結果の分析の方法

問題 1 では，生徒の方程式の立式の過程を，全国調査の解答類型を用いて分類した．問題２では，$3x$ と $3x+20$ が何を表しているかについての記述を，類型をつくって分類した．$3x$ と $3x+20$ に限定したのは，$3x$ と $5x$，$3x+20$ と $5x-2$ の記述間に着目すべき差が見られなかったためである．そして，問題１の立式の類型と，問題２の $3x$，$3x+20$ それぞれについての記述の類型をクロス集計し，解答の傾向を分析し，インタビュー対象生徒を選出する.

2.3　調査結果と分析

平成 20 年度全国調査Ａ$\boxed{3}$(2)と比較するために，全国調査と同様の解答類型により生徒の解答を分類し，その結果を以下の表１にまとめた．前節で行った結果も「H27 調査」としてこの表に加えている．なお，平成 29 年度全国調査Ａ$\boxed{3}$(2)の解答類型では，類型番号５（$3x+20$ または，$5x-2$ を記述しているもの）が付け加わっているので，その類型を加えて集計をした．また，文字式の学習歴の違いを考慮し，学年ごとに集計した．

表１　全国調査と同一の解答類型での比較

番号	解答類型	平成 20 年度反応率（３年）	１年生 割合(%) 括弧内人数	２年生 割合(%) 括弧内人数	H27 調査 反応率(%)
1 ◎	$3x+20=5x-2$　または $\begin{cases} y=3x+20 \\ y=5x-2 \end{cases}$ と解答しているもの	60.5	58.0(51) 54.6(48) 3.4(3)	55.1(102) 21.1(39) 34.0(63)	71.4(147)
2	$3x-20=5x+2$　または $\begin{cases} y=3x-20 \\ y=5x+2 \end{cases}$ と解答しているもの	4.1	3.4(3) 3.4(3) 0(0)	2.7(5) 0 2.7(5)	1.0(2)
3	$\frac{1}{3}x+20=\frac{1}{5}x-2$　または $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+20 \\ y=\frac{1}{5}x-2 \end{cases}$ と解答しているもの	0.2	0	0	1.4(3)
4	上記以外の１元１次方程式を解答しているもの	4.7	3.4(3)	2.2(4)	1.0(2)
5	$3x+20$ または $5x-2$ を記述しているもの	0	0	2.2(4)	
9	上記以外の解答	12.1	32.9 (29)	35.1(65)	14.5(30)
0	無解答	18.5	2.3(2)	2.7(5)	10.7(22)

※平成 20 年度全国調査Ａ$\boxed{3}$(2)の反応率は，割合（%）で記している．本調査の結果は，太枠の中に記されている．立式において１次方程式と連立方程式の２種類が見られるので，一段目に類型全体の割合(%)と括弧内は人数，１行あけて二段目に１次方程式での立式の割合(%)と括弧内は人数，三段目に連立方程式での立式の割合(%)と括弧内は人数を分けて記載した．

問題２については，３x と３x＋20 のそれぞれの式の意味の解釈の記述を類型化してその人数を集計し，問題１の立式の解答類型とクロス集計した．問題２の文字式の意味の解釈は学年毎に差異はないと判断し，調査対象者全員を合算して集計している．

ここでは，インタビュー対象者の選定に用いた３x の意味の解釈についての集計を表２に示す．この意味については，生徒の解答から，「x 人に３枚ずつ配った折り紙の枚数」「x 人に３枚ずつ折り紙を配ること」「１人に配った枚数」「1 人に配る枚数３枚と生徒の人数 x」「生徒の人数」そして「その他」と６つの類型を設定した．解答類型１の立式ができている生徒の中にも３x を生徒の人数と記述している生徒が８名いたことがわかる．

表２　問題１の解答類型と３x の意味の類型とのクロス（人数）

解答類型	x 人に３枚ずつ配った折り紙の枚数	x 人に３枚ずつ配ること（とき）	1 人に配った枚数	1 人に配る枚数 3 枚と生徒人数 x	生徒の人数	その他
1◎	64	66	8	6	8	1
2	3	2	1	1	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	2	4	1	0	0	0
5	2	0	0	1	0	1
9	21	31	15	8	9	10
0	1	4	0	1	0	1
割合%	34.1	39.2	9.2	6.2	6.2	5.1

表３　問題１の解答類型と３x＋20 の意味の類型とのクロス（人数）

解答類型	x 人(１人)に３枚ずつ配ると 20 枚余るときの折り紙の総数	x 人(１人)に３枚ずつ配ると 20 枚余ること(式)	１人に３枚ずつ配ったときの余った数	生徒１人に 3 枚ずつ配る人数と余り 20 枚	生徒の人数	折り紙の枚数と生徒の人数と余りの枚数	その他
1◎	74	72	4	2	0	0	1
2	3	3	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	0	0	1	0	2
5	0	4	0	0	0	0	0
9	19	51	1	4	1	4	14
0	1	3	0	0	0	0	3
割合%	35.9	49.8	1.8	2.2	0.7	1.8	7.7

また，$3x+20$ の意味については，表３のように「生徒の人数」と記述している解答，「１人に配る生徒の人数と余る折り紙の枚数」と $3x$ を人数，20 を枚数と記述している解答，さらに，３が１人に配る枚数で，x が生徒の人数，20 が余り枚数と式を分離して記述している解答を類型として設定した．$3x$ の意味の解釈の記述と対応するよう考慮した．一番左の列「x 人（１人）に３枚ずつ配ると 20 枚余るときの折り紙の総数」と記述している生徒が，この場面において，数量を的確に捉えている生徒に当たると考えられる．問題１で方程式を正しく立式できた生徒の中の 48.4%つまり，約半数しか文字の意味を正しく捉えていないことになる．また，正答以外に割合が大きいのが，「x 人（１人）に３枚ずつ配ると 20 枚余ること」といった問題文に書かれていることにしたがって操作的に記述する解答である．これは，立式の際に問題文に書かれている通りに式に表現するといった様子が，この記述からも現れていると考えられる．平成 21 年度全国調査Ａ$\boxed{3}$(3)での誤答として多かった $3x+20$ と $5x-2$ を，「生徒の人数」としている解答は，本調査ではほとんど見られない．これは，$3x$ と $3x+20$ を分けてその意味を聞いたことにより，式の意味を詳しく考えることができ，20 は枚数であることは明らかであるため，$3x+20$ を「生徒の人数」であると解釈しなかったと考えられる．このことと前節の結果から，本研究で注目している全国調査の誤答の背後には，$3x$，つまり，数字と文字の積の形で表された文字式 $3\times x$ の意味の理解の困難性があるのではないかと推測できる．したがって，インタビュー調査の対象生徒は，$3x$ の意味の解釈に着目して選出することとした．

３．調査２のインタビュー調査

3.1　インタビュー調査の内容と方法

3.1.1　対象生徒の選出

本調査で分析を行うインタビュー対象生徒 22 名の質問紙調査の解答状況を整理する．過不足の問題に対しての立式について，「$3x+20=5x-2$」または，「$y=3x+20, y=5x-2$」と正答した生徒を 1◎,「$3x-20=5x+2$」または，「$y=3x-20$，$y=5x+2$」と立式（誤答）した生徒を 2，上記以外のその他の解答をした生徒を 9 として番号を与える．このように分類した上で，問題２の $3x$ は何を表すかについての記述を分類してまとめたのが表４，$3x+20$ は何を表すかについての解答を分類してまとめたのが表５である．表２，３と同様の理由から分析する文字式を $3x$ と $3x+20$ に絞った．選出した生徒は，Ａ中学校で２年生８名，Ｂ中学校で２年生６名，１年生８名の合計 22 名である．

表４　インタビュー対象者 22 名の質問紙調査時の過不足の問題の立式と３xの意味

		$3x$は何を表しているか					
	解答類型	x人(1人)に３枚ずつ配った折り紙の枚数	x人(1人)に３枚ずつ配ること(とき)	1人に配った枚数	1人に配る枚数３枚と生徒の人数x	生徒の人数	その他
立式	1 ◎	K.K(B1)	R.N(A2) S.S(A2)	M.K(B1) Y.M(B1) M.C(B1)	K.O(B2) R.H(B2) M.Y(B1) R.N(B1) Y.T(B1)	H.Y(A2),Y.T(A2) Y.N(B2),H.N(B2) M.O(B2),Y.Y(B2) Y.F(B1)	
	2	K.M(A2)					
	9			S.N(A2)		T.H(A2),T.S(A2)	

※イニシャルの後の括弧は, 例えば, (A2)はＡ中学校の第２学年の生徒であることを示している.
表５も同様.

表５　インタビュー対象者 22 名の質問紙調査時の過不足の問題の立式と３x＋20 の意味

		$3x+20$は何を表しているか						
	解答類型	x人(1人)に３枚ずつ配ると 20 枚余るときの折り紙の総数	x人(1人)に３枚ずつ配ると 20 枚余ること(式)	1人に３枚ずつ配ったときの余った数	生徒1人に３枚ずつ配る人数と余り 20 枚	生徒の人数	折り紙の枚数と生徒の人数と余りの枚数	その他
立式	1 ◎	H.Y(A2) H.N(B2) R.N(B2) Y.T(B1) M.C(B1)	R.N(A2) S.S(A2) Y.N(B2) M.O(B2) Y.Y(B2) K.O(B2) R.H(B2) M.K(B1) Y.M(B1) K.K(B1)	Y.F(B1)			M.Y(B1)	Y.T(A2)
	2	K.M(A2)						
	9	S.N(A2)	T.S(A2)			T.H(A2)		

上の表５の 22 名を立式の様子と発言内容から，次の表６のようにさらにグルーピングした.

表６　インタビュー対象生徒 22 名の立式のグループ

立式について	インタビューでの様子	生　徒
方程式を立式できない	文字を用いず表をつくる	T.H(A2)
	数のみの式を立式する	K.O(B2)
方程式を誤って立式	インタビューの途中で正しく立式する	Y.T(B1)，H.N(B2)，T.S(A2), M.Y(B1)
方程式を正しく立式	文字 x を生徒の人数を表すと発言しながら，生徒１人とも発言	M.C(B1), K.K(B1), M.K(B1), Y.T(A2)
	文字 x が生徒の人数だから３x も生徒の人数と発言	H.Y(A2)
	文字式が「〜こと」を表すと発言	Y.M(B1)，S.S(A2)，Y.Y(B2), Y.F(B1)，R.H(B2)
	文字を未知数として捉える	R.N(B1)，Y.N(B2)，K.M(A2), S.N(A2) ，R.N(A2)，M.O(A2)

3.1.2　実施時期

Ａ中学校 平成 29 年 12 月 20，22 日の放課後，Ｂ中学校 平成 30 年 1 月 19, 23，25，26 日，2 月 1，6，8 日の放課後．第 1 学年は比例・反比例まで，第２学年は１次関数までをそれぞれ学習済み.

3.1.3　実施時間：１人ずつ 20 分〜30 分.

3.1.4　実施手順

インタビューは１人約 20 分程度とし，１対１の問答式で，質問紙調査と同一の問題１と２に取り組ませ，次の大まかなシナリオを想定し質問をする.

(1)　質問紙調査と同一の問題である問題 1 を解くよう指示する．どのように考えて解いたのか説明させる．解けても解けなくても，(2)へ進む.

(2)　問題２において式の意味を尋ねる.

それぞれの式の意味をどのように考えて記述したのかを説明させる．その中で生徒が発言したことを基にして次のような質問をする.

①　３x，５x について

・どうしてそのように書いたのか.
・この式の x は何を表しているか.
・この式の単位は何か.
・問題場面をどのようにイメージしているか.

（質問の意図）

x が生徒の人数を表すのに対して３x，５x は生徒に配った折り紙の枚数を表していることを理解できているかどうかをみる．また，「この式の x は何を表して

いるか.」と尋ねたときに，どのように答えてよいかわからない生徒には,「この式の単位は何か.」と，式の表している数量の単位を尋ねることにより，その理解の様相を明らかにする.

② $3x+20$，$5x-2$ について
・どうしてそのように書いたのか.
・この式の単位は何か.（「（$3x+20$）人，（$3x+20$）枚，$3x$ 人＋20 枚，$3x$ 枚＋20 人」の４つの選択肢からどの単位がふさわしいかを選ばせ，その理由を尋ねる.）
・$5x-2$ についても同様に質問する.
（質問の意図）
$3x+20$，$5x-2$ のフレーズ型の式を１つの数量として把握しているかどうかをみる. これらの式の単位は何かを選択肢を用意して尋ねるとともに, 選んだ理由を尋ねることにより，その理解の様相を明らかにする.

③ $3x+20=5x-2$ の解釈について
・この式は $3x+20$ と $5x-2$ が等しいという意味であるが，どうして等しいといえるのか.
（質問の意図）
等式として立式したとき, その式をどのように捉えているのかを探る. 過不足の問題を方程式で立式した際に，文字や文字式の理解の特徴が表出すると考えるので，それを引き出し，立式過程における困難性を顕在化する.

④ 自分の理解をうまく言葉で表現できない生徒に対して
・この問題場面をどのようにイメージしているか，そのイメージを絵にかけるか.
（質問の意図）
この問題場面のイメージをどう捉えているか絵で表現させ，プロトコルと同時に生徒がかいた絵を分析の対象とする．特に１年生に対してこれを促す.

⑤ 方程式での立式ができない生徒に対して
・具体的な数値を代入したとき，例えば，3×10 の式と答えは何を表しているか.
・$3x$ が $3\times x$ であることを確認し，これは何を表しているか．$5x$ も同様.
（質問の意図）
文字式の表している数量を把握しやすいようにする．そのことを基に文字式で表した数量をどのように把握しているのかを探る.

⑥ 立式が誤っている生徒に対して
・どのように考えて式を立てたか.
・立てた式のおかしいところはないか.
・正しい式を導く前と後でどのように式の意味の捉え方が変わったか.
（質問の意図）
インタビューの途中で，文字や文字式の捉えが変容することが考えられる．そこで，変容する前と後で自分が何をどのように考えていたのかを振り返って述べる機会を設ける.

(3) 必要に応じて，生徒の葛藤を引き起こし，文字式の理解を引き出すことを意図し，本問題と類似している以下のⒶ～Ⓒの補助問題を提示する．前節の立式できていない生徒に対しては，ヒントカードを用意したが，立式できている生徒には生徒自身が述べたことの矛盾点や疑問点を明らかにした上で，文字式をどのように捉えているのかを改めて尋ね，その発言から理解を探るため，次の補助問題のみを用意した.

Ⓐ 折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい.
Ⓑ 折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい.
Ⓒ 折り紙が全部で 42 枚あります．生徒１人に３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れました．生徒の人数を求めなさい.

補助問題Ⓐは，$4x+10=62$，Ⓑは，$6x+18=8x$ と立式できる．上述の（ⅱ）の質問で，$3x+20$，$5x-2$ が「人＋枚」を表していると捉えている生徒は，両辺が「人＋枚＝人＋枚」となり等式が成り立っていると考えている可能性がある．この考えでⒶを立式した際には「人＋枚＝枚」，Ⓑは「人＋枚＝人」とそれぞれ解釈することになる．これで等号が成り立っているといえるかと尋ねることで，自分の考えの矛盾に気付かせ葛藤を引き起こす場面を設定する．「人＋枚＝人＋枚」と捉えている生徒が自分の考えを見直すことを促し，どのようにその理解を変容させ，文字式を表す数量を把握していくのかをみることを意図する.

補助問題Ⓒは，$3x=42$ と一番シンプルな方程式の立式を求める．これは前述の解釈をすると，人＝枚となってしまう．このように解釈した生徒に対して，この立式をさせることにより，両辺の数量が異なっているという矛盾に気付かせ，自分の解釈をもう一度見直す機会を設定することを意図する.

3.2　調査結果の分析の視点

前節の調査の結果から，$3x+20$ を，「３枚ずつ１人に配ると 20 枚余る」を表

しているといったように操作として捉えていたり，生徒の人数 x を使った３x は人数を表し 20 は枚数を表すといったように文字の項と定数の項を別々の数量を表す式と捉えていたりする様子が見られた．さらに質問紙調査から，３x，５x を生徒の人数と捉えている様子が見られた．そこで，本調査では，正しく立式している生徒を中心に，フレーズ型の式３x，５x，３x＋20，５x－２の意味をどのように捉えているのかと同時に，文字 x（場合によっては y）の意味をどのように捉えているのかを尋ね，それに対する発話を分析する．

3.３　分析対象生徒

上述の分析の視点に基づき，１番目に，３x，５x を x が３つ，x が５つとそれぞれ捉えている Y.T(B1)を取り上げる．２番目に，x が生徒の人数を表すので，３x も生徒の人数を表すと解釈している H.Y(A2)を取り上げる．３番目に，３x＋20 を生徒 x 人に３枚ずつ配ると折り紙が 20 枚余ることを表すと解釈している Y.Y(B1)を取り上げる．４番目に，文字式３x＋20 を別々の数量として捉えている K.O(B2)，Y.M(B1)を取り上げる．５番目に，単項式３x と文字 x についての解釈に特徴があった T.S(A2)，M.Y(B1)，M.C(B1)，K.K(B1)，M.K(B1)，Y.T(A2)の６名を取り上げる．

以上の被験者のプロトコルを分析することにより，文字式とその式における文字の理解の様相を顕在化する．

3.４　調査結果の分析

3.４.１　Y.T(B1)の理解

3.４.１.１　３x，５x について

この被験者は，３x を「生徒の人数×３」(10S)と発言しており，生徒の人数の３つ分（３倍）と見ているが,「折り紙の数」(14S)であるとも述べている．また，３x＋20 についても「折り紙の数に余りをたした数」(16S)と発言しているが，全体で枚数を表しているとも述べている(20S)．この被験者の絵から立式に用いた文字 x を物と見ている様子が顕在化している．以下に，その証拠を示す．

9I：まず，１つ目を説明してください．３x は何を表していますか．
10S：え～，生徒の人数×３．
11I：これは結局何ですか，３x は．
12S：１人に３枚ずつ配った･･･．
13I：配った何．
14S：折り紙の数．
15I：おお．で，今後３x＋20 は．
16S：折り紙の数に余りをたした数．
＜中略＞

27I：なぜそう思いますか．
28S：１人に３枚ずつ配るから，x は生徒の数を表しているから，その数かける３で枚．
29I：生徒の数かける枚で何が出ているのですか，３x は．

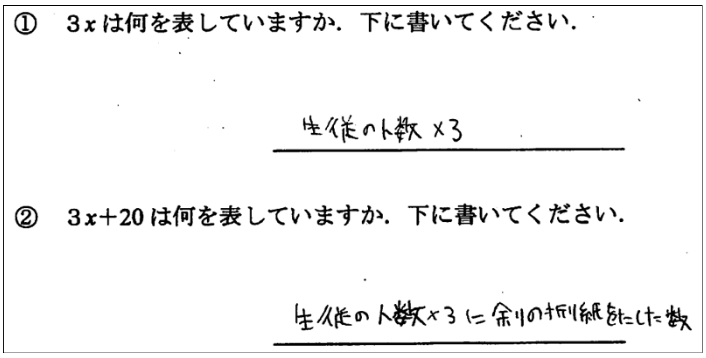


図１　Y.T の記述

30S：･･･．
31I：質問わかった．３x というのは何を表しているか．
32S：生徒の人数に３枚かけた数．
33I：それ，絵にかけますか．生徒の人数に３枚かけたというのはどういうふうに T さんがイメージをもっているのかを聞きたいのですけれど．絵にかけます．どういう絵をかく．
34S：(絵をかき始める)
35I：簡略的な絵でいいからね．
36S：(図２の絵をかく) 2 分 40 秒経過
37I：これは何，これ（図２③を指して）は．
38S：３枚です．
39I：３枚，生徒が何人か，これ（図２④を指して）が生徒なんだよ．全部が枚数なんだよね．どんなふうに生徒に配られているの．

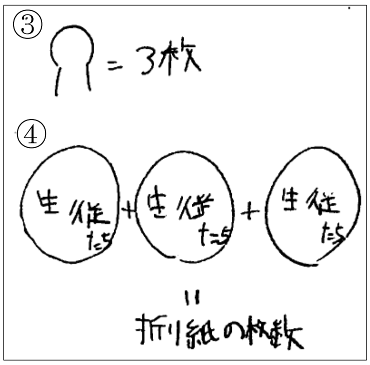


図２　Y.T のかいた絵１

40S：１枚ずつ．
41I：ん．１枚ずつ．
42S：んー．
43I：これ（図２④）が生徒なんだよね，で，３枚はこれ（図２③）が３枚．３x というのは．これが３x（図２④全体）．
44S：(うなずく)
45I：なるほど．今，生徒３人だけど，３人ですか．
46S：いや，(図２④に「たち」を書き加える)
47I：１枚ずつもっている．それで３x.
48S：(うなずく)
49I：じゃあ，５x－２のほうは．どう，最後ね，これ．５x－２はどう．絵にかけます．

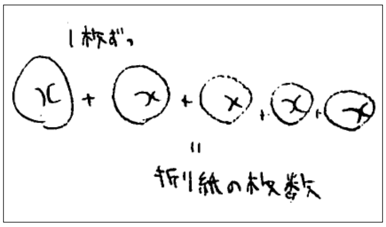


図３　Y.T のかいた絵２

50S：(図３をかく)
51I：こっち（図２）は３人で３x，こっち（図３）は５人で５x．なるほどね．

この被験者は，28S で「１人に３枚ずつ配るから，x は生徒の数を表している

から，その数かける３で枚」と数量を把握しているかのような発言をしているが，この被験者のかいた図２は，３枚は別にかき（③），生徒たちを○で囲んで３つかき（④）これが生徒で，その生徒に１枚ずつ配られている(40S)と発言している．前述のように$3x$を１つの値と見るのではなく，「生徒の人数×３」を表すと記述していることから生徒の人数xの３つ分と捉えていることがわかる．すなわち，$3x$を，生徒xを表す○が３つであると捉えて絵に表現していると判断できる．その後，質問者が「３人ですか」と尋ねると，「いや」と言い，この○の中を生徒たちと「たち」を書き加えている(46S)．ここでは，xを生徒たちと見ている．図２には，xを５つかいて$5x$を表していると文字xを○に置き換えている様子が現れている．問題場面についての理解が正確になされていないとも考えられるが，この$3x$，$5x$を表した絵は，まさに文字xを物として理解していることの現れであると考えられる．$3x$を，本来折り紙３枚のx人分（x倍）と捉えるところを，xの３個分（３倍）と見ているのである．そのxを生徒たちという物として表している表が見られる．

3.4.2　H.Y(A2)

この被験者は，$3x$，$5x$を「生徒人数」，$3x+20$，$5x-2$を一旦「生徒人数」と書いて消し「折り紙の枚数」と記述している．そして，$3x$について，「このxが生徒人数を表しているから，１人３枚配るって，何かかけたら出るんじゃあないかなという.」(27S)と発言している．この被験者が，生徒の人数を表しているxに１人３枚ずつ配るという意味の３をかけると，$3x$はxと同じ数量である生徒の人数を表すと捉えていると考えられる.「何かかけたら出る」という表現は，計算結果として値が出るということを意味していると考えられるからである．また，$3x+20$については，「折り紙の枚数」と記述している．そして，「この生徒人数に20枚余るって書いてあるから，なんかたしたらそうなっているのかなってみたいな.」(31S)と発言している．このことから，生徒人数を表している$3x$に，余っている枚数20をたすと，折り紙の枚数になると捉えていると考えられる．$3x$と$3x+20$の数量が異なっていることや異なった数量同士をたすということに疑問をもっていない様子が見られる. 以下に, そのプロトコルを示す.

24I : はい，ありがとう．まず，$3x$の方，こっちね．生徒の人数と答えてくれたんだけど，これはどうしてそう思ったのですか．その理由は何ですか.

＜中略＞

27S : ･･･，このxが生徒人数を表しているから，１人３枚配るって，何かかけたら出るんじゃあないかなという.

28I : うんうん，じゃあその生徒の人数xに３をかけたら生徒の人数を表していると．そういうことでいいですか.

29S : うなずく.

30I：うん，で，今度は，こっちは，３x＋20 は．
31S：えっと，この生徒人数に 20 枚余るって書いてあるから，なんかたしたら そうなっているのかなってみたいな．

この後，x に 10 を代入して計算した結果が何を表しているかを考えさせた．具体的に生徒の人数を 10 人として立式した３×10＝30 については，折り紙の枚数であることは認識できた．しかし，３x とすると，その数量がうまく捉えられない．そこで，この矛盾を意識化させるため，補助問題Ⓑ「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら 1 枚も余ることなく全員にぴったり配れました．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．」を新たに提示する．この問題に対して，H.Y は，「６x＋18 ＝８x」(73S)と方程式を立式する．そして「さっきの Y さんの解釈でいくと，６x は生徒の人数で，これ（６x＋18）で折り紙の枚数でしょ．８x が生徒の人数なので，

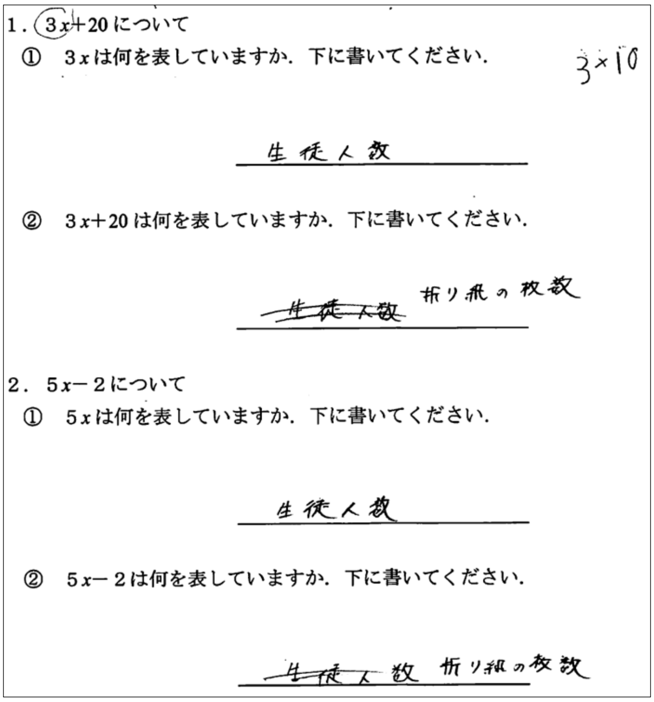

1．3x＋20 について
① 3x は何を表していますか．下に書いてください．　3×10
生徒人数
② 3x＋20 は何を表していますか．下に書いてください．
~~生徒人数~~ 折り紙の枚数
2．5x－2 について
① 5x は何を表していますか．下に書いてください．
生徒人数
② 5x－2 は何を表していますか．下に書いてください．
~~生徒人数~~ 折り紙の枚数

図４　H.Y のインタビュー時の記述

それとイコールってならない．」(74I)と疑問点を確認する．すると，「ああー．そっか．」(75S)と言い，しばらく考える．さらに，「８x は何なのか．」(78I)と改めて尋ねると「えー．・・・人」(79S)，「枚かな」(81S)，「ああ，枚数．枚数かな」(85S)と８x が人数を表しているのか枚数を表しているのか迷っている．

そして，枚数を表しているという発言の後，質問者が「なんでそう思いましたか」と尋ねると，87S で「決まっているからかな．x が，人数がもう．」と x について言及をする．そこで，「今，言ったことを丁寧に言ってみるとどういうこと．」(90I)と尋ねると，「x の値は変わらない，っていうそういう感じがする．」(93S)，「生徒人数は x とおいてあるから，この１人８枚という数をかけても，なんか，人数は変わらないっていう．」(95S)と発言する．これは，値がいくつかはわからないが，決まった値が存在すると考えると，８x は枚数であると捉えることができるという，この被験者の思考を表現した発言であると考える．つまり，文字について，入る数がわからないという不特定性を意識している発言であると考えられる．しかし，x の値は決まっていると捉えることができた後は，８x が何を表すかについて，「８枚ずつ x 人に配った枚数」(99S)と，「x 人に」という表現を

使って答えられている．このことから，x がわからないものであるが，決まった数があると考えることにより８x が枚数であると捉えることができたということが見て取れる．つまり，文字の特定性が意識できたと考えられる．

70I：折り紙の枚数が等しいと見たんだ．例えば，問題がこうなったらどうですか．(②の問題を提示）折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら 1 枚も余ることなく全員にぴったり配れました．このとき，どういう式になりますか．

71S：６x･･･．

72I：うん，ちょっとここに書いてください．

73S：（６x＋18＝８x と式を書く）

74I：うん，だよね．そしたら，さっきの Y さんの解釈でいくと，６x は生徒の人数で，これ（６x＋18）で折り紙の枚数でしょ．８x が生徒の人数なので，それとイコールってならない．

75S：ああー．そっか．

76I：そうすると，もう１回何を表しているのか，考えることできますか．

77S：（しばらく考える）

78I：（８x と囲んで）これは何なのかな．ここでいうとこれ（３x）だよね．これは何なのか．

79S：えー．・・・人，んー．

80I：人数．

81S：枚かな．

82I：枚数じゃあないかな．x は人数なんだよね．それに８かけて．

83S：んー．

84I：Y さんは最初，人，人数って思ったんだよね．本当は，ここは何なの．８かけたり，３かけたりするここ（８x，３x を指して）は．

85S：ああ，枚数．枚数かな．

86I：おお，ここ枚数．なんでそう思いましたか．

87S：決まっているからかな．x が，人数がもう．

88I：うん，それはどういうこと．例えば．

89S：･･･．

90I：そうか，もう１回，x は何．決まっているからってどういうこと．すごい大事な，興味があるところなんだけど．今，言ったことを丁寧に言ってみるとどういうこと．

91S：え～．

92I：いいんだよ．

93S：･･･，x の値は変わらない，っていうそういう感じがする．だから，んー．

94I：決まっているというのはどういう意味で言っているのかな．そこを詳しく

知りたいんだけど．

95S：何て言ったらいいのかな．生徒人数は x とおいてあるから，この１人８枚という数をかけても，なんか，人数は変わらないっていう．

96I：うん，人数が変わらないから，８枚配ったら，それは $8x$ っていうのは何を表しているの．

97S：枚数，合計．

98I：どういう合計なの．

99S：配った，８枚ずつ x 人に配った枚数．

100I：そのときの x って今までどういうふうにみていたの．どういう感じで使っていたのかな．

101S：なんか，あんまり考えないで，適当に式を立ててやっていたかな．

102I：そうか．

103S：あんまり深々と考えていなかった．

その後，104I で，「この $6x+18$ は枚数だし，$6x$ も枚数だという，$8x$ も枚数という，それいいですか．」と確認すると，この被験者は，「$8x$ は人数，あっ違う，枚数か．」とまた迷っている．さらに，「枚数で，これ全部そうなると人数になるのかな．」(107S)と式全体の解釈のときに，表している数量がこの被験者の中で明確になっていない様子がわかる．$6x+18=8x$ について，文字 x が生徒の人数を表しているので，その x を使って表した方程式が全体で人数を表しているのではないかと考えている発言である．文字式が，その式における文字 x の表す数量で表されていると捉えている様子が見て取れる．

このように文字式の表す数量の解釈がインタビューの終盤になっても揺れている様子が明らかとなった．この解釈が揺れている原因は，方程式に用いている文字の理解であると考える．101S，103S において，「あんまり考えないで，適当に式を立ててやっていた」，文字の意味を「あんまり深々と考えていなかった」と発言しているように，文字の表す数量を曖昧にしたまま，文章にそって立式している様子が見られた．それでも，この被験者は正しく立式することができているが，$3\times x$ の表す数量を捉えられない，文字式の理解が顕在化している．

104I：この $6x+18$ は枚数だし，$6x$ も枚数だという，$8x$ も枚数という，それいいですか．

105S：んー．$8x$ は人数，あっ違う，枚数か．

106I：うん．

107S：枚数で，これ全部そうなると人数になるのかな．

108I：これ全部人数．

109S：かな．え～．

＜中略＞

140I：改めて考えて，３xは何ですか.
141S：枚数.
142I：どういう枚数，ここで使っている３xは.
143S：１人に３枚配った枚数.

この被験者は，３xがxと同じ数量を表すと捉えているということは，明確ではないが，３xをxの３個分やxの３倍と解釈していると考えられる．このとき３xを，文字xに 10 を代入したときの値と比較し，文字の値が変わらない，決まった値であることに気付いた．そして，文字は，いろいろな値をとってわからない数を表しているが，同時に，ある特定の値が存在していることを表していると捉え始めている様子である．しかし，最後までその数量に迷っている様子が見られる．３xは,「１人に３枚配った枚数」(143S)という発言がこの生徒の理解を表しており，文字式の意味を把握できたとはいえない．つまり，文字に特定な数が入ることで計算が可能となり，結果として数量がわかったとしても，すぐに文字の意味や，３xといった数字と文字の積で表された文字式の意味を理解できるようになるわけではないということである．ここに，文字式の理解の困難性があると考える．

3.4.1，3.4.2 の被験者は，ともに３x，５xなどの数字と文字の積の形で表された文字式を文字xの定数個分という捉え方をしている様子が現れた.

3.4.3　Y.Y(B2)の理解

Y.Y は，前出の２名とは異なる理解の特徴が現れている．文字式を事柄を表していると述べている．この被験者の様子については，インタビューのいくつかのフェーズに分けて分析する.

3.4.3.1　最初の方程式の立式の場面での文字xについて

この被験者は，y＝３x＋20，y＝５x－２と連立方程式を立式して解いている．「どんなふうに考えたのかを振り返ってやり方を説明してください.」(7I)と投げかけると「yを生徒の人数にして，xを折り紙の総数にして，まあ教科書通りのような考え方で」(8S)と答え，xとyを数量として捉えている発言している．そして，15I で，どのようにしてyイコールの式を立てたかを尋ねると，「とりあえず, yと書いて，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余りますだから３x＋20 で，１人５枚配ると２枚たりないから５x－２にしました.」(16S)と答えており，３x＋20，５x－２については，問題文を繰り返していることから，問題文の順に文字式に表している様子が見られる．yについては，その数量をはっきり捉えていないまま, yを用いて等式を立式していると考えられる．以下に，そのプロトコルを示す.

8S：えっと，最初にyを生徒の，yを生徒の，あっ，違う，合っているか，yを

生徒の人数にして，x を折り紙の総数にして，まあ教科書通りのような考え方で．

9I : y が出たときに，いくつって言ったんだっけ．もう１回言って，何を x，y においたの．

10S : えっ，ちょっと，待ってください．･･･y を生徒の人数．あっ，違う，折り紙の総数かな･･･．ん，あっ，折り紙の総数だ，すみません．折り紙の総数にして．

11I : はい．

12S : x を生徒の人数にして，教科書通りのような考え方で．

13I : 教科書通りってどういうこと．もうちょっと，詳しく言って．

14S : 方程式を立てて，x の数を 15 に合わせて，他も全部かけて，で，x を消して y の数字を求めて，枚数を求めて，そこからもう１回方程式に y の数を入れて，11 人と求めました．

15I : それで，ここが，知りたいんだけど．この y イコールの式はどんなふうな考えでつくったのですか．

16S : とりあえず，y と書いて，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余りますだから３x＋20 で，１人５枚配ると２枚たりないから５x－２にしました．

3.4.3.2　フレーズ型の式を解釈する場面

この被験者は，３x＋20 について，３x が「１人に３枚ずつ配る」で，＋20 は 20 枚余っていることと述べ，その後，３x は「生徒 x 人に３枚ずつ配ること」と改める．問題文にそって立式していることがこの発言からわかる．生徒の人数がまだわかっていないので，x 人にしたと述べる．５x－２は，「生徒 x 人に５枚ずつ配ると，２枚たりない場合のこと」と書く．

31I : どういう考え方でそのように書いたのか，教えてください．

32S : えっと，こっちの紙で同じような考え方でやったので，方程式をつくったときに，１人３枚ずつ配るところなので，「１人に３枚ずつ配る」，で，＋20 は 20 枚余っていることだから，というふうに．

33I : そのときに，x は，どういうふう．

34S : x は･･･．

35I : 今，書いてくれたものに x が入っていないのだけれど．x ってどういうものと考えているのですか．

36S : x は，生徒の人数を x 人にしてと書いてあるので，生徒の人数になる．

37I : そうすると，もう一度，３x は何を表していますかと聞かれたら，何と答えますか．

38S : ああ，生徒に･･･．生徒 x 人に，（書き始める）

39I : ここの下にでも．

40S：(「１人に」を消して，「生徒 x 人に」と書き直す)
41I：それは，どういうことですか.
42S：さっき，ちょっと問題をよく読んでいなくて，生徒の人数を x 人としてということなので，１人の部分が違うので，生徒の人数がまだわかっていないので，x 人にしました.
43I：そうすると，$3x$ というのは，生徒 x 人に３枚ずつ配ることを表しているんだね.
44S：はい.

---

3. 4. 3. 3　センテンス型の式を解釈する場面

64I で，$3x+20=5x-2$ について，数量が等しいということを捉えているかどうかを確認するため，この被験者の発言を取り上げ，「なること」と「なること」がイコールでよいかを尋ねている．それに対し，「y を使いたい」(65S)と発言している．「なること」という操作，つまりプロセスとして $3x+20$ と $5x-2$ を解釈すると，この２つの式を等号で結びにくい．そこで，この２つの式それぞれを y と結ぶことにより，扱いやすくなると考えている発言である．両辺を等しい数量の関係として捉えられていない様子が見られる．この被験者にとっては，「とりあえず」と言っているように，y は「なること」の結果を示すために必要であり，折り紙の総数という数量を表しているとは把握しないまま文字 y を用いて立式していると考えられる．

55I：なるほど．これはどういうふうにつくったのですか.
56S：ちょっと待ってください．･･･えっと，$3x+20$ が，だから３枚ずつ配るとかと，やっているのと元は同じ数のはずだからイコールで結びました.
57I：これイコールで結んでいいのですか.
58S：いいと思う.
59I：いいと思う．今，Y 君は，生徒 x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余ること，こっちは，生徒 x 人に５枚ずつ配ると２枚たりないことだと．この２つはイコールで結んでいいのですか.
60S：ん～書き方が悪かった.
61I：私から見ると，違うことを書いていて，それをイコールで結んでしまっているというふうに見えるんだけど．それはどんなふうに説明しますか.
62S：えっと･･･，(書き始める「場合の時のこと」と書く)だめだ，同じだから.
63I：それは，どんなことを考えたのですか.
64S：いや，そういう場合になることもあるという.
65I：そういう場合になることもある.「なること」と「なること」がイコールという，そういう感じ.
66S：う～ん．y を使いたい･･･.

67I：y を使いたい．なるほど，それはどうして．
68S：y が折り紙の総数を表してくれるので，イコールでつなぎやすい．
69I：じゃあ，こっち側（$3x+20$ と $5x-2$ を指して）は何を表しているの．
70S：こっち側は，えっと，生徒 x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余る･･･何だろうな･･･，やっぱり余る場合かな．
71I：うん，こっちは余る場合なんだね．もう１回，y は折り紙の総数なんだね．
72S：はい．
73I：こっち（$3x+20$）は，x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余ることを表していて，それをイコールで結んでいる．
74S：はい．
75I：これは，イコールでいいんだね．
76S：はい．
77I：どうしてイコールでいいと言えますか．
78S：折り紙の総数が，折り紙を配っていて，その折り紙の総数から３枚ずつ配ると 20 枚余るという事柄を表しているので．

$3x+20$ は，「生徒 x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余ること」と発言したことに対してさらに尋ねると，「３枚ずつ配ると 20 枚余るという事柄」を表していると述べている．この被験者の文字式の理解の特徴は，$3x+20$ が１つの数量を表すのではなく，事柄を表していると発言している点である．このときの文字 x について，この生徒は「生徒 x 人」と発言しているが，複数いる生徒を思い浮かべているという確認ができない．どのように捉えているのかは，明確に説明されていないのである．それを，次のプロトコルで示す．

87I：x は何なの．
88S：x は，え〜と，生徒の人数です．
89I：そのときに $3x$ が何を表しているか．これどうですか．
90S：$3x$ が配ることを表しているから，生徒 x 人に３枚ずつ配る事柄かな．
91I：じゃあ，これはどんなふうになるかな．
92S：ん〜，２のような気がする．
93I：なぜ．
94S：えっと，これが総数で，イコールで，その生徒 x 人に３枚ずつ配る事柄と 20 枚，それに余った 20 枚とたすと，すべての枚数になるということを表していると思うので．
95I：そうすると，$3x$ は配ることを表しているんだ．
96S：うなずく
97I：なるほど．３は３枚だよね．x は人数だよね．それなのに「こと」を表すんだね．

98S：事柄．う～ん．
99I：これ，２だったら，どういうふうに絵がかける．
100S：絵ですか，これの．
101I：イメージ．この問題文にそって，どういうふうなイメージをもっているのかな．
102S：折り紙が･･･．（絵(図５)をかき始める）みたいな感じですかね．
103I：なんてかいたの．20 は何．
104S：余った枚数．
105I：ああ，余った枚数ね．
106S：かいた方がいいかな．
107I：はい，じゃあかいておいて．自分が考えたことをできるだけかいておいて．なるほど，これ矢印なんだね．数学では，これをイコールで結ぶよね．Ｙ君の式では，y＝としてこう結んでいるんだけど．

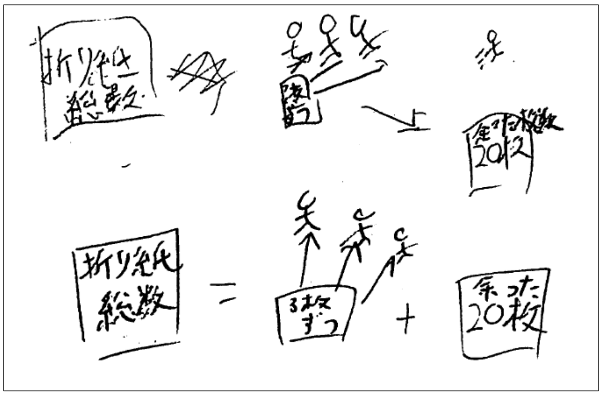


図５　Y.Y のかいた絵

108S：はい．
109I:イコールということは，等しいという関係じゃあないですか．いいのかな．
110S：ああ，この･･･．
111I：いいよ，違うところにもう１回書き直して．
112S：(書き直す．図５の下の絵)
113I：そこはイコールなんだ．それでたす（＋）なんだ．これはどういう．
114S：さっき，場面で思い浮かべていたんですけど，確かに折り紙の総数はこっちと同じことなので，３枚ずつ配って余った枚数をプラスして折り紙の総数を表すということを表しました．
115I：そうすると，今，選んだどれ(単位の選択肢を指して)に当たるのですか．今のことから．
116S：あれ，３番(３x 人＋20 枚)かな．いや，でも２番（(３x＋20)枚）でいいような気がします．
117I：なるほど，２番．３番と迷っているのはどうして．
118S：３番も一応単位は合っているから，人と枚で．
119I：人と枚で合っているんだ．どうして．そこを詳しく．
120S：ああ，でも 20 枚余ったことについて枚でいいのかという感じが．
121I：こっち（20 枚を指して）はね．３x が人だということは，これは？
122S：それは生徒･･･ああ，でもかぶっちゃうか．２ですね．
123I：ああ２なんだ．
124S：かぶっちゃうような気がします．
125I：どういうこと，それ，もう１回．

126S：この x のことが，生徒 x 人に３枚ずつ配ることを単位に人とすることはおかしいと．
127I：なるほど，で，配ることだけど，全部が枚でいいんだ．
128S：（うなずく）
129I：それで，３x は枚なの，人なの．
130S：３x は･･･ああ，でも配る事柄という感じかな．

この被験者は，３x＋20 について，３x と＋20 それぞれの単位を尋ねられたとき，３x 人＋20 枚か，（３x＋20）枚かで迷う．88S では x は生徒の人数であると述べる．そして，３x が何かを尋ねられると，90S で３x が配ることを表しているから，生徒 x 人に３枚ずつ配る事柄かなと述べ，数量として捉えられていない実態が浮かぶ．そして，（３x＋20）枚であることを一旦了承(128S)してから，129I で３x が枚なのか，人（にん）なのかその単位をもう一度尋ねると「３x は配る事柄かな」（130S）と最後まで事柄を表すと述べている．このことから文字 x は生徒の人数と把握しているが，３x は数量と捉えるのではなく，配るという事柄を表していると捉えている実態が顕在化した．このため，３x が人数を表すのか，枚数を表すのかを明確に捉えられないと考えられる．

以上，3.4.1〜3.4.3 の被験者では，３x が，x の３個分であると捉えている様相，３x を文字 x と同じ生徒の人数を表すと捉えている様相，そして３x や３x＋20 を配る事柄であると捉えている様相が見られた．いずれも３x を生徒の人数と捉える理由となる実態が現れている．文字については，本章第２節での理解の様相と同様に，x を生徒の人数であると言いながら１人の生徒を表しているとも発言している．

次に，3.4.4，3.4.5 の被験者について分析する．

3.4.4　K.O(B2)，Y.M(B1)の理解

3.4.4.1　対象生徒のプロトコルの分析

この２名の被験者の問題１と問題２の解答状況は，以下の通りである．

問題１について，K.O は試行錯誤の末，連立方程式で正しく立式できたが，y＝94 と解き，答えを 94 枚と誤っている．x の値は求めていない．また，Y.M は１次方程式３x＋20＝５x－２と立式しており，x＝11 と解いているが，答えを折り紙 57 枚，生徒５人と誤っている．２人とも立式は正答しているが，答えは誤っている．

問題２の３x について K.O は「x＝生徒の人数，３＝生徒１人あたりに配る枚数」，Y.M は「１人あたりの折り紙の枚数」と記述している．また，３x＋20 について K.O は，「１人に３枚ずつ配ると 20 枚余る式」，Y.M は「折り紙を配り余った分をたしたこと」と記述している．すなわち，フレーズ型の式３x＋20 を分離して捉える見方と，センテンス型の式３x＋20＝５x－２の辺々を，人を単位と

する３x や５x と，枚を単位とする＋20 や－２の和と捉える見方に特徴がある．

3.4.4.2　フレーズ型の式３x＋20 を分離して捉える見方

K.O，Y.M ともに，３x＋20 を，人を単位とする３x と枚を単位とする 20 の和であると捉えている．すなわち，３x と 20 を単位の異なる別々の数量と捉えている見方である．さらに，単項式である３x も１つの数量として捉えられていない．すなわち，３x を，３と x に分離して異なる別々の数量と捉えている見方である．以下に，K.O のプロトコルを示す．

（I：質問者，S：生徒）

92S：え～と，３x･･･ここのどっちかで･･･．((３x＋20）枚と３x 人＋20 枚のどちらかで)

93I：どういうふうに迷っているの．

94S：上（(３x＋20）枚）にすると，３が３枚ずつ配って x が人（ひと）の人数なので，その人（ひと）を枚で表してよいかわからなくて，でも，(３x 人＋20 枚）３x を人（にん）にすると，x は人（ひと）の数だけど，３枚ずつその人（ひと）達に配っているわけだから，その折り紙の枚数をなんか，人（にん）と表すのはおかしいかなと思っています．

95I：で，どうかな．

96S：どっちだろう．下(３x 人＋20 枚)だと思う．

97I：それ，もう１回理由を言うとどう．

98S：やっぱり，x が人（ひと）で３枚ずつ，何人かの生徒に３枚ずつ配っているので，その x，何人かの人（ひと）がもっている折り紙の枚数ということで，これは人（ひと）がもっているからそれは人（にん）で後ろは余った枚数だから 20 枚．

３x＋20 の単位について尋ねると，(３x＋20）枚と３x 人＋20 枚のどちらになるかに迷っていた(92S)．さらに「どういうふうに迷っているの．」(93I)と尋ねると，94S のように答える．３x が１つの数量を表していると捉えておらず，３×x とし，３枚と x 人のように文字とその係数を分離して捉えている様子が見られた．その後，「どっちだろう･･･．下（３x 人＋20 枚）だと思う．」(96S)と，３x と＋20 が別々の数量を表していると解釈している．その理由は，98S での３と x と＋20 を別々に解釈しようとしている様子にも現れている．３枚の折り紙を何人かの人（ひと）が持っているので，３x の単位は人（にん）であると捉えていると発言している．何人かの生徒が３枚の折り紙を持っているという，問題場面の状況を表していると捉えていると考えられる．そこで，K.O 自身がかいた絵（図６）を振り返らせ，さらに文字式の意味を探った．

99I：今さ，かいてくれたよね，絵（図６）をね．これは結局，人を表している

んだね．

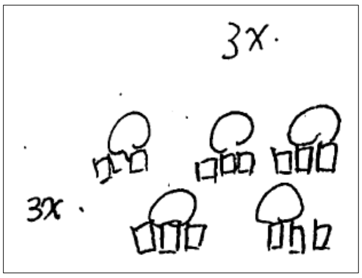


図６　K.O のかいた絵

100S：･･･ああ．ん．

101I：これ（かいた絵）と３x は同じものだよね．

102S：はい．

103I：こっちは，やっぱり人（ひと）に目が行っているんですか．というか，それが浮きあがっているんですか．

104S：ああ．やっぱり人（ひと）が目についている，はい．

105I：なるほど，じゃあ，３x が人（ひと）というのは，これ３x が人（ひと）を表している．

106S：う～ん．

107I：そのときの x というのはどういうふうに見ているのですか．また，同じようなことを聞いているんだけど．

108S：ああ，x ですか．ええ～と，x は何人かいる生徒で･･･．言い方が難しいけど．

109I：x は何人かの生徒なんだね．

110S：何人かの生徒です．

111I：x は生徒なんだね．

112S：x は生徒で･･･．３は折り紙です．

インタビューの 92S 以前にこの被験者は，この問題における３x の表すイメージとして図６の絵をかいている．この絵を見ると，問題場面における数量を把握できていると考えられる．101I でこの絵が３x を表していることを確認し，どこに注目したかを尋ねると人（ひと）つまり，○で表した生徒であると述べている．

また，「x は何人かいる生徒」(108S)と発言し，「x は生徒で･･･．３は折り紙」(112S)と最後まで３x を３と x に分けて捉えている．すなわち，文字式３x＋20 を解釈するとき，３x と＋20 が別々の数量であると捉え，さらに３x を３と x に分離して捉えている様子が顕在化している．これは，質問紙調査時の３x についての記述や 94S や 98S の発言にも見られる．３x，３x＋20 といった文字式が１つの数量を表すと捉えられていない理解の様相が明らかとなった．

また，この被験者は，文字 x が生徒の人数であると発言する一方で，「x は何人かの生徒」(110S)を表すと発言しており，x を生徒を表しているとも人数を表しているとも見ている実態が現れている．

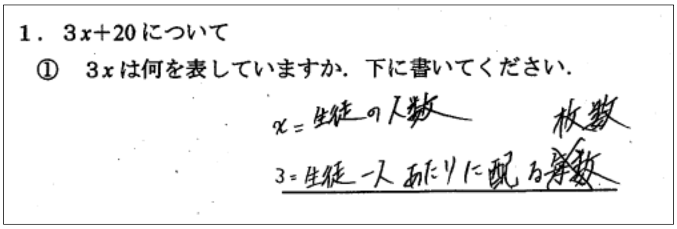


図７　K.O の質問紙調査時の３x の記述

3.4.4.3　センテンス型の式３x＋20＝５x－２の辺々は，人を単位とする３x や

$5x$ と，枚を単位とする＋20 やー２の和で等号が成り立っていると捉える見方

$3x+20=5x-2$ の辺々が折り紙の総数を表しているのではなく，「人＋枚＝人＋枚」と捉える見方である．以下に Y.M のプロトコルを示す．

73I：x はどういうふうに考えるんですか．
74S：あっ，x は人（にん）で人（ひと）だからなあ．え〜と．
75I：ゆっくり考えて．
76S：（選択肢の横に書く）こういうこと．（(３x+20）枚に×をして，３x 人＋20 枚を○で囲む）

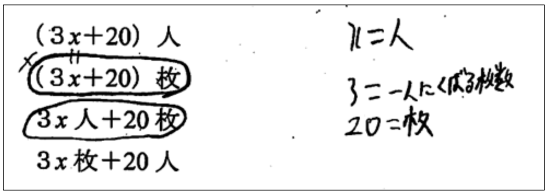


図８　Y.M の記述１

77I：で，今これ何を書いたの．
78S：これ，あの〜，x はどういう単位かで，分けて単位を書いてみた．
79I：そうすると，x は．
80S：ひと
81I：ひとでいいの．
82S：ああ，にん．にんで，３は 1 人に配る枚数，20 は枚．
83I：そうすると，３x というのは．
84S：人．
＜中略＞
93I：人数を掛けるんだよね．３x は人（にん）でいい，それで，＋20 枚．
94S：はい．
95I：じゃあもう１個，こっち $5x-2$．これはどうですか．
96S：やっぱりこうなる．（５x 人－２枚を選ぶ）
97I：そうすると，イコールで結んだときというのは，３x は人（にん）で，＋20 枚，５x が人（にん）でー２が枚，それで等しいという関係．
98S：等しい．はい．

97I で $3x+20=5x-2$ の辺々は，人を単位とする３x や５x と，枚を単位とする＋20 やー２の和で等号が成り立っていると捉えていることを質問者が確認した後，Y.M は，補助問題Ⓐに取り組んだ．そして，$4x+10=62$ と立式した．４x に方程式を解いて得た生徒の人数 13 を代入した式の値 52 が，生徒に配った折り紙の枚数であることは認識している．しかし，４x が折り紙の枚数を表すということは納得しない．方程式 $4x+10=62$ についても，この方程式が人数を求めるためのものなので，４x，10，62 がすべて枚数を表していると考えると人数を表す式がどこにも入っていないことになるので，それはおかしいと考えている．４x は折り紙の枚数を表しているのではなく，人数を表していると捉えているのである．以上のことの根拠となる，Y.M のプロトコルを示す．

105I：じゃあ，この問題，式がつくれるかな．ごめんね，次々と．これどうですか．

106S：補助問題Ⓐを読んで解き始める．図９(a)から(g)まで試行錯誤して立式する)

107I：方程式つくれるかな．

108S：あっ，方程式か．

109I：さっきの考えで，４x は何だっけ，単位は．

110S：人（にん）．

111I：＋10 は．

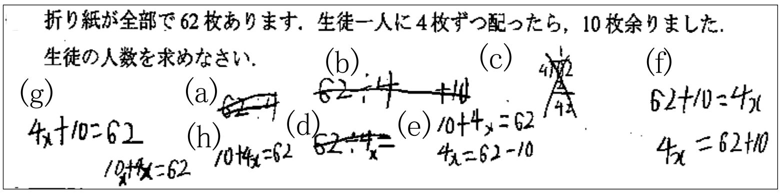


図９　補助問題Ⓐについての Y.M の記述２

112S：枚．

113I：62 は．

114S：枚．

115I：そうすると，４x が人（にん）で＋10 が枚なのに，62 は枚になっているよ．

116S：んー．

117I：じゃあ，もう１個いこうか，これ．今のいい，確認ね．４x が人（にん）で＋10 が枚で，62 は枚，人と枚で人になっているのはおかしくないかというのが１つね．今度は，６枚ずつ配ると 18 枚余って，８枚ずつ配ったら１枚も余ることなくぴったりといったんだって．これ方程式どうなりますか．（補助問題Ⓑに取り組む）

118S：（書き始める．補助問題Ⓑの立式，図 10）

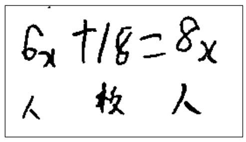


図 10　補助問題Ⓑについての Y.M の記述３

119I：今度こっちは６x 人(にん)，＋18 は枚，８x は人(にん)でしょ．

120S：人(にん)，枚，人(にん)．

121I：それでいいかな．こっちは(上の図９の(g)の式を指して)下の式はね．枚プラス人(にん)で枚，こっち（下の問題）は，人(にん)たす枚イコール人(にん)．これどう．

＜中略＞

128S：式はいいんだから，でも式が６枚，あ〜，さっきと同じで，こっちは１人あたりが６枚で，１人あたりに配る枚数が６枚で，x が人(にん)になって，それで，18 枚余るから＋18 する．でイコール８x は，余ることがないからひくもたすもなくて８x だけ．

129I：そうすると，さっきのようにふさわしい単位は，どうなる．

130S：人(にん)，枚，人(にん)（式の下に書く）

131I：それでいいわけだよね．

132S：はい．

133I : それでイコールで結べている．じゃあこっち(補助問題Ⓐ)は式としてはどちらも正解ね確認は.

134S：はい.

135I：どういうふうに説明できますか.

136S：こっち（補助問題Ⓐ）の（図９(g)の式の）場合は，１人に４枚配ると，１人に４枚配って，x はわからないから，わからない人数だから，人(にん)．10 は余ったからたして，62 が合計，全部の数だから，イコール 62 になる．あっ，こっちだと，10 枚に，４枚ずつ配って，1 人に４枚ずつ配る枚数を 10 にたしているから．（図９(h)を書く）

137I：４x は，今の説明だと.

138S：なくなる.

139I：ん，式はいいんだよ，それで.

140S：あっ，そっか.

141I：４x は，単位は.

142S：え～，枚.

143I：枚なんだ．で，10 は.

144S：10 も，全部枚か．え.

145I：なるほど．それでこっち（補助問題Ⓑの６x の下に書いた「人」を指して）は人(にん)でいいんだね.

146S：なんだろー･･･.

147I：そこを解明して終わろう.

148S：計算してみたらわかるかな.

149I：どうぞ．紙をあげようか.

150S：(新しい紙に書き始める）どちらも同じになるんだ．（４x＋10＝62･･･(g)と 10＋４x＝62･･･(h)を解いて,図 11 の絵をかく）

151I：どう，何を考えたのか.

152S：４がなかなか，４x がなかなか出てこない.

153I：なるほど，4x がなかなか出てこないってどういう意味ですか.

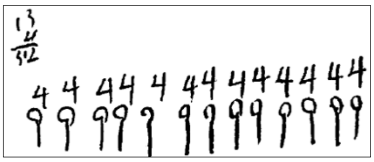


図 11　Y.M の記述４

154S：枚か人（にん）か，どっちか，なかなか･･･.

155I：それはどういうふうに迷っているの．そこをうまく説明できる.

156S：逆に４だけだと，４枚だから４枚になって，x はわからない人数だから人（にん）になる.

157I：４x だと人（にん）か枚かわからない．で，今のところだと，どっちが強いんですか.

158S：人（にん）が強いは強い.

xを人数として, 補助問題Ⓐ $4x+10=62$, 補助問題Ⓑ $6x+18=8x$ と立式し, 求めた解が人数であることを確認する．ここで，Y.M の述べている補助問題Ⓐ, Ⓑの方程式の両辺にある項１つ１つの表している数量の単位をまとめると，図 12 のようになる．

Ⓐ $4x+10=62$	Ⓑ $6x+18=8x$
人　枚　枚	人　枚　人

図 12　Y.M の文字式の解釈

補助問題Ⓐの式について，「$4x$ は，単位は.」(141I)と尋ねると，「え〜，枚.」(142S)と答えている．そして，「４がなかなか，$4x$ がなかなか出てこない.」(152S),「枚か人（にん）か，どっちか，なかなか･･･.」(154S)と $4x$ の表している単位が枚なのか人（にん）なのかで迷っていた．そこで，155I や 157I で迷っていることについてさらに尋ねると，４と x を分離して数量を捉えている．$4x$ をこの問題場面に照らして解釈したとき，１つの数量を表すと捉えられていないと考えられる．

Y.M 自身が答えとして求めた生徒の人数である 13 人を取り上げ，この具体的な数値を基に $4x$ の数量を捉えさせようとし, 次のようにインタビューを進めた.

159I：え〜と，13 は出たんでしょ．13 人が.
160S：人数.
161I：で，$4x$ ということなんだから，x に 13 入れたらって，それやってみた.
162S：x に 13 を入れる．$13x$？
163I：13 人だもんね．それで４枚でしょ．これやってみた計算を.
164S：$13x$･･･.
165I：ううん，４枚もっているんでしょ，13 人が.
166S：４かける 13･･･，合計で 52 枚.
167I：その合計って何を表しているの．合計でいくつになったの.
168S：52 枚.
169I：うん，それ何を表しているの.
170S：数，あっ，枚数.
171I：だよね．じゃあ 52 は枚数だけど，その前は，4×13 じゃあないですか．そうだよね．それが $4\times x$ になったら，これは何.
172S：$4x$ だから.
173I：$4x$ だからこれは.
174S：う〜ん．$4x$ でしょ．x のことだけ考えれば人.
175I：うん，x のことだけ考えれば人だよね．でも $4x$ だと.
176S：んー，枚，枚．人･･･.
177I：x に 13 が入れば 4×13 は
178S：52 枚.
179I：枚，52 枚なんでしょ.
180S：枚，でも $4x$ が枚だと 10 も 62 も $4x$ も全部枚数だから.

181I：それでどう.
182S：式を求めるにはいいけど，人数を求めるのになんかおかしい.
183I：ああ，なるほど.
184S：人数求めているのにね，x のね.

質問者が,「13 は出たんでしょ．13 人が.」(159I)と x に 13 を入れたときの 13 について確認すると,「人数.」(160S)と 13 が人数を表していると発言している．161I で x に 13 を入れたらと質問者が促すと,「13x」(162S，164S)と答えている．x が式に残っており，13 を x に代入できていないのである．つまり，この被験者は文字を数に置き換えることがうまくできていないと考えられ，文字式での表現が数の式での表現と別のものとして理解されている様子が現れている．その後,「４かける 13･･･，合計で 52 枚.」(166S)と折り紙の枚数であることを確認し，４x について再度尋ねると,「う～ん．４x でしょ．x のことだけ考えれば人（にん）.」(174S),「んー，枚，枚．人（にん）･･･.」(176S)と枚数か人数か迷っている発言が続く．これは，４x に数を代入できていないので，代入した結果とこの式を比較できていないと考える．そこで,「x に 13 が入れば４×13 は.」(177I)と数値での数量の解釈を再度尋ねたところ,「52 枚.」(178S)と答えた．４×13 の結果である 52 は折り紙の枚数であると理解できているが，文字式４x になるとこの数量が枚数であることを捉えられずにいる．さらに,「枚，52 枚なんでしょ.」(179I)と確認をすると,「枚，でも４x が枚だと 10 も 62 も４x も全部枚数だから.」(180S)と方程式の辺々の項について述べ,「式を求めるにはいいけど，人数を求めるのになんかおかしい.」(182S)と述べている．これは４x＋10 を問題場面に照らして解釈するときに，右辺 62 と等しい４x＋10 が折り紙の総数を表していると考えると，この式の中に人数を表す項がなくなってしまうことに矛盾を感じている発言である．つまり，この被験者は，方程式を解くことにより求められるのは生徒の人数なので，式の中に生徒の人数を表す項がないのはおかしいと捉えている．そこで，４x＋10 を４x と＋10 に分離し，４x を生徒の人数，10 を枚数と別々の数量として解釈することで，本人の中の矛盾を解消しようとしていると考えられる．

このように３x＋20＝５x－２の辺々を，人を単位とする３x や５x，枚を単位とする＋20 や－２の和で等しいと捉える見方が補助問題Ⓐ，Ⓑの立式の過程における発話によって顕在化したといえる．

3.4.5　T.S(A2)，M.Y(B1)，M.C(B1)，K.K(B1)，M.K(B1)，Y.T(A2)の理解

これらの被験者が，何を文字 x においたか，そして，数字と文字の積の形で表された文字式, 特に３x をどのように解釈しているかをプロトコルや被験者がかいた絵から分析する．その際，多項式３x＋20 の解釈についての発言や，方程式３x＋20＝５x－２の解釈についての発言の中にも３x についての理解が現れて

いるので，プロトコルを各フェーズに分けて見ていくこととする.

3.4.5.1　T.S(A2)の理解

3.4.5.1.1　最初の方程式の立式の場面での文字 x，y の表す数量

この被験者は, 問題１において，$3x+y=+20$，$5x-y=-2$ と誤って立式し，x 生徒の人数，y 折り紙の数と記述する．「x は，その生徒の人数.」(10S),「y は折り紙の枚数.」(14S)と発言している．$3x$ が何を表すのかを尋ねているときに，この式における文字 x についての解釈が変わっている様子が見られる. 以下に，そのプロトコルを示す.

9I：じゃあ，ちょっと確認しようか．x は何にしていますか.
10S：x は，その生徒の人数.
11I：じゃあここに書いておいて.
12S：はい．(「x 生徒の人数」と書く.)
13I：で，y は.
14S：y は折り紙の枚数.
15I：じゃあ，それも下に書いておいて.
16S：(「折り紙の数」と書く)
17I：式をつくりましたよね．この式を読んでみようか.
18S：$3x+y$

3.4.5.1.2　$3x$ の表す数量

19I で，質問者が $3x$ は何を表しているかを尋ねると,「１人に配るから，その３枚を何人に配ったか」(20S)と答えたので，これに対して「何人に配ったかというのは, これ単位は何になるのですか，$3x$ の.」(21S)と問うと,「$3x$ の単位. え～と, 生徒の人数」(22S)と答える．ここで質問者が y について再び尋ねると,「あっ，y は，折り紙の枚数.」(24S),「あっ，だから，マイナスにしないといけない.」と述べ，何かに気付いたようであった．そこで，もう一度 $3x$ は何を表しているかを尋ねると,「ん～，$3x$･･･．あっ，折り紙の枚数？えっ.」(30S)と数量の把握に迷っている様子であったので，それを探るため,「どういうふうに変わった.」(31I)と尋ねると,「なんだっけ，その，１人に３枚配るから，その，３ $\times x$ だから, 折り紙自体が３だから.」(32S),「折り紙の枚数が３だから, え～と, それをかけているから折り紙の枚数になる.」(34S)と答える．22S では，折り紙の枚数３に生徒の人数 x をかけた結果は生徒の人数と発言していたが，この時点では，折り紙の枚数であると発言が変わっている．　しかし，44S では再び生徒の人数であると発言を変える.

19I：何を表していますか．$3x$ って何.
20S：$3x$ は，なんだっけ，１人に３枚ずつ配るから，その３枚を何人に配った

か.
21I：何人に配ったかというのは，これ単位は何になるのですか，３xの.
22S：３xの単位．え～と，生徒の人数.
23I：生徒の人数になる．そして，yは.
24S：あっ，yは，折り紙の枚数．だからはい.
25I：それをたしているんだよね.
26S：あっ，だから，マイナスにしないといけない.
27I：え～と，３x自体は，生徒の人数ね.
28S：はい．多分．ん.
29I：３xって何を表していますか.
30S：ん～，３x･･･．あっ，折り紙の枚数？えっ.
31I：どういうふうに変わった.
32S：なんだっけ，その，１人に３枚配るから，その，３×xだから，折り紙自体が３だから.
33I：折り紙の.
34S：折り紙の枚数が３だから，え～と，それをかけているから折り紙の枚数になる.
35I：そのときのxって何.
36S：xは生徒の人数になる.
37I：生徒の人数ね.
38S：はい.
39I：生徒の人数に折り紙の枚数をかけているね．で，３xは何を表しているんだっけ.
40S：３xは，その～，１人あたりの折り紙の･･･．あっ，違うな．折り紙の数.
41I：xは生徒の人数なんだよね．枚数３をかけて，３×xは何を表しているのかという質問なんだけど.
42S：折り紙の総数じゃあないんですか．えっ.
43I：xは何ですか．しつこいようだけど．何度も聞くようだけど，そこをはっきりしたいので.
44S：xは生徒の人数.

3.4.5.1.3　３xを表している絵の中のxは何かについて

引き続き，上で述べたことを絵にしたらどうなるかを尋ねると，「３人いたら，こういう感じの１人に３枚ずつ配られる.」(46S)と言いながら，図 13 をかいた．そして，３xの３については，「これが３になって（絵の中の生徒が持っている小さい四角３つを指して）」と説明し，xについては，「xはこの人たちのこと.」(50S)と複数の生徒を指して言うが，「１人１人がx･･･.」(52S)と生徒１人１人がxであるとも述べる．xをどのように捉えているのかを探るため，「生徒の人数と

いうのは，どこに現れてくるのかな．x っていうのはどこに現れてくるのかな．」(55I)と尋ねると，「x は，この人たちの全員の数という．」(56S)，「全員の数．これ１人が x じゃあないんだね．」(57I)と確認すると，「あっ，ん．」(58S)，「１人が x．」(60S)と，x を，全員の数と言いながら，１人が x と言い直している．そして「x はこの人たちの全員の数．」(64S)と再び言い直している．文字 x の解釈が生徒の人数を表しているのか，１人の生徒を表しているのか明確には捉えられていない様子が見られる．以下に，そのプロトコルを示す．

45I：人数ね．その３×x のイメージは絵にかけますか．

46S：（絵(図 13)にかく）３人いたら，こういう感じの１人に３枚ずつ配られる．

47I：その３というのは生徒，それとも小さくかいたもの，どっちが３．

48S：これが３になって（絵の中の生徒が持っている小さい四角３つを指して）

49I：x は．

図 13　T.S のかいた絵

50S：x はこの人たちのこと．

51I：これ１人１人が x なのですか．どういうイメージですか．

52S：１人１人が x･･･．

53I：x は生徒の人数なんだよね．そう言ったよね．

54S：はい．

55I：生徒の人数というのは，どこに現れてくるのかな．x っていうのはどこに現れてくるのかな．

56S：x は，この人たちの全員の数という．

57I：全員の数．これ１人が x じゃあないんだね．

58S：あっ，ん．

59I：そうじゃあないんだね．

60S：１人が x．

61I：うん，そうじゃあないんだね．確認，確認．

62S：僕のイメージ．

63I：僕のイメージを聞いているんだよ．もう１回，どういうこと．

64S：え～と，何て言うんだろう．x はこの人たちの全員の数．

65I：なるほど，それが x ね．

66S：はい，x．

67I：それで，これが折り紙３枚，３枚ずつ持っているという．

68S：はい．

69I：じゃあ，$3x$ は．くどいようだけど．この絵のどこに $3x$ は出てくるのですか．

70S：x は･･･．この絵のどこ．$3x$ はこの折り紙の，その～，枚数．

71I：じゃあ，いいね．$3x$ は．それに y は何でしたっけ．

72S：yは，あれ，そうか．yは人数．
73I：yは人数．
74S：まった，あっ，そっか，折り紙の枚数，ん．
75I：だよね．確認だよ．そしたら，それをたしているんだよ．
76S：これ，間違えました．はい．

3.4.5.1.4　立式の過程を振り返って

最初に立式したときを振り返って尋ねると，「どっちがxかというのがあまりわかっていなかった．」(142S)，「つくっているときは，生徒の数が，どっちがxなのかわからなくて，一応，数を入れてみて，その式ができあがったときにxとyのどちらを生徒の数にすれば式ができるかがわかった感じがします．」(144S)と，文字x，yの表す数量をはっきり把握しないまま立式していたと発言する．「一応，その問題に１人に３枚ずつ配るとあったので３と，１人に３枚ずつだから，その１人は何人いるかわからなかったから，一応xに代えてみて，yがちょっとわからなくて，一応入れてみて，何かわかるかなと思って入れてみて･･･．」(148S)と答え，１人に３枚ずつだからと問題文にそって立式しようとし，その１人が何人いるかわからないからxに代えたと，１人の生徒をxとして立式している様子が現れている．このとき，この被験者は，xを未知数として捉えていながら，１人１人の生徒にxを割り当てていると考えられる．また，どのような数量を文字yとしたかは確認しないまま立式している様子が「はい，とりあえずyにしてみた．何かわかるかなと思った．」(154S)という発言から見て取れる．

141I：それは，今日はじめのところからわかっていましたか，振り返ってみて．今日やったことを振り返ってもらいたいと思うのだけれど．
142S：最初はちょっと，何て言うんだろう．どっちがxかというのがあまりわかっていなかった．
143I：式をつくっているとき？
144S：つくっているときは，生徒の数がどっちがxなのかわからなくて，一応，数を入れてみて，その式ができあがったときにxとyのどちらを生徒の数にすれば式ができるかがわかった感じがします．
145I：つくった後に．
146S：はい，つくった後に．
147I：じゃあ，つくったときに，xとyというのはどういうイメージで式にしたのですか，最初．
148S：一応，その問題に１人に３枚ずつ配るとあったので３と，１人に３枚ずつだから，その１人は何人いるかわからなかったから，一応xに変えてみて，yがちょっとわからなくて，一応入れてみて，何かわかるかなと思って入れてみて･･･．

149I：そのときの y は，これ書いてくれたよね．折り紙の枚数と．
150S：はい．
151I：そのときは．
152S：そのときはちょっとわからなくて・・・．
153I：とりあえず y にしてみた．
154S：はい，とりあえず y にしてみた．何かわかるかなと思って．
155I：それでつくったのね．
156S：はい．

3.4.5.2　M.Y(B1)の理解

3.4.5.2.1　$3x$ を表している絵の中の x は何かについて

この被験者は，問題１に最初，方程式を $x(3+20)=x(5-2)$ と誤って立式している．

$3x$ は何を表しているかについては，生徒１人あたりに配る折り紙の枚数３枚と書いて，図 14 の絵をかいた．このとき，「３人くらいいるとして，１人あたりに３枚配る」(70S)と動詞で終わる形で説明しており，文字式 $3x$ が配る操作を表していると捉えていると考えられる．その説明の途中(74S)で「あっ，そうか」と何かに気づき，「そのままで，１人」(76S)と $3x$ が１人を表すことを述べ，「最初は，もうこれ」(80S)と言って絵を１つ囲んで，$3x$ を，１人が３枚折り紙を持っている様子を表していると捉えていたと述べている．そして，「x がその生徒の人数全部なので，それ，生徒すべてに配る枚数が３枚」と言い直している(84S)．そして，「$3x$ の x は生徒の人数なので，その生徒に配る枚数３枚となりました」と数量を分離して説明し，「生徒 x 人に配る枚数」と書き直している．図 14 では，４つ生徒を表している〇をかいているが，そのうちの左上の１つの絵をさらに〇で囲んで，それが $3x$ を表していると考えていたと述べている．この言動から立式する際に，「３人くらいいるとして」と，複数の生徒を想定し，x を生徒の人数全部を表していると考えてながら，実際には x を１人の生徒と捉えて立式していたことが確認できた．

69I：この生徒１人あたりに配る折り紙の数３枚っていうのはどういうこと．絵にかけますか．
70S：絵にかく･･･．人が，これが人数だとすると，まあ３人くらいいるとして，１人あたりに３枚，それで，３枚，３枚配る･･･．
71I：それのどれを表しているの．
72S：その中の．
73I：うん，$3x$ というのは．

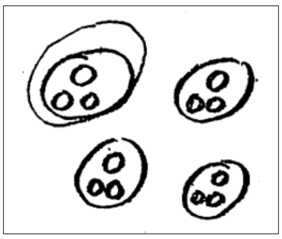


図 14　M.Y のかいた絵

74S：１人あたりに，あっ，ちょっと待って，あっ，そうか．

75I：今は，どういうふうに考えたの.
76S：今は，普通にこれとそのままで．１人.
77I：そうすると，このうちの１人.
78S：はい，あのー，あっ，そうか，そういうことか.
79I：最初は，どういうふうに考えたの.
80S：最初は，もうこれ（図 14 の絵の左上の１つを囲んで）.
81I：それが３x.
82S：はい.
83I：なるほど．うん，それが今，あっ，って言って気が付いたのは.
84S：x がその生徒の人数全部なので，それ，生徒すべてに配る枚数が３枚.
85I：それどうやって気付いたのですか.
86S：それは，えっとまあ，３x の x をさっきの問題と見比べてみて，x が何を表しているのかを見てみて，そうしたら，もう生徒の人数だったので，それで，３x の x は生徒の人数なので，その生徒に配る数３枚となりました.
87I：そうすると，これ今，生徒１人あたりに配る折り紙の枚数３枚という言い方じゃあないよね．書き直せますか，下に.
88S：はい．(「生徒１人１人に配る枚数」と書き直す）
89I：１人１人に配る枚数というと１人１人に配る枚数だから３枚って同じようなことを言っているんだけど，それでいい.
90S：いや，違うな．生徒･･･．あっ．「１人１人を消して x 人と書く」こう.
91I：ああ，なるほど．そうすると，x 人の x ってどういう意味でイメージしているのですか.
92S：x 人というのは，その生徒の人数の数ですね.

3.4.5.3　M.C(B1)の理解

この被験者の理解は文字 x を生徒１人であると捉えている様子が明確に現れているところに特徴がある．また，３x は終始一貫して枚数であると述べている.

3.4.5.3.1　最初の方程式の立式の場面での文字 x の表す数量について

この被験者は，方程式の立式で「３：20＝５：２」と書いて手が止まった．そして，しばらく考えた後「$3x+20=5x-2$」と正しく立式している．x は何にしましたかという質問に対して，「x は３.」(8S)と数値３を x としたと述べている．その後，「ああ，人数.」(10S)と言い直し，「何の人数.」(11I)と尋ねると，「１人.」(12S)と答える．x を人数と言いながら，「１人」と述べている．その後，「どういう気持ちで x を使ったのかな.」と尋ねると，「生徒の人数を求めたいから.」(20S)と方程式を立式する手続きとして求めたい数量を文字 x におくと述べるが，それが何を表しているかについては答えていない．また，「生徒の人数を求めたいから何をしたの」という問いに対して，「１人に３枚ずつ配ると 20 枚余るのと，５枚ずつ配ると２枚たりないのを求めて･･･.」(24S)と問題文に書かれてい

ることをそのままを読む形で答えており，「x が表しているものを何にしたのですか．どうして x を使おうとしたんですか」に対しては，「なんとなく」(28S)と述べただけで，明確に答えられていない．以下に，そのプロトコルを示す．

5I：どんなふうに考えた．
6S：えっ．
7I：まず，x は何にしましたか．
8S：x は３．
9I：３を x にした．ここの文章の中でだよ．
10S：ああ，人数．
11I：何の人数．
12S：１人．
13I：１人の人数を x とした？
14S：あっ．
15I：緊張している．
16S：ふふふ．･･･．
17I：x を自分で使ってくれたよね．何を x にして式をつくろうとしたんですか．
18S：ふふ．
19I：どうかな，どういう気持ちで x を使ったのかな．
20S：生徒の人数を求めたいから．
21I：求めたいから，x は何にしたの．
22S：･･･．
23I：生徒の人数を求めたいから何をしたの．その後を知りたい．
24S：１人に３枚ずつ配ると 20 枚余るのと，５枚ずつ配ると２枚たりないのを求めて･･･．
25I：うん，x で表しているものを何にしたのですか．どうして x を使おうとしたんですか．
26S：･･･．
27I：意識なく．
28S：なんとなく．

3.4.5.3.2　フレーズ型の式を解釈する場面の $3x$ について

この被験者は，$3x$ は「１人に３枚配る．」(34S)と述べ，「（１人に３枚）配る何ですか」と尋ねると，38S でその後に「枚数」と書き足している．最初は，文字式 $3x$ を「配る」と動詞を表すものであると捉えていたが，インタビューの中で $3x$ は枚数を表していると捉えられた様子が見られる．同様に，$5x$ についても「１人に５枚ずつ配る枚数」(42S)と述べている．しかし，この被験者は「１人に」ということを強調して答えている．

3.4.5.3.3　$3x+20$ について

$3x+20$ について「１人に３枚配って人数分配ると，20 枚余るから＋20，余るとプラスだから＋20.」(40S)と述べている．そして，$5x-2$ についても「１人に５枚ずつ配ると２枚たりないから－２.」(46S)と再び問題文に書かれていることを読む形で説明しており，余るとプラスだから＋20，２枚たりないから－２と，計算の操作，あるいは折り紙の状況を表すものとして式を見ている様子が見て取れる．第２節の T.K と同様の発言をする．また，$3x$ については，１人に３枚ずつ配る枚数と述べているが，40S の中で単に１人だけを想定しているのではなく，それを「人数分配る」と発言していることから，１人に３枚配った折り紙が人数分あることは理解していると考えられる．以下に，そのプロトコルを示す．

33I：はい，ちょっと説明して．まず $3x$ は.
34S：１人に３枚配る.
35I：配る何ですか.
36S：枚数.
37I：ああ，枚数，じゃあどうぞ.
38S：(「１人に３枚配る」のあとに枚数と書き足す)
39I：じゃあ，下は．$3x+20$ は.
40S：１人に３枚配って人数分配ると，20 枚余るから＋20，余るとプラスだから＋20.
41I：なるほど，じゃあこっちは言葉で説明できますか．$5x$ は.
42S：１人に５枚ずつ配る.
43I：配る何ですか.
44S：枚数.
45I：で，２つ目は，$5x-2$ は.
46S：１人に５枚ずつ配ると２枚たりないから－２.

3.4.5.3.4　センテンス型の式 $5x-2=3x+20$ の解釈について

質問者が，「$5x-2$ と $3x+20$ って．その何が同じなのかな.」と尋ねると，50S で，「折り紙の全部の数.」と答えている．この問題において，$5x-2$ と $3x+20$ が折り紙の総数を表していることを理解している発言であると考えられる．このことについて尋ねる中で，$3x$ についての解釈が現れる．

この被験者の発言では，$5x-2$ と $3x+20$ が折り紙の総数を表していると正しく数量を捉えられているかのように見られるが，56S で述べているように $3x$ は，１人の生徒に３枚配ること，１人の生徒が３枚持っていることを表していると改めて発言している．$3x+20$ の立式では，図 15 のように，１人の生徒が持っている折り紙の枚数を $3x$ と捉え，この枚数と余りの 20 枚をたした枚数をイメージしていると考えられる．12S でも発言しているように，文字 x は生徒１人

を表していると捉え，その生徒が３枚持っているということから立式していると考えられる．また，先に述べたように「これを人数分配る」(40S)と発言していることから，文字 x を単純に１人の生徒だけについて捉えているのではないこともわかる．このことに，本人の中では矛盾を感じていない．

このように，正しく方程式を立式できている被験者の中に，立式しやすいように，文字の意味を解釈している様子が見られた．以下のプロトコルを示す．

47I：それで今言ったことをイコールで結んでいますよね．これイコールで結んでいるのはなぜいいんですか．

48S：んー，$3x+20$ と $5x-2$ が同じだから．

49I：同じだから，でも見かけは違うよね，$5x-2$ と $3x+20$ って．その何が同じなのかな．それどうイメージをもっている．これ何が同じなんだろう．

50S：･･･．折り紙の全部の数．

51I：それを両方とも表している，なるほど．じゃあ，ちょっと単位を聞きます．まず，$3x+20$ ね．これ $3x+20$ が全体で人，人数の人ね，を表しています．$3x+20$ 全体で枚を表しています．$3x$ が人で，$+20$ が枚を表しています．$3x$ が枚を表して，$+20$ が人を表しています．これ，どれでしょうかね，問題を見てもらって，この場面でのふさわしい単位はどれかを選んでもらいたいのですけれど．

52S：これ．(「($3x+20$) 枚」を指して)

53I：うん，○をしてみて．

54S：○で囲む．

55I：どうしてそれを選びましたか．

56S：１人に３枚で 20 枚余るから．

57I：なるほど，こっちは，今度は，$5x-2$．これどうですか．同じね．全体が人か，全体が枚か，$5x$ が人で -2 が枚か．

58S：(「($5x-2$) 枚」を○で囲む)

59I：これもどうして選びましたか．

60S：５枚ずつ配って２枚たりないから．

61I：なるほど，だから枚なんだね．で，例えば，この $3x+20$ ってどういうイメージをもっているか，絵をかける．

62S：(図 15 の絵をかく)

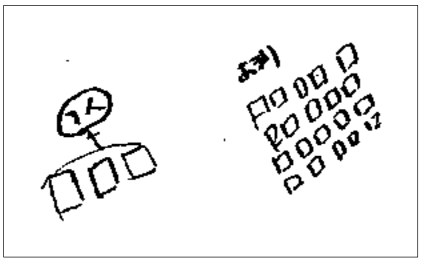


図 15　M.C のかいた絵

63I：これで $3x$？(図 15 の絵の左側を指して)

64S：う～ん．

65I：x のイメージはどうなのかな，どういうふうにもっているのかな．

66S：･･･．

67I：これは $+20$ を表している．(図 15 の絵の右側を指して)

68S：うん.
69I：これが３xを表しているということでいい.（図 15 の絵の左側を指して）
70S：うん.
71I：この「１人」が x って感じ．そこだけ最後知りたいんだけど．ここに書いてある１人に３枚配る枚数ということは，これが３xかな．それとももっと違う感じ.
72S：ふふ.
73I：今，C さんが書いてくれたこれ（３xが何を表しているかの記述）から考えると，この絵が３xというイメージかなと思うんだけど．C さんどうかな.
74S：そんな感じです.

---

3. 4. 5. 4　K.K(B1)の理解

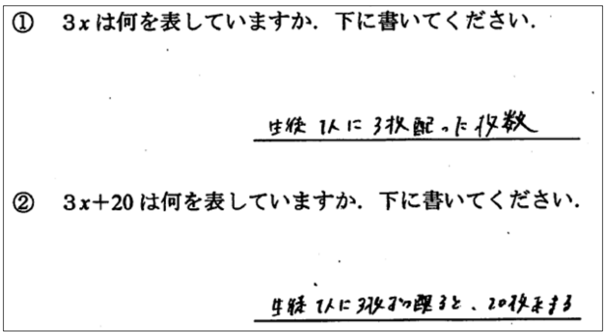
この被験者は，文字 x の意味の解釈が生徒の人数と折り紙の枚数の間で揺れている様子が顕著に現れている.

3. 4. 5. 4. 1　最初の方程式の立式の場面での文字xの表す数量について

この被験者は最初，xを用いて１次方程式を立式しているが，何をxとしているかについて人数なのか枚数なのかを明確に答えられていない.「x は何にしているのですか.」(5I)と尋ねると,「xは１人に配る，ん，ちがう，合計の数.」(6S),「折り紙の総枚数，総数なので，折り紙の総数をわる３，ん，違う違う，うんと，xは，生徒の人数を表していて.」(12S)とxが折り紙の総数か生徒の人数かのどちらを表しているかを捉えられていない様子が見られる.「今，なんでxを勘違いしたのかな，振り返ってみて.」(15I)と尋ねると，「求めるのが総数だったから.」(16S)と求める数量をxにすると考えている様子が見られる. この被験者は，最初，文字の意味について考えずに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余るからと，問題文通りになぞって方程式を立式している. そして，その方程式を立式した後からxについて，その意味を解釈している様子が見て取れる. この問題では，求める数量が生徒の人数と折り紙の総数の２つあるため，文字 x が何に表すか迷っていると考えられる．以下に，そのプロトコルを示す.

3I：はい，ありがとう．どんなふうにやったのか，ちょっと説明してもらえますか.
4S：えっと，この３枚は１人に３枚ずつ配ると，で 20 枚余るから＋20 で，１人に５枚ずつだと，２枚たりないので，－２で，そこから方程式へ，xと文字式と数字に分けて解きました.
5I：なるほど．今，xは何にしているのですか.
6S：xは１人に配る，ん，ちがう，合計の数.
7I：ん，何の合計の数.
8S：折り紙の.

9I：そうすると，説明して，$3x+20$ はどういうふうにつくったの．
10S：えっと･･･，え･･･．
11I：もう１回．x は何にしているの．
12S：折り紙の総枚数，総数なので，折り紙の総数をわる３，ん，違う違う，うんと，x は，生徒の人数を表していて．
13I：なるほど，それはいい．
14S：はい．で，その生徒の人数に３枚配ると 20 枚余る．で，生徒の人数に１人５枚ずつ配ると２枚余るという．
15I：今，なんで x を勘違いしたのかな，振り返ってみて．
16S：えっと，求めるのが総数だったから．
17I：ああ，なるほど，だから x もそうだと思った．うん．これ x は 11 って出ているもんね．
18S：うん．
19I：じゃあ，今つくってもらった式をね，これも前にやってもらったんですけど，同じ問題で，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，この考え方で方程式をつくりました．$3x+20$ と $5x-2$ は K さんも同じようにつくってくれました．で，この $3x+20$ について，$3x$ は何を表していますか，この問題でね．$3x+20$ は何を表していますか．そうですか，ちょっと答えてもらっていいですか．
20S：（答えを書き始める）40 秒後（最初は $3x$ が「生徒１人に３枚配った」と書いた．）
21I：まず，$3x$ から聞きましょうか，なぜそういうふうに考えましたか．
22S：えっと，総枚数，総数で考えると，総数－20 が，その人数×３なので･･･．
23I：なので．
24S：なので，１人に３枚ずつ配る･･･えー，と 20 枚余るということが示せるかなと思って．
25I：いいよ．それはこっち（$3x+20$）ね．$3x$ だけは何を表しているの．
26S：生徒１人に３枚配った．
27I：生徒１人に３枚配った何？配った何を表しているの．
28S：配った･･･配っただけの枚数．
29I：ああ，じゃあそういうふうに書いて．
30S：配った枚数
31I：うん．
32S：（「生徒１人に３枚配った」の後に「枚数」を書きたす）
33I：そうすると，今，$3x$ を聞いているんだよね．K さん，x につい


① 3xは何を表していますか．下に書いてください．

生徒1人に3枚配った枚数

② 3x+20は何を表していますか．下に書いてください．

生徒1人に3枚ずつ配ると、20枚あまる

図 16　K.K の記述

て何もそこに触れていないよね．x はどんなふうにここに関係してくるの．
34S：ここが，折り紙の枚数が，この折り紙の枚数－20 が総数で･･･．
35I：何の総数．
36S：全部の，違う，生徒に配った数，なので，その数です．

さらに，x に対するイメージを再度尋ねると，「x は１人に配った数．」(40S)と述べ,「ああ，そっか．生徒の数．」(42S),「x を何て言いましたっけ．」(50S)と，ここでも文字 x が何を表すかがわからなくなっている．

37I：で，x はどこに関係しているの．
38S：えー．うふふ．･･･．
39I：そのイメージを聞きたいんだよね．x をどのようにイメージしているのかということが知りたいところなんです．
40S：x は１人に配った数．
41I：でも，３x を１人に配ったって書いてあるよね．
42S：ああ，そっか．生徒の数．
43I：x はね．じゃあ３x は．
44S：えー．３×生徒の数．
45I：それが何を表しているんですか．
46S：は，総数から 20 枚ひいたこと．
47I：じゃあこっち（３x＋20）ね．これはどういうふうに考えたのですか．
48S：１人に３枚ずつ配ると 20 枚余る．
49I：これも x を一緒に考えてみると．
50S：x を何て言いましたっけ．

3.4.5.4.2　３x＋20 の表す数量を考える際の文字 x の表す数量について

３x＋20 のふさわしい単位について考えている場面では,「どこを迷っているのかな．」(99I)と尋ねられると,「この x が何を表すか．」(100S)と，インタビューの後半になっても文字 x の意味がわからないと述べており，３x＋20 のふさわしい単位に迷っていると発言している．文字 x が何を表しているのかがこの被験者の中で終始はっきりしていない様子が見られる．以下の表７のように発言が揺れている．

3.4.5.4.3　フレーズ型の式を解釈する場面の３x の数量について

３x について,「生徒１人に３枚配った」(20S)とこの被験者も動詞で終わる形で記述し，このことについて,「生徒１人に３枚配った何？配った何を表しているの．」(27I)と尋ねると,「配った･･･配っただけの枚数．」(28S)と答え,「生徒１人に３枚配った」の後に「枚数」を書き足した．そして,「じゃあ３x は．」(43I)と再び３x の意味について問うと,「３×生徒の数」(44S),「総数から 20 枚ひい

たこと」(46S)と発言しており，生徒に配った分の折り紙の枚数であることは認識していると考えられるが，それを求める計算の仕方を答えている．つまり，３ x 自体も計算の式として捉えており，３x が生徒 x 人に折り紙を３枚ずつ配った折り紙の枚数という１つの数量を表しているとは，捉えられていないと考えられる．さらに，「３x ってやるとこれはどうなんですか.」(101I)ともう一度３x について尋ねると，「１人に配る数になる.」(102S)と発言し，これについて「１人に配る数になる．１人なのね.」(103I)と確認すると，で「１人．ん，違うな．１人に配ると何人まで配れるかがこれです.」(104S)と何人まで配れるかという１人だけを想定しているのではないと見られる発言をしている．ここでも配るという操作として答えている．108S では，３x は人（人数）を表すと述べており，配る数から人数に変わっている．このように３x の意味の解釈に，x を生徒の人数と捉えるのか，１人の生徒と捉えるのかといった文字の意味の解釈が大きく影響していることがわかる．

3.4.5.4.4　フレーズ型の式を解釈する場面の３x＋20 の数量について

この場面において，３x＋20 の単位を尋ねると，78S で「３x 人＋20 枚」を選び，その理由は，「生徒の数×３が生徒に配った数，＋20 すると，この折り紙の総数になるので.」(80S)と述べる．そこで，「そうすると，今の話だと，生徒に３枚ずつ配った数というのは人ね.」と確認すると，「違う．こっち（(３x＋20) 枚）です．間違いました.」(82S)と訂正する．そして．「今どういうふうに考えて変わったの.」と尋ねると，「こっち（３x 人＋20 枚）だと，x が人になっちゃうので，３×何人だと違うかなと思って．こっち（(３x＋20) 枚）は，x が枚になるので.」(84S)とここでも x についての解釈が変わっている．そして，「x は人数だよ.」と確認すると，「え～と，１人に３枚だから，ここ･･･．やっぱりこっち（３ x 人＋20 枚).」(90S)とここでも解釈が揺れている様子が見られる．さらに，「え～，こっち（３x 人＋20 枚).」(106S)，「こっち（(３x＋20) 枚）です.」(114S)と何度もその解釈を変える．このことについて，「何を求めたいか，３x で何を求めたいかを迷って.」(116S)と発言し，それについて「何を求めたいの.」(117I)と尋ねると「１人３枚ずつ配ると何人に配れるかを求めたい.」(118S)と答えており，インタビューの後半でも３x が配るという操作を表していると捉えている発言をしている．

これらの発言をみると 3.4.5.4.1 で述べたように，文字 x がどのような数量を表すのか明確に捉えられておらず，３x は x の単位で決まると捉えている．x の表している数量がこの被験者の中で定まらないことが３x＋20 の数量の解釈も揺れる原因となっていることが考えられる．以下に，そのプロトコルを示す．

78S：これ．(「３x 人＋20 枚」を選ぶ)

79I：その理由は.

80S：これでも言ったとおり，生徒の数×３が生徒に配った数＋20 すると，この

折り紙の総数になるので．
81I：そうすると，今の話だと，生徒に３枚ずつ配った数というのは人ね．
82S：あっ，こっちか．違う．こっち（(３x＋20) 枚）です．間違いました．
83I：今どういうふうに考えて変わったの．
84S：こっち（３x 人＋20 枚）だと，x が人になっちゃうので，３×何人だと違うかなと思って．こっち（(３x＋20) 枚）は，x が枚になるので．
85I：ん，x は人数だよ．
86S：あっ，えっ．
87I：もう１回，もう１回．これは３×x 人ってやったんだけど，これは，違うなと思ったんだよね．
88S：違うなと思った．
89I：うん，最初に思ったことを振り返ってみて，どういう考えでそういうふうにしたのかな．
90S：え～と，１人に３枚だから，ここ･･･．やっぱりこっち（３x 人＋20 枚）．ここに人数が入るので，ここが今の答えだと 11 人になるじゃあないですか．
91I：そうすると，計算すると．
92S：これが，配った数＋余った数になる．
93I：ごめん．ここ（x）に 11 が入るよね．そうすると，３×11 で何ができる．
94S：33．
95I：これは何．にん？
96S：･･･．枚．
97I：だよね．そこは？
98S：そうだとすると，こっち（(３x＋20) 枚）です．
99I：どこを迷っているのかな．
100S：この x が何を表すか．
101I：なるほど．x はここに書いてあるように人数を表しているんだよね．でも３x ってやるとこれはどうなんですか．
102S：１人に配る数になる．
103I：１人に配る数になる．１人なのね．
104S：１人．ん，違うな．１人に配ると何人まで配れるかがこれです．
105I：とすると，改めて聞くとどっちになるんですか．
106S：え～，こっち（３x 人＋20 枚）．
107I：そっちなのね．じゃあ，ここ（３x）は人でいいのね．
108S：人です．

表７　x が何を表しているかについて K.K の発言の揺れ

質問者	折り紙の枚数	生徒の人数
5I：x は何にしているのですか.	6S：x は１人に配る，ん，ちがう，合計の数.	
7I：何の合計の数.	8S：折り紙の.	
11I：もう１回．x は何にしているの.	12S：折り紙の総枚数，総数なので，折り紙の総数をわる３，ん，違う違う	12S：うんと，x は，生徒の人数を表していて.
15I：なんで x を勘違いしたのかな.		16S：求めるのが総数だったから.
39I：x をどのようにイメージしているのかということが知りたいところなんです.	40S：x は１人に配った数.	
41I：でも，３x を１人に配ったって書いてあるよね.		42S：ああ，そっか．生徒の数.
	50S：x を何て言いましたっけ.	
		56S：x は生徒の数.
99I：どこを迷っているのかな.	100S：この x が何を表すか.	

3.4.5.4.5　３x＋20 を絵で表したとき絵の中の x は何かについて

この生徒は，３x+20 のイメージについて，図 17 の絵をかき，「絵にかくとこれが折り紙，これが１人に３枚，１人に３枚.」(128S)と答え，１つの絵だけに訂正している．そこで，「これ２つかいて消したのは.」(133I)と尋ねると，「間違えました.」(134S)と言い，×11＋20⇒総数と書き入れている．この絵から，立式するときには，３x は１人の生徒 x が３枚の折り紙を持っているという状態を表していたが，x を 11 と確定させていることがわかる．90S で人数に入る数が 11 であると捉えることにより，３x+20 が枚数の総数を表すと認識できたと考える．３x を１人の生徒が３枚持っていることではなく，生徒が 11 人いるという状態でその合計の枚数であると認識したことがプロトコルからわかる．

インタビューを通して，全体的に文字式の表す単位についての理解が曖昧であるため，解釈が何度も変わっていると考えられる．この生徒の特徴は，終始，３x は「生徒の数×３」，３x＋20 は「配れた枚数＋20」と，×や＋などの演算記号を使って式を意味付けており，計算の仕方に目が向いている様子が見られる．

式を操作として見ている現れであると考えられる．

111I：どうしてそうなったのかを聞きたいんだけどね．
112S：ここ全体が枚．ここが全体で枚になるから枚かな．
113I：そうすると，改めて聞くとどっちですか．
114S：こっち（($3x$＋20）枚）です．
115I：その迷っているのは何かな．ここがすごい聞きたいんだけど．どうして迷っているの．
116S：何を求めたいか，$3x$ で何を求めたいかを迷って．
117I：で，何を求めたいの．
118S：今は，３人，１人３枚ずつ配ると何人に配れるかを求めたい．
119I：それが x なんだよね．うん．だから人になっちゃった．
120S：そう．でも，折り紙の総数を考えると，$3x$ で，配れた枚数＋20 で総数になるから，というのを考えて迷いました．
121I：それで，イコールで結んでいるときはどうなのかな．それをうんと意識してやっているのかな．
122S：いや．
123I：どんな感じでこのイコールの式をつくったかな．
124S：授業で習った通り．うふふ．
125I：どんなふうに．
126S：ここ（$3x$＋20）とこっち（$5x$－２）は同じ枚数だとすると，というふうに考えたら，$3x+20=5x-2$ っていうふうに．
127I：で，今，１人に配ったって言っていたけど，この $3x$ のイメージね，絵にかくとどういうイメージですか．$3x$ って．今ここを迷っていたよね, K さん．
128S：絵にかくとこれが折り紙，これが１人に３枚，１人に３枚．
129I：それがどうなっているの．今，２人しか書いていないけど．
130S：×10，あっ，違う違う．
131I：今，$3x$ ね．
132S：ここを 11 にすると，あっ＋20 にすると，折り紙の総数．
133I：これ２つかいて消したのは．
134S：間違えました．
135I：１人に．これが $3x$
136S：$3x$
137I：これ１つが．
138S：$3x$
139I：なるほど．わかりました．ありがとうございました．これだけやっておこうか，確認ね，$5x$－２の単位，この単位はどうですか．

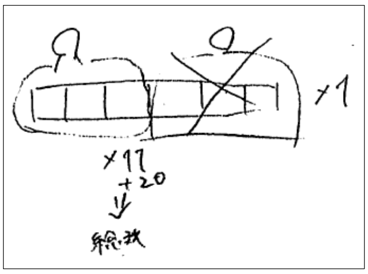


図 17　K.K のかいた絵

140S：これもこっち．((５x－２）枚を選ぶ)
141I：これ．そうすると，両方とも表しているのは，〇をしてくれたのは．
142S：１人に配ると何枚できるか，です．
143I：だから，イコールで結んでいい．
144S：（うなずく）

3.4.5.5　M.K(B1)の理解

3.4.5.5.1　最初の方程式の立式の場面での文字 x の表す数量について

この被験者は，１次方程式を立式して，x＝11 と解を求め，答えを 11 人と記述する．この後，折り紙の総数が求められずに手が止まっていたため，どのように１次方程式を立式したかを尋ねた．すると，「何枚ずつ配るというのを x にして，･･･」「これも５枚ずつを x にして」(4S)と x は配る枚数であると答えている．もう一度「何を x としたの.」と尋ねると，「何枚ずつかを x にして.」(8S)，「あっ，配る枚数を.」(10S)と配る枚数を x としていることを再度述べている．この被験者の文字式の理解の特徴は，５x を「５枚ずつを x にして」と立式していることである．つまり，配った枚数５に x を付ける形で５x が５枚ずつ配っていることを表していると解釈していることである．そして，解として求めた 11 について「x は，11 は何.」と尋ねると，「人数.」(16S)と答え，この矛盾について触れると,「11 枚ずつ配るということかな.」(20S)と操作として数値を解釈し,「３枚ずつ配る，あ，３枚ずつ配るのを x にして.」(22S)，「(x は)配る量.」(24S)とし，答えを 11 人から 11 枚と訂正する.「それで，さっき，この 11 枚は何を表しているんだっけ.」(51I)と確認をすると，「11 枚は１人に配る折り紙の枚数.」(52S)と，求めた解 11 は枚数であると発言する．その後，手が止まった．以下に，プロトコルと，この被験者の x についての発言の揺れを表した表８を示す．

3I：じゃあそこまでどんなふうに考えたのかを説明してもらっていいですか.
4S：え～と，何枚ずつ配るというのを x にして，これは３x で，20 枚余るだから＋20 にして，でイコール，これも５枚ずつを x にして，２枚たりないから－２して，それで，この x をこっちにあのやり方でもっていって，こっちのやつもこっちへもっていって，計算してこうなって，これを計算するとこうなる.
5I：はい，で，もう１回言ってくれる．どういうふうにしてこの式をつくったのか，ごめん.
6S：だから，この x.
7I：何を x としたの.
8S：何枚ずつかを x にして.
9I：何枚ずつかを x．その意味は.
10S：あっ，配る枚数を.

11I：ああ，配る枚数を x としたの．
12S：うん，x とした．
13I：はい，それで．
14S : 20 枚余るから，＋20 にして，イコール，５枚ずつを x にして，２枚たりないから，－２にして，その後計算していくと 11 になる．
15I：うん，それはいいよね．そうすると，x は，11 は何．
16S：人数．
17I：あれ，さっき，何て言っていたんですか．
18S：あれ，さっき，何て言ってたっけ･･･．
19I：もう１回言って，この式のつくり方は．
20S：ああ，11 枚ずつ配るということかな．ん．
21I：この式のつくり方は，もう１回，何だっけ．
22S：３枚ずつ配る，あ，３枚ずつ配るのを x にして．
23I：ということは x は何．
24S：配る量．
25I：配る量ね．
26S：うん．だから 11 か，そっか．

表８　x が何を表すかについて M.K の発言の揺れ

質問者	折り紙の枚数	生徒の人数
5I : どのように式をつくったか.	4S:何枚ずつ配るというのを x にして，５枚ずつを x にして．	
7I:何を x としたの．	8S：何枚ずつかを x にして．	
	10S あっ，配る枚数を．	
15I：x は，11 は何．		16S：人数．
	20S : 11 枚ずつ配るということかな．	
	22S：３枚ずつ配る，あ，３枚ずつ配るのを x にして．	
	24S：(x は)配る量．	
①，②の問題を解いた後		
		150S：ここ（x を指して）が人数で 152S : x＝人数とかく．
		158S：（11 は）人．
これによって，３x＋20，５x－２を折り紙の総数と認識する．		

3.4.5.5.2　$3x$ の表している絵の中の x は何を表しているかについて

問題２において，$3x$ については，「1 人に３枚ずつ配る数」，$3x+20$ については，「1 人に３枚ずつ配る数と余る数」と記述する．「（$3x$ の）イメージはどうなのかな，絵にかけます.」(61I),「絵にかけますか.」(67I)と，$3x$ のイメージを絵にかくように促す．すると，「$3x$ は，だからまあ，１人に３枚ずつ配る」(64S),「ああかけばいいのか，１人に折り紙だから･･･．折り紙３枚渡したとして，で，これを何人かに配る.」(68S)というやりとりをして図 18 の１人の生徒とその生徒の横に折り紙を３枚の絵をかいた．

「これが何人かいるってこと.」(71I)と尋ねると,「いや，これ１人．･･･」(72S)と答え，しばらく考えて,「いや何人も.」と発言している．さらに,「これを何人かに配る」(68S)と言っていることからも，絵は，生徒１人しかかいていないが，この時点で何人もいることとの間で迷っていたと考えられる．そして，$3x$ を,「１人に３枚ずつ配る数」などと発言し，$3x$ の意味を解釈するときには生徒１人をイメージしているとも考えられる．

「$3x$ ってどういうふうに見ていたの．振り返ってみると.」（177I）と尋ねると,「だから，そのときは，１人に配る，ん，１人に３枚ずつ配るって言っていたのか．ただ，１人に３枚ずつ配って 20 枚余るって思っていたのかな.」(178S)と求めることができなかったときの自分の思考を振り返って述べている．また，図 19 の絵について,「そのときどんなことを考えていたの．今思うとおかしいなって思う.」と尋ねると,「うん．そのときはまあ，３枚ずつ配る･･･．だから１人だけに３枚ずつ配って 20 枚余るという感じで.」(194S)と，ここでも１人だけに３枚ずつ配ると見ていたと述べている．

この被験者は，3.4.5.5.1 で，３や５に単に x を付けて立式していたため，x が折り紙の枚数を表すか，生徒の人数を表すかで明確に捉えていない．$3x$ の数量を考えるこの場面で，この式における文字 x を生徒の人数を表すと解釈したが，その x が，今度は１人の生徒を表すのか，生徒が複数人いるその数を x と表すのかで迷っている様子が見られている．これがこの被験者の文字の理解の特徴である．そして，実際の立式では，１人の生徒が３枚持っていると捉えて $3x$ と表していると述べている．

43I：じゃあちょっとおいておこうか，今のこの計算でね，$3x+20$ と $5x-2$ をつくってくれましたよね．これをイコールで結んだ．これはなぜイコールで結べたの．

44S：え〜と，この３枚ずつ配って 20 枚余るというのと，５枚ずつ配って２枚たりないというのは同じ，んー，同じ．

45I：同じ何．何を表しているの．

46S：同じ枚数，うん．

47I：なるほど，それを表しているからイコール．ここの問題は，K 君と同じよ

うに，$3x+20$ と $5x-2$ をつくった状況で，今，先生聞きたいのは，つくった２つの式ね，$3x+20$ と $5x-2$ ね．このまず $3x+20$ について，$3x$ というのは何を表しているか，これを知りたいのです．次は，$3x+20$ は何を表しているか，これを K 君がどのように見ているのかを知りたいんだけど，書けますか．

48S：はい．この $3x$ は配る数･･･．

49I：できるだけ詳しく，考えていることを書いてくれるとありがたいのですけれどね．

50S：（書き始める(図 18-1)）

51I：それで，さっき，この 11 枚は何を表しているんだっけ．求めているんだよね．

52S：うん．11 枚は 1 人に配る折り紙の枚数．

53I：枚数だよね．ちょっとそれをここに書いてくれる．

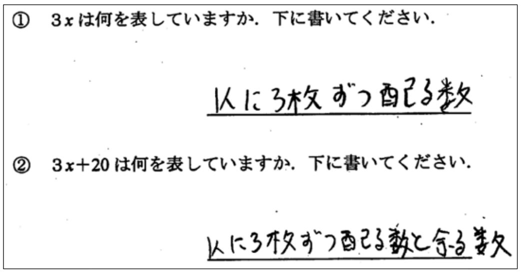


図 18-1　M.K の記述 1

54S：（図 18-2 を書く）

55I：で，$3x$ は，１人に３枚ずつ配る数って（図 18-1 を指して），これ（図 18-1）とこれ（図 18-2）はどんな違いがあるのですか．

56S：ん･･･．だから，これ（図 18-1）は，３枚配って 20 枚余るというので，この場合（図 18-2）は余りがなしで，１人に配る数というか，うん．

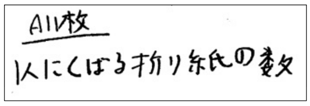


図 18-2　M.K の記述 2

57I：じゃあ，$3x$ は，1 人に３枚ずつ配る数なんだよね．こっちは．１人に配る数だから，1 人に 11 枚配るという意味だよね．３枚ずつと 11 枚ずつってどういうふうに違うの．私の疑問に思っていることはわかった．

58S：うん．これとこれ．

59I：そうだよね．

60S：･･･．ん，･･･．

61I：イメージはどうなのかな，絵にかけます．

62S：えー．

63I：$3x$ ってどういうイメージをもっているの．

64S：$3x$ は，だからまあ，１人に３枚ずつ配る．

65I：１人にっていうのは生徒だよね．

66S：うん．

67I：絵にかけますか．ここに $3x$ のイメージ．

68S：ああかけばいいのか，1 人に折り紙だから･･･．折り紙３枚渡したとして，で，これを何人かに配る．

69I：そうすると，これはまず $3x$ ではないんだね．

70S：う～ん．
71I：これが何人かいるってこと．
72S：いや，これ１人．・・・，いや何人も．
73I：うん，何人もいるんだね．じゃあこっちは，この 11 枚って出した答えは，何を表しているのかな．
74S：これは，１人に折り紙を 11 枚配る数．
75I：これ（図 19 を指して），１人３枚持っているんだよね．
76S：うん．
77I：こっちは．
78S：11 枚．・・・，うん．

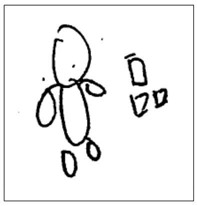


図 19　M.K のかいた絵

＜中略＞
177I：(略) $3x$ ってどういうふうに見ていたの．振り返ってみると．
178S：だから，そのときは，１人に配る，ん，１人に３枚ずつ配るって言っていたのか．ただ，１人に３枚ずつ配って 20 枚余るって思っていたのかな．うん．
179I：というふうに思っていた．
180S：うん．
181I：で，これ（図 19）が，１人が３枚ずつ持っている絵だよね．$3x$ というのは．
182S：だから，何人かに配る枚数，あっ，３枚ずつ配る枚数か．
183I：そうすると，これが絵としては．
184S：人が何人もいる．
185I：その何人かが．
186S：11 人
187I：ああ，11 人で，折り紙はどういうふうになっているの．
188S：53 枚あって，それを皆に分ける．うん．
189I：そうすると，最初は，ここ $3\times x$ だよね．配る枚数だったら，おかしかったよね．
190S：うん．
191I：その辺はどう，自分で振り返ってみて．
192S：う～ん．おかしいな．
193I：そのときどんなことを考えていたの．今思うとおかしいなって思う．
194S：うん．そのときはまあ，３枚ずつ配る・・・．だから１人だけに３枚ずつ配って 20 枚余るという感じで．

3.4.5.5.2　$3x+20$ の数量について

79I で $3x+20$ の数量について尋ねると，「１人に３枚ずつ配る数と 20 は余る数」(80S)と答え，$3x+20$ を１つの数量ではなく，$3x$ と 20 を分けて数量を説

明している．この後，100S までは，この見方で一貫している．

そこで，補助問題Ⓐ「折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい.」，補助問題Ⓑ「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら 1 枚も余ることなく全員にぴったり配れました．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい.」の２つの問題を提示して解くよう指示をした．この被験者は，x を人数としてⒶ $4x+10=62$，Ⓑ $6x+18=8x$ と立式し，求めた解が人数であることを確認する．ここで，もとの問題に戻ってもう一度その立式について説明を促す．すると，「だから，え～と，１人に，あ～，何人かに３枚ずつ配って，であと 20 枚余るから＋20 にして，ここは，何人かに５枚ずつ配って,そうすると２枚たりないから－２にして,計算していって 11 になるから，人数だから人でいいのか.」(154S)と，問題文にそって式を解釈し，$x=11$ が人数を表していることを確認した．

インタビューの前半では，x が枚数なのか人数なのかどちらか迷っており，解である 11 を 1 人に配る枚数であると述べていた．その後，生徒の人数として解釈する際に，生徒１人を表すのか，生徒の人数を表すのかで迷っている．そして補助問題に取り組むことを通して, 120S から次第に 11 の数量を把握し始めている様子が見られる．この２つの補助問題を解く際に，問題場面の数量に関するやりとりを繰り返すことによって，まず，解である 11 が生徒の人数を表すことを明確に捉えることができた．そのため，$3x+20$ は何を表しているかを再度尋ねる(161I)と,「何人かに配る枚数と余った数.」(162S)と，80S と同様の発言をするが，さらに尋ねると,「折り紙の枚数.」(164S)と答えられている．11 という具体的な数量を捉えることにより，文字 x の表している数量についても把握でき，そのことが基になって，完全ではないが，文字式の数量も理解することができたと考えられる．

79I：じゃあこの $3x+20$ は.

80S：は，だから，１人に３枚ずつ配る数と 20 は余る数.

81I：それは，これ（$3x+20$）全体で表しているのではなくて，これ（$3x$）とこれ（+20）という感じ.

82S：うん.

＜中略＞

117I：いいよ，書いてみて，そこに.

118S：$4x+10=62$.（式を書き問題を解く）52 になるのか．$x=13$ か.

119I：この 13 って何ですか.

120S：え～と，生徒１人の･･･．あっ，生徒の人数か.

121I：このときは生徒の人数を求めているんだ．x は何にしているんですか.

122S：ああ，これ配った数か.

Ⓐ 折り紙が全部で 62 枚あります．生徒一人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．
生徒の人数を求めなさい．

人数

$4x+10=62$

$4x=62-10$

$4x=52$

$x=13$

図 20　M.K の書いた式 1

123I：ん，x は何にしたの．
124S：だから，配った量か．
125I：えっ，配った量は全部で 62 枚ではないの．
126S：あっ，そうか．これは生徒の人数だ．
127I：x は何にしたの．ちょっと書いてみて．
128S：(式の上に「人数」と書く．)
129I：そうか．そうすると，これ（x＝13）は．
130S：え～と，何だっけ．生徒の人数．
131I：生徒の人数が．
132S：13 人．
133I：いい．
134S：うん．
135I：いいよね．こっち（もとの問題）は配った枚数なんだね．
136S：ああ，じゃあこれも人数か．そうなると･･･．うん．
137I：じゃあ，今度，この問題（補助問題Ⓑ）．折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．生徒の人数と折り紙の枚数を求めなさい．
138S：(補助問題Ⓑに取り組む)

Ⓑ 折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．
また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．
生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．

$6x+18=8x$

$6x-8x=-18$

$-2x=-18$

$x=9$

A9人に配って折り紙は72枚

図 21　M.K の書いた式 2

139I：これ（x＝９）は何．
140S：人数．あっ，うん，人数．
141I：じゃあ折り紙の枚数は．
142S：９枚ずつだから，72 枚．
143I：ああ，じゃあ答え書いて２つ．
144S：人数９人だから，９人に配る．

145I：うん．
146S：（答えの部分を書く）
147I：なるほど，さっき，これは 13 人，人ね．いいですか．
148S：うん．
149I：じゃあ，こっち（最初の問題）に戻ろうか．さあさあこれに戻りますよ．これどうですか．
150S：（何度もうなずく）ここ（x を指して）が人数で．
151I：うん，ちょっと書いてみて．x は何にしたか．
152S：（図 22 のように書く）

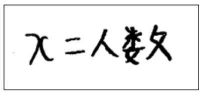


図 22　M.K の記述

153I：なるほど，説明して．この式（最初に K 君がつくった式を指して）の説明をして．
154S：だから，え～と，１人に，あ～，何人かに３枚ずつ配って，であと 20 枚余るから＋20 にして，ここは，何人かに５枚ずつ配って，そうすると２枚たりないから－２にして，計算していって 11 になるから，人数だから人でいいのか．
155I：ああ，なるほど．そうすると，さっきの問題と同じように，この問題の場合も人数と折り紙の枚数を求めなさいだけど，どう．
156S：４にしたら，どうなるかな．あっ，ちがう．
157I：これは，11 人でいいんだよね．
158S：人．
159I：折り紙の総数はどうなるのですか．
160S：えー，11×人数だから，これ（$3x+20$）だと余って，これ（$5x-2$）だとたりないから･･･
161I：もう１回聞こうか．$3x+20$ で何を表しているのですか．
162S：何人かに配る枚数と余った数．
163I：それは全部で何を表しているのですか．
164S：折り紙の枚数．

3.4.5.6　YT(A2)の理解

この被験者は，文字 x が表す数量を意識せず，問題文にそって立式していると考えられる．そのため式を振り返って x の意味を解釈するときに，問題文にある「生徒１人に」が意識されている様子が見られる．

3.4.5.6.1　最初の方程式の立式の場面での文字 x の表す数量について

「x は何を表しているんでしたっけ．」(17I)と尋ねると「１人に，あ～違う違う，折り紙･･･．あっ，ちょっと･･･．」（18S）と人数か枚数かを明確に答えられなかった．そこで，$3x$ について「生徒１人に３枚なので」と答えていたことから，「３は $3x$ の３だよね．」(19I)と確認し，「x は何を表しているの．」(21I)と文

字式３x の意味と同時に，その式における文字 x について再度尋ねる．すると「何人かの生徒に配る枚数を･･･ん〜，折り紙を配る生徒の数.」(22S)と迷いながら答えている．この時点で x の数量は，まだ明確に捉えられていないが生徒に関する数量であることはつかんでいると考えられる．３x については「生徒１人に３枚なので，３x になる」と答えているので，生徒１人に３枚配るという問題文に書いてあることにそって立式している様子が見られた．

3.4.5.6.2　フレーズ型の式を解釈する場面での３x の数量について

その後，３x をもう一度確認すると，「生徒１人に，生徒の人数，生徒の人数を x として，その人に３枚ずつ配るということだから，３x.」(26S) と発言する．このとき x について，問題文にある「生徒１人」を「生徒の人数」に言い換えているが，この２つで文字の解釈を迷っていると考えられる．それは，３x を「配るということ」と操作として捉えているからであると考えられる．さらに「それは何を表しているのかな．この場面で言うと．え〜と，単位は.」(27I)と尋ねると,「生徒１人に折り紙を３枚ずつ配るということを３x.」(28S)と答えたように，文字を生徒１人の言い換えのように用いている発言をする．３x は「生徒１人に折り紙を３枚ずつ配るということ」とこの問題場面の状況の説明を表していると解釈していると考えられる．以下に，そのプロトコルを示す．

11I：では，３x から聞こうか.

12S：はい.

13I：これ，どういう意味で書いたのですか.

14S：え〜，折り紙を１人に３枚ずつ配るということだから，３×x にして，３x になった.

15I：３×x ね．じゃあ，３×x と書いて．どこかその辺にね.

16S：(問題２に３×x と書く)

17I：はい，で，x は何を表しているんでしたっけ.

18S：１人に，あ〜違う違う，折り紙･･･．あっ，ちょっと･･･.

19I：うん,「生徒１人に３枚なので」ということで，３は３x の３だよね.

20S：うん.

21I：x は何を表しているの.

22S：何人かの生徒に配る枚数を･･･ん〜，折り紙を配る生徒の数.

23I：うん，x は，折り紙を配る生徒の数.

24S：折り紙を配る生徒の数を x としました.

25I：はい，３×x だよね．これは，３枚なのでというのは，どんな数を表しているの．何を表しているの.

26S：生徒１人に，生徒の人数，生徒の人数を x として，その人に３枚ずつ配るということだから，３x.

27I：それは何を表しているのかな．この場面で言うと．え〜と，単位は.

28S：生徒１人に折り紙を３枚ずつ配るということを３x.
29I：それを表している.
30S：はい.

3.4.5.6.3　３x＋20 に数量について

３x＋20 が何を表しているかという質問に対し，「生徒１人に３枚ずつ配り，20 枚余るという式」と記述する．これについて，生徒に３枚ずつ折り紙を配って，３枚ずつ配っちゃうと残り 20 枚余るということを式でつくりたかったと発言している．また，３x＋20 の単位については，（３x 人＋20 枚)を選び,「生徒 x 人に３枚折り紙をわたすということだから，３x 人，残りの折り紙の枚数が 20 枚だから」(42S)と理由を述べている．「５x－２も同じ感じ」であることに同意している(43I,44S). ここでは x 人と x は生徒の人数であることを捉えている発言をしているが，３x の解釈が x 人に３枚わたすというように状況を表しており，１つの数量を表しているとは解釈していない.

35I：はい．じゃあこっちいこうか．３x+20.「生徒１人に３枚ずつ配り，20 枚余るという式」これは，どういう意味ですか.
36S：え～，生徒に３枚ずつ折り紙を配って，３枚ずつ配っちゃうと残り 20 枚余るということを式としてつくりたかったから，生徒の人数３x，え～.
37I：なになに.
38S：え～
39I：じゃあ，こんなふうに，３x＋20 がこの場面においてどれが相応しい単位かを選んでくださいということで，これが人，これが枚，３x は人で 20 が枚，３x は枚で 20 が人，どれですか，あなたの３x＋20 の表し方は，どれに近いのですか.
40S：上から３番目．(３x 人＋20 枚)
41I：ああ，そうですか．なんでそう思うのですか.
42S：生徒 x 人に３枚折り紙をわたすということだから，３x 人として，で，残りの折り紙の枚数が 20 枚だから.
43I：なるほど．で，こっちも同じ．５x－２も同じ感じ.
44S：はい.

3.4.5.6.4　センテンス型の式を解釈する場面－補助問題の立式について

この後，補助問題Ⓐ「折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい.」を解く．この問題において, 方程式４x＋10＝62 を自分で立式することができなかったので, 式を提示し, 確認する．さらに，補助問題Ⓒ「折り紙が全部で 42 枚あります．生徒１人に３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れました．生徒の人数を求めなさい.」に取

り組ませると，自ら 42＝３x と立式する．

この２つの方程式について，「さっき，これ(３x 人＋20 枚)に○をしてくれたよね．３x は人（にん）なんだよね．でも，42 枚とイコール．それで，こっちは，４x＋10 だから，４x が人（にん）で 10 が枚だけど，62 とイコール」(53I)，「どうかな」(55I)と問いかける．その後何回かやりとりをして，この被験者は，「生徒１人に４枚ずつ配ったら 10 枚余りましたというのと，折り紙が全部で 62 枚ありますというのが等しいから，このイコールで結ばれて，４x＋10＝62 という式になる．」(70S)と答えている．「ということは，４x＋10 は何を表しているの．」と尋ねると，「折り紙が全部で 62 枚あって，そのうちの生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余ってしまったというのを表している．」(72S)と状況を答えている．「なるほど，同じように４x は人で 10 は枚．」(73I)と確認すると，「両方とも枚数．」(74S)と答える．ここで４x と 10 がどちらも枚数を表すと述べる．しかし，「１人に４枚ずつ配るということは，これで，４x で，（４x）枚みたいな．」(76S)と，生徒が複数いることは理解しながらも，やはり「１人に４枚ずつ配ること」と述べており，４x を１人の生徒に折り紙を４枚配ることをイメージしている様子が見られる．

45I：じゃあ，この問題と似ているのだけど，この問題をやってもらえるかな．（補助問題Ⓐ）「折り紙が全部で 62 枚あります. 生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい．」）式，書けますか．

46S：（式を 62（４x＋10）と書く．）ああ，これじゃあおかしいや．

47I：全部で 62 枚あるんだよ. 生徒１人に４枚ずつ配ったら 10 枚余ったという，これはどういう式になりますかということだよね．もう１回考えてみる．

48S：ちょっとわからないですね．

49I：うん，これ，４x＋10＝62 じゃあないですか．ちょっとそこに書いてください．

50S：（４x＋10＝62 と書く）

51I：じゃあ，こっちの問題．（補助問題Ⓒ）「折り紙が全部で 42 枚あります．生徒１人に３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れました．生徒の人数を求めなさい．」これはどうですか．

52S：42＝３x

53I：うん，だよね．そうすると，さっき，これに○をしてくれたよね．３x は人なんだよね．でも，42 枚とイコール．それで，こっちは，４x＋10 だから，４x が人で 10 が枚だけど，62 とイコール．

54S：ああ．・・・．

3.4.5.6.5　はじめの問題に戻って

「３x はなんで人と考えたの．」(83I)と尋ねると，「最初は，あの，１人に３枚

ずつ配るから単位は人になるのかなと思って.」(84S)とここでも「１人」と述べている．文字 x を生徒の人数である言いながら，実際には１人の生徒であるという解釈をしている様子が見られる．

上の発言について,「３x とこの枚数. 枚数と人の違いというか･･･.」(112S)と，（３x＋20）枚は確認できたが，インタビューの終盤でも３x が，枚数なのか人数なのかその違いがまだ納得できていないと述べている．そこで，３x の x を 10 人と考えて３×10 ではどうかと，具体的な数で確認すると，これは 30 枚であるとわかっている．このとき，「x に代入してみて，そういう考え方なんだってわかった.」(124S)と言うが，３x について「x って何だろう.」と尋ねると，「１人に３枚ずつ配っていく全体の枚数みたいなのが３x.」(128S)と答えるが，納得しているようには見えない. 文字単独であれば, 生徒の人数であると答えられたのであるが，文字式３x における文字 x を解釈するときに，この問題場面にあるもう１つの未知数である枚数と取り違えたり，１人の生徒を表すといった物として捉えたりする文字の理解の様相が明らかになった. これは, 数の式では理解できる数量が，文字式の表現になるとその数量の把握が困難になるというこの被験者の理解を顕在化している.

63I：これ，決着つけたいね．もう１回見ようか.（補助問題）©は全部で 42 枚あって，３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れましただから，42＝３x.

64S：うん.

65I：つまり，折り紙 42 枚と３x が等しいよという式だよね．こっちは，まず全部で 62 枚あります．生徒１人に 4 枚ずつ配ったら 10 枚余りました．この場面設定はこれ（元の問題）と一緒だよね．１人３枚ずつ配ったら 20 枚余りますが３x＋20 だから，４x＋10 これは T 君できた.

66S：うん.

67I: これを 62 とイコールで結ぶということを言ってこういうふうに式がなったのだけれど．これは納得できますか．まず，こっち（42＝３x）は納得できますか.

68S：こっち側は納得できる.

69I：うん，自分でこの式を書いたんだもんね．こっちはどうですか.（４x＋10＝62）

70S：こっちは･･･．生徒１人に４枚ずつ配ったら 10 枚余りましたというのと，折り紙が全部で 62 枚ありますというのが等しいから，このイコールで結ばれて，４x＋10＝62 という式になる.

71I：なるほど，ということは，４x＋10 は何を表しているの.

72S：生徒，え～･･･．折り紙が全部で 62 枚あって，そのうちの生徒１人に 4 枚ずつ配ったら，10 枚余ってしまったというのを表している.

73I：なるほど，同じように４x は人で 10 は枚.

74S：両方とも枚数.
75I：ああ，なるほど．なぜそう思ったのですか.
76S：１人に４枚ずつ配るということは，これで，４xで，（４x）枚みたいな.
77I：ということは，見直してみるとどれかな.（単位の選択肢を指して）
78S：これ（(３x+20）枚を指して）かな.
79I：なるほど．じゃあそれに○をして．そうか．じゃあ，（もとの問題に）戻ろうか．３xのxって，どんなふうに見ているのかな．こういうふう（３x人+20枚）に見ているときとこういうふう（(３x+20）枚）に見ているときとで違いがありますか. 式の見方が違っていましたか. 振り返るとどういう感じですか.
80S：･･･．う～んと.
81I：難しい.
82S：うん.
83I：３xはなんで人と考えたの.
84S：最初は，あの，１人に３枚ずつ配るから単位は人になるのかなと思って.
85I：それは，１人に.
86S：１人に.
87I：３枚ずつ配るから？そのときのxは１人なの.
88S：xはこの人の.
89I：その人を表している.
90S：うん.
91I：なるほど．それも１回，自分の言葉で言ってほしい．xは？
92S：xは，生徒１人に．生徒，ああ何て言ったらよいか．生徒１人に３枚ずつ配ったこと.
93I：それがなぜ人になるのか．xをどう見ているのかを知りたいんだけど.
94S：･･･.
95I：単純にxが人数を表しているからじゃあないんだよね．その感じは.
96S：う～ん.
97I：１人にというというところがどういうふうに考えているのか．１人にというところがxなの．そうじゃない.
98S：枚数．えっ，枚数がxなの.
99I：人数はxとしてって書いてあるから，xは人数です.
100S：･･･.
101I：３xの説明にxが入っていないので，xをどういうふうに解釈しているのかなということが知りたいんだよね.
102S：生徒１人というのをxとおいて，３枚なので，３×xとしている.
103I：生徒１人がxなんだ．そこには生徒がイメージしている，xという.
104S：そうです.
105I：わかりました．それが，こっち（(３x+20）枚）になったってことは，x人

に３枚ずつということで３xが枚になったということはいいですか．それは．
106S：それは，あの，･･･．
107I：ん，納得？
108S：･･･．
109I：まだ納得できていない．
110S：う～ん．
111I：まだ釈然としない．どういうところが釈然としないのですか．
112S：３xとこの枚数．枚数と人の違いというか･･･．

---

3. 5　考察

3. 5. 1　単項式，多項式を分離して捉える見方

本調査の目的は，過不足の問題において方程式を立式できている生徒を対象に，その立式過程に見られる生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を精緻化することであった．分析の視点を，フレーズ型の式３x，５x，３x＋20，５x－２の意味をどのように捉えているのかと，それらの文字式における文字 x（場合によってはy）の意味をどのように捉えているのかに定めた．

まず，３x＋20 の単位の解釈に特徴のある 3. 4. 5. 4 の２名の K.O，Y.M から，次の２つの文字式に関する理解の実態が明らかとなった．

3. 5. 1. 1　フレーズ型の式を分離して捉える見方

被験者自身が立式した３x＋20 の表す数量を解釈する発話で，「全体が枚だとすると，xが『ひと』の人数なので，その『ひと』を枚で表してよいのかわからない．それぞれに単位をつけると，３xを『にん』にするとxは『ひと』の数だけど，３枚ずつその人達に配っているわけだから，その折り紙の枚数を『にん』と表すのはおかしい．」（K.O，94S の発話の要約）と述べている．このようにフレーズ型の式での表現に対する解釈の場面で，その数量の把握に迷っている様子が見られた．すなわち，３x＋20 という２つの項をもつフレーズ型の式全体で折り紙の総数を表していると解釈することができず，単位が人である３xと単位が枚である 20 の和であると，分離して別々の数量として捉えているという実態が現れている．上の発話からわかるようにとりわけ３xの表す数量の把握に困難を示している様子が見られる．さらに，その３xという１つの項に対しても３とxに分解して別々に解釈することがわかった．

そして，このときの文字の理解に着目すると，被験者の中で，文字xが未知の人数，つまり未知数を表すことと，３xを何人かいる中の１人の生徒が３枚の折り紙を持っているという状況を表すことという２つの解釈の間で揺れ動いている理解の様相が見て取れた．３xが，生徒が３枚の折り紙を持っているという状況を表していると捉えることは，文字を物（この場合は，生徒）として捉えている理解であると考えられる．

第２章第２節 1. 2. 3 で述べたように，文字の理解の先行研究における物としての文字は，(1)物の名前を簡略化した文字，(2) １つの物を表している文字，(3)物の集合を表している文字，(4)ラベルとしての文字，(5)一般的な参照としての文字，(6)インデックス（指標）としての文字であった．そして，本章第２節４において，過不足の問題で方程式を立式できていない被験者に，物としての文字の(1)～(6)以外の３つのタイプの理解が顕在化していることを報告した．すなわち，①問題文の言葉を置き換えた文字，②数値を置き換えた文字，③物の状態を表した文字であった．

さらに，本章第３節において，方程式の立式ができている被験者に顕在化した，未知数としてと，物としての，双方の文字の意味の間で被験者の文字の理解が揺れているという実態は，これらの物としての文字の理解とは異なっている．

3. 5. 1. 2　センテンス型の式の両辺それぞれに含まれている項を分離して捉える見方

本調査では，過不足の問題における方程式の立式過程で，正しく立式できている被験者に文字式の見方を尋ねている．ここで顕在化した被験者の理解は，求める解は人数を表すのであるから，立式した方程式に人数を表す式が含まれていなければおかしいと考えていることである．このような生徒の存在を明らかにしたことは本調査の成果である．

方程式は，数量の間の関係に着目して，両辺が等しくなるように立式する．その際，両辺の単位は当然一致している．過不足の問題を１次方程式で立式する場合，両辺がともに文字と定数の項を含む式となる．この方程式を「人数＋枚数＝人数＋枚数」で等号が成り立っていると捉えている生徒が存在することが明らかとなった．さらに，一方の辺が単項式の場合もこの見方をしていることが明らかとなった．方程式の立式過程において，辺々に含まれている項を分離して捉える見方という新たな理解が顕在化したものと考える．

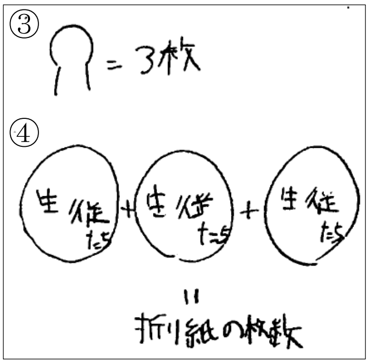
3. 5. 2　文字 x を複数あるうちの１つとして捉える実態

3. 5. 1. 1 で述べたフレーズ型の式の中で，単項式の和で表された文字式を項ごとに分離する理解，例えば $3x+20$ について，$3x$ と $+20$ に分離して捉える実態は，第３章において $a+3b+5c$ の解釈でも議論した「プロセスの段階」として，先行研究から明らかとなっている．

しかし，数字と文字の積の形で表された文字式を数字と文字に分離する理解，例えば $3x$ について，３と x に分離して捉える実態はこれまで報告されていない．インタビューの被験者における文字式 $3x$ についての理解を詳しく探ることとする．

3.5.2.1　単項式$3x$の理解

$3x$ を立式するときにどのようにイメージしていたかを尋ねたときの絵にその理解の特徴が現れている．Y.T(B1)の絵（再掲図２）では，$3x$はxが３つと捉えている．このxを（生徒たち）と書いていることから，何人かわからないこの生徒の集合を x としていることがわかる．そして，「生徒の人数×３」（前掲図１）と記述していることからもxが３つあると捉えている様子がわかる．

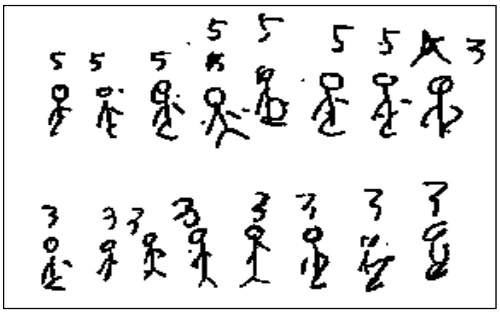


再掲図２　Y.T(B1)のかいた絵

H.Y も会話の中で「何かかけたら出るんじゃあないかな」と述べていることから，xが生徒の人数を表しているのでそれに３をかけるので$3x$はxの表している数量と同じ生徒の人数である，つまり，$3x$は生徒の人数xの３倍と見ている様相が明らかとなった．$3x$を「生徒人数」と述べていることがその証左である．

さらに，K.K は，xは１人に配った数として「３×生徒の人数」と述べ，$3x$の単位は「人（にん）」と述べる．この被験者もxの３倍と見ている．

このように本インタビューの被験者３名（Y.T(B1)，H.Y，K.K）は，$3x$をxの３個分（３倍）と見ている．このことについて，本章２節の質問紙調査の誤答で取り上げた被験者(S.S)の記述を見ても，生徒１人が３枚ずつ持って何人かいることはイメージできているが，これが x 人いることは表しておらず，８人ずつに固定して生徒をかき，この場面の数量を理解しようとしている（再掲第２節図 24）様子が見られている．しかし，この問題では，図 22 の H.N(B2)のかいた絵のように，x 人の生徒がそれぞれ３枚ずつ持っているので，３のx個分（x倍）と見る必要がある．このように見ていることは，図に「･･･」とかき込まれていることがその証左である．この過不足の問題は，第２章第３節で述べたように，Küchemann の問題における９(ⅳ)型，つまり，定数の変数倍型として立式する必要がある．しかし，上述の３名の被験者は，この問題を変数の定数倍型と自ら変更して立式している．本研究では，この実態を明らかにすることができた．何人いるかわからない生徒の人数を x 人と捉えて立式することに生徒の理解の困難性があることを特定した．



再掲第２節図 24　S.S の記述

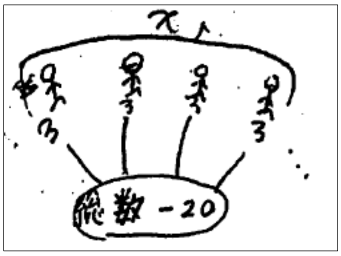
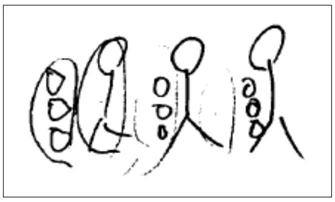
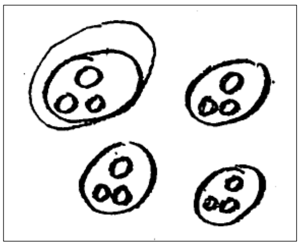


図 22　H.N(B2)のかいた絵

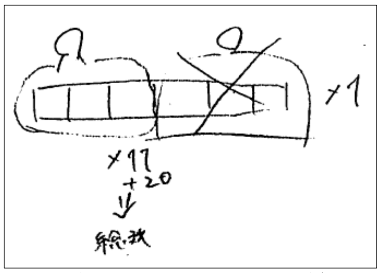
また，3.4.5 に挙げた被験者の，文字の理解に見られる共通点は，インタビューの発話で，x が生徒の人数を表しその生徒は複数いると発言しているが，方程式の左辺である $3x+20$ における $3x$ を立式するときには，その複数いる生徒の中の１人の生徒を思い浮かべて文字 x を使っているところである．それを裏付けるのが，次のような被験者の絵である．いずれも複数の生徒をかいてその生徒が３枚ずつ折り紙を持っている絵をかいている（再掲図 13，14，17）．



再掲図 13　T.S の絵



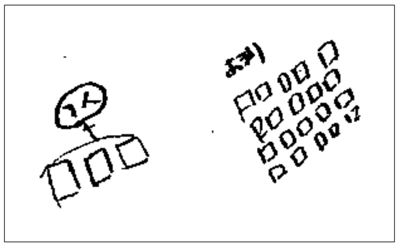
再掲図 14　M.Y の絵



再掲図 17　K.K の絵

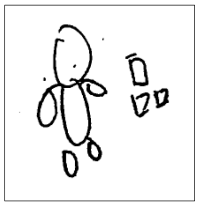
この絵をかいた３名は，$3x$ を解釈する際，複数かいた絵の１つを〇で囲んで，それが $3x$ であると述べている．これらの被験者は，このことを「１人の生徒が x」や「この生徒たちが x」などと発言している．これらの発言をした３名について，特筆すべき点は，絵も共通していることである．問題場面として，生徒が何人もいてその生徒に３枚ずつ折り紙を配るということは把握しているが，それを文字を用いて立式するとき，３枚の x 個分の把握ができず．１人の生徒が３枚の折り紙を持っていることをイメージしていることが明らかとなった．

それは，右の再掲図 15 をかいた M.C の文字 x の理解に顕著に現れている．この絵には「１人」とある．これは生徒１人を表すと見られ，この絵はその生徒に配られた折り紙３枚を持っている様子を表している．さらに，余りを 20 枚かいている．これが $3x+20$ を表していると捉えていることが見て取れる．



再掲図 15　M.C の絵

また，右の M.K の絵（再掲図 19）からも $3x$ について１人の生徒が３枚持っていることをイメージしている様子が見られる．これは，問題文にある「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります.」という問題場面の状況を文字式で表している様子が顕在化している．そして，この絵にかいた生徒が何人もいるとも述べており，生徒が複数人いることは理解している．



再掲図19　M.Kの絵

この理解は，被験者が，問題文にそって立式しているところに端を発していると考えられるので「プロセスの段階」にあると判断できるが，$3x$ について，上述の，単に x が３つあることや，x の３倍であることと捉える見方とは異なり，

場面の状況を表す式として認識されている点で，これまでの報告された文字式の理解とは異なった様相が顕在化している．定数の変数倍型で立式する際に，生徒が立式しやすいように文字式の見方を変えている実態が浮かびあがっているものと考える．

3.5.2.2　単項式３xにおける文字xの理解

次に，３xにおける文字xについての理解を見ることとする．文字xは何を表しているかという質問に対して，生徒の人数を表しているのか，折り紙の枚数を表しているのかでインタビューの最中に揺れ動く様子が見られた．3.4.5 の K.K, M.K，Y.T(A2)の３名である．特に K.K と M.K の発言の揺れをそれぞれ表７，８で示した．これらの発言を見てみると，最初,「１人に配る」,「何枚ずつか配る」という言葉を使ってxを説明しようとしている. この３名に共通しているのは，本問題を「折り紙を配る」という操作に着目して方程式を立式しようとしていることである．xを言葉の置き換えのように用いているため，数量の関係には意識が向いておらず，インタビューの後半でも，文字xが何を表しているのか明確に把握できていない様子が見られた．これらの被験者は，文字xを扱うことができるが，その数量をしっかり把握しないまま問題文にそって言葉の置き換えで立式している様子が見られる．

文字式の理解でも考察した M.C は，図 15 をかいた後，立式したときを振り返って，文字xを１人の生徒と考えていたと述べている．これは，文字xが１人の生徒を表す，すなわち，物としての文字の理解に当たると考えられる．その一方で，この被験者は,「これを人数分配る」とも述べており，１人の生徒，つまり物（生徒そのもの）として単純にxを扱っているだけではなく，生徒が何人かいることは認識できていると判断できる．立式の際には，１人の生徒が３枚の折り紙を持っているという状況から立式していると考えられる．

T.S もインタビューの中で，絵に示したxについて質問すると，xが大勢いる生徒の人数であると発言していることから，立てた式を解釈する場面では，生徒が複数人いて，その人数がわからないということは認識していると考えられる．しかし，３xにおける文字xを解釈するときに，未知数として文字を捉えているとは言い難い様子がみられた．３xを解釈するとき，これを１つの数量と見ていないからである．なぜなら，未知数として捉えることは，わからない数量という不特定性の理解と同時に，ある特定性の数が存在するものと認識できることであり，３xという表現となっても，その数量を把握できるからである．この不特定性と特定性の両方の理解ができている被験者には,「x については，１かもしれないし, 100 人かもしれないので, そこがわからないので, x とおく.」(Y.N(B2)) や「決まった人数それを x だと考えるけど」（M.O(A2)）といった発言が見られた．このような発言は 3.4.5 で取り上げた６名には聞かれない．つまり，文字の意味をはっきり捉えないまま，xについて，１人の生徒とも，生徒の人数とも発言しており，方程式の立式の際に，数量の関係にまでは目が向いていないことが

わかる．

また，これらの被験者は，同じ文字 x が１人の生徒を表したり，生徒の人数を表したりとその意味が変わることに矛盾を感じていない．

以上のことから，問題文における数量や数量の関係を把握せずに形式的に立式しているため，文字が生徒の人数を表しているのか，折り紙の枚数を表しているのか把握できない様子が見られている．そのため，立てた式を解釈するとき，３の x 個分，あるいは，x 倍をイメージできず，その代わりに１人の生徒を x とイメージして，その生徒が３枚の折り紙を持っていることから，$3x$ は生徒の人数を表すといった解釈をしている理解の様相が明らかとなった．

４．結論：単項式とその式における文字の理解の様相

本研究で取り上げた過不足の問題を解決するために方程式を立式する過程において，単項式の和の形で表された文字式を事象に照らして解釈する際に，文字の項と定数の項が別々の数量を表すといった，分離した見方が顕在化した．例えば，$3x+20$ を $3x$ が生徒の人数を表し，$+20$ が折り紙の枚数を表すといった見方である．さらに，$3x$ という単項式についても分離した見方をしていることが明らかとなった．すなわち，$3x$ を，生徒 x 人と折り紙の枚数３枚と分離して見ているのである．

このとき，文字式における文字 x を１人の生徒を表したり，複数いる生徒の人数を表したりすると，どちらの意味でも解釈している様子が見られた．物として捉える文字の理解と未知数として捉える文字の理解が混在している様相である．また，文字 x の表す数量が把握できず，生徒の人数を表すのか，折り紙の枚数を表すのかでも解釈が揺れている理解の様相も明らかとなった．文字の意味を考えずにとにかく問題文にそって文字を使って立式しようとする意識が生徒に働いている様子が見られた．

前者の $3x+20$ を $3x$ と 20 に分離し，ひとまとまりと見られないことについては，先行研究における「プロセス」の見方で説明可能であるが，後者の $3x$ という単項式を３と x に分離し，ひとまとまりと見られないということは，先行研究では明らかにされていない様相である．そして，その背後には，$3x$ を，x が３個，すなわち，$x+x+x$ と見ており，３の x 個，すなわち，$3+3+3+\cdots+3$ と見ることや，３の x 倍と見ることに関する困難性があり，それが，この問題における $3x$ を，生徒 x 人と折り紙の枚数３枚と分離して見ている理解と，それに伴って $3x$ を生徒の人数であると捉える理解の根源であることを特定した．

このように３が x 個あると解釈し立式する場合に，何個あるかわからないこと，つまり，不特定であることを認識しながら，x に特定な数が存在するとしてそれを用いて表したり，その意味を解釈したりすることが困難であるという様相が見られた．

小学校では，乗法について，低学年のうちから１つ分×いくつ分という意味で

立式を行う学習を積み重ねた上で，例えば，３×８＝８×３という交換法則が成り立つことを学習する．そして，中学校で文字を学習すると，３×x と x×３について，文字と数の積は，記号×は省き数を文字の前に書くという文字式の積の表し方の規約のもと，乗法の意味から切り離され，同一視されすべて$3x$ と表すこととなる．このことが，文字式で表現された$3x$ を具体的な事象に戻そうとしたとき，例えば，本調査の問題における立式で，（１人の生徒に配る折り紙の枚数３）×（生徒の数 x 人分）と捉えるところを，乗法の意味と切り離されているため，事象に戻して解釈ができなくなっている要因であると考える．現に被験者の中には，３×x は，x が生徒の人数を表しているので，３×x も x と同じ生徒の人数であると発言しており，小学校で学習した乗法の意味がこの場面で想起されていない様子が見られている．このような実態を捉える研究は今までに報告されておらず，教える側の教師もこのことを意識していないと考えられる．

次に，文字式$3x$における文字 x の解釈が揺れているという実態は，どのような文字の理解によるものかを考察する．

上述の$3x$を，３が x 個ある，すなわち，３＋３＋３＋･･･＋３と見ることや，３の x 倍と見ることには，文字 x を，不特定のまま，特定の数の存在を意識しながら扱うこと，つまり，未知数として文字を扱うことが求められる．しかし，この理解に困難が伴うため，立式の際には，x が３個，すなわち，$x+x+x$ と解釈する生徒が現れる．このとき，x が生徒を表し，それが３人いるという解釈に変更しているのである．また，$3x$ は，１人の生徒が３枚の折り紙を持っていて，これが何人もいるので，生徒の人数を表していると解釈する生徒も現れる．これは，文字を生徒そのもの（物）として扱っていると判断できる．しかし，問題文から数量を把握できる生徒は，x 人に３枚の折り紙を配るので，$3x$ は折り紙の枚数を表しているはずであると認識はできる．ここに意味の解釈，つまり，x は１人の生徒なのか，生徒の人数なのかという解釈の揺れが生じるのである．しかし，本節で取り上げた被験者は，このことに矛盾を感じていないことも明らかとなった．

具体的には，文字 x を物，数量と捉えるといった間で揺れながら解釈している実態，また，文字 x におく数量を，生徒の人数と捉えたり，折り紙の枚数と捉えたりと，明確に捉えていない実態として表出された．これらの実態は，上述の通り，生徒が文字 x を，未知数として扱うことができていないということである．これらの生徒は，文字 x の表す数量を捉えることのないまま，すなわち，文字を未知数として理解しないまま，文字を用いて形式的に立式している．これが，単項式の数量を把握できない生徒の文字の理解の一端であると結論付ける．この理解の様相を「具象化途上の未知数としての文字」と名付ける．

具象化は，第２章第１節で述べたように，Sfard(1991) が，「プロセス」から「プロダクト」の見方へ移行する際の数学的な概念の発達について説明している言葉である．その移行の過程を内面化，凝縮化，具象化と述べている．Sfard は，

一度，抽象化された概念が具体となり，意味を理解し操作ができる．これを繰り返してさらに高度な抽象化の段階に進む．このように数学の概念が発達していくと述べている．本研究ではこれを文字式とその式における文字の理解という視点から「プロセスのプロダクト化の段階」と名付け，第３章における調査でその詳細について述べた．

文字の理解についても同様で，数よりも抽象度の高い文字を扱っていくので，文字の学習の最初の段階では，その実体を把握するのに時間を要する．数より抽象化している文字を具体として扱うとは，文字の意味（未知数，一般化された数，変数）を捉えることであり，この理解には，まず未知数について変数概念の二面性である，特定性と不特定性の理解が必要である．これらを理解した上で，文字式の意味がわかり方程式等の計算ができるようになる．これが具象化された未知数としての理解である．しかし，その過程で先行研究でも示されているように多くのミスコンセプションが生まれ，Küchemann が報告しているように本来とは異なった意味で文字を扱う子どもが現れる．文字式の学習の途中において，「具象化途上の未知数としての文字」の理解の生徒が存在し，本研究では，その理解の様相が顕在化したといえる．

このような文字の理解の様相には２つの理由がある．１つ目は，文字においている数量が捉えられなくても，生徒はある程度，文字を操作することができてしまうことが挙げられる．このことに関して，先行研究には，文章問題から立式する際に，算術的推論を子どもたちが好むこと，つまり，文字を用いることを避け，算術的に解決しようとすることの証拠を提供しているものが多い．例えば，第２章において，先行研究として考察しているように Stacey & MacGregor (1999)は，オーストラリアの子どもが文字を用いて問題を解く過程のすべての段階において，文字を使うことを避け算術的な問題解決の方法をとることを報告している．しかし，日本の多くの生徒は，下位の生徒でも算術の方法には戻らず，何とかして文字を使って立式しようとする姿が見られる．それは清水(2018)で明らかとなっており，第４章２節で述べたように質問紙調査において類型の番号９の生徒の中の半数は，正しく立式はできていないが文字を使おうとしている様子が見られる．無解答も合わせて文字を使おうとしていない生徒は全体の 20％に満たない．このことからも生徒が文字を使って立式しようとしている姿勢が現れている．文字を用いて計算ができるという背後で，文字の理解が発達途上の生徒が存在することが見過ごされていることを明らかにした．

２つ目には，文字の意味についての学習指導が明示的に行われていないことである．中学校第１学年で文字を学習するときは，数の集合は意識されてはいないものの，文字式の学習の最初では，具体的な事象における数量について，数の代わりとして文字が導入される．そして，方程式を学習するときに，未知数として文字を扱うことが主に要求される．さらに，比例・反比例，１次関数などの関数の学習では，変数として文字を扱うことが要求される．この学習で劇的に文字

の役割が変わる．ここにかなりの認知的なギャップがあることが先行研究(Küchemann，1981，第二次関係)でも明らかになっている．一般化された数として文字を扱うこと，例えば，文字に代入する数を規則的に変化させるなどしてその式の値を解釈することなどを通して，この未知数としての文字と変数としての文字の理解のギャップを埋めながら，文字の理解を深めていく．これらの学習を通して，文字の概念を発達させること，つまり，文字の概念を具象化させることをねらっているが，このことは暗黙裡に設定されており，明示的に指導はなされてない．そのため，各生徒の理解の様子は確認されないまま学習が進む．このことが２つ目の理由であると考える．

この２つの理由のため，表面的には正しく立式でき答えを導くことができる生徒の中に，学習を進めていく過程で，文字の概念がうまく発達できていない生徒が存在すると考える．この生徒たちが，次々に新しい文字式に関する学習を積み重ねていっても，具象化されずに欠落している文字の理解を補えないままでいると考える．このことが，物としての文字と未知数としての文字の理解の間で起こっていると考えられる．本問題の立式過程において，「方程式をつくって解きなさい」という指示を受けて，x を使ってどうにか式に表そうとしたことにより，浮かびあがったと考えられる．第３節の質問紙調査では，正しく立式できている生徒の中にも文字の表す数量を把握することなく，未知数として具象化できず意味を明確に捉えないまま，文字を使って立式しようとしている様子が顕在化している．実際，正しく立式できている生徒の約半数が，立式した文字式の意味を正確に捉えていないことを明らかにした．

これらのことから，式の見方が「プロセス段階」から「プロダクトの段階」への移行の段階にいる生徒が，立式した式における文字 x の表す数量を捉えようとした際に，その解釈が揺れ動くという実態となって現れ，これが「具象化途上の未知数として文字」の理解として顕在化した．

以上のことから，本研究で扱った問題場面において，文字 x を物と捉えたり，数量と捉えたりするといった，双方の文字の意味の間で揺れながら解釈している生徒の実態の背後には，「具象化途上の未知数としての文字」の理解の様相があると結論付ける．これは，Küchemann らの捉えている文字の意味の枠組みでは捉えきれないものである．

第４節　本章の総括

本章で実施した実態調査Ⅱは，過不足の問題の解決に向けての立式過程における文字，文字式の理解を探るものである．この実態調査Ⅱは，全国調査の結果を基に，立式できない生徒の理解に焦点を当てた調査１と立式できている生徒

の理解に焦点を当てた調査２に分けて実施した. まず, 立式できない生徒がどのようなところに困難性があるかを明らかにし，想定できていない誤答の背後にある文字, 文字式の理解の一端を顕在化した. 次に, 立式できている生徒の中に, 方程式の両辺の表している数量を正しく把握できていない生徒を特定し，それらの生徒の文字や文字式の理解の一端を顕在化した. この調査では, 過不足の問題について，調査問題を改めて作成し，対象生徒の学年を下げて，その文字，文字式の理解を探った.

第１節では，この実態調査Ⅱの意図について，調査１，調査２それぞれに対して調査問題を開発し，インタビュー調査の対象生徒を特定するための質問紙調査と，それによって選出された生徒を対象にしたインタビュー調査によって構成したことについて述べた.

第２節では，調査１の立式できない生徒の解答を分析した．その結果，質問紙調査において，どの類型にも属さない類型の番号９の生徒たちの解答の中には，問題を解く際に，文字をまったく使っていない解答と，文字を使って立式しようとしている解答がほぼ半数ずつあった．文字を使っている生徒は，a. 言葉の順に立式する，b．除法の式を立式する，c．文字 x，y の表す数量のみ記述する，という３つの様相が見られた．無解答であった生徒を含めて，インタビューの中では，方程式を立式しようとする過程の中で，特に，文字を物として捉える理解の様相が顕在化した.

それは，以下の３点であった.

⑴問題文の言葉を置き換えた文字
⑵数値を置き換えた文字
⑶物の状態を表した文字

このような文字の理解が，本問題の立式を困難にしていると考えられる．そして，これらの理解には，Küchemann らが示した物としての文字とは異なる様相が顕在化している．また，文字式の理解についてみると，例えば，$3x+20$ を,「３枚ずつ１人に配ると 20 枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり,「$3x$ は人数を表し 20 は枚数を表す」といったように別々の数量を表す式と捉えていたり,「生徒の人数 x を使った式は生徒の人数を表す」と捉えたりする様相が見られた.

このような観点で質問紙調査の解答状況をみると，方程式を立式できていない生徒だけでなく，方程式を正しく立式できている生徒の中にも同様な理解が現れていることが明らかとなった. 本調査では, 第１章で詳述した全国調査で見られた $3x+20$ を生徒の人数を表すとする誤答は，$3x$ の解釈から起こっていることを突き止めた.

第３節では, 第２節の調査で明らかになった生徒の文字式の解釈が, 正しく立式できている生徒にも現れていることを明らかにするために，新たに調査問題を開発し実態調査を実施した. 過不足の問題において, 正しく立式できている生

徒の約半数が，自分で立てた方程式に含まれている文字式$3x$，$5x$，$3x+20$，$5x-2$の意味を正しく解釈できていないという実態を明らかにした．インタビュー調査では，単項式$3x$と定数$+20$の和の形で表された$3x+20$について，$3x$が人数を表し，$+20$が枚数を表すといった１つ１つの項を別々の数量として捉え，単項式の和の形で表された文字式全体を１つの数量として捉えていない様相が明らかとなった．さらに，数字３と文字xの積の形で表された文字式$3x$について，x と３の表す数量を分離して捉える様相が明らかとなった．それは，１人の生徒が折り紙３枚を持っているという問題場面の状況を表していると捉え，数字と文字の積の形で表された式をもひとまとまりとして見ることができていない実態として顕在化した．

$3x+20$を$3x$と20に分離し，ひとまとまりと見られないことについては，先行研究におけるプロセスの見方で説明可能であるが，後者の$3x$という単項式を３とxに分離し，ひとまとまりと見られないということは，先行研究では明らかにされていない様相である．この背後には，$3x$を，xが３個，すなわち，$x+x+x$と見ており，３のx個，すなわち，$3+3+3+\cdots+3$と見ることや，３のx倍と見ることに関する困難性があり，それが，この問題における$3x$を，生徒x人と折り紙の枚数３枚と分離して見ている理解と，それに伴って$3x$を生徒の人数であると捉える理解の根源であることを特定した．

３のx個と見ることや，３のx倍と見るには，文字xを，不特定のまま，特定の数の存在を意識しながら扱うこと，すなわち，未知数として文字を扱うことが求められる．しかし，この理解に困難が伴うため，立式の際には，前者で解釈する生徒が存在する．さらには，xが生徒を表し，それが３人いるという解釈，あるいは，xが生徒１人を表し，その生徒が３枚の折り紙を持っているという解釈をする生徒が存在する．これは，文字を生徒そのもの（物）として扱っていると判断できる．このとき，$3x$は，xは生徒を表しているので生徒の人数であると解釈する．しかし，問題文から数量を把握できる生徒は，x人に３枚の折り紙を配るので，$3x$は折り紙の枚数を表しているはずであるとも認識できる．このことが，意味の解釈，つまり，xは１人の生徒なのか，生徒の人数なのかという解釈の揺れを生じさせるのである．しかし，本研究で取り上げた被験者は，このことに矛盾を感じていないことも明らかとなった．

具体的には，文字xを物，数量と捉えるといった間で揺れながら解釈している実態，また，文字xに置く数量を，生徒の人数と捉えたり，折り紙の枚数と捉えたりと，明確に捉えていない実態として表出された．この実態は，生徒が文字xを，未知数としてうまく扱うことができていないということである．これらの生徒は，文字xの表す数量を捉えることのないまま，文字を用いて形式的に立式している．これが，本研究で顕在化した単項式を分離して捉える生徒の文字の理解の一端であると結論付けた．この理解の様相を「具象化途上の未知数としての文字」と名付ける．

これは，Küchemann らの先行研究において示されている文字の理解の枠組みでは捉えきれないものであり，方程式を使って解きなさいという要求に応えようとするときに表出した生徒の文字の理解である．特に，３xといった数字と文字の積の形で表された式の解釈に困難があることが明らかとなり，３xを３とxに分離して見たり，本来折り紙の枚数を表しているものを生徒の人数を表すとその数量が捉えられなかったりする根源であると結論付けた．Küchemann は，（変数の定数倍）型の問題で物としての文字の理解が，（定数の変数倍）型の問題で数値化された文字の理解が現れていると述べている．また，「学生・教授問題」での６Ｓ＝Ｐのリバース・エラーは（定数の変数倍）型の問題での物としての文字の理解が顕在化していると見ることができる．本研究では，（定数の変数倍）型の立式の際に，自ら立式しやすいように（変数の定数倍）型として解釈している様相が現れ，文字を物としてだけでなく，数量として捉えているが未知数とは捉えることができていないという「具象化途上の未知数」として理解している実態を明らかにした．これらを総括すると，過不足の問題の立式過程に見られる文字式とその式に含まれる文字の理解の様相は次ページの表のようにまとまることができる．

表９　数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見ること

<table>
<tr><th>Sfard,
Gray&Tall</th><th colspan="3">著者（実態調査Ⅱより）</th><th>Küchemann</th><th>藤井</th></tr>
<tr><td>文字式の
二面性</td><td colspan="2">文字式の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の
二面性</td></tr>
<tr><td>プロセス</td><td colspan="2">・式を操作として捉える</td><td>①問題文の言葉を置き換えた文字
②数値を置き換えた文字
③物の状態．状況を表した文字
＜立式できない生徒にも立式できる生徒にも見られる＞</td><td>・物としての文字</td><td>・不特定性</td></tr>
<tr><td></td><td>プロセスのプロダクト化</td><td>・式を分離して捉える
$3x$＋20･･･人＋枚
$3x$･･･１人の生徒が３枚の折り紙を持っていること
・３は１人に配る枚数，x は生徒の人数と３と x のそれぞれは何を表しているか理解しているが，$3x$ がどのような数量を表しているのか迷う
・式を問題文で示された事柄と捉える
→３の x 個分（x 倍）と捉えるところを x の３個分（３倍）と捉える文字式の理解（乗法の意味と切り離されている）</td><td>（文字 x は複数の数量を表しているとは発言するが）
・物の状態を表した文字の解釈と未知数としての文字の解釈で揺れている
（文字においた数量について）
・文字の表している数量の解釈がはっきりしない
→「具象化途上の未知数としての文字」</td><td></td><td>・不特定性</td></tr>
<tr><td>プロダクト

プロセプト</td><td colspan="2">・複数の単項式の和の形で表された文字式，文字と数字の積の形で表された文字式をひとまとまり，１つの（数量）値として捉える
・等式の両辺は同一の単位の等しい数量として捉える</td><td>・文字には具体的にいくつかわからない数が入る
・文字は決まった値が入る
・文字の表す数量と文字式の表す数量を問題場面に即して解釈できる</td><td>・未知数としての文字
・変数としての文字</td><td>・不特定性
→特定性
・不特定性と特定性</td></tr>
</table>

第４章の引用・参考文献

(1)　Clement,J.(1982).Algebra Word Problem Solutions:Thought processes underlying a common mis-conception. *Journal for Research in Mathematics Education*.13.1.16-30.

(2)　Cobb,P and Steffe,L,P.(1983). The Constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 83-94.

(3)　Esty,W & Teppo,A.(1996).Algebraic thinking,　language,and word problem. *Communication in Mathematics,K-12 and Beyond*, Yearbook NCTM,45-53.

(4)　藤井斉亮.(1986).理解と認知的コンフリクトについての一考察.日本数学教育学会数学教育学論究.45･46.24-28.

(5)　藤井斉亮.(1989).認識的コンフリクトによる理解の分析と評価−方程式･不等式を具体的題材として−.日本数学教育学会数学教育学論究.71.臨時増刊.53.3-31.

(6)　藤井斉亮.(1998).学校数学における文字の理解について：「学生・教授問題」再考.山梨大学教育人間科学部研究報告,49,31-38.

(7)　藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査.日本数学教育学会数学教育学論究.74.臨時増刊.58.3-27.

(8)　加藤國雄.(1965).　数学の問題解決における思考(その11) −代数的思考について−.　山梨大学学芸学部研究報告.199-204.

(9)　Kieran,C.(1992).The Learning and Teaching of School Algebra.D. A.Grouws(Ed). *Handbook of Research on Mathematics　Teaching and Learning* .A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. 390-419.

(19)　小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究−文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて−.東京学芸大学博士論文.

(20)　Küchemann,D.(1978a).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7(4),23-26.

(21)　Küchemann,D.(1978b).Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7(5),12.

(22)　Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children’s Understanding of Mathematics*,11-16.102-119.John Murray.

(23)　MacGregor,M & Stacey,K.(1993).Cognitive models underlying students’ formuration of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(3),217-232.

(24)　MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students’ interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.

(24)　三輪辰郎(1991).式の指導内容の概観と問題点の考察.新･中学校数学指導実例講座,数・式,(pp.39-74).金子書房.

(25)　三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究.15.1-14.
(26)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(27)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(28)　Radford,L.(2003).Gestures,speech,and the sprouting of sings:A semiotic-cultural approach to students’ types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*,5(1),37-70.
(29)　Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* .22.1-36.
(30)　Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The case of algebra.*Educational Studies in Mathematics*. 26.191-228.
(31)　清水宏幸.(1997).中学校数学における文字式の理解に関する研究－文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあててー，日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集,247-252.
(32)　清水宏幸.(2017).中学校数学における文字式の理解に関する研究−過不足の問題の立式に焦点を当てて−.日本数学教育学会.数学教育学論究.99.臨時増刊.第50回秋期研究大会特集号.17-24.
(33)　清水宏幸.(2018).中学校数学における立式過程に見られる文字式の理解−過不足の問題の誤答分析−.　山梨大学教育学部紀要,28,93-106.
(34)　清水宏幸.(2019b).中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究−文字式を分離して捉える見方に焦点を当てて−.日本数学教育学会誌,101,7,2-12.
(35)　Stacey,K & MacGregor,M.(1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2),149-167.
(36)　Steffe,L,P.(1991). The Constructivist teaching experiment:Illustration and implications.von Glasersfeld,E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 177-194.
(37)　鈴木淳子(2005).調査的面接の技法【第２版】.ナカニシヤ出版.

第５章
本研究の結論

本章では，本研究の結論として，第１節で，本研究における文字式の理解の二面性と文字の理解の関係，つまり，式をひとまとまりと見ることについて，文字式の理解とその式における文字の理解との関係を明らかにする．
第２節では，本研究で明らかとなった生徒の理解の実態を踏まえて，学習指導への示唆について述べる．

第１節　本研究における文字式の二面性と文字の意味の理解の関係：式をひとまとまりと見ることと文字の意味の理解

文字式をひとまとまりと見るには，式を，計算の操作を表すものと同時に，式自体が１つの値，結果を表すものといった，二重の見方ができることが必要である．このことを踏まえ，本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することであった．

この目的を達成するために，本研究では，質問紙調査とインタビュー調査を併用して実施した．

調査は以下の２つの問題を用いた．

複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面では，「$a+3b+5c=25$ のとき，$a+3b+5c-10$ の値を求めなさい．」の問題を用いて，その解決過程を記述させる調査（実態調査Ⅰ）を行った．

この問題では，文字式 $a+3b+5c=25$ の左辺 $a+3b+5c$ に着目する．この式の文字 a，b，c は何を表しているのかは明示されてない．よって，$3b$ も $5c$ もわからない．しかし，これらの単項式の和の形で表された式 $a+3b+5c$ は 25 であると等しいことが明示されている．

一方，方程式を立式する場面では，「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．」の問題を用いて立式と解決を記述させる調査（実態調査Ⅱ）を行った．

この問題では，生徒の人数を x 人とおくと，$3x+20=5x-2$ と１次方程式で立式ができる．左辺 $3x+20$ の，３も x も 20 も何を表しているかは示されているのであるが，　$3x+20$ は，何を表すかは明示されていない．さらに，３と x の積の形で表された $3x$ についても何を表すかは明示されていない．

実態調査Ⅰ，Ⅱで用いる問題には，以上のような類似点，相違点があることを踏まえた上で，式をひとまとまりと見ることの理解の様相を顕在化するための調査問題の開発を行い，調査を実施した．

その結果，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面における，生徒の文字式とその式における文字の理解の様相の一端として，実態調査Ⅰ，Ⅱから「プロセスのプロダクト化」「具象化途上の未知数としての文字」の理解を明らかにした．本章では，１で，「プロセスのプロダクト化」について，２で，「具象化途上の未知数としての文字」について述べる．

１．プロセスのプロダクト化

第３章の実態調査Ⅰでは，前者の問題を用いて，複数の項の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについて，その理解の様相を顕在化し，その見方ができるようになる要件を明らかにすることを目的とした．実態調査Ⅰの対象は公立中学校１校の第３学年の生徒186名である．質問紙調査の解答から，具体的に等式を満たす a，b，c の値を見つけ，それをもとに式の値を導く生徒や，式を単項式にまとめてしまう生徒の実態が明らかとなった．いずれも複数の項の和の形で表された文字式を，ひとまとまりとして見ていない実態が現れた．

これらを含めた生徒の理解の様相を詳細に探るため，質問紙調査の対象生徒の中から選出した11名を対象に，インタビュー調査を実施した．そして，そのプロトコルを先行研究で述べられている文字式の理解の二面性であるプロセス・プロダクトと，文字の意味の６つの解釈，そして，文字の変数概念の二面性の視点で分析した．

その結果，連立方程式の代入法を用いるとき，代入すると項が多くなってしまって難しくなると考えている生徒が一定数存在し，文字式をひとまとまりと見るには，式を計算の過程として見るプロセスの見方から，計算の結果，対象として見るプロダクトの見方へ移行し，両方の見方であるプロセプトの見方で見られるようになることが必要であることが，その困難性とともに明らかとなった．

特に，インタビューの分析により，実態調査Ⅰで用いた問題におけるプロセスの見方とプロダクトの見方の具体を明らかにするとともに，プロセスの見方からプロセプトの見方への移行をインタビューの最中に確認し，その移行の途中である「プロセスのプロダクト化の段階」の生徒の理解の様相を明らかにした．また，文字式における文字について，はじめは文字に入る数に着目し，特定性が強く意識されているが，その文字に入る数がわからないため答えを求めることができない様子が見られた．しかし，インタビューの最中に，等式を成り立たせるように文字に数を代入して１つ１つの文字の値を求めてから答えを導く生徒が見られた．このとき文字に入る数値を求めることによって，文字の特定性が明確になり，特定の未知数として文字を理解していると分析した．この段階で止まっている生徒がいる一方で，等式を成り立たせるような文字の値の組は他にもあることに気付いた生徒は，いくつもの値の組を見つけることにより，答えを求めるためには，最終的に文字１つ１つの値は決めなくてもよいと捉えることができた．この段階にある生徒は，文字の特定性に加え，不特定性が明確になり，式をひとまとまりと見ることができていると分析した．

この問題において，式をひとまとまりと見るための要件として次の３つが明らかとなった．

① 文字 a，b，c それぞれに入る値を１つに決めなくても処理できることを理解すること．

② $a+3b+5c=25$の両辺 $a+3b+5c$ と25が同値であることを理解すること．
③ $a+3b+5c=25$と $a+3b+5c-10$の２つの式に，$a+3b+5c$ が共通していることを見いだすこと．

上に挙げた要件①～③は相互に関連している．例えば，$a+3b+5c=25$について，この等式を満たす a, b, c の値の組をいくつも見つけるという活動が，式 $a+3b+5c$ の値を意識させ，$a+3b+5c$ を構造化する，すなわち，$a+3b+5c$ を文字 a，b，c の個々の値に注目することなく，式全体を１つのまとまりとして見ることにつながる．このように見ることは，$a+3b+5c=25$の左辺の $a+3b+5c$ と右辺の25が等しいことの理解を促し，$a+3b+5c=25$と $a+3b+5c-10$の２つの式にある $a+3b+5c$ が共通していることを見いだすことができるようになると分析した．このとき，$a+3b+5c$ における文字 a，b，c は「特定の未知数」から「一般化された数」としての理解に移行しており，この移行によって，文字式をひとまとまりとして見ることができるようになることを示した．そして，この過程を「プロセスのプロダクト化」と結論付けた．

文字式における文字については，当てはまる具体的な数の存在を確認しながら，最終的には１つ１つの文字には着目せず，特定の値を決めなくても処理できるようになる．つまり，上述のように，文字はわからないものという理解から，特定の未知数としての文字，さらに，一般化された文字としての理解の進展の様子を本研究で捉えることができた．

このような様相が，この問題におけるプロセプトの見方であり，式をひとまとまりとして見ることであると結論付けた．

以上から，３章の実態調査Ⅰを次の表１のようにまとめることができた．

表１　複数の単項式の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ること

<table>
<tr><td>Sfard,
Gray, Tall</td><td colspan="3">著者（実態調査Ｉより）</td><td>Küchemann ら</td><td>藤井ら</td></tr>
<tr><td>文字式の
二面性</td><td colspan="2">文字式の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の
二面性</td></tr>
<tr><td>プロセス</td><td colspan="2">・項１つ１つが対象，加法の記号「＋」が操作を表す
・左辺の操作の結果が右辺と見る</td><td>・文字に入る数がわからないと答えは求められない→文字はわからないもの
・等式を成り立たせる文字に入る数の組を１組見つけ，その値を代入して式の値を求められる</td><td>・特定の未知数としての文字</td><td>・不特定性
・特定性</td></tr>
<tr><td></td><td>プロセスのプロダクト化</td><td>①等式の両辺が等しいと捉えること
②２つの式に共通している式をまとまりとして見ること
①②のどちらか一方が理解できている</td><td>・等式を成り立たせる文字の値の組がいくつもあることに気付く</td><td>・一般化された数としての文字</td><td>・特定性
→不特定性</td></tr>
<tr><td>プロセプト</td><td colspan="2">・複数の単項式の和の形で表された文字式全体を対象と見る
・式をひとまとまりと見る
①等式の両辺が等しいと捉えること
②２つの式に共通している式をまとまりとして見ること
①②が同時に理解できている</td><td>・文字に入る数を１つに決めなくても処理できることを理解する</td><td>・変数としての文字に近づく</td><td>・不特定性と特定性</td></tr>
</table>

２．具象化途上の未知数としての文字

第４章の実態調査Ⅱでは，数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについて，その理解の様相を顕在化した．この実態調査Ⅱの目的は，過不足の問題の立式過程に焦点を当て，生徒の文字式とその式における文字の理解の様相を顕在化することであった．

まず，立式ができていない生徒，公立中学校第３学年206名（２校）を対象に文字式とその式における文字の理解を探った．第３学年の生徒を対象とした理由は，これらの生徒にとって，これまでの文字式や関数の学習を経て，なおも本研究で用いる過不足の問題に立式できていないということは，文字式や文字について何らかの心理的な抵抗や困難性をもっていると考えられ，その生徒を特定し，文字式の理解を聞き取ることにより，理解の様相を顕在化することができ学習指導への示唆を得ることができると判断したからである．

そこで，調査問題を開発し質問紙調査とインタビュー調査を実施した（調査１）．方程式を立式できていない生徒を対象にしたインタビュー調査において，$3x+20$ と $5x-2$ の意味を尋ねると，２つの文字式が同じ数量を表しそれが等しい関係であるということが曖昧に捉えられていることが明らかとなり，この文字式に含まれている文字を物として捉えている生徒の実態が浮かびあがってきた．さらに，その物としての文字の理解にいくつかの相があることが明らかとなった．先行研究で明らかとなっている物としての文字は，①物の名前を簡略化した記号としての文字，②１つの物としての文字，③物の集合としての文字，④ラベルとしての文字，⑤一般的な参照としての文字，⑥インデックスとしての文字であり，文字 a，x がアルファベットを使っているため，日常言語との混同が見られる英語圏に多く現れている．これに対して，本調査では，物としての文字において次の３点を明らかにした．

(1)問題文の言葉を置き換えた文字

(2)数値を置き換えた文字

(3)物の状況や状態を表した文字

文字式についての理解として，例えば，$3x+20$を，「３枚ずつ１人に配ると20枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり，$3x$ は人数を表し20は枚数を表すといったように文字の項と定数の項を別々の数量を表す式と捉えていたりする様相が見られ，これが２つの文字式が同じ数量を表しそれが等しい関係であると捉えて立式できない原因であると結論付けた．

また，質問紙調査の解答状況を見ると，このような理解は，方程式を立式することができていない生徒だけでなく，方程式を正しく立式している生徒の中にも現れていることが明らかとなった．それらの生徒は，正しく立式できているにもかかわらず，文字式の表す数量を誤って捉えている．ここに本問題における文字式の理解の困難性が潜んでいるのではないかと考えた．

そこで，これらの点をふまえ，調査２では，過不足の問題において方程式の立

式ができた生徒を対象に，その立式過程に見られる生徒の文字式の理解の様相を精緻化することを目的とした．

文字式の理解を精緻に分析するための調査問題を新たに作成し，公立中学校２校の第１学年 88 名，第２学年 185 名の生徒に対して質問紙調査を実施した．調査１の対象生徒を，文字式や関数の学習が一通り終了している第３学年の生徒を対象にしたのに対して，調査２は，立式できている生徒を対象にし，文字式や関数の学習中における生徒の理解を探ることができるようにした．学習中の生徒に現れる誤答や誤概念を明らかにすることが指導につながると判断したからである．

そして，この調査の解答を分析し，インタビュー対象生徒を選出した．それらの生徒に同一の問題を解かせ，文字や文字式の見方について聞き取りを行い，そのプロトコルを分析することにより生徒の文字式の理解の一端を明らかにした．

その結果，本研究で取り上げた過不足の問題の方程式の立式において，正しく立式できている生徒の約半数が立式した文字式の数量を正しく捉えていないという実態が明らかとなった．そして，インタビュー調査でこのことを詳しく聞き取ると，単項式の和の形で表された文字式を事象に照らして解釈する際に，文字の項と定数の項が別々の数量を表すと捉える，分離した見方が顕在化した．例えば，$3x+20$ を，$3x$ は人数を表し 20 は枚数を表すといった見方である．さらに，$3x$ という単項式についても分離した見方をしていることが明らかとなった．$3x$ を生徒 x 人に配った折り紙の枚数と解釈するのではなく，折り紙の枚数３枚と生徒 x 人と分離して見ているのである．

$3x+20$ を分離して見てしまう，つまり，ひとまとまりと見られないことについては，先行研究におけるプロセスの見方で説明可能である．しかし，$3x$ といった，数字３と文字 x の積の形で表された文字式も，数字３と文字 x に分離し，ひとまとまりと見られないということは，本研究で新たに顕在化したことである．例えば，文字式で表された $3x$ を本問題に照らして解釈するときに，３の x 個，すなわち，$3+3+3+\cdots+3$（３の x 倍）と見て立式するところを，x が３個，すなわち，$x+x+x$ と解釈を変更して立式する様子が明らかとなった．これは，３の x 個，あるいは，３の x 倍と見ることに困難があり，それが，この問題における $3x$ を，生徒 x 人と折り紙の枚数３枚と分離して見ている理解の根源であることを特定した．

このことは，生徒のかいた絵から見て取れた．$3x$ について，x が３個あると捉えると，x が生徒の人数を表しているので，$3x$ は生徒の人数となる．しかし，場面としては，３枚が x 個あるので，３の数量である枚数が $3x$ の表す数量である．このことから，人数を表しているのか，枚数を表しているのかその解釈が揺れ動くこととなる．

本研究で取り上げた生徒に現れている理解の様相の一端は，文字 x を物，数量と捉えるといった間で揺れながら解釈している実態，また，文字 x におく数量

を，生徒の人数と捉えたり，折り紙の枚数と捉えたりと，明確に捉えていない実態として表出された．これらの実態は，生徒が文字 x を，未知数としてうまく扱うことができていないということである．これらの生徒は，文字 x の表す数量を明確に捉えることのないまま，すなわち，文字を未知数として理解しないまま，文字を用いて形式的に立式している．これが，単項式の数量を把握できない生徒の文字の理解の一端であると結論付けた．この理解の様相を「具象化途上の未知数としての文字」と名付けた．

具象化は，Sfard が述べている，数学的な概念を理解するときの最終段階に当たり，本研究で捉えているプロセスのプロダクト化の段階である．この段階に見られる生徒の文字の理解を顕在化した．これは，Küchemann の捉えている文字の意味の枠組みでは捉えきれないものであり，方程式を使って解きなさいという要求に応えようとするときに表出した生徒の文字の理解である．

過不足の問題の立式過程に見られる文字式とその式に含まれる文字の理解の様相は次ページの表２のようにまとめることができる．

これらを総括すると，本研究では，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面における，生徒の文字式とその式における文字の理解の様相の一端として，「プロセスのプロダクト化」，これは，Sfard が提案している数学的概念を対象として捉えるための過程，すなわち，内面化，凝縮化，具象化を１つの問題において，文字式とその式における文字の理解という視点から具体的に明らかにしたものである．そして，Küchemann が提案している文字を物としてみているという理解の枠組みではなく，物として捉えるだけでなく未知の数量としても捉えているが，未知数とは捉えることができていないという「具象化途上の未知数としての文字」の理解を明らかにした．

表２　数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見ること

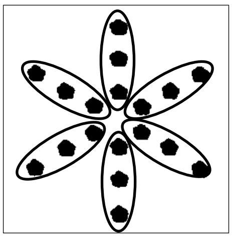
<table>
<tr><td>Sfard,
Gray&Tall</td><td colspan="3">著者（実態調査Ⅱより）</td><td>Küchemann</td><td>藤井</td></tr>
<tr><td>文字式の
二面性</td><td colspan="2">文字式の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の解釈</td><td>文字の
二面性</td></tr>
<tr><td>プロセス</td><td colspan="2">・式を操作として捉える</td><td>①問題文の言葉を置き換えた文字
②数値を置き換えた文字
③物の状態を表した文字
＜立式できない生徒にも立式できる生徒にも見られる＞</td><td>・物としての文字</td><td>・不特定性</td></tr>
<tr><td></td><td>プロセスのプロダクト化</td><td>・式を分離して捉える
$3x+20$･･･人＋枚
$3x$･･･１人の生徒が３枚の折り紙を持っていること
・３は１人に配る枚数, x は生徒の人数と３と x のそれぞれは何を表しているか理解しているが，$3x$ がどのような数量を表しているのか迷う
・式を問題文で示された事柄と捉える
→３の x 個分（x 倍）と捉えるところを x の３個分（３倍）と捉える文字式の理解（乗法の意味と切り離されている）</td><td>（文字 x は複数の数量を表しているとは発言するが）
・物の状態を表した文字の解釈と未知数としての文字の解釈で揺れている
（文字においた数量について）
・文字の表している数量の解釈がはっきりしない
→「具象化途上の未知数としての文字」</td><td></td><td>・不特定性</td></tr>
<tr><td>プロダクト

プロセプト</td><td colspan="2">・複数の単項式の和の形で表された文字式, 文字と数字の積の形で表された文字式をひとまとまり，１つの（数量）値として捉える
・等式の両辺は同一の単位の等しい数量として捉える</td><td>・文字には具体的にいくつかわからない数が入る
・文字は決まった値が入る
・文字の表す数量と文字式の表す数量を問題場面に即して解釈できる</td><td>・未知数としての文字
・変数としての文字</td><td>・不特定性
→特定性
・不特定性と特定性</td></tr>
</table>

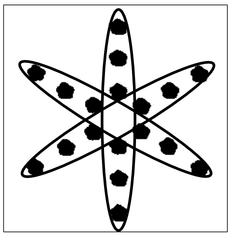
第２節　学習指導への示唆

本研究で浮かびあがった生徒の実態から，生徒の文字式の理解の様相が多岐にわたっていることが明らかとなった．そのことを前提とし，生徒１人１人の理解を把握し，その生徒に合った指導を行う必要がある．

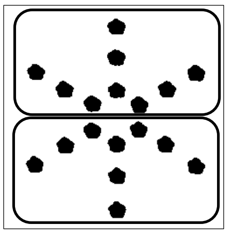
１つ目は，$3x$ といった数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見られない実態に対してである．このことに関しての指導は，小学校における乗法の意味の指導との連携が大切であることが示唆される．乗法は，被乗数を１とみたときに，乗数に当たる数を求める計算である．これを小学校第２学年の九九を学習するときから積み上げている．小学校第２学年下教科書（藤井ら，2015）において，例えば，おはじきの数を工夫して求めようという問題がある．図１のように，おはじきの総数を求める式が，３個のかたまりが６個分で３×６，図２のように６個のかたまりが３個分で６×３，そして，同じおはじきの個数を求めているので３×６＝６×３．



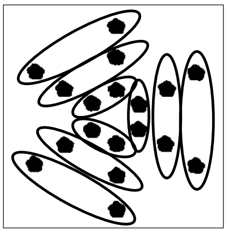
＜図１＞



＜図２＞



＜図３＞



＜図４＞

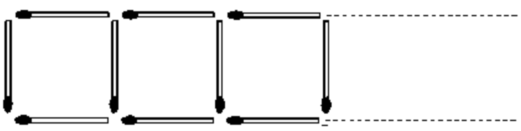
また，図３，図４のように，９個のかたまりが２個分で９×２，２個のかたまりが９個で２×９，よって，９×２＝２×９．

このように，乗法の意味を意識しながら，交換法則を認めていく指導が６年間通じて行われている．

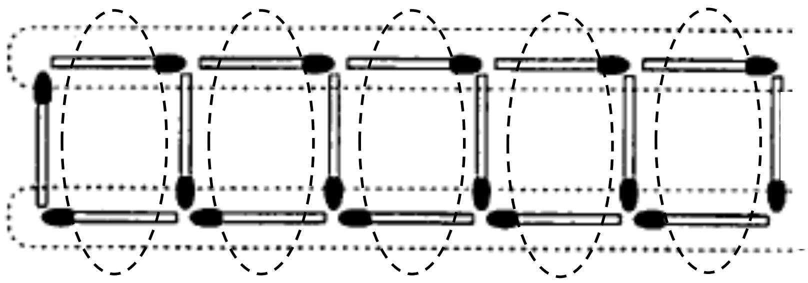
中学校に入ると，これらの乗法の意味についてはほとんど触れられない．なぜなら，文字式での積の表し方は，「文字と数の積では，数を文字の前に書く」と規約にそって立式するからである．つまり，乗法の意味にしたがって立式した，例えば，３×x も x×３もすべて規約により，$3x$ と表されるからである．また，この後の乗法の指導を考えたときに，乗法について，被乗数と乗数が別の意味を持つ計算であると認識するより，この両者の数が対等の関係であると理解していた方がよいからでもある．しかし，このことは，小学校までの乗法の意味の理解に上積みされて理解されればよいが，小学校まで大切にされてきたことはまったく考慮されず，中学校に入り飛躍的に指導が行われるため，生徒にとってまた別のこととして理解されていると考えられる．そのため，文字式 $3x$ を解釈するときに，これまでの乗法の意味は想起されず，$3x=x+x+x$ と文字を学習した最初の印象が引き出され，x が３つ分あると捉えることになってしまうと考えられる．

このことについて，中学校の第１学年の文字式を導入する場面で，次のような問題を解決する場面での指導の必要性が示唆される．

問題　図のように，マッチ棒を並べて正方形をつくる．正方形を n 個つくるときマッチ棒は何本必要になるか求めなさい．



授業の中で，生徒の考えを比較・検討するとき，例えば，次のような図をもとに生徒が考えを発表する．



このとき，マッチ棒の本数を，正方形の個数を n として，$(n+1)+n\times2$ とする生徒と，$(n+1)+2\times n$ とする生徒が出てくる．このとき，正方形の上と下の辺をつくっているマッチ棒の数え方について，前者の式の下線部 $n\times2$ は，上に n 本，下に n 本あるので，n 本が２セットあると見て立式しているのに対し，後者の式の下線部 $2\times n$ は，１つの正方形の上の辺と下の辺の２本をセットとして，この２本が n セット（個）あると見て立式している．前者が，変数の定数倍型，後者が，定数の変数倍型の立式である．授業の中では，マッチ棒の数え方が違うということで両者の式を紹介するのみに止めることが多い．しかし，本研究で，数字と文字の積の形で表された文字式について，定数の変数倍型の式の理解が困難であることが明らかになっているので，その理解を促すためには，この２通りの考えが発表されたとき，特に，後者の式，すなわち，２本のマッチ棒の組が x 個あるということをどのように解釈するのか，x 個あるということはどういうことかを議論したり x 個に具体的な数を代入してマッチ棒の総数を求めたりする場面を設定するなど文字式の初期の学習の時点で，文字式の規約を学習する前に，式のイメージを明確にもつことができるような指導の工夫が必要であると考える．

また，中学校第２学年の連立方程式の解き方の最初に現行の教科書（藤井ら，2016）において，次のような学習をしている．この場面で文字を物として認識してしまう可能性があると考えられるので，十分に注意する必要がある．

考えてみよう

あるくだもの店で買い物をしたら

りんご２個とオレンジ５個の代金の合計は 600 円

りんご２個とオレンジ３個の代金の合計は 480 円

でした。オレンジ１個の値段は，どのようにして求めることができるでしょうか。

○をりんご，●をオレンジとすると

○○　●●●　●●	→	600	円	……	①
○○　●●●	→	480	円	……	②

上と下を比べると

●●	→	□	円	……	③

したがって

●	→	□	円

上の求め方を，文字を使って表してみよう。

りんご１個の値段を x 円，オレンジ１個の値段を y 円として，上の①，②を文字 x，y を使って表すと

$$\begin{cases} 2x+5y=600 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=480 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となる。上の式と下の式を比べると

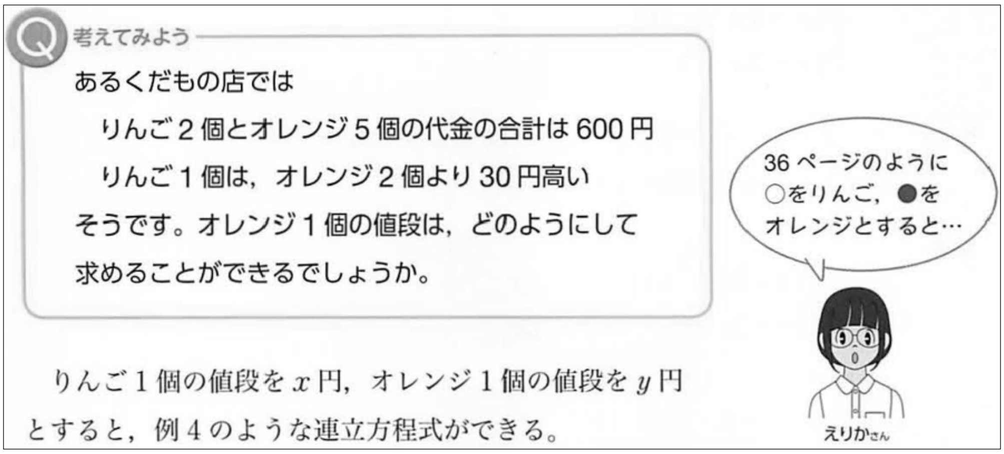
$$2y=120 \quad \cdots\cdots ③$$

したがって　$y=60$

ここでは，○をりんご，●をオレンジとして，りんごを表す○２つが①の式と②の式で共通しているので消去できることを視覚的に示すことが指導の意図である．この場合，○，●はりんごとオレンジの値段を表していなければならないのであるが，数量ではなくりんごとオレンジそのものを○，●が表していると捉えられてしまう恐れがある．さらに，「上の求め方を，文字を使って表してみよう．」と書かれており，○，●が値段（数量）を表すと解釈せずにそのまま x，y に置き換えるのが自然であり，物として文字を見ることを促進しているように誤解されかねない提示である．このように考えた方が数量の関係を把握しにくい生徒にとっては，確かに立式しやすく，立式につまずく生徒は少ないと思われ

るので，授業がスムーズに流れ，指導しやすいと考えられ，その意図は十分理解できる．しかし，生徒の誤概念を生んでしまう原因となっていることは否めない．教える側にその配慮が必要である．

また，以下のように，代入法を指導する場面でも「○をりんご，●をオレンジとすると」と吹き出しで言っており，上と同様に考えることを促している．


Q 考えてみよう
あるくだもの店では
りんご２個とオレンジ５個の代金の合計は 600 円
りんご１個は，オレンジ２個より 30 円高い
そうです。オレンジ１個の値段は，どのようにして求めることができるでしょうか。

りんご１個の値段を x 円，オレンジ１個の値段を y 円とすると，例４のような連立方程式ができる。

数量や数量の関係を把握することがうまくできない生徒や文字に使いにくさを感じている生徒は，文字を数量としてではなく物として認識して方程式を立式しているので，自ら立式した文字式の数量を正しく把握することができないという実態として現れると考えられる．ここで取り上げた教科書で扱っている問題は，x 円のオレンジが５個といった，個数が定まっている「変数の定数倍型」の立式の問題であるので，このような問題を扱った後，過不足の問題のように，３が x 個ある（x 倍）といったような「定数の変数倍型」で立式する必要がある問題に取り組む機会を設けることが考えられる．このとき，３が x 個あると捉えることができず，x が３個あると「変数の定数倍型」で捉えてしまう生徒を特定し，このことに対する指導や配慮を考えておく必要がある．

具体的には，本研究で用いた過不足の問題のように，１人３枚の折り紙を何人かに配るといった「定数の変数倍型」での立式の場面において，具体的に人数に適当に数を当てはめるのではなく，規則的に数を当てはめることで，その場面における数量を表現することからはじめ，当てはめた数とその結果に得られた数の関係や変化の規則に注目するなどしてから，その値を文字に置き換えていく指導が必要であると考えられる．これらの生徒の多くは数の式では理解できるが，数で理解できたからといってすぐに文字式の数量を理解できるというような簡単なことではないので，まず，具体的な数で確認しながら，その数量の単位を確認し，例えば，変えていく数量は生徒の人数であるが，計算の結果は折り紙の枚数になることを，乗法の式の意味と併せて意識的に取り上げることが大切となる．そして，式における具体的な数を擬変数として用い，他の数に変えたときに，変わる数と変わらない数を確認するとともに，その数の表

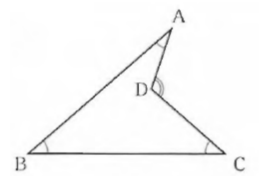
している数量（単位）を確認しながら，どの数を文字に置き換えればよいかを確認できるようにすることが大切である．本研究の調査でも様々な段階の理解の様相が見られるので，生徒の理解を類型ごとに分けるなど一概にひとくくりにはせず，生徒個別に理解の状況を把握する必要がある．

２つ目は，等しいという関係を表現することや式で表されたその関係を読み取ることが難しい生徒に対してである．第３章の調査問題で用いた問題では，$a+3b+5c=25$ の式の解釈を問われたときに，生徒が等式を，左辺が計算の式で右辺がその答えを表すといった左から右への操作の順序を表すと捉えている実態が中学校第３学年にも現れている．等式を，左辺と右辺が等しい関係であると捉えられるように指導することが大切である．文字式 $a+3b+5c$ の a，$+3b$，$+5c$ それぞれの値はわかっていないが，文字式 $a+3b+5c$ は値が 25 と等しいこと，つまり，$a+3b+5c$ を１つの値であることを認識できることが大切となる．文字 a，b，c の値は決まっていなくても式全体で見ればよいということを他の場面でも扱うことが大切である．

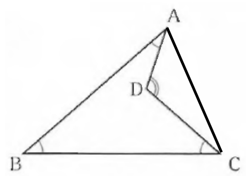
例えば，中学校第２学年の教科書（藤井ら，2016，p.120）に次のような問題がある．

右の図で，∠BAD＝∠A，∠ABC＝∠B，∠BCD＝∠C とすると，

∠ADC＝∠A＋∠B＋∠C が成り立つことを証明しなさい．



この問題に対して，多くの生徒が次のように，頂点 A と頂点 C を結ぶ線分を補助線としてひいて解こうとするが，解決に至らない様子が見られる．



∠DAC＝∠a，∠ACD＝∠b とおいて，三角形の内角の和が 180°であるという性質を用いて立式すると，

∠A＋∠a＋∠B＋∠C＋∠b＝180°

∠a＋∠b＋∠ADC＝180°と２通りの等式を立式することができる．

この２つの式ともに 180°であるので，左辺同士を等号で結ぶと

∠A＋∠a＋∠B＋∠C＋∠b＝∠a＋∠b＋∠ADC

よって，∠A＋∠B＋∠C＝∠ADC　と式から証明できる．

なぜ，この式が扱えないかを生徒に尋ねると，a と b の大きさがそれぞれいくつかわかっていないので，∠a＋∠b＋∠ADC＝180°と立式することができなかったと振り返る．この解決方法では，a と b の値はわかっていないが∠a＋∠b＋∠ADC は 180°であることを認識して式を操作することが必要となる．このような場面でも，それぞれの文字の値は不問に付して処理したり，表した

文字式の数量を問題文の場面に即して読み取ったりする活動を意識的に取り入れることが考えられる．このような活動により，文字式が１つの値を表していること，つまり，式がひとまとまりであることを認識できるようになると考える．

また，本研究で用いた過不足の問題のような方程式の利用の場面でも，１次方程式３x＋20＝５x－２を生徒が立式した際，この辺々の文字式３x＋20 と５x－２がこの問題の何を表しているのか，さらにこの式を構成している３x，５xも何を表しているのか，そして，そのときの文字 x は何を表しているのかを意図的に確認する機会を設けることが大切である．それは，正しく方程式を立式できている生徒は当然，問題場面の数量やその関係はわかっているだろうと考えていたが，本研究において実は生徒にとって困難であったことが明らかとなったからである．

３つ目は，文章にある「配る」という言葉をキーワードとしてそれを変換するだけで立式している生徒に対してである．方程式をつくりなさいという問題において，生徒は，とにかく文字 x を使って立式しようとする意識が働く．その際，文字 x の数量が何かわからなくても問題文に示されている言葉や数を置き換えて物として扱い，立式している様子が明らかとなっている．また，式が配るという事柄や状況や状態を表しているとも捉えている様子が明らかとなっている．これは，本問題だけに限らず，すべての問題でそのように立式していると考えられる．教える側も，単に問題文にそって言葉や数値の置き換えで立式を促すような指導はしていないかチェックする必要がある．

そこで，わかっている数量，未知の数量などを正確に読み取り，それらを使って，まず，問題文で示されている数量を，文字を用いて表し，次に，それらの数量の関係（中学校数学では「等しい関係」が主となる）を式に表すという過程を大切にしたい．その過程で，表した式を，事象に戻して解釈するときどのような数量を表しているかを確認する場面を設定したい．このような過程を繰り返すことで，文字 x について，未知数，一般化された数，変数としての本来の意味を理解し，計算できるようになると考える．

その際に，例えば，「ある数を４でわったら商が a で余りが３でした．この数を，文字を使って表しなさい.」等の剰余の関係を文字式で表す活動を取り入れることが考えられる．この場合は，わからないある数が x，除数が４で商が a，そして，余りが３と１つ１つの数量を確認した上で，問題文通りに立式しようとすれば，x÷４＝a･･･３となり，等式にはならない．これはまさしく問題文通りに，プロセス的に立てた式である．そこで，等式にするためには，問題文には４でわったらと書かれているが，実際に「ある数 x と等しい関係の数を式で表すには」と考え，除数４に商をかけて余りの３をたした数とし，x＝４a＋３と乗法で立式する必要がある．これは構造的に，すなわち，プロダクトとして式を見ることとなる．これが，問題文から数量や数量の関係を読み

取って，式に表すことであると考える．これらの経験が過不足の問題でも生きてくる．

藤井(1998)は，「等式としての立式が困難であるという指摘を踏まえ，これまでの「文字の式」の指導を反省的にとらえなおす必要があるように思う．特に，方程式の学習初期における立式指導はその根本的からの再考が必要となろう．」と述べているように，これらの生徒の理解の様相を踏まえての指導が大切となる．

教科書や全国調査の「授業アイディア例」では，この過不足の問題の立式の指導の際に，次の図５のような線分図をかけるようにすることを促している．

しかし，今回の調査で，ほとんどこのような線分図をかいた生徒はいなかった．つまり，多くの生徒にとって，線分図は，立式の際の思考の補助として使えるものとなっていないと考える．なぜなら，この図のような線分図がかける生徒は，すでに数量や数量の関係を把握できていると考えられるからである．よって，数量の関係をいかにつかませるかを再検討し，方程式の立式の指導を見直す必要があると考える．

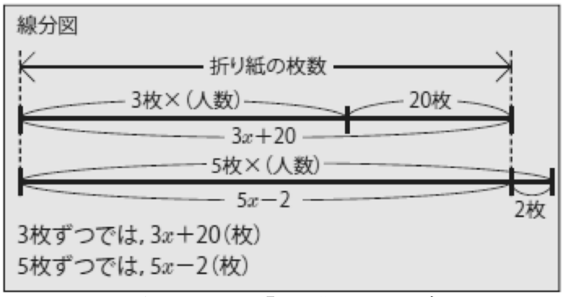


図５　全国調査「授業アイディア例」で紹介されている線分図

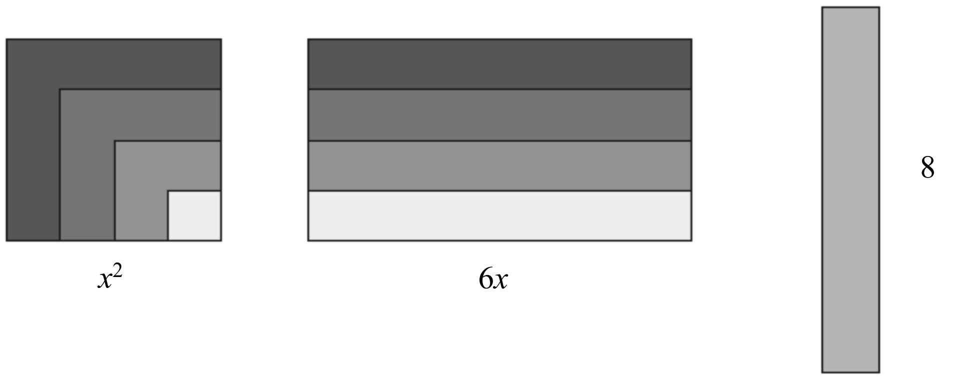
４つ目に，文字 x を１人の生徒を表していると捉えていたり，$3x$ を１人の生徒が折り紙３枚を持っているという状況を表していると捉えていたりする生徒に対してである．このように立式の過程で，文字を物として捉える見方が顕在化したが，その一方で，x の意味を尋ねると未知の数量として捉えている様相が見られ，さらにその数量が生徒の人数なのか折り紙の枚数なのか，その意味の解釈に揺れ動いている生徒も見られた．文字がどのような数量を表しているかを明確に理解できるような指導が必要である．

例えば，第３章での調査問題において，$a+3b+5c=25$ を成り立たせるような a，b，c の値の組を１組求め，答えを導いた生徒に対して，他にこの等式を成り立たせる値の組はないかを問うことにより，その値の組は解であることを確認した上で，解が無数に存在することに気付かせ，a，b，c の値がわからなくても問題を解くことができることを理解できるようにしたい．インタビューでもその問いかけで理解が進展している様子を確認している．文字に具体的な値を代入するという操作は，式をプロセス的に見ている証拠であるが，その値の組が無数にあることに気付くことにより，文字式をプロダクトとして見ることができ，a，b，c の値を不問に付すことができる．これが，プロセプトの見方に至る過程であるということが明らかとなった．文字式に具体的な数を代入して式の値を求めるという操作を行うことが，プロダクトの見方への移行を促すきっかけとな

ることが本研究から明らかになり，単に答えを求めるだけでなく，その際に生徒が，代入する前の式と代入した後の式の値をどのように見ているかを確認する場面を設定することが大切であることが示唆された．

また，中学校第３学年で学習する２次方程式を，平方完成をする考え方で式変形する場面では，次の図のように，文字式を正方形や長方形の面積モデルを用いて操作することが考えられる．x^2 を正方形と考え，その１辺の長さを色分けしたグラデーションで表し，x が１辺の長さを表し，その値が変わることによって，正方形の大きさが変わるという，文字が変数であるという意識をもたせる指導が考えられる．大きさが変わっても x^2 を表す正方形という形自体は変わらないので，その値にかかわらず同じように式変形できることを理解できるようになる．文字の値を不問に付すことを視覚的に意識できる指導である．また，この考えは高校で学習する２次関数の平方完成の学習に役立つ．

この指導では，例えば，$x^2+6x+8=0$ を解くときに，左辺 x^2+6x+8 を下の図のように x^2 を１辺の長さが x の正方形，$6x$ を縦の長さが x，横の長さが 6 の長方形，$+8$ は縦の長さが 8，横の長さが 1 の長方形の面積（前時に生徒自らがこの図形を作っておく）として生徒に提示をする．x が変数であるということを色紙でグラデーションにすることで表している．



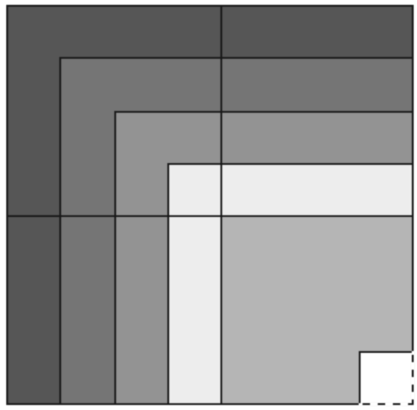
左辺 x^2+6x+8 は因数分解できるが，次のように平方完成を用いて変形する．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺 } x^2+6x+8 &= (x+3)^2-9+8 \\
&= (x+3)^2-1 \\
&= (x+3+1)(x+3-1) \\
&= (x+4)(x+2)
\end{aligned}
$$

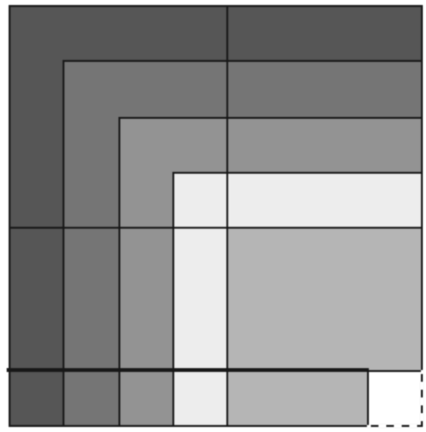
この式変形を上の色紙の操作と対応させて作業する．まず，下の図のように正方形にするため，$6x$ を表す長方形を $3x$ ずつに半分に割る．

そして，右の図のように x^2 の正方形の右側と下側に $3x$ をつけ，定数である 8 を右隅に 1 だけ欠けるように埋めていく．

これにより 1 辺の長さが $x+3$ の正方形の右端に面積 1 の正方形が欠ける図になる．
この図が，式でいうと，$(x+3)^2-1$ に当たる．

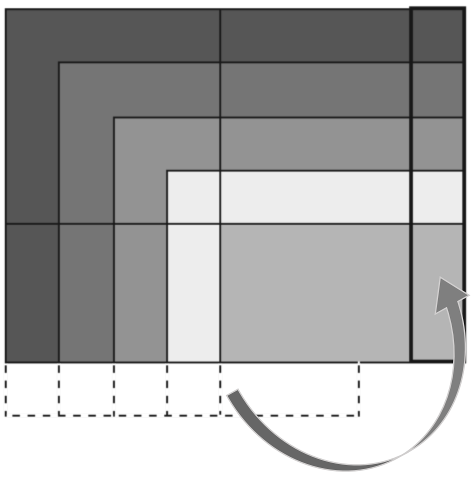


さらに，右の図のように下の部分を切り取る．



切り取った部分を次の図のように右側にくっつけると，長方形ができる．この長方形は，縦の長さが $x+3-1$，横の長さが $x+3+1$ となる．

この図が，式でいうと　$(x+3+1)(x+3-1)$
$=(x+4)(x+2)$ に当たる．



このように平方完成の式から和と差の積の公式を使って因数分解を行っている操作を式と対応させながら，図で説明できるようにさせたい．このような活動

により，文字に入る数によって大きさが変わっても，正方形，長方形の形は変わらず，同じように操作できることが視覚的に理解でき，文字を変数とみて，その値は１つに決めなくても計算できることが理解できると考える．そして，x^2 を正方形，$6x$ と＋8 を長方形の面積とみて，式変形に対応させて，図形を組み合わせることから得られる横の長さ $x+4$，縦の長さ $x+2$ の１つの長方形として見ること，つまり，プロダクトとして見ることなど，文字式を視覚的に捉えることによって，式を柔軟に見ることにつなげることができると考える．この操作は，x^2+6x+8 といった，係数が正で和の形で表された式にのみ適用され，すべての式で考えられるわけではないが，生徒の文字や文字式のイメージをつくるには有効であると考える．

また，第４章での過不足の問題の立式では，当然この場合はわからない生徒の人数か折り紙の枚数を文字において方程式を立式するのであるが，例えば，生徒の人数を x とおいたとき，前述のように生徒の人数を具体的に３人，４人，５人，･･･としたときに，折り紙の数を表している $3x+20$ と $5x-2$ の値がどのように変化するかを考察することが考えられる．このような活動によって，左辺と右辺の文字式が１つの値をとることを具体的な数値で確認し，プロセプトとして式を見られるようになると考える．

具体的には，立式した１次方程式 $3x+20=5x-2$ をプロセプトと見るには，両辺を $y=3x+20$ と $y=5x-2$ と１次関数の式として見てグラフをかく活動が考えられる．中学校第１学年の１次方程式の学習では未習となるが，上学年で立式した方程式の両辺を１次関数として見て，図６のようにグラフで考える場面を設定することが考えられる．この活動により，生徒の人数と生徒に配る折り紙の枚数が数対としてグラフの点で表され，その集合で直線の式を表していること，つまり，２つの式が直線というプロダクトとして見られること，そしてその２直線の交点が解として得られることを視覚的に捉えることから，プロセスからプロダクトの見方へ移行することを促すことができると考えられる．

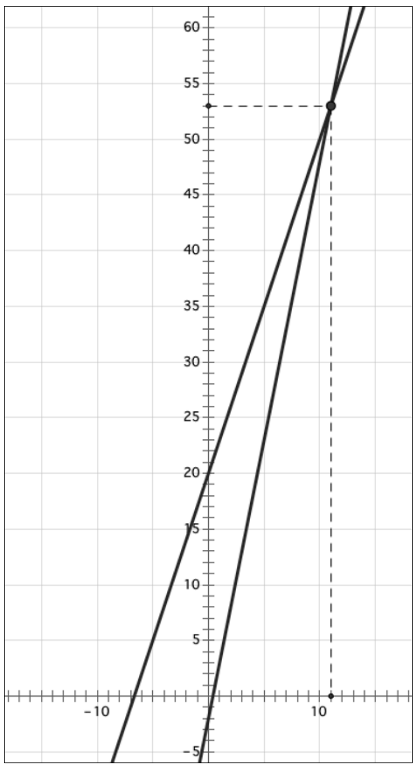


図６　$3x+20=5x-2$ の解が，$y=3x+20$ と $y=5x-2$ の直線のグラフの交点であると確認する

日々の授業で，生徒が文字式をどのように捉えているかと同時に，扱っている文字式における文字をどのように捉えているかを考慮しながら学習指導を計画することが大切であることが示唆される．

第５章の引用・参考文献

(1) Clement,J.(1982).Algebra word problem solutions:Thought processes underlying a common mis-conception. *Journal for Research in Mathematics Education*.13.1.16-30.

(2) 榎本哲士，西村圭一，清水宏幸.(2019). 事象の探究過程における文字の解釈の影響に関する一考察：ICCAMS 教材を用いた教授実験をもとに.日本数学教育学会第 52 回秋期研究（東京学芸大学）大会発表集録,33-40.

(3) 藤井斉亮.(1998).学校数学における文字の理解について.「学生・教授問題」再考.山梨大学教育人間科学部研究報告,49,31-38.

(4) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数２上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(5) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数２下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(6) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数３上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(7) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数３下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(8) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数４上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(9) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数４下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(10) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数５上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(11) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数５下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(12) 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数６.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

(13) 藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学１.平成 28 年検定済教科書.東京書籍.

(14) 藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学２.平成 28 年検定済教科書.東京書籍.

(15) 藤井斉亮,俣野博代表.(2016).新編新しい数学３.平成 28 年検定済教科書.東京書籍.

(16) Hodgen,J.,Küchemann,D. & Brown,M.(2012).The ICCAMS Teaching Materials:A pack for teachers. King’s College London & Durham University.

(17) 国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(18) 国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.

(19) 国立教育政策研究所.(2018).平成30年度全国学力・学習状況調査解説資料,中学校数学.

(20) 国立教育政策研究所.(2018). 平成30年度全国学力・学習状況調査授業アイディア例.

(21) Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children’s Understanding of Mathematics*,11-16.102-119. John Murray.

(22) MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students’ interpretations of algebraic

notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.
(23)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(24)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
(25)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2018).平成30年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
(26)　Radford,L.(2003).Gestures,speech,and the sprouting of sings:A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*,5(1),37-70.
(27)　Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and　objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*,22,1-36.
(28)　Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The case of algebra.*Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.
(29)　清水宏幸.(2011).シリーズ:数学に強い中学生を育てる！２数学言語を使いこなせ！「文字式」に強くなる！！.明治図書.
(30)　清水宏幸.(2016).問題解決のために構想を立て実践し，評価・改善する力の育成－全国学力・学習状況調査における評価・改善する力を測る問題に焦点を当ててー.第 4 回春期研究大会論文集, 249-254.
(31)　清水宏幸.(2017).中学校数学における文字式の理解に関する研究－過不足の問題の立式に焦点を当ててー.日本数学教育学会.数学教育学論究臨時増刊.99.17-24.
(32)　清水宏幸.(2019a). 数学を活用する力を育成するカリキュラムの構想－関数的な見方を重視した方程式指導の位置付けー. 日本数学教育学会第 7 回春期研究大会（金沢大学）論文集,111-118.
(33)　清水宏幸.(2019b). 中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究－文字式を分離して捉える見方に焦点を当ててー，日本数学教育学会誌　数学教育,101,7,2-12.
(34)　清水宏幸.(2019c). 文字式とその式における文字の理解に関する研究－式をひとまとまりとみることに焦点を当ててー，日本数学教育学会誌　数学教育,101,11,2-13.
(35)　杉山吉茂.(1986).公理的方法に基づく算数・数学教育の学習指導. 東洋館出版社.
(36)　杉山吉茂代表.(2003).我が国の学校教育における望ましい算数・数学のカリキュラムの構想. 財団法人日本教材文化研究財団.
(37)　杉山吉茂代表.（2007）. 検定外教科書「生かす数学」中学２年. 財団法人日

本教材文化研究財団・東京書籍.

(38)　内海庄三.（1970）.方程式指導の要点とその系統.中学校数学教育現代化全書第Ⅱ章 2 節.93-125.金子書房.

(39)　吉川行雄研究代表.(2002).教材開発の事例集.科学研究費補助金基盤研究(c), 数学科教育法の授業を学校現場と一体化させるための実践的研究成果報告書.

終　章
本研究の総括と今後の課題

本章では，第１節において本研究の総括を述べ，第２章において今後の課題を述べる.

第１節　本研究の総括

本研究の目的は，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，文字式とその式における文字の理解の２つの視点で生徒の理解を分析し，その様相を顕在化することであった．

第１章では，第１節において，中学校，高等学校で学ぶ文字式の機能と役割について考察をした．文字式，方程式の利用について，文字式，方程式に「表す」こと，そして，表したものを「変形する」「解く」こと，その結果を事象に即して「読む」「検討・吟味する」ことという３つの相があることを基に考察した．この３つの相を，本研究では「立式の過程」，「式の計算過程」，「解釈」として，文字式の機能について論じた．本研究では，その中で特に「立式の過程」，「式の計算過程」についての文字，文字式の理解の顕在化を目指すこととした．

第２節では，主に本格的に文字を学習する中学校数学に焦点を当て，文字式の理解について，まず，文字式を処理すること（式の計算）と文字式に表すこと（立式の過程）に関する生徒の理解の困難点を論じた．次に，方程式を解くことと方程式を立式することに絞って，日本で行われている大規模調査である全国学力・学習状況調査の結果から，現在の生徒の課題点を明らかにし，文字式の理解の困難点を考察した．それらから明らかとなった生徒の理解の困難点を，式をひとまとまりと見ることと関係付けて論じ本研究のリサーチクエスチョンを設定した．

第２章では，式をひとまとまりと見ることに関して，重要な視点である文字式の二面性と文字の意味の解釈について先行研究を整理し，本研究の焦点を明確にした．第１節では，先行研究を基にし，文字式の二面性に関する理解を捉える枠組みを設定した．これについて，Sfard(1991)は，数学の概念が２つの根本的に違う方法で考えられることができると示唆し，その２つとは，（過程としての）操作的なものと，（対象としての）構造的なものであるとしている．この二面性についての先行研究を考察し，本研究で実施する調査結果の分析の枠組みを設定した．本研究では，過程としてみる見方，対象としてみる見方をそれぞれプロセスの見方とプロダクトの見方とし，さらに，この両方の見方ができることをプロセプトの見方と名付けた．この概念を本研究の理解を捉える枠組みとして用いるのは，まず，文字式をひとまとまりと見ることは，式を，計算の操作を表すものと同時に，式自体が１つの値，結果を表すものというように，二重の見方，つまり，プロセプトとして見ることができることであると考えられるからである．方程式の理解についても，前述のプロセス・プロダクト，そしてプロセプトの視点を用いて先行研究を考察した．

第２節では，文字式における文字の意味の解釈ついての先行研究を考察した．文字の理解に困難があることは，国内，外の多くの研究者が報告している．よっ

て，それらを整理し，本研究における文字の理解を捉える枠組みを設定した．すなわち，イギリスの代数調査の分析より Küchemann(1981)が提唱している，文字の意味の６つの解釈を，調査対象の生徒の文字の理解を分析する際の基本の枠組みとした．文字の意味の６つの解釈は，以下の通りである．

○数値化された文字
文字に数値を割り当てて計算している．
○使われない文字
文字を無視，あるいはその存在を認めたとしても意味を与えることなしに扱っている．
○物としての文字
文字を物に対する略字かそのものとして扱っている．
○特定の未知数としての文字
文字を未知の数であるものとしてみなし，それを直接操作している．
○一般化された数としての文字
文字を再現することのできる，あるいは少なくともたった１つではなく，いくつかの値をとることができるものとして扱っている．
○変数としての文字
文字を不特定の範囲を表すものとして見ている．そして規則正しい関係は２つの値の集合の間で存在するとみて扱っている．

この文字の意味の６つの解釈に加え，藤井(1992)の提案している，文字の変数概念の二面性，すなわち，特定性と不特定性を視点とし，文字の理解を捉える枠組みとした．

第３節では，第１節と第２節の先行研究をまとめ，本研究において，文字式をひとまとまりと見ることについての生徒の理解を顕在化させるために，本研究の焦点を明らかにした．すなわち，文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点で捉える枠組みを示し，その理解の顕在化の意図，本研究の特徴，独自性について述べた．これまでの文字，文字式の理解研究では，文字，文字式それぞれの理解の枠組みのみを用いて考察を行っている．例えば，文字の理解の研究では，生徒が文字をどう捉えているかを考察の対象としているのみで，同時にその文字を含んだ式をどう捉えているかについて詳細に分析している研究は見当たらない．

そこで，本研究では，文字式を利用する場面において，文字式の理解（３aや５x－２の式全体の意味や５x と－２の意味）と，その文字式における文字の理解（３a における文字 a や５x－２における文字 x の意味）を同時に分析することによって，生徒の文字式に対する理解の様相を精緻に顕在化することを意図し，この方法をとることとした．また，文字式とその式における文字の理解は連動しているはずであり，その様相を統合的に捉えることにより，そこから理解の困難性等の課題を見いだし，具体的な学習指導への示唆を得ることができると

考えた．それを具体的な問題で顕在化することが，本研究課題の核心をなす問いである．以下のような文字式とその式における文字の理解の分析の視点を設定した．

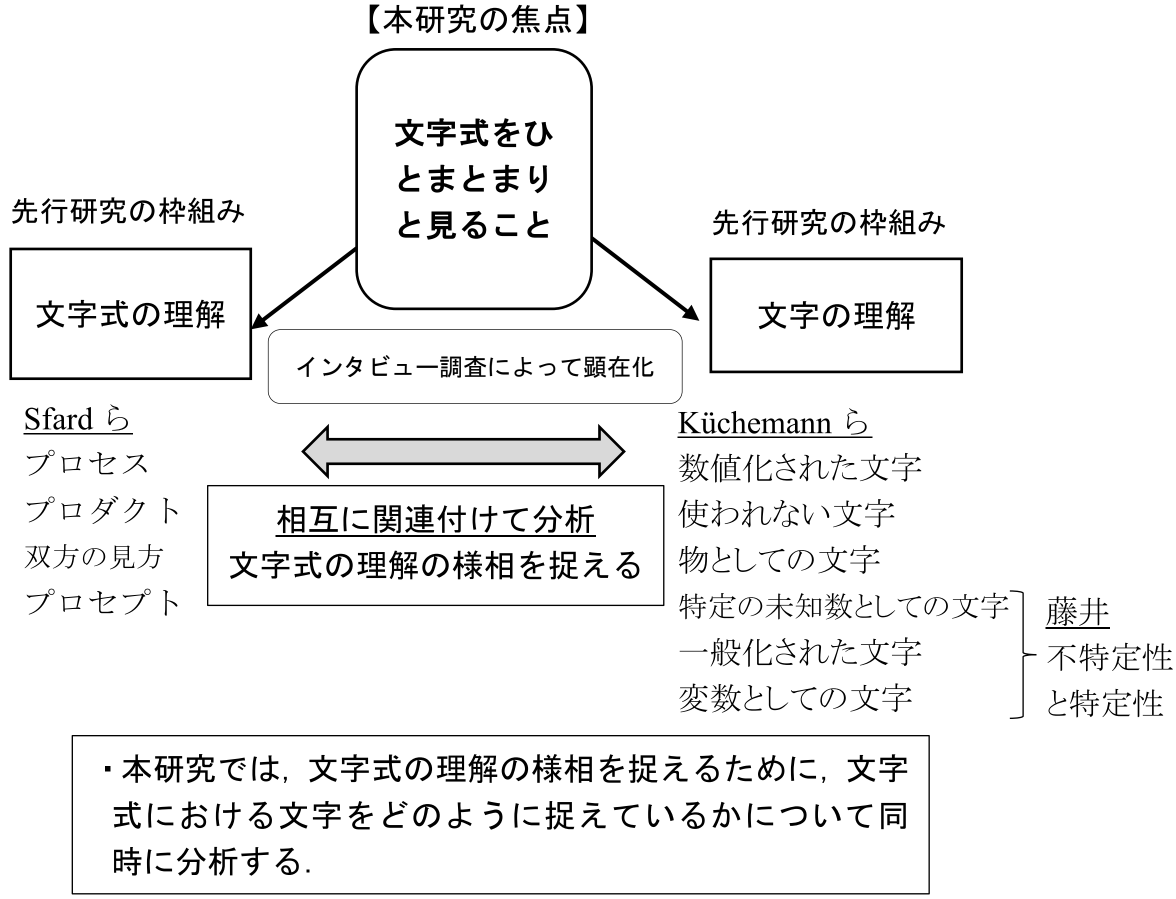


図１　式をひとまとまりと見ることに関する文字式とその式における文字の理解の分析の視点

これらを踏まえ，本調査では，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面の２つの調査を計画した．

本研究での実態調査を行う上での方法は，序章第２節３で述べた．本研究では，構成主義者の教授実験（Cobb & Steffe，1983，Steffe，1991）を基に，実態調査を構成した．本研究では，質問紙調査とインタビュー調査を併用して実施した．具体的には，質問紙調査では，第三者の考えを提示し，その考えについて賛成か反対かを問う問題を出題した．この質問紙調査をスクリーニング調査とし，インタビュー調査を実施する対象生徒を選択した．インタビュー調査では，生徒の認識の実際を探るための「臨床的インタビュー」と，その認識を変容させようと試みる「指導的介入」をする「個別指導的インタビュー」の両方から構成し，

自由に問題を解かせる時間を与え，それについてあらかじめ用意した質問事項を用いて介入するという手法をとった．このインタビューの様子をビデオに撮影し，そのプロトコルを起こして分析することにより，生徒の理解の様相を明らかにした．また，その際には，問題に取り組む様子，ジェスチャー，表情なども分析の材料とした．

複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面では，「a+3b+5c＝25 のとき，a+3b+5c－10 の値を求めなさい．」の問題を用いてその解決過程を記述させる調査を行った．

文章問題から方程式を立式する場面では，「折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．また，１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．」の問題を用いて立式と解決を記述させる調査を行った．

前者の問題では，文字式 a+3b+5c＝25 の左辺 a+3b+5c に着目した．この式の a，b，c は何を表しているのかはわからない．よって，3b も 5c もわからない．しかし，これらの単項式の和の形で表された式 a+3b;5c は 25 と等しいことが示されている．このような文字式 a+3b+5c をひとまとまりと見ることができるかを問う．

一方，後者の問題では，問題文より，生徒の人数を x 人とおくと，３x＋20＝５x－２と立式ができる．特に，左辺である３x＋20 に着目すると，この式において３も x も 20 も何を表しているかは示されている．しかし，３x と 20 の単項式の和の形で表された３x＋20 は，何を表すかは明示されていないのでわからない．さらに，３と x の積の形で表された３x についてもわからない．このような文字式３x＋20，そして３x をひとまとまりと見ることができるかを問う．

このように，式をひとまとまりと見ることに関する２つの異なった場面，すなわち，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面において，調査を実施することを計画し，その理解の顕在化を目指した．

第３章において，前者の問題を，第４章において，後者の問題を用いて，調査問題を開発し，調査を実施することとした．

第３章では，複数の単項式の和の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査Ⅰを行った．この調査では，文字式を１つの値として答えを求める問題（a+3b+5c＝25 のとき a+3b+5c－10の値を求める問題）の解決過程に焦点を当てている．この調査の目的は，文字式をひとまとまりと見ることについて，その理解の様相を顕在化し，式をひとまとまりと見ることができるようになる要件を明らかにすることとした．本調査は，中学校第３学年を対象に実施した．質問紙調査をもとに選出した11名を対象に，インタビュー調査を実施し，そのプロトコルを分析した．この調査では，問題として与えられた式 a+3b+5c をひとまとまりと見ることができるかを分析した．その際，第２章で述べた文字式の理解とその式における文字の理解の両方の視点で分析した．

その結果，連立方程式の代入法を避ける原因として，1つの文字に複数の文字を代入すること自体に抵抗を感じている生徒と，代入した後，項が多くなり複雑になると考えている生徒が存在することが明らかとなった．

また，本調査では，用いた問題における文字式のプロセスの見方とプロダクトの見方の具体を明らかにするとともに，プロセスの見方からプロダクトの見方への移行をプロセスのプロダクト化とし，これを，インタビューを通して確認しその様相を明らかにした．これは，Sfardが提案している数学的概念を対象として捉えるための過程，すなわち，内面化，凝縮化，具象化を1つの問題において具体的に明らかにしたものである．そして，式をひとまとまりと見るための3つの要件を導出し，これらの要件が相互に関連していることを明らかにした．

文字式 $a+3b+5c$ をひとまとまりと見ることができる要件は次の3点である．

① 文字 a，b，c それぞれに入る値を1つに決めなくても処理できることを理解すること．

② $a+3b+5c=25$の両辺 $a+3b+5c$ と25が等しいことを理解すること．

③ $a+3b+5c=25$と $a+3b+5c-10$の2つの式に，$a+3b+5c$ が共通していることを見いだすこと．

これら①〜③の関連については，以下のことが明らかとなった．例えば，$a+3b+5c=25$ について，この等式を満たす a，b，c の値の組をいくつも見つけるという活動が，式 $a+3b+5c$ の値を意識させ，$a+3b+5c$ を構造化すること，すなわち，$a+3b+5c$ を文字 a，b，c の個々の値に注目することなく，式全体を1つのまとまりとして見ることにつながる．このように見ることは，$a+3b+5c=25$ の左辺の $a+3b+5c$ と右辺の 25 が等しいことの理解を促し，$a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c-10$ の2つの式にある $a+3b+5c$ が共通していることを見いだすことができるようになる．このとき，$a+3b+5c$ における文字 a，b，c は「特定の未知数」から「一般化された数」としての理解に移行しており，この移行によって，文字式をひとまとまりとして見ることができるようになることが明らかとなった．

第4章では，数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見ることについての実態調査Ⅱを行った．この調査では，過不足の問題における立式過程に焦点を当てている．

この実態調査Ⅱは，2つの調査に分かれる．すなわち，過不足の問題において，方程式を立式できない生徒がどのような文字式と文字の理解の様相であるのかを顕在化する調査（調査1）と，方程式を立式できている生徒の中に，自ら立てた方程式に含まれている文字式の意味を問題場面に即して解釈できない生徒の理解を顕在化する調査（調査2）である．2つの調査では，同じ問題場面を用い，それぞれ調査問題を開発し，調査を実施した．そのインタビューのプロトコルから文字式の理解と文字の理解の両方の視点から生徒の理解の実態を捉えた．調査1からは，これまで先行研究では報告されていない物としての文字の理解の

様相が，調査２からは，具象化途上の未知数としての文字の理解の様相が明らかとなった．以下に，具体的に述べることとする．

前者の調査１についての考察は第２節で報告している．調査問題を開発し中学校３年生を対象に質問紙調査とインタビュー調査を実施した．方程式を立式できていない生徒を選出したインタビュー調査において，$3x+20$ と $5x-2$ の意味を尋ねると，２つの文字式が何を表すかが曖昧になっていることがわかり，背後には，この文字式に含まれている文字を物として捉えている生徒の実態が浮かび上がってきた．さらに，その物としての文字の理解にいくつかの相があることが明らかとなった．物としての文字の理解についてはKüchemann(1981)によって以下の３つが示されている．

① 物の名前を簡略化した記号としての文字
② １つの物としての文字
③ 物の集合としての文字

この３つに加え，物としての文字にはその他の研究から次の３つが挙げられる．

④ ラベルとしての文字
⑤ 一般的な参照としての文字
⑥ インデックスとしての文字

本調査では，これら①～⑥の物としての文字以外の物としての文字の理解の様相を明らかにした．それは，次の３つである．

(1)問題文の言葉を置き換えた文字
(2)数値を置き換えた文字
(3)物の状況や状態を表した文字

また，文字式については，例えば，$3x+20$ を，「３枚ずつ１人に配ると 20 枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり，$3x$ は人数を表し 20 は枚数を表すといったように別々の数量を表す式と捉えていたり，生徒の人数 x を使った式は生徒の人数を表すと捉えていたりする様子が明らかとなった．

質問紙調査の解答状況を見ると，このような理解は，方程式を立式できていない生徒だけでなく，方程式を正しく立式できている生徒の中にも現れていることが明らかとなった．そこで，調査の対象を立式できている生徒に広げた．

後者の調査２についての考察は第３節で報告している．この調査においても，調査問題を開発し，文字式の学習途中の段階である第１学年と第２学年の生徒を対象として，調査１と同様に，質問紙調査とインタビュー調査を行った．その結果，単項式の和の形で表された文字式を事象に照らして解釈する際に，文字の項と定数の項が別々の数量を表すといった分離した見方が顕在化した．例えば，$3x+20$ を $3x$ が生徒の人数を表し，$+20$ が折り紙の枚数を表すといった見方である．さらに，$3x$ という単項式についても分離した見方をしていることが明ら

かとなった．$3x$ を生徒 x 人に配った折り紙の枚数と解釈するのではなく，折り紙の枚数３枚と１人の生徒 x と分離して見ているのである．このとき，問題文における数量や数量の関係を把握せずに形式的に立式しようとしている様子が見られる．そのため，立てた式に含まれている $3x$ を解釈するとき，１人の生徒を x とイメージして，その生徒が３枚の折り紙を持っていると表すと捉え，$3x$ の表す数量は人数であると解釈をしていることが明らかとなった．このように文字 x を１人の生徒を表したり，複数いる生徒の人数を表したりするといったどちらの意味でも解釈している様子が見られた．物として捉える文字の理解と未知の数量として捉える文字の理解が混在している様相である．また，文字 x が生徒の人数を表すのか，折り紙の枚数を表すのかでも解釈が揺れている様相も現れている．

$3x+20$ を分離して見る，つまり，ひとまとまりと見られないことについては，先行研究におけるプロセスの見方で説明できる．しかし，$3x$ といった，数字３と文字 x の積の形で表された文字式を３と x に分離して捉える実態はこれまで報告されていない．本研究で顕在化した理解の様相である．

これを，例えば，$3x$ を例に挙げて見ることとする．文字式で表された $3x$ を問題に照らして解釈するときに，３の x 個，すなわち，$3+3+3+\cdots+3$ と見ることや，３の x 倍と見るのではなく，x が３個，すなわち，$x+x+x$ と自分で解釈し直しているのである．３の x 個，あるいは，３の x 倍と見ることに困難があるということである．３が５個分と具体的な数では把握できるこの数量を，この問題のように３が x 個あると解釈した場合に，何個あるかわからないこと，つまり，不特定であることとしながら，特定の数があるとして立式することができない様相が見られる．$3x$ について，x が３個あると捉えると，絵にもかきやすく，その数量は把握しやすい．この場合，x が生徒の人数を表しているので，$3x$ は生徒の人数となる．しかし，この問題場面としては，３が x 個あるので，３の数量である枚数が $3x$ の表す数量である．この問題における $3x$ を捉えることの困難性が，生徒 x 人と折り紙の枚数３枚と分離して見ている理解の根源であることを特定した．

しかし，問題文から数量を把握できる生徒は，x 人に３枚の折り紙を配るので，$3x$ は折り紙の枚数を表しているはずであると捉えることができる．x の３個と解釈し直した生徒が，このことから，$3x$ が人数を表しているのか，枚数を表しているのか，その意味の解釈に揺れが生じるのである．

また，問題場面において，文字 x を物，数量といった，双方の文字の意味の間で揺れながら解釈している生徒の実態が浮かびあがっている．これらの実態は，生徒が文字 x を，未知数として扱うことができないということである．これらの生徒は，文字 x の表す数量を捉えることのないまま，文字を用いて立式している様子が見られた．この生徒たちは，物としての文字と，未知数としての文字の理解が混在している様相が見られ，単項式の数量を把握できない生徒の文字の理

解の一端であると結論付ける．この理解の様相を「具象化途上の未知数としての文字」と名付けた．

これは，Küchemann が提案している物としての文字の理解の枠組みでは捉えられない理解である．つまり，文字を物として捉えるだけでなく数量としても捉えているが，未知数とは捉えることができていないという実態であり，これを，本研究では「具象化途上の未知数としての文字」の理解として明らかにした．この実態はこれまでには報告されていない．

第５章では，本研究の結論として，第１節で，本研究における文字式の理解の二面性と文字の理解の関係の２つの視点で，第３章と第４章の文字式の理解を整理し，式をひとまとまりと見ることについて，前章の 223 ページと 227 ページのようにまとめた．これは，第３章と第４章の調査結果を，先行研究の理解の枠組みで分析することを通して，文字式とその文字における文字の理解を関係付けて表に示したものである．

以上，本研究では，式をひとまとまりと見ることに焦点を当て，複数の項をもつ文字式を１つの値として扱う場面と方程式を立式する場面における，調査をした結果，生徒の文字式とその式における文字の理解の一端として，「プロセスのプロダクト化」と「具象化途上の未知数としての文字」の理解の様相を結論としてまとめた．

第２節において，本研究から見えた生徒の理解の様相を基に，学習指導の示唆として，次の４点を挙げた．

１つ目は，３x といった数字と文字の積の形で表された文字式をひとまとまりと見られない実態に対して，小学校における乗法の意味の指導との連携が大切であることを述べた．

２つ目は，等しいという関係を表現することや式の意味を読み取ることが難しい生徒に対して，表した文字式の数量を問題場面に即して読み取る活動を取り入れることについて述べた．

３つ目は，文章にある「配る」という言葉をキーワードとしてそれを変換するだけで立式している生徒に対して，わかっている数量，未知の数量などを正確に読み取り，それらを使って，まず，問題文で示されている数量を表し，次に，それらの数量の関係（中学校数学では「等しい関係」が主となる）を表すという過程を大切にすることについて述べた．

４つ目に，文字の意味を未知数として捉えきれていない理解，本研究では，これを具象化途上の未知数の理解と名付けているが，このような段階にいる生徒に対して，グラフ表現や図的表現を用いて，視覚的に式をプロダクトとして見られるような指導，そして，文字を，未知数や一般化された数，そして変数として理解できるような指導をすることについて述べた．

第２節　今後の課題

１つ目は，本研究で，明らかとなった，数字と文字の積の形で表された文字，例えば，３xについて，３のx倍と事象に戻して解釈すること，すなわち，定数の変数倍を解釈することの困難性は顕在化でき，「具象化途上の未知数としての文字の理解」の段階の生徒を確認した．これはまだ，未知数としての理解の途上の生徒の理解を精緻に分析したに過ぎない．また，特定の未知数と一般化された数としての文字の理解の移行についても確認したが，変数としての文字の理解への進展過程については未だ明らかとなっていないことが多い．よって，小学校を含めて系統的に文字をどのように指導すればよいか，その全体像をつかむこと，そして，変数としての文字の理解の困難性を解消するために，小学校からの乗法指導，中学校での文字式指導を具体的にどのように進めるかについての具体的指導をつかむことを，本研究から得た学習指導の示唆を踏まえ，今後，さらに探りたいと考えている．

２つ目に，本研究では，文字式利用の図式の相の中で，「式で表す（立式)」と「式を変形する，解く（式の計算)」の相において，生徒の理解を顕在化することを行った．今回，取り上げた問題についての文字式とその式における文字の理解の具体を明らかにし，「プロセスのプロダクト化の段階」の生徒の理解の一端を顕在化できた．今後は，本研究とは異なる問題場面での理解の困難性を明らかにしていきたいと考えている．

３つ目に，「式で表す（立式の過程)」「式を変形する，解く（式の計算)」と同時に，本研究の対象としていなかった「検討・吟味」の相にも焦点を当ててさらに研究を進めることである．問題解決のために方程式を解く場面や解の吟味をする場面において，誤答の割合が多い様子が見られるが，それがどのような理解の困難性からきているものであるかつかめていないことが多い．今後，それらの理解の困難性の一端をつかむことを引き続き行っていきたいと考えている．

終章の引用・参考文献

(1) Cobb,P and Steffe,L,P.(1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14, 83-94.

(2) 藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査.日本数学教育学会数学教育学論究.74.臨時増刊.58.3-27.

(3) Gray,E & Tall,D.(1994).Duality,ambiguity,and flexibi-lity:A"proceptual"view of simple arihtmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*,25-2,116-140.

(4)　Kieran,C.(1981).Concepts associated ith The equality symbol.*Educational Studies in Mathematics*.12.317-326.

(5)　小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究−文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて−.東京学芸大学博士論文.

(6)　久米成夫，松本吉陽，村上豊，高橋のぞみ.(1990).文字の理解に関する一考察-実態調査の結果を中心として-.学芸大数学教育研究,2,27-35.

(7)　Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children's Understanding of Mathematics*,11-16.102-119.John Murray.

(8)　MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students' interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.

(9)　三輪辰郎.(1991).新・中学校数学指導実例講座２数・式「式の指導内容の概観と問題点.39-74.金子書房.

(10)　三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.

(11)　三輪辰郎.(2001).文字式指導に関する重要な諸問題.筑波数学教育研究,20,1-23.

(12)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2013).平成25年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(13)　文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2018).平成30年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.

(14)　太田伸也.(1990).文字式に対する認識の発達について.日本数学教育学会誌,72,7,2-11.

(15)　太田伸也.(1992).中学生の文字式に対する認識について,日本数学教育学会誌数学教育,74,9,11-19.

(16)　太田伸也.(2006).数量関係の把握と立式に関する生徒の思考の様相についての一考察.学芸大数学教育研究.18.53-60.

(17)　Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.　*Educational Studies in Mathematics* .22.1-36.

(18)　Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The Case of Algebra.*Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.

(19)　清水宏幸.(2017).中学校数学における文字式の理解に関する研究−過不足の問題の立式に焦点を当てて−.日本数学教育学会.数学教育学論究.99.臨時増刊.17-24.

(20)　清水宏幸.(2019b).中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究−文字式を分離して捉える見方に焦点を当てて−. 日本数学教育学会誌,101,7,2-12.

(21)　清水宏幸.(2019c).文字式とその式における文字の理解に関する研究−式をひとまとまりとみることに焦点を当てて−. 日本数学教育学会誌,101,11,2-13.
(22)　Steffe,L,P.(1991). The Constructivist teaching experiment:Illustration and implications.von Glasersfeld,E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 177-194.
(23)　鈴木淳子(2005).調査的面接の技法【第２版】.ナカニシヤ出版.

引用・参考文献リスト

A．和文

１．阿部浩一他.(1978).新・中学校数学指導講座,式.金子書房.
２．中央教育審議会.(2008).幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）.
３．榎本哲士.(2010).中学校数学科における文字式の理解に関する一考察−方程式とその解の意味に焦点をあてて−.日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集,567-572.
４．榎本哲士.(2013).学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築.日本数学教育学会誌数学教育学論究,臨時増刊,95,145-152.
５．榎本哲士.(2015).中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析－数学的概念の二面性を視点として－日本教材学会誌,教材学研究,第26巻,49-56.
６．榎本哲士，西村圭一，清水宏幸.(2019). 事象の探究過程における文字の解釈の影響に関する一考察：ICCAMS 教材を用いた教授実験をもとに.日本数学教育学会第 52 回秋期研究（東京学芸大学）大会発表集録,33-40.
７．藤井斉亮.(1985).「理解」とは何か−R.R.Skempのモデルを手掛かりに−,日本数学教育学会,数学教育学論究,43・44,34-37.
８．藤井斉亮.(1986).理解と認知的コンフリクトについての一考察,日本数学教育学会,数学教育学論究,45・46,24-28.
９．藤井斉亮.(1989).認知的コンフリクトによる理解の分析と評価.日本数学教育学会,数学教育学論究,71臨時増刊,53,3-31.
10. 藤井斉亮.(1992).児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査.日本数学教育学会誌数学教育学論究,臨時増刊,74,Vol.58,3-27.
11. 藤井斉亮.(1998).学校数学における文字の理解について.「学生・教授問題」再考.山梨大学教育人間科学部研究報告,49,31-38.
12. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数２上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
13. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数２下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
14. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数３上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
15. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数３下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
16. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数４上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
17. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数４下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
18. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数５上.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
19. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数５下.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.
20. 藤井斉亮代表.(2015).新編新しい算数６.平成 27 年検定済教科書.東京書籍.

21．藤井斉亮,保野博代表.(2016).新編新しい数学１.平成27年検定済教科書,東京書籍.
22．藤井斉亮,保野博代表.(2016).新編新しい数学２.平成27年検定済教科書,東京書籍.
23．藤井斉亮,保野博代表.(2016).新編新しい数学３.平成27年検定済教科書,東京書籍.
24．福原満州雄.(1981).数学と日本語.1-11.共立出版.
25．加藤國雄.(1965)．数学の問題解決における思考(その11) −代数的思考について−．山梨大学学芸学部研究報告.199-204.
26．小岩大.(2004).文字式の理解を捉えるための調査問題の開発－process-productに焦点を当てて－，第37回数学教育論文発表会論文集，256-264.
27. 小岩大.(2016).学校数学における変数の理解に関する研究−文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて−.東京学芸大学博士論文.
28．国立教育政策研究所編.(2013). TIMSS2011算数・数学教育の国際比較,国際数学・理科教育動向調査の2011年調査報告書.明石書店.
29．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
30．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
31．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
32．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成22年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
33．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2011).平成23年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
34．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2012).平成24年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
35．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2013).平成25年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
36．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成26年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
37．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2015).平成27年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
38．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2016).平成28年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
39．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成29年度全国学力・学習状況調査解説資料，中学校数学.
40．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2018).平成30年度全国学力・学

習状況調査解説資料，中学校数学.
41. 国立教育政策研究所.(2009). 平成21年度全国学力・学習状況調査授業アイディア例.
42. 久米成夫，松本吉陽，村上豊，高橋のぞみ.(1990).文字の理解に関する一考察−実態調査の結果を中心として−.学芸大数学教育研究,2,27-35.
43. 国宗進編著.(1997).確かな理解を目指した文字式の学習指導，中学校数学科・新しい授業づくり5.明治図書.
44. 松原元一.(1986).考えることわかること.国土社.
45. 松原元一.(1990).数学的見方考え方ー子どもはどのように考えるかー.国土社.
46. 三輪辰郎.(1991).式の指導内容の概観と問題点の考察.新・中学校数学指導実例講座,数・式,39-74.金子書房.
47. 三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1-14.
48. 三輪辰郎.(2001).文字式指導に関する重要な諸問題.筑波数学教育研究,20,1-23.
49. 文部科学省.(2005).小学校算数・中学校数学・高等学校数学　指導資料−PISA2003(数学的リテラシー)及び TIMSS2003(算数・数学)結果の分析と指導改善の方向−.東洋館出版社.
50. 文部科学省.(2008).小学校学習指導要領解説算数編.東洋館出版社.
51. 文部科学省.(2008).中学校学習指導要領解説数学編.教育出版.
52. 文部科学省.(2009).高等学校学習指導要領解説数学編,理数編.実教出版.
53. 文部科学省.(2018).小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編.日本文教出版.
54. 文部科学省.(2018).中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編. 日本文教出版.
55. 文部科学省.(2019).高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編,理数編.学校図書.
56. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2007).平成19年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
57. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2008).平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
58. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2009).平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
59. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2010).平成 22 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
60. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2012).平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書.
61. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2013).平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
62. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2014).平成 26 年度

全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
63. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2015).平成 27 年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
64. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2016).平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
65. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2017).平成 29 年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
66. 文部科学省,国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2018).平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書，中学校数学.
67. 太田伸也.(1990).文字式に対する認識の発達について,日本数学教育学会誌数学教育,72,7,2-11.
68. 太田伸也.(1992).中学生の文字式に対する認識について,日本数学教育学会誌数学教育,74,9,11-19.
69. 太田伸也.(2006).数量関係の把握と立式に関する生徒の思考の様相についての一考察.学芸大数学教育研究.18.53-60.
70. 清水宏幸.(1997).中学校数学における文字式の理解に関する研究－文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあてて－,日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集,247-252.
71. 清水宏幸.(1998).中学校数学における文字式の理解に関する研究,山梨大学大学院修士論文.
72. 清水宏幸.(2011).シリーズ：数学に強い中学生を育てる！２数学言語を使いこなせ！「文字式」に強くなる！！.明治図書.
73. 清水宏幸.(2012). 全国学力・学習状況調査の結果にみる中学校数学科の指導上の課題－記述式問題に焦点を当てて－. 日本数学教育学会誌数学教育，94,9,38-41.
74. 清水宏幸.(2016).問題解決のために構想を立て実践し，評価・改善する力の育成－全国学力・学習状況調査における評価・改善する力を測る問題に焦点を当てて－.第 4 回春期研究大会論文集,249-254.
75. 清水宏幸.(2017).中学校数学における文字式の理解に関する研究−過不足の問題の立式に焦点を当てて−.日本数学教育学会.数学教育学論究.99.臨時増刊.第50回秋期研究大会特集号.17-24.
76. 清水宏幸.(2018).中学校数学における立式過程に見られる文字式の理解−過不足の問題の誤答分析−. 山梨大学教育学部紀要,28,93-106.
77. 清水宏幸.(2019a). 数学を活用する力を育成するカリキュラムの構想－関数的な見方を重視した方程式指導の位置付け－. 日本数学教育学会第7回春期研究大会（金沢大学）論文集,111-118.

78. 清水宏幸.(2019b).中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究−文字式を分離して捉える見方に焦点を当てて−. 日本数学教育学会誌,101,7,2-12.
79. 清水宏幸.(2019c).文字式とその式における文字の理解に関する研究−式をひとまとまりとみることに焦点を当てて−. 日本数学教育学会誌,101,11,2-13.
80. 清水美憲.(1995).分数除法に関する児童・生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題, 日本数学教育学会誌数学教育学論究,臨時増刊,77,63・64,3-26.
81. 清水美憲.(2007).算数・数学教育における思考指導の方法.東洋館出版社.
82. Skemp,R,R.(1973).数学学習の心理学.藤永保・銀林浩訳,新曜社,初版８刷.
83. 杉山吉茂.(1986).公理的方法に基づく算数・数学教育の学習指導. 東洋館出版社.
84. 杉山吉茂代表.(2003).我が国の学校教育における望ましい算数・数学のカリキュラムの構想. 財団法人日本教材文化研究財団.
85. 杉山吉茂代表.(2007).検定外教科書「生かす数学」中学２年. 財団法人日本教材文化研究財団・東京書籍.
86. 鈴木淳子.(2005).調査的面接の技法【第２版】.ナカニシヤ出版.
87. Tall,D.(2016).数学的思考－人間の心と学び,磯田正美・岸本忠之監訳,共立出版.
88. 田中泰慶.(2003).中学校「文字式」領域におけるプロセプト的見方の実態とその指導法の研究,第36回数学教育論文発表会論文集,127-132.
89. 杜威.(1991).学校数学における文字式の学習に関する研究−数の世界から文字の世界へ−.東洋館出版社.
90. 内海庄三.(1970).方程式指導の要点とその系統.中学校数学教育現代化全書第Ⅱ章２節.93-125.金子書房.
91. 吉川行雄研究代表.(2002).教材開発の事例集.科学研究費補助金基盤研究(c),数学科教育法の授業を学校現場と一体化させるための実践的研究成果報告書.
92. 吉野恭子.(1993).文字式の導入の一考察.日本数学教育学会誌算数教育,75,10,19-26.
93. 和田義信.(2007).理解とは何か.和田義信　著作・講演集４　考えることの教育,251-263.東洋館出版社.

Ｂ．欧文

１． Bell,A.,Malone,J.＆ Taylor,P.C.(1987):Algebra-an exploratory teaching experiment,Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.
２． Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a

problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In Nadine Bednarz,Carolyn Kieran, & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. *Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

３． Clement,J.(1982).Algebra word problem solutions.Thought processes underlying a common mis-conception. *Journal for Research in Mathematics Education*,13,1,16-30.

４． Cobb,P. & Steffe,L.P.(1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14, 83-94.

５． Cortes,A.(1995). Word problems: Operational invariants in the putting into equation process.International Group for the Psychology of Mathematics Education. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*.2.58-65.

６． Davis,R.B.(1975).Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations.*Journal of Children's Behavior,1*,3,7-35

７． Esty,W & Teppo,A.(1996).Algebraic thinking, language,and word problem. Communication in Mathematics,*K-12 and Beyond, Yearbook NCTM*,45-53.

８． Filloy,E. & Rojano,T.(1989).Solving equations: the transition from arithmetic to algebra.*For the Learning of Mathematics* 9, (2), 19–25.

９． Gray&Tall.(1994).Duality,ambiguity,and flexibility:A"proceptual"view of simple arihtmetic, *Journal for Research in Mathematics Education,25-2*,116-140.

10． Hodgen,J.,Küchemann,D. & Brown,M.(2012).The ICCAMS teaching materials:A pack for teachers. King's College London & Durham University.

11． Kieran,C.(1981).Concepts associated with the equality symbol.*Educational Studies in Mathematics,12*,317-326.

12 ． Kieran,C.(1992).The learning and teaching of school algebra,Douglas A.Grouws(Ed.),*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*,390-419.Macmillan.

13． Kieran,C.(2007).Learning and teaching algebra at the Middle School through College Levels.F.K.Lester,Jr(Ed.),Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, *A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, 2*,707-762.

14. Küchemann,D.(1978a).Children's understanding of numerical variables.*Mathematics in School*,7(4),23-26.

15. Küchemann,D.(1978b).Children's understanding of numerical variables.*Mathematics in School,*7(5),12.

16． Küchemann,D.(1981).Algebra.Hart,K.M(Ed.).*Children's Understanding of Mathematics*,11-16,02-119.John Murray.

18． Lochhead,J.(1988).From words to algebra:Mending misconceptions.*The Ideas of*

Algebra,K-12.National Council of Teachers of Mathematics,1988YearBook.127-135.

19. MacGregor,M & Stacey,K.(1993).Cognitive models underlying students'formuration of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(3),217-232.
20. MacGregor,M & Stacey,K.(1996).Origins of students' interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.3.297-304.
21. Radford,L.(2000).Signs and meanigs in students' emergent algebraic thinking:A Semiotic Analysis.Educational Studies in Mathematics.*An International Journal*,42,237-268.
22. Radford,L.(2003).Gestures,speech,and the sprouting of sings:A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization.*Mathematical Thinking and Learning*,5(1),37-70.
23. Rosnick,P.(1981).Some misconceptions concerning the concept of variable.*The Mathematics Teacher*,76,6,418-420.
24. Sfard,A.(1991).On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.*Educational Studies in Mathematics,22*,1-36.
25. Sfard,A & Linchevski,L.(1994).The gains and the pitfalls and reification -The case of algebra.*Educational Studies in Mathematics*,26,191-228.
26. Stacey,K.& MacGregor,M.(1997).Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra.*Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.4.14-19.
27. Stacey,K & MacGregor,M.(1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2),149-167.
28. Steffe,L,P.(1991). The Constructivist teaching experiment:Illustration and Implications.von Glasersfeld,E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 177-194.
29. Swafford,J,O. & Langrall,C,W.(2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations.*Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 1, 89-112.
30. Vergnaud,G.(1984).Understanding mathematics at the secondary-school level.Theory, Bell,A., Low,B., Kilpatrick,J.(Eds.).*Research & practice in mathematics Education*, Report of ICME5.
31. Wagner,S.(1981).Conception of equation and function under transformations of variable.*Journal for Research in Mathematics Education*,Vol.12,2,107-118.

資　料

１　第３章　インタビュープロトコル

２　第４章第２節　インタビュープロトコル

３　第４章第３節　インタビュープロトコル

資料１　第３章　インタビュープロトコル

インタビュー対象生徒の質問紙調査の解答状況

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td colspan="4">問題２　さちこさんの考えに対して</td></tr>
<tr><td>賛成</td><td colspan="3">反対</td></tr>
<tr><td>15 を導けない</td><td>15 を導けない</td><td>各文字に数値代入
15 を導く</td><td>a+3b+5c を 25 に置き換え正答</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問題1</td><td>加減法</td><td>M.T,Y.K
K.M</td><td>I.S</td><td>R.S</td><td></td></tr>
<tr><td>代入法</td><td>M.A,Y.Ik
M.U,H.M</td><td></td><td>Y.W</td><td>Y.Ic</td></tr>
</table>

	日　時（平成 30 年）	インタビュー実施生徒
(1)	10 月 1 日（月）16:15～	R.S，Y.K,
(2)	10 月 2 日（火）15:15～	Y.W，Y.Ic
(3)	10 月 5 日（金）16:15～	Y.Ik，M.U，H.M
(4)	10 月 9 日（火）15:15～	M.A，I.S
(5)	10 月 18 日（木）16:30～	M.T，K.M

R.S

1I：まず，７月にやってもらったんですけれど，この連立方程式を解いてください.

2S：はい，わかりました.

3I：じゃあお願いします.

4S：(問題に取り組む)

（代入法で解くが）あれ，どうやったっけ，違う方法で解く.（加減法にする，y 消去）

２分 17 秒後

5I：何をしたの.

6S：これで合っているか不安だったので，x のところが８と出たので，８を代入して，２×８で 16 にして y のところが－11 とわかったので，それを代入して 16－11 は５なので，　大丈夫だと思います.

7I：はい，それで，今，ここでやろうとしたことを聞きたいんだけど，今何を考えたのか説明できますか.

8S：こっち（最初やろうとした代入法）ですか.

9I：今これ（代入法）をやろうとしてこっち（加減法）にしたよね．そこは？

10S：最初，y のところが 13－３x というのがわかっていたから，代入して解こうと思ったんですけど，やり方を忘れちゃって，どうやったっけなと思って，一応，間違えると思ったので，ちょっと変えて，こっちと同じ連立方程式をつくってそこからひいてやってみました.

11I：それで，こっち（代入法）はどうですか．やり方は二通りあるよね．こっち（代入法）はどうですか，今考えてみて.

12S：わからないです．ちょっとこっちはわからないです.

13I：今，これは何をしようとしたんですか.

14S：･･･

15I：括弧でかいてくれて，これは何をしようとしたのですか．（２x●(13－３x)＝５まで書いて

あるところを指して）
16S：分配法則かなと思って，やろうと思いました．
17I：今，括弧だよね，この前に着いているのは何ですか．
18S：＋です．
19I：じゃあ書き直してみてくれる，それを．
20S：（$2x+(13-3x)=5$ と書く．）
21I：うん，だよね．
22S：はい．
23I：これどうですか．それのどこが不安に思ったの．これではできそうもないと思ったのはどこなの．
24S：え，何か，このままやっていくと，$2x$ と $3x$ をかけちゃうと，$6x^2$ になっちゃうなと思って．２乗がでてくるとちょっとやりづらいかなと思ってこっち（加減法）に変えました．
25I：この場合は，$2x$ を分配法則でしようと考えたの．
26S：はい．
27I：なるほど，でもここに＋があるよね．
28S：はい．
29I：そうするともう１回考え直せる？
30S：･･･
31I：＋があるから，$2x$ を 13 と $-3x$ にかけるのではないというのはいいよね．今，＋がなかったからそう思っちゃったのかもしれない．これだったらどう．
32S：たすってことですか．あっ．いけますね．この括弧をはずして，$2x+13-3x=5$ にして，このままこれをこっちに移項して，$-x=-8$ になって，$x=8$ で，同じですね．
33I：同じになった．
34S：はい．そこから，さっきのように $16+y=5$ にして，$y=5-16$ で -11 で，できます．
35I：そうするとね．いつもだいたいこの問題，下（加減法）ですか．
36S：たぶん，いつもならこっち（代入法）で解きます．こういう，$y=$ で始まっているときは，y のところに代入して解いていきます．
37I：そのときさ，$13-3x$ ってさ，２つの項をもっている式だよね．それをここに代入するんだよね．それは？なんか抵抗がありますか．
38S：いいえ，ないです．
39I：そこはどういうふうに考えているの．今入れ代えているよね．
40S：えっと，y と $13-3x$ は等しい関係にあるから，y にしても，$13-3x$ にしても一緒だと思って，代えても大丈夫だと思っています．
41I：それで，心配になってそっちを使った，確認だけど．
42S：はい．
43I：これは加減法だよね．自分としては加減法の方が確実にできそうなのですか．
44S：あっ，はい．こっちの方が，ミスが少なくできそうなので．
45I：どうしてそう思うのですか．
46S：なんか，こっちだと，僕だと迷ったりしちゃうんですけど，こっちだと，基礎的なところからやっていって，計算ミスも少なくなると思うので，こっちでやっていった方がいいと思います．
47I：僕なんか迷っちゃうという，その迷っちゃう中身を教えてもらいたいんですけど．
48S：え～と，さっきもあったように，＋があった方がいいのか，なかった方がいいのかというのがちょっと，気になったりします．
49I：これを入れ代えるときにね．
50S：はい．
51I：うん，なるほど．それで不安に思って，間違わないようにしたんですか．
52S：ちょっと使ってみました．
53I：はい，じゃあ次に行きます．これも２問目ね，前にやったと思うのですが．これやってみて．やっているからわかるかな．（問題を読む．）ちょっとそこにやってもらっていいですか．

それで，あなただったらこの問題どう解きますか．やってみてください．どうぞ．
54S：はい．（考える）55 秒後
55I：まず，賛成か反対かどっち．
56S：反対です．
57I：反対．それはなぜですか．
58S：a と b と c には何かしら数字が入らないと式がつくれないので，多分あると思います．
59I：はい，じゃあやって．どうぞ．
60S：1 分 10 秒後　これわからないです．（$a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c=-10$ と書いてしばらく手が止まる）
61I：これさ，今，イコールで書いているけど，−10 ね．だからイコールじゃあないんだよ．さあ，どうやるでしょうか．
62S：･･･．1 分 10 秒後
63I：じゃあもう 1 回確認．反対って言ったよね．
64S：はい．
65I：なぜ反対か，もう 1 回理由を言ってもらえる．
66S：え〜と，a と b と c には何かしらの数字が入らないと，この式やこういう式にはならないから，何かしら式が，というか，数が入ると思います．
67I：なるほど．それに基づいてできないですか．
68S：え〜と，a が１で，b が３で，c が２だと，この式は，あっ，違う違う．･･･たすから，･･･，c が３かな（２を３と書き直す）．多分これ（c）が３だと，$1+9+15$ になって，これが多分これで 25 になるんですよ．
69I：で，その方針でどうですか．
70S：あるはある．
71I：そうすると，この値は求められるんですか．
72S：･･･，あっ，そういうことか．この−10 があるということですか．･･･，15．
73I：どんなふうに考えたのですか．
74S：え〜と，今適当にこの式を成り立たせるために，a を１，b を３，c を３と考えて，$1+9+15=25$ という式がつくれて，両方とも等しくなったから，え〜，$1+9+15$ にこの−10 を加えてみると，15 になりました．
75I：なるほど，答が出たと．
76S：答えが出ました．
77I：じゃあ，今のやり方を見直してみようか．
78S：はい．
79I：今，S 君は，a と b と c に数を入れて 25 に成り立たせるように値を決めたんだよね．そういうふうにしないとできないですか．
80S：僕はそうしないとできないです．
81I：いつもいちいちそうやって，a と b と c の数を求めないとできないのですか．
82S：はい．
83I：もうちょっと，よりよい方法を，せっかく答えが出ているので，見つけてみようね．
84S：あっ，あっ，わかりました．（笑いながら）え〜と，ここ（$a+3b+5c=25$ の $a+3b+5c$）とここ（$a+3b+5c=-10$ の $a+3b+5c$）とが等しいということは，この 25 と $a+3b+5c$ は等しい関係なので，普通に，25−10 をすれば 15 と答えが出ます．
85I：それはどういうふうにみたのですか．図にかいたりなんかして，今考えたことを書いてくれるといいんだけど．
86S：ここここが等しいということは，この−10 を抜かした，ここ（$a+3b+5c$）が 25 ということがわかっているので，25 から−10 をすれば 15 と出ます．
87I：そうすると，今 S 君が一番最初にみていた $a+3b+5c$ ね，これと，よりよいやり方がわかったときのこの $a+3b+5c$ の見方は違いますか．
88S：違います．
89I：どんなふうに違いますか．

90S：え〜何て言うんだろう．最初は，25を隠してみると，よくわからない数字で，何を当てはめればいいかわからなかったけど，ここ（a＋３b＋５c）とここ（25）の関係がわかったので，これが，括弧になって，このままひとまとまりで25に見えて，そこから10をひけばいいということが見えるようになりました．
91I：それ，ちょっとそこに書いてくれるかな，自分の考えを．それで終了しよう．最初はどういうふうに見えたの．
92S：これ，感想みたいな感じで書けばいいですか．
「最初は，a＋３b＋５cがわからない文字にみえたけど，問題を解いていくにつれてa＋３b＋５cをひとまとまりの25に見えて，25－10＝15という僕が思っていた式より簡単にできました.」と書く．
93I：ありがとう．それで，ここの最後ね．わからない文字にみえたというのは，もう少し詳しく言えますか．
94S：えっと，a，b，cって３つ文字があって，普通ならxとyなら２文字，２つしかないからどっちかを解けば，どっちかが出てくるんですけど，３つあると，こんがらがっちゃっていたけど，こういう感じで問題を代入してみて解いてみると，こっちとこっと，左辺と右辺が等しいということがわかってきたので，そうすると，a＋３b＋５cが１つのまとまりにみえてきました．
95I：こっちは１つのまとまりと見たんだよね．そう見える前は，それに対してどんなふうに見えていたのかな．
96S：なんか，１つ１つの区切りで見えていて，これとこれとこれをたしたら，これになるという感じだったんですけど．
97I：なるほど，わかりました．
98S：ありがとうございました．

Y.K
1I：まず，この問題．前にもやってもらったと思いますが，じゃあ，ちょっと解いてもらっていいですか．お願いします．
2S：（問題１に取り組む．代入法で解く.）１分50秒後
3I：これ，どんなふうにやりましたか．
4S：えっと，これー，この式，２つ目が出てきたので，y＝13－３xということなので，ここに代入して２xプラス，この13－３xを代入しました．
5I：それで，yが13－３xということと言ったんだけど，それ，どういう意味．もう少し詳しく言うとどういう意味ですか．下の式の意味は．
6S：y，ん，yは，このyは，何って言ったらいいんだろう，yは13･･･，ここにy=13－３xと書いてあるから，ここに･･･，合っているかな．
7I：yと13－３xはどういう関係．
8S：等しい関係．
9I：等しい．
10S：等しいというか，同じです．
11I：それで，そこに入れ替えたのね．
12S：はい．
13I：これ，今，代入法を使ってくれたんだけど，加減法という方法もありますよね．そっちではできますか．
14S：加減法．これを，２xを移項して合わせてやるやつですか．
15I：そう，どっちを移項してもいいけど．下の－３xを移項してもいいかもね，左辺に．
16S：ああ，xを，はい．
17I：じゃあ，ちょっとやってみてください．
18S：（加減法で取り組む.）１分15秒後
19I：はい，ありがとう．これさ，今はどういうふうにやったのですか．

20S：えっと，x か y のどっちかを消したかったので，消すためには，プラスとマイナスで 0 にするために，ここにマイナスを入れて，プラスだったのをすべてマイナスにして，そこから消してしまって，x を基にして，求めました．
21I：はい，そしたら，この問題1は，下の式の方が $y=$ になっているよね．こういう式のとき，K 君は，この２つのやり方のどっちを使うのですか，いつも．
22S：いつもどっちだろう？･･･．最近，全然やっていないから．でも今日は，なんかこれ見たとき，あっと思って，こっち（代入法）をやりました．
23I：あっと，思った．それどういうふうに思ったの．
24S：x がここ一緒だったので．
25I：ん，y？
26S：ああ，y が一緒だったので，ここに代入できるなあと思ってやりました．
27I：前さ，7 月にやってもらったとき，K 君はさ，加減法使っているんだよね．しかも，どうして今日 K 君に来てもらったかというと，これさ，加減法は y をそろえているよね．このとき，x をそろえているのさ，覚えている？
28S：ああ．
29I：そのとき，何を考えていたのかなと思って．
30S：x だと，駄目ですよね．
31I：できないことはないんだよ．
32S：できますか．
33I：だって，これでいいでしょ，これで．（質問紙調査時の K 君の解答をみながら）ここが $5y$ で間違えちゃったけど，$y=-11$ が出てくる．そこをミスっちゃったから，答えが出なくてわからないと書いてくれたんだけど，これでもいいんだよね．
34S：これ，ここに何をかけているんだろう．
35I：だから，x をそろえるために，上の式に３かけて，下の式に２を書けているんじゃあないの．
36S：ああ，同じ数にするために．
37I：そう，そう．そのとき，どんなふうに考えたのかと思って．
38S：たぶん，x をなくそうとしたんだと思う．
39I：そうだよね．これみると y は揃っているんだよね．今のときもそうだよね．y が揃っているからって言ってくれたよね．こっちは，揃っているのに，わざわざどうして x にいったのか．
40S：いやー，何でだろう．いつも自分，こっちの加減法のやり方でやっていたので，代入法には慣れていなくて．それで，どっちかを消そうと思って，そんな深く考えなかったので，深く考えないで，ぱっとやって，ああもうわからないってなって，ごちゃごちゃになってやってしまったですね．なんでだろう．
41I：加減法をいつも使うのね．
42S：はい．
43I：それはなぜ．
44S：T 先生に習ったときに，加減法の方がわかりやすくて．
45I：ああ，自分なりにわかりやすかったんだ．
46S：はい．
47I：それで，今日は代入法使ったよね．そのとき，多くの人の声を聞くと，$2x+y$ の y に $13-3x$ という２つの項を代入するじゃん．
48S：はい．
49I：これに抵抗があるっていう子がいるんですけど，これはどうですか．
50S：でも何か，連立をやっているから，こういう形（加減法）にしたくなる．連立と言えばこういう形だから．だから，こっちの形にしたくなるから，こっちはちょっと違和感があるかもしれない．
51I：今みたいに代入することに対してはどうですか．
52S：代入もそんな慣れていなくて，符号間違えとかあっちゃうから，間違ってしまったんですけど，こっち（加減法）の方が安定してできると思っている．
53I：ありがとう．じゃあ次のもう１つね．

54S：はい.
55I：次の２問目はこれです.（問題を読む）いかがでしょうか.
56S：（問題に取り組む. すぐ書き始める.）1 分 40 秒後
57I：じゃあ，さちこさんの考えに賛成ですか，反対ですか.
58S：反対です.
59I：はい，じゃあやってみてください.
60S：え～と･･･. 1 分 30 秒後
61I：a と b と c を何にしたのかをちゃんと書いて.
62S：（続ける）この後どうすればいいんだろう･･･. 25 だからひく 10 って何だろう･･･.
1 分 5 秒後
63I：答は.
64S：15
65I：それ，どういうふうに考えましたか.
66S：えっと，まずここが，ここがわかっているので.
67I：ここって何？
68S：25 です.
69I：あっ，はい.
70S：25 がわかっているので，a と b と c に入る数を何でもいいから適当に振っていって.
71I：そうしたら，どうなったの？
72S：そしたら，a が４で，b が２で，c が３になって，全部ここでかけて（b が３倍，c が５倍）たしていくと 25 になるので，ここの数が＝25 とあったので，25－10 は 15 かなと思いました.
73I：そうすると，今，ひとつひとつ a と b と c を求めて入れたよね.
74S：はい.
75I：違う，a と b と c でもできるはずだよね，25 になれば.
76S：はい. でも，できるんですけど，結局は 25 になるので.
77I：ということは，a と b と c がわからなくてもいいんだよね.
78S：はい.
79I：もうちょっと，今，せっかく 15 が出たから，答えが. もっとよりよい方法をどういうふうに考えますか.
80S：ん～.
81I：a が４で，b が２で，c が３なんてわからなくてもできるんでしょ. 違うの？今の K 君の言い方だと. もっとよりよい方法考えてみる.
82S：なんだろうな･･･. この数はもう絶対なので.
83I：うん，この数って，何.
84S：a＋３b＋５c は 25 ってなっているので，ここは，求めなくっていいので，この a＋３b＋５c は 25 って書いてあるので，ここは 25.
85I：ここっていうのは.
86S：a＋３b＋５c は 25. でもここは計算しなくていいです.
87I：なるほど. いいのね. それで.
88S：で，ひく 10 ってあるので，25－10 をして 15 になりました.
89I：なるほど. さっきやったときと文字式の見方は違いますか. 今，こっちのやり方と違いますか.
90S：こっちの方が楽. これ，いちいちこんなことしなくていいので.
91I：その a＋３b＋５c の見方は違いますか.
92S：はい.
93I：どんなふうに違いますか.
94S：え～と，さっきは，ここを求めようとして.
95I：ここというのは.
96S：a と b と c を求めようとして，なんで 25 になるのかを求めようとしていたのですけれど，a と b と c に入る数がわかっていないけど，答えが 25 なので，求めなくていいということが思

い浮かんで，で，ここに.
97I：どこに着目したんですか.
98S：a＋３b＋５c がまたここ（a＋３b＋５c－10）に書いてあったので，ここと，a＋３b＋５c と一緒なので，ここは，イコール 25 になっているので，ここ（a＋３b＋５c－10 の a＋３b＋５c を指して）が 25 だと思って，25－10 をして 15 になりました.
99I：なるほど．さっき，こっちの方だと，a と b と c に注目したといったよね．こっち（a と b と c に入る数がわかっていなくても解けるとした方を指して）はどこに注目したのですか.
100S：この式のここです．a＋３b＋５c は 25 に着目しました.
101I：じゃあ，a と b と c，１個１個に着目したのではなくて，これは？
102S：式全体.
103I：を見たのですか.
104S：はい.
105I：そしたら，a と b と c は求めなくていいと.
106S：求めなくていい.
107I：なるほど．そうすると，今やった，a が４で，b が２で，c が３，他の時も考えられるよね.
108S：はい.
1091I：１個じゃないよね.
110S：この４と２と３がってことですよね．はい.
111I：だから，それをわざわざ求めなくても.
112S：これはもう全部何にでもできるので，わざわざ数にしなくて，この式に注目した感じです.
113I：ありがとう．よくわかりました.

Y.W
1I：じゃあ，始めます．最初は前にやってもらったんですけれど，この連立方程式です．これをまず解いてもらいたいと思います．いいですか．お願いします.
2S：はい.（解き始める）55 秒後
3I：いいですか．はい，じゃあ今，解いてもらいましたけど，使った方法，なんていう方法か知っていますか.
4S：代入法.
5I：はい．もういっこありますよね，やり方が.
6S：はい.
7I：そのもういっこのやり方でできますか.
8S：はい.
9I：ちょっとやってもらっていいですか．x を出すだけでいいんですけれど.
10S：はい.（解き始める）30 秒後
11I：今，W 君は，それを代入法で解いたんですよね．どうしてそれを使おうと思ったのか，どんなふうにやったのか，どんなふうに考えてやったのか説明してもらっていいですか.
12S：習ったとき，ここに y＝の形になっているときは，この（２x+y＝５の）y に代入した方が簡単だと教わったりして，だから，自分の中でも y＝とか x＝とかになっていたら，そういう形で解くのが身についているので，代入法で解きました.
13I：それで代入法を使ったのは，もう一度．これをみてすぐ代入法を使いましたよね.
14S：はい.
15I：それ，どんなふうに式をみてやったのですか.
16S：ここに y＝13－３x となっていて，上の式が２x+y＝５なので，ここの y にこれ，なんていうんだろう，y＝13－３x と y が同じだから，だから y のところにこれ（13－３x）を代入して.
17I：なるほど．この y は何と等しいの．こっちはいいよね．y＝13－３x は，y と 13－３x が.
18S：一緒.
19I：こっちは．y はこれ（13－３x）と一緒．いろいろな人に聞くと，こっちは y じゃないですか，１つだよね，文字が．それに 13－３x という２つの項をもっている式を代入するよね．こ

れを嫌がったり，抵抗があるって言ったりするんですけど．それについてどうですかW君は．
20S：そんなに，そこまで，全然ないです．
21I：それはどういうふうにみるのですか．
22S：どういうふうに･･･，何かこれ（$-3x$）をこっち（左辺）にもってきて加減法でやっちゃうと，符号のミスとかも多分おきやすくなっちゃったりするから，それだったら，これ（$13-3x$）を代入しちゃった方がいいかなって．
23I：なるほど，わかりました．では，もう1問ね．今度はこっちです．（問題を読む）まず，賛成か反対かを示してもらって，どうしてそう思ったのかを書いてもらう．そして最後にはあなただったらどう解きますかというのを書いてもらっていいですか．はい，じゃあ，お願いします．
24S：はい．（解き始める）20秒後（反対と書く）
25I：どうしてそう思いますか
26S；え〜と，これが，このときに，もしaが1とかだったら，bとc，あっ，aが1で，bが2だったら，え〜と，cに，何に5をかけて25になるって考えていけば，なんか，aとbとcにいろいろな数字を入れていけば，多分解ける．
27I：なるほど，じゃあやってみる，その方針で．ちょっとそこにやってみて．
28S：あっ，違う．違うやり方でもいいですか．
29I：うん，いいよ．どうぞ．
30S：（書き始める）３分後
31I：それで答えは．
32S：15．
33I：で，今，どう考えたのですか．
34S：え〜と，いろいろ迷ったんですけれど，まず，bとcの数を1としたときに，aにあと何の数を入れれば25になるかを考えて，それをこの式に代入して解きました．
35I：なるほど，ここでやっていたことは何をやっていたのですか．
36S：ここ．
37I：うん，今，×を付けているよね．
38S：ここは，もし，aが1，bが２，cが３の場合の式を書いたけど，これは25にならなかったので，×を書きました．
39I：なるほど，それは探せたんだ．
40S：はい．
41I：それが，$a=17$で，$b=1$，$c=1$．
42S：はい．
43I：それで，それをこっち（$a+3b+5c-10$）に代入してくれた．そして，-10をした．
44S：はい．
45I：いいと思うのですが，もっとよりよい方法はないですか．
46S：えっ，連立方程式かな．いやでも･･･，そうすると･･･．
47I：今の方法の延長線上で，もっといい方法を考える．だって，かなりW君，試行錯誤しているよね．
48S：はい．
49I：もっと簡潔にできる方法はないでしょうか．
50S：･･･．（しばらく考える）45秒経過後．もっと簡単な方法･･･．代入かな．
51I：今やったのが代入だよね．
52S：これ，$a=-3b-5c+25$にして，ここに代入してできるかな．
53I：ああ，なるほど．
54S：（$-3b-5c+3b+5c+25-10=15$）と書く．
55I：うん，だから，まだそこからいけますか．わざわざ代入しないとだめですか．
56S：･･･．ああ，わかった．
57I：おお，わかった．
58S：えっと，ここ（$a+3b+5c=25$の$a+3b+5c$）のところをA，そしたらこっち（$a+3$

b＋５c－10 の a＋３b＋５c）も同じなので，Ａで，Ａ＝25 ということは，25－10 なので，15 となります．
59Ｉ：なるほど．最初に a と b と c を代入していたときと今の文字式の見方は，同じですか，違いますか．振り返って．
60S：同じかな．
61I：同じ．どういうふうに考えたの．
62S：ここ（a＋３b＋５c）が同じとき，文字で置き換えられるということを教わって，それでこっち（a＋３b＋５c－10）はイコールがなくて，こっち（a＋３b＋５c=25）はイコールで，Ａ＝25 のときということは，これ（a＋３b＋５c－10 の a＋３b＋５c）がイコール 25 ということだから，それに代入してだから，代入することは変わらないから．
63I：代入するということは変わらないね．今，ここの見方は．ここ（a＋３b＋５c）に線を入れたよね．そういうふうに見たときと，こっちでやろうとしていたときとでは，見方が同じですか．
64S：違う．
65I：どんなふうに違いますか．
66S：こっちはなんか，いろいろ考えちゃって．代入とかいろいろ面倒くさくやっちゃったんですけど，こっちはまとめて見やすい感じにして，それで，自分のわかる感じにした．
67I：これはまとめている．どういうふうにまとめてみているの
68S：1 つの文字として．
69I：何を．
70S：a＋３b＋５c という式をＡという１つの文字で置き換えてみている．
71I：こっちの見方は，今の見方と比べてどんなふうに説明できる．この a＋３b＋５c をどういうふうにみていたの．
72S：こっちは１つ１つにある数字を代入していって，ああ，b と c に代入していって，それで，あと，何をたせば 25 になるかということを考えた．
73I：明らかに見方が変わったんだ．それでわかった．
74S：はい．
75I：その a＋３b＋５c をどうすれば 25 になるかを考えたということね．
76S：ああ，そうです．
77I：わかりました．これで終わりにしたいと思います．ありがとうございました．

Y.Ic

1I：はい，じゃあまず最初は，連立方程式です．これを解いてみてください．お願いします．
2S：（解き始める．代入法で解く）1 分 5 秒後
3I：はい，ありがとう．これ何という方法か知っていますか．連立方程式の．
4S：代入法．
5I：うん，代入法ね．もういっこありますよね．そっちで解けますか．
6S：（うなずく）
7I：じゃあ，やってみてください．
8S：（加減法で解き始める．x を求める）30 秒後
9I：はい，ありがとう．y は一緒ね．
10S：はい．
11I：今，なぜ，この方法，代入法を使ってやったのか，説明できますか．振り返ってもらって，どうですか．
12S：ええと，y=13－３x だから，y は一緒だから，括弧で 13－３x をここ（２x+y=５の y）に入れて計算した．
13I：今，括弧を付けてくれたよね．この意味は．(13－３x）と書いてくれたよね．どうして括弧をつけたのですか．いいんですよ，どうして括弧をつけたのか説明してくれれば．
14S：ふつうに，慣れで．

15I：慣れで．そのときどんなふうに考えているのかな．
16S：･･･．なんか，括弧をつければ，これ（yの係数）は＋１だと思うから，分配法則．２つにかけるために括弧をつけてやった．
17I：この代入法を嫌がっている生徒は，yは１つの文字じゃん．で，13－３xという，Ｉ君が今入れてくれたように，１つの文字が，２つの項になってしまう．これが嫌だと言うんですけれど，この気持ちわかる．
18S：ごちゃごちゃになるからだと思う．
19I：ごちゃごちゃになる．
20S：という気持ちはあるけど，こっちでやった方がわかれば簡単な気がする．
21I：わかるというのはどういうところが，簡単になったの．
22S：勉強したときに，最初は，自分も－３xをこっち（左辺）に移項して普通に計算していたけど，代入してやった方が自分的には速くできたから，こっちでやるようになった．
23I：速くできたというのが理由かな．じゃあもう１つね，問題．もういっこいきます．これも前にやってもらったと思うんだけど，さちこさんの問題です．（問題を読む）ちょっとやってみてください．
24S：（問題に取り組む）
25I：賛成ですか，反対ですか．
26S：反対．
27I：じゃあ，反対と書いてもらって．
28S：（反対と書く）
29I：どうして反対ですか，理由は．
30S：（しばらく考える）1 分 10 秒後
a＋３b＋５cが 25 のときだから，ここが一緒で，25 になるから．
31I：どこが一緒なの．
32S：a＋３b＋５cが 25 だと思うから，25－10 をして 15 だと思う．
33I：なるほど．答えが出ると．だから違うと．じゃあちょっとあなたのやり方を書いてくれる．説明を丁寧に書いてもらって．
34S：（書き始める）1 分 10 秒後

a + 3b + 5c = 25 だから a + 3b + 5c)−10 の a + 3b + 5c のところは 25になると思うから 25 − 10 = 15 で 答えがでるので ちがうと思う

35I：ありがとう．どんなふうに考えたのですか，解くときに．
36S：a＋３b＋５c＝25 のときと書いてあるので，ここ（a＋３b＋５c－10）もa＋３b＋５cと書いてあるから，ここが 25 になるから，そこから 10 をひけば値が求められると思った．
37I：なるほど，この式をどんなふうにみたのか，鉛筆で入れてくれる．こういうふうに囲っていたよね．どんなふうにみたの．１個１個別々．
38S：一緒．
39I：鉛筆で囲むと，どういうふうにみた．
40S：ここイコール 25．25 は答え．ここと ここが一緒．

a＋３b＋５c＝25のとき，a＋３b＋５c－10の値を求めなさい。

41I：そうするとこれはまとまってみているの．
42S：このときと書いてあるので，ここ（a＋３b＋５c－10 のa＋３b＋５c）も 25 だろうなと思って．
43I：今のをしつこく聞いているんだけど，a＋３b＋５cはaと＋３bと＋５cはバラバラ？それとも今囲ってくれたようにこういうふうにみえているの．見え方だから難しいけどね．見え方っていうことは考え方なんだけど，どういうふうにこの式をみているのかなということに興味があるんだけど，I 君が．どう．
44S：一緒にみている．

45I：一緒というのは.
46S：これ（a＋３b＋５c）がなんか，１つの文字として.
47I：１つとみているんだ.
48S：それが両方に，こっちにも同じやつがあったから.
49I：なるほど．あったから.
50S：25 とみた.
51I：これを 25 に置き換えた．なるほど．とすると，さちこさんは a と b と c の値がわからないとわからないといっているんだけど，これに対して，さちこさんに何て説明しますか．これが最後ね.
52S：入る数がわからなくても，それを全部たした数が 25 なんだから，こっちにも同じやつがあるから，だからここが 25 になるから，25－10 をすれば値が求められる.
53I：わかりました.

Y.Ik
1I：じゃあ，早速，連立方程式を問題です．この問題をですね，自分のやり方で解いてみてください.
2S：名前は.
3I：うん，書いてください.
4S：（名前を書いて，問題に取り組む）1 分 10 秒後　これ，わからないときはどうすればいいですか．わからないとき.
5I：ん，わからないとき？　どこまでわかったのかがわかっていればいい．ここからわかりませんと言ってくれれば.
6S：ここからわからないです．（２x＋(13－３x)＝５を，２x－３x＋13＝５，－x＋13＝５として止まる）
7I：ん.
8S：ここからわからない.
9I：それだって，できたようなものだよね．13 をどうするんですか.
10S：ああ，わかりました，たぶん．（－x＝－13＋５，－x＝－８，x＝８，x＝－８と書く）
11I：ん，なんで２つになったの，どっち答えは.
12S：こっちが答えです．（x＝－８を指す）
13I：どうして，そこでできているじゃん．上でいいんじゃないの.
14S：いや，x＝－８で.
15I：－x＝－８でしょ.
16S：ああ，上です．すみません.
17I：いいよ．それで，y ね.
18S：（y を求める）
19I：うん，今，連立方程式には２つやり方がありますよね，勉強した方法が．これはどういう方法で解いたのですか.
20S：y に代入してやる方法.
21I：なるほど，どんなふうにやったのか教えてくれますか.
22S：えっ，普通に，これを y のところに代入して，計算していってそれで，13 はこっちに移項して符号が変わって，－８になって，そしてこのマイナスをうつして＋８.
23I：なるほど．それで，ここの 13－３x を代入したというところを聞きたいのですけれど．どんなふうにそこを考えたのですか．括弧つけてくれているけれど.
24S：えっ，代入したから.
25I：どうして代入できるの.
26S：ここが y＝だから.
27I：もうちょっと詳しく.
28S：y＝で，ここ（２x＋y＝５）の y だから，ここ（２x＋y＝５の y）とここ（13－３x）が一緒

だから，これ（13－３x）をここ（２x＋y＝５のy）に，一緒だから，こうしました．
29I：代入ね．
30S：代入しました．
31I：はい，このときに括弧をつけている意味は．どうして括弧付けているのですか．
32S：付けるのかなと思って．
33I：うん，そこまでが．こっちで括弧付けたよね．（２x＋(13－３x)＝５を指して）
34S：ここで付けたような気がして，付けました．
35I：なるほど．じゃあもう１つ解き方がありますよね，これは代入法というんですよね．もういっこの解き方ができますか．
36S：これしかわかりません．
37I：もう１つはさ，こっち側の－３xをこっちへ移項してやる方法．
38S：（首を傾げる）
39I：わからないね．わかりました．じゃあ次，2 番目ね．これです．（問題を読む）どうでしょうか．ちょっとやってみてください．
40S：（しばらく考える）20 秒後
41I：まず，賛成ですか，反対ですか．
42S：賛成．
43I：賛成．理由は．
44S：わからないから．
45I：どこがわからないの．
46S：このaとbとcの入る数がわからないから，その通りだと思う．
47I：その通りだと思う．なるほど．じゃあ解けない．次はさ，あなただったらどう問題を解きますかだけど．
48S：解けない．すみません．
49I：解けない．なんか考えてみようか．
50S：（しばらく考える）45 秒後
51I：本当にaとbとcがわからないとできないのかということですよね．そこどうですか．
52S：わからないとできない．
53I：できない．この式を２つ見比べてどうですか．さちこさんの考えはちょっとこっちに置いておいて．自分ならこの問題どうやって解きますか．
54S：ん，すみません．解けません．
55I：もし，aとbとcがわからなければ，aとbとcを考えてみるということはできませんか．
56S：･･･．
57I：だって，25 になればいいんでしょ．そういう数が見つかりませんか，aとbとcの．いいよ，気楽にやってみてください．
58S：（しばらく考える．a＝１，b＝３，c＝５として計算する）
59I：ええとさ，惜しいけど．aは１だよね，bは３×３で９だよね，それで 25 にするには残りいくつ．
60S：aが 1，９．
61I：残りいくつ．
62S：15
63I：でしょ．じゃあ，cいくつ．
64S：３
65I：でしょ．じゃあそこ訂正してみて．これで，この値がわかったじゃないですか．そうしたらそっち求まりませんか．
66S：･･･，ああ．
67I：いくつ？計算してみて．
68S：･･･15．（a＝１，b＝３，c＝３として）
69I：どうやって考えたの．まず，この１，３，３はどうやって求めたの．
70S：aに最初１入れたら，１だったとして，プラス，ここに－10 があるから，10 と同じのをつ

くって，１＋９でここと ここで０だから c に５をかけて 25.
71I：でも，ここだよね，この式（a＋３b＋５c＝25）が成り立つようにすればいいんでしょ．それどう，わかった.
72S：うん.
73I：そうすると，今，a に１を入れて，b に３入れて９にしたら，25 にするには，c がいくつになればいいかとみればいいんだよね．そしたら.
74S：c が３.
75I：うん．いいよね．それでこれ代入してみた．答え 15．さて，今，無理矢理 a と b と c を求めたよね．それ求めなくてできませんか，この問題．だから，さちこさんは a と b と c がわからないとできないと言っているんだけど．本当にわからないとできないですか.
76S：できた.
77I：できた．どう考える.
78S：これ.
79I：これは，今，a と b と c を無理矢理探したじゃない.
80S：ああ，無理矢理じゃなくてということですか.
81I：うん，具体的にそれがなくても出来ないですかという質問です.
82S：えっ.
83I：難しい.
84S：うん，難しい.
85I：これ考えてみて，a と b と c が具体的に１，３，３って I 君はしてくれたけど，そういうふうにしないと本当にできないのかどうかを考えてみてください．いいですか.
86S：はい.
87I：いいですか．はい，じゃあ終わります.

M.U
1I：では，まず最初に，この連立方程式の問題をちょっとやってみてくさだい.
2S：はい.
3I：じゃあ，お願いします．消しゴムは使わないようにやってください.
4S：(問題に取り組む．代入法でやるが解が誤り，x＝４，y＝１）1 分 30 秒後
5I：今，出してくれたよね．これ確かめるときどうしますか.
6S：代入して成り立つかどうか確かめる.
7I：うん，じゃあ代入してみて.（２×４＋１＝９で５にならない.）
8S：うふふ.
9I：成り立っていないよね．さてどこがいけなかったでしょうか.
10S：･･･.
11I：このプラス（２x＋(13－３x)＝５の＋を指して）は消しているんですか，消していないんですか.
12S：消していない.
13I：消していないよね．消していないけど，U さん，何やっちゃったの.
14S：かけ算.
15I：だよね．じゃあもう一度ここから先をこっちへ書き直してもらえますか.
16S：（もう一度，２x＋(13－３x)＝５から解く．解は正しく導く）１分後
17I：はい，じゃあまた同じように確かめてください.
18S：（２×８＋(－11)＝５と確かめる）
19I：最初からイコールで結んじゃうとおかしなことになっちゃうよね．確かめられた.
20S：はい.
21I：じゃあ答えはいいよね．今，この式をつくるときどんなことを考えたの.
22S：これですか.
23I：うん．だからこれね．一番最初にこれ（２x＋(13－３x)＝５）をつくったじゃないですか.

24S：えっと，これが y＝13－３x だから，これは y の値を表しているから．
25I：どれが，y の値を表しているの．
26S：y を出すには，13－３x をすれば y が出るとわかっているから，y のところに 13－３x を代入しました．
27I：それはどこの y のところに代入したのですか．
28S：２x＋y＝５の y に代入しました．
29I：もう１回この解釈を教えて．y＝13－３x はどういうふうに式をみるのですか．
30S：y は，上の式の２x＋y＝５のところの y を求めるのに 13－３x を代入しました．
31I：この方法はなんていう方法か知っていますか．連立方程式は２つ方法があるよね．
32S：代入法．
33I：じゃあ，もう１個知っていますか．
34S：加減法．
35I：うん，それはできますか，この問題で．
36S：はい．
37I：じゃあ，やってみてください．x でも y でもどちらか片一方を出してくれればいいからね．
38S：はい．（加減法で解く．y 消去で x を求める）
39I：OK．２つやり方を知っていて，どうしてこっちを使ったのですか，代入法を．
40S：えっと，y＝13－３x があって，y の式がわかっているから，加減法でやるよりも代入法使った方がやりやすいから．
41I：なるほど，よくわかりました．次の問題ね．今度はさちこさんの問題です．（問題を読む）ちょっとやってもらっていいですか．はいどうぞ．
42S：（しばらく考える）35 秒後
43I：賛成か反対か，どっちですか，まず．
44S：（反対と書く）
45I：反対．それはなぜですか．
46S：こっち（a＋３b＋５c＝25）の式が求められれば，こっち（a＋３b＋５c－10）の式が求められるから．
47I：こっちの式が求められるというのは，具体的にどういうことですか．
48S：･･･．
49I：求めるって，何が求められればいいのですか．
50S：a と b と c が･･･．
51I：なるほど．それはどうですか，その方針で．
52S：（考える）30 秒後
53I：今，U さんが言ってくれたのは，a と b と c に何か入れて 25 になるようにしたいんでしょ．どう，探せる？
54S：１個１個やらないとわからないから･･･．
55I：じゃあやっぱりさちこさんと同じ？でも反対なんでしょ．
56S：時間をかければできる．
57I：いいよ．うん．ちょっと考えてみようか．
58S：（しばらくして，「a＝１･･･」と書く）無理な気がする．
59I：無理な気がする．じゃあどう，厳しい．
60S：（うなずく）
61I：じゃあ，今，この式をどう見ているのかな．a＋３b＋５c＝25 ってどういう意味で，どんなふうに捉えているのですか，U さんは．
62S：この式．
63I：うん，左辺と右辺は．
64S：そのまま．
65I：どういうこと，そのままって．
66S：a＋３b＋５c＝25 ってそのまま．
67I：そのままでみている．a に１を入れて，b にいくつ入れればいいと思う．もうちょっとだけ

頑張ってみない.
68S：･･･.
69I：ここ（５c）は必ず５の倍数になるから，25 って５の倍数じゃん，だから，うまくぴったりくればいいんだよね.
70S：･･･.（１＋３＋20 と書く）
71I：ここいくつにすればいい．そうすると，a が 1 で b はいくつということ.
72S：b は３.
73I：ちょっと下に書いてみて.
74S：（a が１，b が３，c が 15 と書く）
75I：15 だけど，ほら５倍しているから.
76S：あっ.（c が３と訂正）
77I：そうだよね．それは 25 になっていますよね．a と b と c に入れて．OK．じゃあ，そっち考えてみようか.
78S：（「１＋９＋15＝１＋９＋５＝15，値は 15」と書く）
79I：ああ，そうだね．そしたら，今，探すのが面倒くさいよね．本当にこのさちこさんが言っているように a と b と c がわからないとこの問題解けないのですか．そこがちょっと知りたいのですけれど.
80S：･･･．30 秒後　ぱっと見じゃあわからないかもしれないけれど，a と b と c だったら，一番求めやすい５倍とかになっている c から見つければいい.
81I：なるほど．そうするとやっぱり U さんだったら a と b と c を求めるんだね．わかりました．a と b と c がわからなくてもこの問題解けるかなということも考えておいてほしいと思います．ありがとうございました.

H.M

1I：じゃあ，この問題です．連立方程式ですけれども，解いてください．時間を上げますので．はい，じゃあ，お願いします.
2S：名前を書きますか.
3I：はい，名前を書いてください.
4S：（解き始める　等値法）1 分５秒後
5I：はい，ありがとう．どんなふうに考えてこのやり方を使いましたか.
6S：えっと，まず最初に，この上の方（$2x+y=5$）が，下の式（$y=13-3x$）の項と合っていないから，移動させて，これを同じ形にして，これ（$y=13-3x$）だったら，難しいというか見づらいので，x の項を前にもってきて（$y=-2x+5$，$y=-3x+13$），両方とも y＝になっちゃっているから，それで，この２つを結んじゃえば x が出るから，x を出したら，x に８を代入するんですけど，マイナスがつくので，自分はマイナスがあまり好きではないので，こっち（$2x+y=5$）に代入して計算したら，－11 になったという感じです.
7I：じゃあ，上（$2x+y=5$）に代入したんですね．下（$y=13-3x$）に入れても同じ答えになってますか．チェックしてみて.
8S：はい.（$y=13-24$，$y=-11$ と書く）なっています.
9I：うん，なっていますね．大丈夫ね．今，両方とも y＝にしたんですけれど，どうして下（$y=13-3x$）に合わせたのですか.
10S：え～.
11I：上（$2x+y=5$）に合わせるということだってあるよね．下に合わせたというのはなぜ.
12S：え～，こっちが最初から y＝の形になっちゃっているから，だったら，y＝の形に合わせちゃった方が計算したときに楽なので，y＝の形にしました.
13I：はい，よくわかりました．y＝の形に両方したよね．それでさ，これを $-2x+5=-3x+13$ というふうに等しくしたよね．これはどうしてこのように等しくしていいのですか.
14S：え～，これはお互いに y＝になっているから，これは y に等しいということだから，お互いに y と等しいということになっているから，それをイコールで結べば，答えが出てくるから，

それをイコールで結びました．
15I：これなんか，全然違う２つの式だけど，これとこれは等しいでいいの．
16S：･･･，え〜．
17I：言っていることわかる．
18S：全然式は違うけど，一緒でいいかな．
19I：イコールで結んでいるじゃないですか．これはいいのね．確認なんだけど．
20S：いいと思う．
21I：どうして．
22S：y＝だから．
23I：y＝だからってどういうこと．もうちょっと詳しく．
24S：同じ文字と，同じ，これは何か，お互いに x がついているし，整数？定数だから普通の計算をしても大丈夫だから．
25I：等しいでいいと．はい，ありがとう．じゃあ次ね，もう１個いきます．今度はこういう問題です．（問題を読む）どうですか．
26S：これイコールじゃないですよね．（a＋３b＋５c－10 の式を指して）
27I：イコールじゃないよ．－10 ね．じゃあちょっと考えて．
28S：（しばらく考える）1 分後
29I：どう，賛成ですか，反対ですか．
30S：賛成．
31I：どうして．
32S：正直言って自分もわからないのと，やっぱり，こっち（a＋３b＋５c＝25）だったら A＋B＋C＝何とかってやって，A＝にもなるし，B＝にもなるやつがあるので，たぶんそれでできると思うのですけれど，これ（a＋３b＋５c＝25）のとき，これで解こうというのがすぐ出てこなかったので自分出し方がわからないので，なんとも言えないと思いました．
33I：なるほど，こっちはちょっとわかりそう．どんなふうにわかりそう．
34S：例えば，連立方程式にするんだったら，ここの数字イコールこれにして，この数字イコールこれにすれば一応式はできるかなと思って，できなかったらまたもう１回考え直せばいいかなと思っていました．
35I：でもこのときは２つじゃないんだよね．a＋３b＋５c が 25 なんだよね．このとき，これはいくつになりますか，この値はいくつになりますかという問題なのです．
36S：･･･．
37I：もう１回改めて見てどう．
38S：･･･．え〜．解の公式で入れる･･･．
39I：これは，２次方程式じゃあないからね．こっち（連立方程式）はこれ（y）とこれ（－２x＋５）が等しいんだよね．こっちは何と何が等しいのですか．
40S：このひとたち（a＋３b＋５c）とこれ（25）が等しい．
41I：だよね．その目でこの値（a＋３b＋５c－10）を見ようというときにどうですか．
42S：イコールがないから見られないと思っちゃう．
43I：これ（a＋３b＋５c－10）で値がいくつかを見たいんだよ．
44S：ん〜．
45I：もうちょっと頑張ってみて．
46S：えっ，この値（a＋３b＋５c－10）でこれ（25）って言いましたか．
47I：ううん，これ（a＋３b＋５c）が 25 なんだよね．そうなっているときに，この（a＋３b＋５c－10 の）全部の値はいくつかと聞いているんですよね，この問題．
48S：全部の値･･･．
49I：イコールがないから，等式じゃあないんだよ．この値はいくつかと聞いている．
50S：･･･．え〜．b か c のどちらかにマイナスが入るということ．
51I：やっぱり a と b と c の値がわからないとだめ？
52S：いや．そうだと思う．
53I：さちこさんに賛成だと思うんだけど，もう１回考えてみて，これ自身が 25．a＋３b＋５c が

25なんだよね．
54S：はい．
55I：$a+3b+5c-10$の値はいくつかという問題なのです．
56S：15.
57I：それ，どうやってわかったのですか．それをどうやって説明してくれますか．
58S：これだけで．
59I：うん，これだけってどれ．
60S：$a+3b+5c$だけで，25なんだから，それひく10をすれば15になるから，答えは15になるんじゃないかと．
61I：そうだよね．さっき，aとbとcの値がわからないとできないと言っていたとき，これが賛成だ言っていたときと見方は変わっているんですか．
62S：変わりました．
63I：今振り返って，最初はこうみていたけど，今はこうみえるというのを説明できますか．
64S：言葉で．
65I：うん，言葉で．図をかいてもいいよ．
66S：最初は，なんか，連立方程式を使うんだろうなと思って，中1のときにやったやつを思い出していたけど，今，言われて，これだけで単に25って書いてあって，それに引く10すればいいという話なのに，なんか難しく考え込んでいて，それで，ちょっとよくわからなくて，自分でもう1回話をきいたら，普通に簡単に解けたから，なんだ簡単じゃんって思いました．
67I：ちょっと，$a+3b+5c=25$と書いてみて，そこに．最初はわからなくてさちこさんに賛成と言っていたときには，この式をどういうふうに見ていた．
68S：えっ，この式．
69I：うん．
70S：例えば，$x=1$をどこかに代入するというのを連立方程式のところでやったから，このどこかに1とかを入れてみたら，どれかの数が求められて，そしたら，3つが全部求められるのではないかと思いました．
71I：なるほど，じゃあこれを1個1個見ていた．
72S：はい，全体じゃあなくて1個1個見ていました．
73I：それが，今，もう1回書いてくれる，答えを出してくれたときには，それがどういうふうに見えたの．
74S：えっ，これを．
75I：そう，$a+3b+5c=25$をちょっともう1回書いてみてくれる．それがどう見えましたか．
76S：ええと，まず，これを全体で見て．（$a+3b+5c$を○で囲んで）
77I：こういうふうにまとまって見えた．
78S：はい，見えました．それで，これは後で置いておいていいかなと思って，これとこれが一緒なら，これは頭の中で25になって，そのわきで-10がついてくるだけだから，$25-10$をすればそれが答えになるということを頭の中でやりました．
79I：なるほど，それでいいよね．aとbとcはわからなくてもいいんだよね，この問題．
80S：はい，そうです．
81I：それがわかってくれたんですね．
82S：楽しいですね．うふふ．
83I：どう振り返ってみて，最初わからなかったんだよね．
84S：一瞬，見た瞬間，無理だと思いました．
85I：どうして．
86S：だって，絶対これは連立方程式の面倒くさいやつをやると思っていました．
87I：だけど，こっちイコールないからね．
88S：そう，それで，イコールがないという瞬間にどうやればいいんだろうと思いました．こっちにはイコールがあるのに，なぜこっちにはイコールがないのだろうと．だから，これはいちいち代入するやつかなと思って，だけど，気付いてみると意外と簡単でおもしろかったし．
89I：なるほど，ここ（$y=-2x+5$を指して）もさっきは，$-2x$とたす5といったけど，これ

も y と何が等しいと見えるのですか.
90S：これ（－２x＋５を指して）１つ.
91I：それ囲むとどうなるのですか．どういうふうに見えるのですか.
92S：こう．y＝－２x＋５を○で囲み，その後－２x＋５を○で囲む）
93I：イコールで全部一緒に見えているのね.
94S：はい.
95I：よく頑張ってくれました．じゃあ終わります．ありがとうございました.

M.A
1I：じゃあ，まず，この連立方程式です．これを解いてもらっていいですか．はい，お願いします.
1S：（問題に取り組む　代入法）2 分 20 秒後
3I：はい，どんなふうにやりましたか.
4S：代入法を使って，２x+y の y に 13－３x を入れて解きました.
5I：どんなふうに解いたのですか．y はどういうふうに代わったの．２x+y＝５のもう１回言って.
6S：２x＋13－３x＝５.
7I：なるほど．そうするとそっくり代えたのね，y を．代入法ね，A さん言ってくれたように.
8S：はい.
9I：もう１つのやり方知っていますか．もう１個方法があるよね，連立方程式を解くときに.
10S：加減法.
11I：加減法．わかりますか，加減法は.
12S：えっ，わからない.
13I：問題解くときはこれを使う.
14S：こういう形のときに，代入法で解きます.
15I：こういう形って，そこをうまく説明してほしいんだけど.
16S：ええと，片方が y= となっていたら，代入法で解くんですけれど，もし，こういう２x+y とか，下も３x+何 y とかだったら，加減法で解きます.
17I：なるほど，それで，これは加減法では解けないのですか.
18S：わからないです.
19I：わからないね．それで，代入法を嫌だという生徒の中には，y って１つじゃない，文字１つだよね．その１つに 13－３x という２つの項をもっている式を入れるということに抵抗を持っていると言うんですけど，A さんはどうですか.
20S：思わないです.
21I：思わない．そうですか．わかりました．じゃあもう１問ね．（問題を読む）どうですか．ちょっと時間を上げますので，考えてみてください.
22S：（しばらく考える）1 分 20 秒後
23I：いい．賛成ですか，反対ですか，まず.
24S：反対.
25I：じゃあそこに反対と書いてください.
26S：ここですか.
27I：うん．それで，なんで反対と思ったのか，これはどうですか.
28S：書きますか.
29I：口で言ってくれてもいいですよ.
30S：説明･･･.
31I：書く方がよければ書いてくれてもいいですよ.
32S：･･･．え～と，a＋３b＋５c=25，a＋３b＋５c－10 をひいたときに，この，ここが，ここまでが同じじゃないですか.
33I：どこからどこまでですか．線を引いてくれれば，印をつけてもらうとありがたいんですけ

ど.
34S：（a＋３b＋５c＝25 の）a＋３b＋５c と（a＋３b＋５c−10 の）a＋３b＋５c.（その部分に下線を引いて）
35I：なるほど.
36S：ひいたら，0 になって，25−10･･･.
37I：うん，こっちはイコールだけど，こっちは？イコールの式ではないからね.
38S：･･･.
39I：もう１回，ちょっと考えてみて.
40S：（しばらく考える）45 秒後
41I：今，考えたことを式に書ける．ひくとか言っていたよね.
42S：（a＋３b＋５c＝25 と a＋３b＋５c−10 を上下に書く）わからないです.
43I：今，どこまでわかったの．もう１回言ってくれる，わかったことを.
44S：なんかこのイコールがあって，こっちにはないから，わからない.
45I：で，どこまでが共通ってわかったの.
46S：共通は，この a＋３b＋５c が一緒というのはわかって.
47I：うん，わかったんだ．あとわかることはないですか，この２つの式から.
48S：わからないです.
49I：ここは，a＋３b＋５c が 25 のとき，この値はどうなっているかという問題だよね.
50S：･･･.
51I：とにかく反対ということはいい．反対ということは，さちこさんは a と b と c に入る数がそれぞれわかっていないからこれ（a＋３b＋５c−10）がいくつになるかわからないよと言っていることに反対なんだよね．そうだよね.
52S：（うなずく）
53I：いいよね．なんでそう思ったのかな．そんなに緊張しないで率直に言ってください．わかっていることを言ってもらって．わからないところは，どこがわからないのかを言ってもらえるとありがたいんだよね.
54S：（しばらく考える）
55I：難しい.
56S：（うなずく）
57I：ありがとうね．じゃあさ，こっち（問題 1）に戻って，今ここに代入したよね．y＝13−３x という下の式をみてもらって，この y＝13−３x って，この y と 13−３x はどういう関係だと見ていますか.
58S：･･･.
59I：難しい，言っていることが．答えられない？ y＝13−３x ってどういうことを表しているのかな．ここ（問題 2）でいくとこのイコールの式は，a＋３b＋５c＝25 だよね．これは，等式だよね，イコールで結んでいるから．これってどういう意味なのかな.
60S：･･･.
61I：難しいかな．じゃあ，さっき，ひき算をしようとしたのは，どういうふうにしようとしたの，ひき算って．このあと式書ける.
62S：（首を傾げる）
63I：じゃあ，確認もう１個．ここの線を引いてくれたこれは，どういう意味で線を引いたのですか.
64S：一緒.
65I：うん，ここが一緒だと．そう見たんだよね．ありがとう．あなただったらこれどう解きますか．今度は自分なりに考えてみるとどう．最後に．どうかな.
66S：だめです.
67I：そう．よく両方の式を見比べてくれたけど，だめ．難しい．わかりました．悩ましてしまってごめん．ありがとうございました．終わりにしたいと思います.

I.S

1I：じゃあ，ます，これが問題です．この問題自分ならどう解きますか，率直にやってみてください．はい，お願いします．
2S：はい．（しばらく取り組む　加減法，x 消去）3 分後
3I：はい，これどうやってやりましたか．
4S：これは，あっ，全部解説ですか．
5I：そうだね．どのように考えたのか教えてください．
6S：まず，これを移項して，あっ，－３x を移項して，３x＋y＝13 になって，x を消すために，あの，同じ最小公倍数６にするために，こっち（２x＋y＝５）に３をかけて，こっち（３x＋y＝13）に－２をかけて計算しました．
7I：なるほど，それで，この時点で x を消そうと思ったんだよね．
8S：はい．
9I：どうして．
10S：えっと，まず，y の答えを出すために，x を消そうと．
11I：この段階で，y を消そうと思わなかったの．
12S：ああ，そっか．いつも x を消しているから．
13I：いつもそうやっているんだね．
14S：はい．
15I：これは，加減法という方法だけど知っている．
16S：はい．
17I：もう１個方法があるのは知っていますか，代入法って言うんだけど．
18S：ああ，知っています．
19I：それこれに使えます．
20S：ああ，使えます．
21I：できる．
22S：ええと，はい．
23I：ちょっと，そこに式を書いてみて．
24S：（２x＋13－３x＝５と書く）
25I：じゃあ，解いてみて．
26S：（解く）30 秒後
27I：OK．そうすると，さっきのと同じになった．
28S：同じです．
29I：こういう方法もあるんだけど，これはどうですか．
30S：やりやすい．
31I：でも使っていないよね，S さんは．なんで？
32S：なんか，あんまりこっちは見えていなかった．
33I：見えていなかった．これがやりにくいとか，こっちを使う理由を教えてもらいたいんだけどね．
34S：こっちを使う理由は，多分，こっちの方が私的には確実にできる．
35I：なんで，こっちは確実にできないんですかね．
36S：ああ．
37I：そこを知りたいんだよね．
38S：ああ，なんか，あまり私はやりづらいかなと．言われて今，できるかなと思った．
39I：なるほど．やりづらいのは，どういうところがやりづらいのかな．
40S：こうなった時点で文字と数字がいろいろごちゃごちゃして入ってくる．
41I：はは，入ってくるね．
42S：マイナスとか変わっちゃいそうで．
43I：で，これ今，どういうふうにそれやったのかな．
44S：y＝13－３x ってあるから，ここ（２x＋y＝５）の y に入れた．
45I：その入れるときにさ，y って１個じゃん，だけど，13－３x って２個ここに入れることにな

るじゃん，そういうのが嫌だという人がいるんだけど，それはどうですか．わかる気がしますか．
46S：すごいわかる．
47I：すごいわかる．どんなふうにそれが嫌なのかな．
48S：あんまりはっきりしていない．
49I：何がはっきりしていない．
50S：いっぱい数字があるから，数字がごちゃっといっぱい出てきて，ぐちゃぐちゃになる．
51I：これ自体があまりはっきりしていない．はっきりしていないってどういうこと．
52S：なんか，xとか文字がくっついていて，わからない．
53I：余計わからない．文字がくっついているとどうしてわからなくなるの．しつこくてごめんね．
54S：はい，大丈夫．
55I：どうして文字が入ってくると，ごちゃごちゃしちゃうのかな．
56S：計算しづらい．
57I：わかりました．じゃあ，もう1問ね．もう1問挑戦してもらいたいと思うのですが，次はこれです．さちこさんが登場する問題です．（問題2を読む）
58S：書いちゃっていいですか．
59I：いいよ．まず，賛成か反対かはどうですか．
60S：いや，もしかしたら，なんかの方法で解けるかもしれない．
61I：おお，なるほど，ということは．賛成か反対かで言うと．
62S：反対．
63I：反対．じゃあ，どうですか．
64S：どう解けば･･･．ん〜．
65I：挑戦してみる．
66S：ん〜，どうやるんですか．
67I：この式で何か気が付くことはないですか．
68S：aとbとcと普通の数の4種類．
69I：何，4種類っていうのは．
70S：文字がa，b，cで違って，何にも文字がついていない数があるので．
71I：なるほど，他には．この2つの式を見比べてどうですか．
72S：ん〜．
73I：この式の中で気が付くことはないかなということなのですが．この問題文の四角で囲んだところね．
74S：ん〜．－10がよくわからない．
75I：－10がよくわからないってどういうこと．
76S：いきなり出てきたから．
77I：なるほど，この式（$a+3b+5c-10$）自体にどういうふうなイメージを持っていますか．
78S：イメージ．
79I：この式をどういうふうに読めるというか．
80S：ん〜．どんなイメージ．
81I：浮かばない．
82S：うん．
83I：じゃあこっち（$a+3b+5c=25$の式を指して）はどうですか．
84S：aとbとcに数が入っている．
85I：なるほど，aとbとcに何か数が入っているね．そういうイメージね．その数は具体的にわかりますか．
86S：全然わからない．
87I：何か求められませんか．
88S：連立方程式ですか．
89I：aとbとcに何か数が入っているというイメージなんでしょ．この場合ね，そうすると，a

と b と c に何か数があるわけでしょ，そういう意味でしょ．それを求められませんか．
90S：じゃあ，これ賛成．
91I：えっ，どうして賛成．
92S：求めようがないから．え～．
93I：今言ったようにここ（$a+3b+5c=25$ の a と b と c）には数が入るんでしょ．それで 25 になっているんでしょ．そうなるように a と b と c を見つけられませんかというのが先生の質問なんだけど．
94S：ん～，ああ．
95I：いくつか数を入れてみてさ．
96S：入れるの．
97I：入れてみてできないかな．
98S：え～と．
99I：c はいくつにする．
100S：２．
101I：２にするね．そこでいくつ．
102S：10
103I：後残りいくつ．
104S：じゃあ，ここ（b）は，３．それで，ここは a は６．
105I：おお，それで計算してみて．ちゃんと改めて．
106S：$6+9+10$ は 25．おお，適当でいいんだ．
107I：そしたら，適当でいいかどうかわからないけど，一応，６，３，２．ということをイメージして，そっち（$a+3b+5c-10$）のここ（a と b と c）ですよね．今，いくつになるかわからないから賛成と言ったけど，これ，いくつになるか，値はわかりますか．
108S：あっ，ん，あっ，わかった．
109I：いくつになります．そのわかったことを書いてみて．
110S：$a+3b+5c$ が 25 でそれに -10 がくっついた形だから．
111I：式書いて答え書いてみて．
112S：（$a+3b+5c-10=15$ と書く）
113I：説明して．
114S：$a+3b+5c$ は 25．
115I：じゃあそこに書いてみて，図でも何でも．どうなっているの．この書いてくれた式を説明してみて．
116S：えっと．
117I：いきなりこれ＝25 といっちゃっているよね．この間に計算の式が入るでしょ．
118S：ああ，なるほど．$\underbrace{a+3b+5c}_{25}-10=25-10=15$ と $a+3b+5c$ に下線を引き，その下に 25 と書く．）
ここが 25 だから．
119I：今さ，a と b と c に６，３，２と入っているんだよね．それ今，関係しているの．ここ（$a+3b+5c$）が 25 だといったときに，関係しているの．
120S：ん，している．
121I：そういうふうに見ている．なるほど．それで，今，６と３と２と適当に決めたよね．これ違う数だったらいいの？悪いの？
122S：違う数でも成り立つ．
123I：そういう条件で．何でも適当な数でもいいわけじゃないでしょ．
124S：えっ，ああ．
125I：ごめんね，質問が悪かったね．６，３，２と具体的な数がわからないと求められないのか．これはどう．
126S：ああ，わからなくても求められる．
127I：なんで．
128S：もう，25 ってそれがわかるから．

129I：ほう，そうか．それはどの時点でわかったのですか．
130S：はじめから．
131I：ここで，数を代入したよね．このときは６と３と２が入って，６＋９＋10 で 25 だよね．その後，どこでそれがわかったのですか．だって，最初，これがわからないとできないと言っていたんだもんね．それで，数を入れてみました．そうしたら．わかったときとわからなかったときはどうなの，振り返ってみると．
132S：ただ 10 ひくだけだから．
133I：どの時点でかな．
134S：ここです．（a＋３b＋５c＝25 を指して）
135I：これ（a＋３b＋５c）が 25 でいいんだとね．ありがとうございました．振り返ってみて，賛成と言っていたときと比べて式の見方とかどんなふうに変わったとか自分で説明できますか．
136S：はい．答えが 25 って出ているから，それに－10 がくっついているだけだから，けっこう簡単に解けた．
137I：a＋３b＋５c に線を入れてくれたよね．これ（a＋３b＋５c）とこれ（25）はどういうもの．
138S：同じ．
139I：同じものね．そう見えた．ありがとうございました．

M.T

1I：じゃあ，前にもやってもらったと思うんですけれど，この問題を解いてもらいたいと思います．連立方程式を解いてくださいです．ちょっとそこにやってもらいたいと思います．いいですか．
2S：はい．
3I：じゃあ，お願いします．
4S：(解き始める　加減法　最初たしてしまう　もう一度やり直して y 消去　x を出した後，y を求めるのに苦労する）5 分 30 秒後
5I：いいですか，今どうやってこの式をつくりましたか．
6S：上はそのままで，y と y をそろえるために，－３x を前にもってきて，で，イコール 13 の式にして，やりました．
7I：これ，もう 1 つのやり方を知っていますか．まずこのやり方を何て言うか知っていますか．
8S：代入法．うふふ．
9I：これは加減法ね．もう１個の方が代入法ね．代入法できますか．
10S：えっ．
11I：これ加減法ね，これは，だって，たしたり，ひいたりするから加減法でしょ．もう１個は代入法っていうんだよね．代入法は使いますか．
12S：（首を横に振る）
13I：使わない．いつもだいたいこういう連立方程式はこっちにしますか．
14S：いつもなんか解けない．ここまで（代入するところまでを指して）はできるけど，この後がどうなるかわからなくて，ごちゃ混ぜになってしまう．
15I：代入法みたいなのは使わないですか．どういうのが代入法かわかる．
16S：（首を横に振る）
17I：わかりました．これ，y がそろっているじゃん，だからひき算をすれば，y が消える．だからひくんだよね．
18S：うん．
19I：いいよね，はい．じゃあ，もう１つ，この問題です．（問題を読む）まず，賛成か反対かで言うとどうですか．
20S：え〜，賛成．
21I：理由は．
22S：a，b，c がわかっていないんだったら，連立方程式のもう１個の式がつくれないから．

23I：なるほど．この式（$a+3b+5c=25$ を指して）を見て何を考えたの．
24S：えっと，下に a と b と c の式を書いて，連立方程式で解く．
25I：でも，これ（$a+3b+5c-10$）イコールのない式なんだよね．こっち（$a+3b+5c=25$）だよね，イコールのある式は．こっちの話．
26S：そっか．
27I：ん，今，何を考えたのか言える．
28S：そっか．できるかのしれない．
29I：どういうこと．
30S：a，b，c の記号を移動させる．
31I：移動させる．どういうこと．
32S：うふふ，この記号を1個ずつずらしていて，3を a にして，5を b にして，10を c にすれば，とりあえずには数字になるから，その数字の計算をすれば出てくるかもしれない．
33I：でもさ，これ，イコールがないから，勝手に3をかけられないよね．a に．方程式だったら，こっち（左辺）に3をかけたら，こっち（右辺）にも3をかければイコールはそのままじゃん．でもこの式はイコールの式ではないんだよね．勝手に3をかけて，こっちをずらして5にしちゃったりしたら，値が変わっちゃうんだよね．それは，どう．
34S：そうか．
35I：この式（$a+3b+5c=25$）とこの式（$a+3b+5c-10$）の違いはわかりますか．
36S：イコールがない．
37I：あとは．
38S：ここの $=25$ と -10 が違う．
39I：違うよね．これはイコールの式だよね，$a+3b+5c=25$ という．これ，どういうふうにTさんは見ていますか，式を．
40S：どういうふうに･･･．
41I：このイコールの式をどういうふうに見ていますか．
42S：どういうふうに･･･．何て言うんだろう．
43I：いいよ，何でも．
44S：25は3と5でわれるのか．
45I：うん，5ではわれるよね．でも3でわれますか，25は．
46S：･･･，あっ，われない．そうか．
47I：だよね．この左側はどういうふうに解釈できますか．どういうふうに読める，式を．
48S：そのまま．
49I：そのままってどういうふうにみている．
50S：$a+3b+5c=25$．
51I：それをどういう意味として考えていますか．
52S：えっ，意味．
53I：読んでくれたよね，式を．
54S：意味．えっ．
55I：イコールの右と左はどういうふうに見られるのですかね．
56S：イコールの右側は，記号がなくて．
57I：うん，25ね．
58S：左側にある．
59I：それで，たし算とか，a とか $3b$ とか $5c$ はどういうふうにみているんですか．
60S：違う記号の計算はできない．
61I：なるほど，じゃあ困るね．a と $3b$ と $5c$ で計算できないのに25になっている．その意味を聞いているんだよね．
62S：ああ，そういうことか．
63I：これは計算できないよね．それはいいよね．
64S：うん．この3と5を計算して，そのたりない分の数を b と c と表している．それが25になる．

65I：それが25になる．なるほど．わかりました．どうですか，この問題，さちこさんの考えに賛成なんだけど，あなただったらどう解きますか，これはどうですか．
66S：えっと，･･･．
67I：わからない．じゃあ，こっち（$a+3b+5c=25$）はこれ（a）とこれ（$3b$）とこれ（$5c$）をたしたら25になるよっていう意味だね．じゃあ，こっちの式（$a+3b+5c-10$）はどうですか．
68S：aと$3b$と$5c$をたしたら10になる．
69I：ん，これはイコールじゃあないよ．
70S：あっ，から10をひく．
71I：じゃあ，同じようにこっち（$a+3b+5c=25$）は？もう１回聞くけど．
72S：こっちは，aと$3b$と$5c$をたすと25になる．
73I：そういうふうに見ているんだよね．
74S：（うなずく）
75I：ありがとうございました．

K.M

1I：じゃあまず，この連立方程式だけど，解いてみてください．お願いします．
2S：（解き始める）40秒後
3I：はい．これ連立方程式のどういう方法で解きましたか．
4S：普通に解きました．
5I：この方法の名前を知っていますか．
6S：ん～．移項．
7I：加減法．
8S：ああ，加減法です．
9I：もう１個やり方知っていますか．
10S：代入法．
11I：それで解けますか．
12S：解けません．
13I：じゃあ，まずどういうふうにやったのか説明してくれますか．
14S：まず，上（$2x+y=5$）はそのまま書いて，これが下（$y=13-3x$）はxがこっちにあるから左に移項して，そして合わせて計算しました．
15I：じゃあもう１個の方ね，代入法ね．代入法は使わない．
16S：はい．
17I：どうしてですか．
18S：代入法は，なんか理解はしているけど間違えることが多くて，間違えやすいから，なるべくこっちを使うようにしています．
19I：間違えやすいのはどういうところが間違えやすいのですか．
20S：でも，あんまり理解できていないのかなと思います．
21I：どういうところがあまり理解できていない．
22S：え～，全部．
23I：あのさ，代入法って，$13-3x$をこの（$2x+y=5$の）yに入れるんだよね．やり方わかる．
24S：ああ，わかります．
25I：そういうときに，yという１つの文字に，$13-3x$という２つを入れるよね．それがすごい嫌だ，抵抗があるという人がいるんだけど，それどうですか．
26S：うん，嫌です．
27I：どんなふうに嫌なのですか．
28S：なんか，わかりにくそう．解きにくそうだから，こっちの方が好きだから，こっちの方で解いています．
29I：なるほど，解きにくいという理由が，どうしてというのはどうですか．どういうところが

解きにくいのですか.
30S：解きにくい･･･．これ，代入してからはできるんですけれど，そこ（代入するところ）までがたどり着かないんです.
31I：そこそこ，なんでそこがやりにくいの.
32S：うふふ，え．ん～．あんまり理解できていないからかな.
33I：どんなことを理解できていないと思うのですか.
34S：どんなところに～．どこに何を代入するのかがわからない.
35I：今，先生は，y に 13－３x を代入するよって言ったよね．そう言われるとわかる，大丈夫.
36S：はい.
37I：どこに何を代入するのかわからないっていうのは，どうしてかな.
38S：なんか，ワークとかで解いていて，問題によって代入する場所が違うから，それで，どうやればいいのかって感じになる.
39I：なるほど．そして，１つに２つを代入するっていうことも嫌だと.
40S：（うなずく）うふふ.
41I：わかりました．じゃあもう１問．これです．（問題を読む）
42S：ああ，やったなこれ.
43I：率直な考えでいいですよ．どうですか.
44S：なんかよくわかりません.
45I：賛成か反対かで言うと.
46S：え～，賛成です.
47I：賛成．それで，何かチャレンジしたいよね.
48S：チャレンジ.
49I：まず，なんで賛成だと思ったのですか.
50S：いや，この３つ（a と b と c）が，３つが完全にわからないから.
51I：なるほど，この３つは本当にわからないですかね.
52S：う～ん．（しばらく考える）いや，わかりません．えへへ.
53I：あるいは，わからなくてもできるということはないですか.
54S：はい，できません.
55I：よく見て．それをチャレンジしたいよね．今日せっかく残ってもらったので．本当にできないでいいですか.
56S：･･･．これ前になんか計算やってありました．多分計算やってないと思いますが.
57I：M さん，計算やっていますよ.
58S：え～，うふふ.
59I：やっぱりその通りとは言っているけどね.
60S：その通りって言っているんですか.
61I：賛成と言っているんだけど，やっているんだよね.
62S：え～，なんでだ．どうやって解いたんだ･･･.
63I：だから，今，私が言ったように a と b と c に入る数がわからないのですかということ.
64S：･･･．a＋３b＋５c･･･．ん～．いや～わかりません.
65I：７月にやっているときは，a と b と c に何か数を入れると言っているんだけど.
66S：数を入れると書いてあるんですか.
67I：うん.
68S：え～.
69I：これ，M さんのでしょ.
70S：そうです.
71I：a と b と c に何か数を入れるって．入れているんだよね.
72S：なんでなんで.
73I：ちょっとよく考えみて.
74S：･･･.
75I：できるだけ考えたことを書いてみて.

76S：(書き始める.「a＋３b＋５c＝25 になるような数を入れる．３，12，10 と書く.）
77I：今，何，a がいくつ.
78S：a が３.
79I：ちょっと書いてみて，
80S：a＝３，b＝４，c＝２.
81I：それだとだめ.
82S：あっ，だと思います.
83I：いいの.
84S：いや，あっているかわかりません.
85I：でも計算してみれば，25 になるかわかるじゃない.
86S：あっ．そうか.（３＋12＋10＝25 と書く）
87I：おっ，大丈夫だね．今，いきなりそれができましたか.
88S：いや，できませんでした.
89I：まず，どこから考えたの.
90S：まず，b から.
91I：それで，いくつを入れたの.
92S：ん〜．まず４.
93I：まず，４を入れたんだ，それで.
94S：あ，違う，まず５を入れました.
95I：うん，５を入れた.
96S：で，ここが三五（さんご），十五になって，これに２入れちゃうと 25 で，a が１だと 26 になっちゃうから，４にしました.
97I：うん，そして４にしたら.
98S：12 になって.
99I：それで 10 って書いたんだ.
100S：３だと，３を（c に）代入しちゃうと 25 より大きくなっちゃうから，２を入れて，10 にして，残ったのが a が３.
101I：なるほど，はい．さあ，それができました．この値（a＋３b＋５c−10 を指して）はわかりますか.
102S：はい.（３＋12＋10−10 と書く）15．うふふ.
103I：15．いい.
104S：はい.
105I：今さ，数を３と４と２とやったよね．これ本当にこの具体的な数がわからないとできませんか．今のその計算の式から見て.
106S：ああ.
107I：わかった.
108S：いや〜，なんとなく，何でもできると思う.
109I：どうして.
110S：え〜，どうして，難しいな．これは，何を入れても答えは必ず 25 になるのをつくればそれは全部あっているということだから，これに代入しても一緒.
111I：おお，すごい．それで，何を入れても 25 になればいいんだね．そのときにこの式（a＋３b＋５c＝25）とこの式（a＋３b＋５c−10）のどこに着目したのですか．どういうふうにそれに気付いたの.
112S：ああ，これに入れると.
113I：うん，こっちに入れるといいと言うことでしょ，結局．25 になるように，a，b，c は何でもいいということにどうして気付いたの.
114S：えっ，とりあえず，25 の答えになるように入れればいいと思って.
115I：それで，今度この式（a＋３b＋５c−10）と比べるんだよね，どういうことに気付いたの.
116S：このとき，この値は，だから．それを普通に入れればいいかなと思いました.
117I：入れるといったって，見て何か気が付かないと入れられないよね．どういうことに気付い

たのですか.
118S：これですか.
119I：－10の前のここ（a＋３b＋５c）に入れたんでしょ．なんでそこに入るの，25が.
120S：ん～.
121I：２つの式を見比べてみて.
122S：ここの形が同じだから.
123I：どこまで.
124S：ここまで（両方の式のa＋３b＋５cに下線を引いて）同じだから.
125I：だから.
126S：まあ，入れていいかなと思った．うふふ.
127I：うん，それに気付いたのね．ありがとうございました.

資料２　第４章第２節　インタビュープロトコル

実施日とインタビュー対象生徒　※(1)～(4)：A 中学校　(5)，(6)：B 中学校

	日時（平成 27 年）	解答類型０	解答類型９	解答類型１
(1)	10 月 8 日（木）放課後	K.T，H.S，M.Ts		
(2)	10 月 16 日（金）放課後		R.I，M.W	
(3)	10 月 22 日（木）放課後		A.T，Y.O	A.K
(4)	10 月 29 日（木）放課後	T.K	S.H	
(5)	11 月 24 日（火）放課後	M.Ts		
(6)	11 月 25 日（水）放課後	M.Y		

※解答類型０，解答類型９の生徒のプロトコルか順に示すこととする.

K.T　類型０

1I：では，リラックスしてやって下さい.

2S：はい.

3I：７月に問題を解いてもらいました．そのうちの１つがこの問題なんです．ちょっと問題を見ていただいて．まず(１)をやってみて下さい.

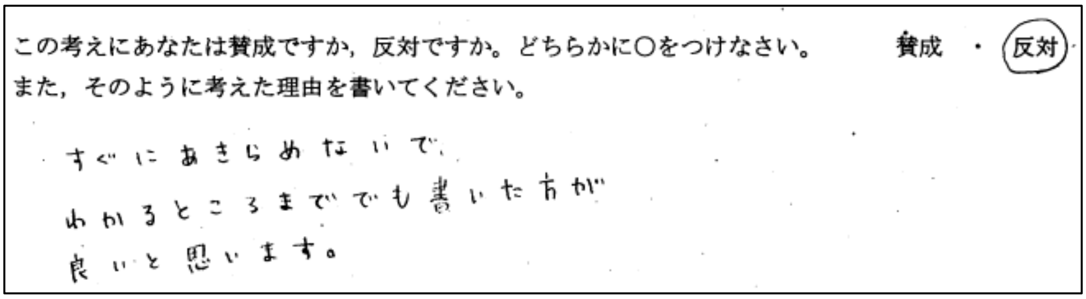
4S：(問題を読んで，反対に〇をする.）

5I：その理由を率直に書いてもらえるといいです.

6S：(理由を書き始める.）

7I：理由は何ですか.

8S：すぐにあきらめないで，わかるところまででも書いた方がいいと思います.


この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに〇をつけなさい。　賛成・反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
すぐにあきらめないで，
わかるところまででも書いた方が
良いと思います。

9I：そうですね．で，(２)は，あなただったらこの問題をどう解きますか，と聞いていますので，自分のできる方法でいいですので，解いてみて下さい．できるところまででいいです．じゃあ，お願いします.

10S：(問題を解く　連立方程式を書く)

11S：ちょっとわからないです.

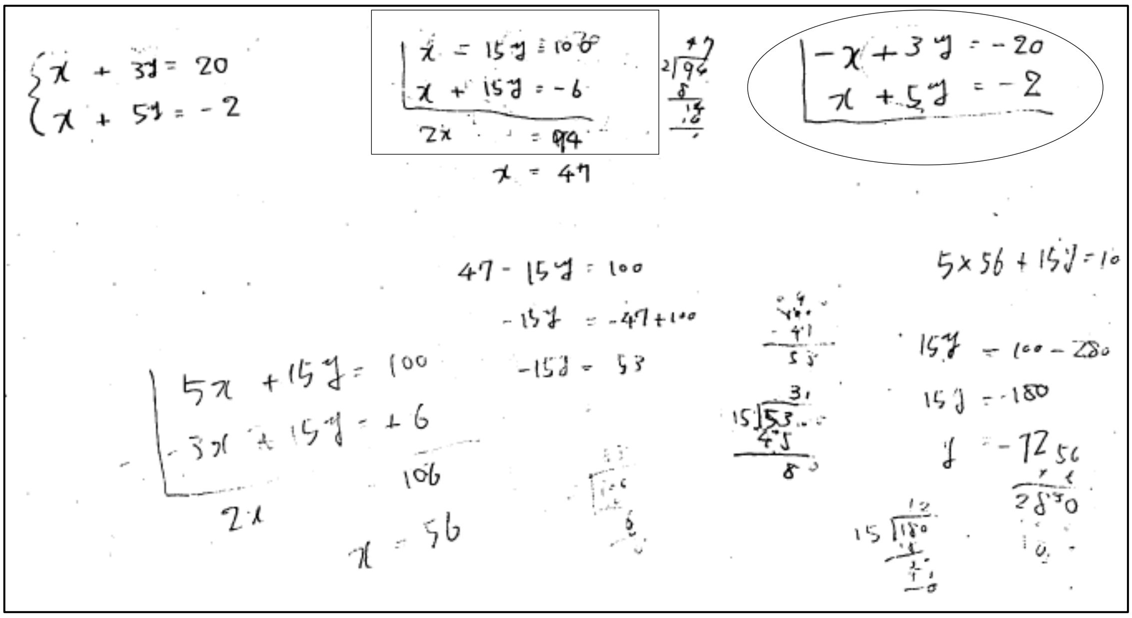
12I：うん，いいよ，そこまでで．まず，この式を聞きたいんだけど．今，どういうふうに考えてその式をつくりましたか.

13S：何人かで，生徒の数がわからないから，そこを x とおきました．それに３枚ずつ配るからプラス３で，連立方程式にしようかと思って y をつけて，イコール余りで 20．で，もう１個の式へいって，x プラス１人に５枚だから５y で，２枚たりないから−２にしました.

14I：もう一度，x は何においたのでしたっけ.

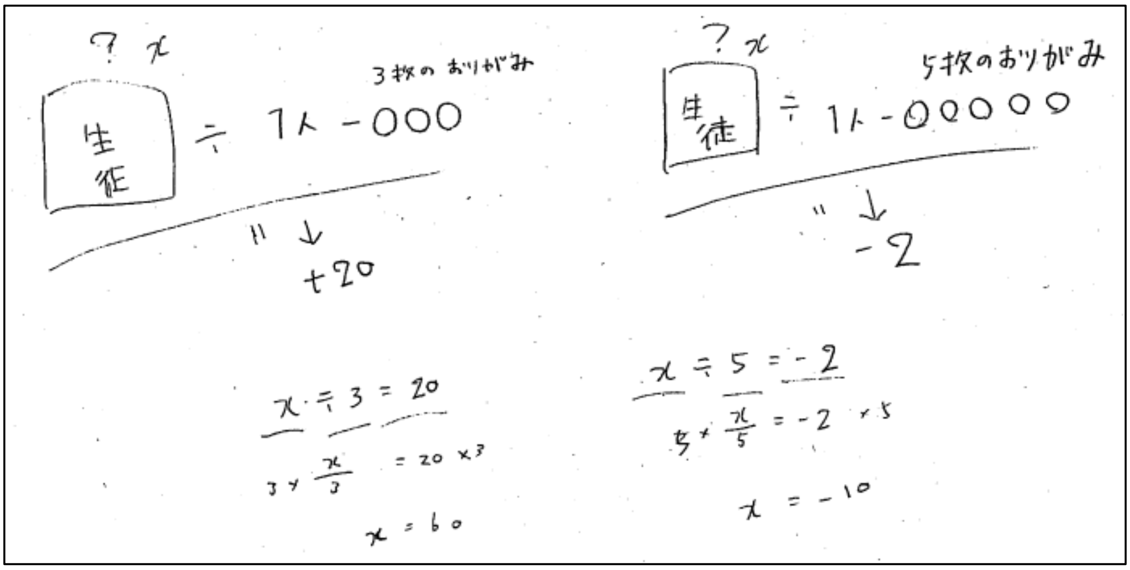
15S：生徒の数.

16I：生徒の数ね．で，y は何においたのですか？



17S：y は，えっと．ん．（しばらく考える　首を傾げる）
18I：ここでは，今，$3y$ となっているよね．$3y$ って何を表している式をつくったのでしょうか．
19S：･･･
20I：何か考えたことがありますよね．
21S：連立方程式だから，y をつけちゃった．
22I：う～ん．で，$3y$ ってつけていますよね．それはなぜ？
23S：折り紙の数．
24I：あっ，$3y$ で折り紙の数を表している．
25S：（うなずきながら，首を傾げる）
26I：うん，そうすると，x は人数って言ったよね．x と折り紙の数をたしている？っていう式ですか？
27S：んん．（しばらく考える）
28I：どんなことを考えたのか，教えてもらえるといいんだけどね．
29S：･･･
30I：だめですか．２つ式をつくってくれたよね．１つ目は，生徒の人数に折り紙の $3y$，３枚配ったからでしょ，$3y$，たすと 20．で，こっちは生徒に人数に５枚配ったから $5y$ で，-2．今，Ｔさんがつくった式が，何を表しているか教えてもらいんだけど．
31S：ん．
32I：意味を考えていませんか．
33S：うん．うふふ．
34I：なんで，イコールで結んだのかな．
35S：とりあえず，連立方程式の形にしようと思った．
36I：答えは，どうでしたか．
37S：マイナスになっちゃった．
38I：うまくいかなかったか．
39S：y が出なかった．
40I：最初はどう書いたのですか．もう１回書いてもらっていいですか，最初の式を．
41S：（右上の○の部分を書く）
42I：やったらどうなっちゃったんですか．
43S：x がマイナスになっちゃった．
44I：あ～，なるほど．それで，もう１回やり直した．

45S：（うなずく）
46I：変えたところは，どこですか.
47S：この部分（□で囲んだところ）を同じ数にするために，あっ.
48I：いいよ，こっちに書き直して下さい.
49S：（その下側に書き始める.）
50I：x が 56 と出た.
51S：(うなずく．)
52I：y はどうですか.
53S：（計算を続ける.）マイナスになっちゃう.
54I：マイナスになっちゃうね．うん．今，何をしたんですか．これで，「あっ」って言ったよね.
55S：言った．この式をつくるために，ここ（□で囲んだところ）をそろえるために，こっちに５をかけて，こっちに３をかけたんですけど，こっち（y の係数）とこっち（右辺の定数）にかけたんだけど，こっち x にかけるのを忘れちゃったから，やり直した.
56I：やり直した．うん，そうすると，答えがマイナスになっちゃったよね.
57S：うん.
58I：そうしたら，どうしますか．今，これ，マイナスになったらおかしいんだよね.
59S：うん.
60I：そうだよね．こういうふうに出たときにどうしますか？
61S：マイナスになっちゃったら，これ，この式自体が間違っているのかなって思って，また，一から考え直す.
62I：うん，考えるね．で，今，どうですか，考えられますか？
63S：え〜
64I：難しい.
65S：ちょっと・・・.
66I：うん，そうだね．でもよく頑張ってくれたんですけど，あのね，前回は，何も書いてくれていなかったんです．それで，賛成と言っていて，前回はね，「仮の式をつくることはできると思うので，最初はてきとうでも何でもいいので，x や y を使って式をつくるべきだと思う.」って書いてくれているんです．でも，何も書いてくれていなかったから，どんなところにつまずいているのかなってことを知りたかったのです．そのときは，何を考えていたか思い出せますか？
67S：そのときは，連立という方法も何も思いつかなかった.
68I：あ〜，なるほど．式が思いつかなかったんだ.
69S：（うなずく）
70I：今，この問題，難しいですか，Ｔさんにとって.
71S：あっ，はい.
72I：どんなところが難しいですか．そこのところを，前回は，式も思いつかなかったんだよね．今回は，連立方程式にしようと思って始めてくれたんだけど，この問題のどの辺が難しいですか.
73S：もともと文章問題が苦手なんです.
74I：文章問題がね．どんなところが苦手ですか.
75S：自分で式を，文字を読み取ってつくることが，うん.
76I：じゃあ，文字は，例えば，x は何々に，y は何々って言われればどうですか？
77S：う〜ん，それならできるかもしれない.
78I：しれない？あと，この文章自体は理解できますか.
79S：（うなずく）
80I：今，式で頑張ろうとしたけど，図や表や線分図とか絵とか，そういうので，表せますか，この状況を，何でもいいから，式でなくてできますか？
81S：（書き始める）



82I：答えが求まりますか.
83S：（下の式を書き始める.）
84I：マイナスが出ちゃった.
85S：ふふ.
86I：今度は，何を考えましたか．すごい頑張ってくれて.
87S：配るって，わるかなって思ったから.
88I：うん，なるほど．配るってことが，わるってことだと思った．で？
89S：x 人に３枚ずつだから，$x\div 3$ で 20，式は別々に考えていて，で，x 人に５枚ずつで，－２.
90I：なるほど.
91S：わかりました．ありがとうございます.

H.S　類型０

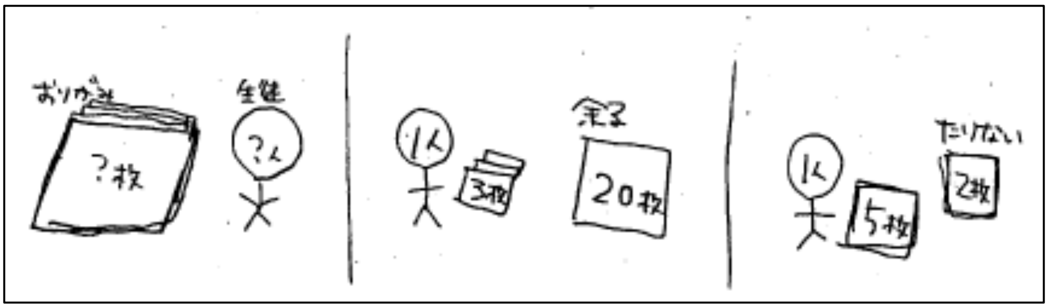
1I：よろしくお願いします．リラックスしてもらって率直に自分の考えを言ってもらうようにしてください．今日，この問題を解いてもらってですね，その問題で，Ｓさんが何を考えているのかを調べたいと思っています．いいですか.
2S：はい.
3I：（１）をやってみてください．消しゴムは使わないようにして，間違ったら，ばつをつけて次に書いてください.
4S：（問題に取り組む）

この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　**賛成**　・　**反対**
また，そのように考えた理由を書いてください。

どうやって式をつくればいいのかわからないから。
生徒の人数か、折り紙の総数~~数~~のどちらかがわからないと
式がつくれないと思ったから。

5I：はい，なんて書きましたか.
6S：どうやって式をつくればいいのかわからないから，賛成です.
7I：うん．で，そこには？
8S：生徒の人数か，折り紙の総数のどちらの数がわからないと式がつくれない.
9I：うん，前の７月の時も同じこと書いてくれているんだよ．式はつくれませんか.
10S：（首を横に振る.）

11I：じゃあ，式はつくらなくても，何か絵とか，図とかそういうので．文章自体は理解できますか？
12S：(うなずく)
13I：何かそういう，式じゃなくていいので，自分でできる方法で，表すことができますか．この今の文章を．何でもいいですよ，方法は．絵でも図でも線分図でも表でも何か自分の知っている方法で，今の問題の様子を，場面を表すことができますか．
14S：(うなずく)
15I：ちょっとやってみて下さい．
16S：(絵をかく)



17I：説明して下さい．
18S：え～と，１人に３枚ずつ配ると，20 枚余るということと，１人に５枚ずつ配ると，２枚たりないということ．
19I：これ１人しかいないということ？
20S：何人かいる．
21I：ほ～，それをかいてみて，この問題を改めてみて，どうですか？何か思い浮かぶことはありますか？
22S：･･･
23I：ないですか？
24S：(うなずく)
25I：で，今，生徒の人数，折り紙の枚数どちらかがわかっていれば，できそうだって書いてくれましたよね．これどちらかわかればできそうですか？
26S：連立方程式や方程式にすればできるかなって思う．
27I：１つどちらかがわかれば？
28S：(うなずく)
29I：この問題今，絵にかいてくれたけど，もう１回改めてみて難しいですか？
30S：うん．
31I：Ｓさんにとって，どんなところが難しいのかな，どんなところに引っかかっちゃうのかな？それを教えてほしいんだけど，どうですか？
32S：この文章を見て，式がつくれないなって．
33I：式をつくれないなって思っちゃう．式をつくらなきゃできないかな？
34S：うん．
35I：あとは，どうですか．
36S：･･･
37I：じゃあ，このひろしさんとまったく同じ考えですか．
38S：(うなずく)
39I：こういう問題ができたとき，どうするんですか，Ｓさんは．テストとかあるいは学校の問題で出るよね，そういうときどうするんですか．
40S：とばします．
41I：できるようになりたいよね．
42S：(うなずく)

43I：ありがとうございました．

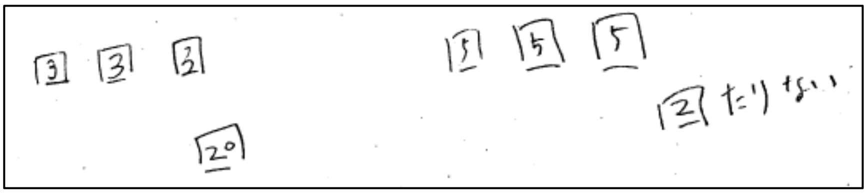
M.Ta　類型０

1I：リラックスして解いてもらって，率直に考えを言ってもらいたいです．いいですか．
2S：はい．
3I：じゃあ，そのあと問題を読んでもらって，賛成か反対かの（１）をやってみて下さい．じゃあ，お願いします．消しゴムを使わないで，間違ったら×をつけて次のところにかいてください．
4S：はい．（問題に取り組む）
5I：率直に書いてくれればいいですよ．
6S：（しばらく考えてから書き出す．）

この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
x，yを使って式をつくればいい

7I：何て書きましたか．
8S：x，yを使って式をつくる．
9I：つくる．あとは，それだけ？反対の理由だもんね．まだありますか．
10S：（首を振る）
11I：ないですか．じゃあ，反対で，xとかyを使って式をつくればいいとＴａ君は言っているので，あなただったらこの問題どう解きますかという（２）です．どういうふうに解くか，そこに書いてもらって，解いてもらいたいと思います．どうでしょうか．じゃあ，お願いします．
12S：･･･（しばらく考える）
13I：式を使って解けばいいってあるけど，別に式でなくてもいいですよ．図，線分図とか表とかそういうものを使っていいですので，自分のやれる範囲で，そういうものを使って解いてもらってけっこうですので．式にこだわらなくていいですよ．
14S：はい．
15I：緊張している．
16S：はい．
17I：いいよ，緊張しなくて．
18S：（しばらく考える．）
19I：難しいかな？
20S：難しいです．
21I：え～と，この問題の場面は理解できていますか．
22S：（首を傾げる）
23I：７月の時ね．Ｔａ君は，反対にして，まったく同じようなことを書いてくれているんです．だけど，２番であなただったらどうやって解きますかときいたときに，何も書いていなかったので，どういうふうにＴａ君が，難しさを感じているかということを知りたくてこのインタビューをさせてもらっているんです．
24S：はい．
25I：どんなところが難しいですか．
26S：xとyがどこにあてはまるのか．
27I：ほ～，それをまず考えるんだね．それどうですか．xは何におけばよいと思いますか，今の問題で．間違っていてもいいので，思ったことを言ってみて下さい．
28S：枚数．
29I：枚数．何の枚数ですか．
30S：配る枚数．

31I：配る枚数というのはどの枚数のことかな．何の枚数かな．
32S：１人に配る枚数．
33I：１人に配る枚数を
34S：x とおく．
35I：あっ，１人に配る枚数は３枚だよ．３枚と５枚でしょ．
36S：･･･
37I：難しいか．うん．この問題場面は理解できますか．１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．これはいいですか．
38S：はい．
39I：１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．これはどうですか．
40S：はい．
41I：そうすると，あと何が難しいですか．そのどこが難しいかを表現してもらえるといいんだけど．
42S：う～ん．
43I：じゃあ，今，理解できているというところの絵がかけますか，この場面の．
44S：はい．
45I：じゃあ，ここにかいてもらっていいですか．



46I：２は何ですか，余っているのですか，たりないのですか．
47S：たりない．
48I：絵として同じでいいですか．こっちが余っているんだよね．そしてこっちはたりないんだよね．同じ四角で囲んでいるけど．
49S：(「たりない」とかく)
50I：今，３つかいてあるけど，どうして３つですか．意味がありますか．
51S：･･･
52I：人数はわかっているのですか．
53S：わかっていない．
54I：これ３人ってこと？
55S：いいえ．
56I：そうじゃない．
57S：はい．
58I：今，これを見てどうですか．x とか y を当てはめることができますか．
59S：できない．
60I：x を何にするか，y を何にするか，その辺が難しいというのがＴａ君の考えですか．
61S：はい．
62I：その他ありますか．
63S：ありません．
64I：はい．ありがとうございました．終わります．

T.K　類型０

1I：はい，では，お願いします．理由をまず書いてもらいたいと思います．
2S：はい．
3I：いいでしょうか．では，お願いします．時間をちょっと上げますので，やって下さい．
4S：はい．(問題を読む)(しばらくして)これを前やってみて，前はできなくて，なんか，賛成にして，どうすればいいわからないからって書いたんですけど．

5I：今，どうですか.
6S：･･･
7I：今，改めて読んでみて，意思表示してくれればいいです．現時点のことを書いてくれればいいです.
8S：あっ，現時点ですか.
9I：うん.
10S：･･･わからないかな･･･
11I：どっちを選びますか.
12S：･･･，わからないけど，賛成.
13I：うん，じゃあ賛成に○をしてもらって，どうしてそう，賛成にしますか．その理由をちょっと書いてもらうとありがたいですけどね.
14S：わからないから.
15I：いいですよ．そう書いて下さい．こっちにね.
16S：（プリントに書く）

(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
やり方が分からないので

17I：はい，え～と，今，この問題を読んで，わからないって，やり方がわからないですか.
18S：はい，やり方がわからないです.
19I：（２）は，あなただったら，どう解きますかって言っているんです.
20S：ああ，
21I：で，ひろしさんは，式ができないからわからないって言っているじゃないですか．これに賛成？
22S：なんか.
23I：うん.
24S：式の立て方がわからない.
25I：（２）は別に式にこだわらなくていいんだけれど，この問題を解いてもらいたいんですけど．どうでうすか．じゃあちょっと時間を上げますので，解いてもらっていいですか.
26S：は.
27I：じゃあどうぞ，お願いします．図でも何でもいいよ．式にこだわらなくていいです．自分のやれる範囲でやってみて下さい.
28S：（しばらくして）連立？１人をyにして･･･.
29I：どうぞ．自分のやってことを書いてもらうといいね．思ったことを書いてもらって，そしてやってくれるといいです.
30S：はい．（書き始める）

$$y=3x+20$$
$$y=5x-2$$

31I：はい，そのあとどうですか.
32S：（続きを書こうとする）普通に解けばいい．答えが･･･.
33I：どうぞ，どうぞ.
34S：（書き始める）
35I：はい，今，何を考えたのか，教えてもらっていいですか.
36S：１人に３枚ずつ配ったら 20 枚余ったから，１人をyにして，･･･.
37I：じゃあちょっと何をyにしたのか書いてみて.

38S：１人を y.
39I：１人を y.
40S：人を y に.
41I：それをそこの下に書いて，言葉で，何をどうしたのかを.
42S：（書く）

$y=3x+20$
$y=5x-2$

$3x+20=5x-2$
$-2x=-22$
$x=11$

$y=3\times 11+20$
$y=\cancel{55}$
$y=53$

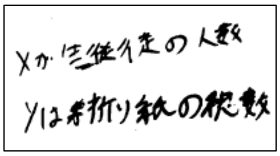
11人　53枚

1人をyにして　3枚配ったと言っているのでそれを3X
にして20枚余ると書いてあるので+20とした。
それと同じようにして式を使って連立方程式で
解いて人と枚数を出した

43I：どんなふうに書きました．ちょっと読んで下さい.
44S：え～と，１人を y にして，１人に３枚配ったといっているので，それを３x として，20 枚余ると書いてあるので，余るというのは＋20 して，それと同じように，また１人に５枚ずつ配ると２枚たりませんと書いてあるから，同じようにして式を立てて，この式は連立方程式で，連立かな，連立じゃあないのかな．この方程式（３x＋20＝５x−２を指して）で解いて，なんか１人の生徒の人数と，枚数を出せるかなと思って，出しました.
45I：聞いていい．１人に y にしてってどういう意味ですか.
46S：え～と，なんか，思いつき.
47I：何を y としているの.
48S：生徒の人数
49I：生徒の人数を y にしているの.
50S：はい.
51I：じゃあ x は.
52S：x は，３枚配る枚数.
53I：x は枚数．どういう枚数.
54S：３枚配る枚数.
55I：３枚配る枚数.
56S：配るって書いてあるから．１人に３枚って書いてあるから，その３枚を x とした.
57I：３枚を x．x は３ってこと.
58S：なんか.
59I：そうすると今，３x じゃんね．３x って何を表しているんですか.
60S：１人に配った枚数.
61I：１人に配った枚数が x.
62S：なんか.
63I：そう，今，11 って出ているよね．11 って何ですか.
64S：生徒の人数.
65I：で，今，x＝11 って出ているよ.
66S：あっ，そっか.
67I：さっきと，おかしくなってない.
68S：おかしい．はい．あっ，そっか.
69I：もう一度，どういうこと．あっ，そっかって何が，気が付いたことを言ってもらえる.
70S：え～と，今，説明したのは，枚数を x とした．枚数を x にした，１人に配った枚数を x にしたって言ったんですけど，これだと，x は 11．人数になっている．矛盾している．言っていることが全然違う.
71I：うん．そうすると何を x としている．もう１回改めて考えられる.
72S：x は枚数．枚数じゃあない.

73I：x は人って出ているよね.
74S：はい.
75I：で，y は 53.
76S：53.
77I：53 は何を表している.
78S：人.
79I：53 は人.
80S：枚数.
81I：枚数だよね．そうすると，表したこと，x や y は何を表しているのか，もう一度，どう，説明してもらえますか．このように解いてくれたんだよね.
82S：y を配る枚数にした.
83I：y を配る枚数にした．で，x は.
84S：１人に配った・・・えっ，何だろう．生徒の人数.
85I：ああ，生徒の人数を x にしたんだ．で，11 っていうのは，何ですか．x の値が出た.
86S：でた.
87I：正しいですか.
88S：正しくないです.
89I：えっ，わからないです.
90S：正しくない.
91I：もう１回見直すよ．この $y=3x+20$ だよね，つくってくれた式は．この式は合っていますか.
92S：合っていないと思う.
93I：ちゃんともう１回振り返ってみて．うんと，x は人数にしたんだっけ.
94S：･･･
95I：この $y=3x+20$ の意味はどういう意味.
96S：え〜と，･･･.
97I：この問題と照らし合わせてみると.
98S：･･･
99I：今，立ててくれたよね，$y=3x+20$．この式の意味はどういう意味ですか.
100S：意味ですか.
101I：$3x$ って何.
102S：えっと，３枚ずつ配ると･･･
103I：$3x$ で何を表しているんですか.
104S：配った枚数.
105I：プラス 20 で.
106S：余った枚数.
107I：が＋20，うん．そうすると，y は何.
108S：１人分の･･･
109I：１人，１人なの.
110S：え，意味がわかんなかったんだけど，こういう式でやればできるかなと.
111I：じゃあ，ちょっと，意味を考えてみようか．$3x$ で配った枚数ですよね，３人に．それに余った枚数を＋20 としたと．y は何ですか．だから，この左辺は何を表していますか．y とイコールとなっているんだけど.
112S：y は１人.
113I：y は１人，の何ですか.
114S：y は生徒.
115I：ん？y は生徒ですか．だって，x が人になっているよ.
116S：これは多分･･･．違いますね．書いたことと違いますね.
117I：うん，ここの書いたこととは違っていたんだよね．もう１回改めて，x は何にしたんだっけ.

118S：生徒の人数.
119I：ちょっと書いてみて，曖昧になっちゃうから.
120S：生徒の人数
121I：で，y は何を表しているかってやっているんだよ.
122S：折り紙の総数
123I：うん，それはなぜ，そう思いましたか．ごめんね，何回も繰り返しで．３x で何を表しているんだっけ.
124S：え～と，生徒の人数･･･
125I：は x だよね．３x は.
126S：生徒の人数と１人に３枚ずつ配る.
127I：うん．３x で何を表しているんですか.
128S：･･･
129I：じゃあ，ごめん．じゃあ＋20 は何だっけ.
130S：＋20 は，余った数.
131I：余った数だよね．じゃあ，３x＋20 で何を表しているんだっけ.
132S：３x って何でしたっけ.
133I：さっき言っていたじゃん．３x＋20 は何を表しているのかな．今，式を読んでもらっているんだけど.
134S：･･･
135I：３x に余った折り紙 20 をたしているんだよね．３x ってなんだ．うふふ.
136S：１人に３枚配った枚数
137I：うん，１人に３枚配った枚数が３x で余りが 20 あるんだよね.
138S：うん.
139I：たしているんだよね．それは何を表しているんですか.
140S：３枚配ったけど，20 枚余っている.
141I：それ，全体で何を表しているの.
142S：生徒の人数と折り紙の総数
143I：ん？生徒の数は x だよね.
144S：折り紙の総数.
145I：y が折り紙の総数，それいい．どう．じゃあそれを一応書いておいて.
146S：（プリントに書く）



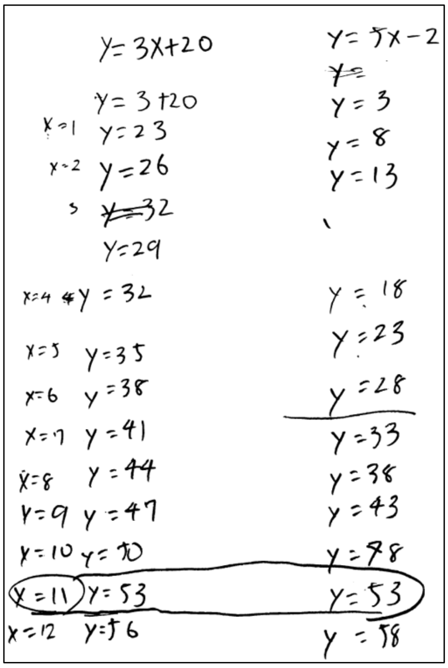
147I：上の式はできたんだよね．次，確認のために，下の式はどういう意味.
148S：５枚配ったら２枚たりない.
149I：たりない．じゃあこの，５x－２は何を表しているんですか.
150S：５x は，１人に５枚配った枚数．－２は，配ったけど２枚たりなかったから－２を付ける.
151I：うん，これ全体で何を表しているんですか.
152S：折り紙の総数.
153I：それ，いいですか．そこまで.
154S：はい.
155I：それで，このように式を立ててくれて解いてくれたんだよね．11 は，何ですか.
156S：･･･生徒の人数.
157I：それいい．生徒の数．それあっていますか.
158S：わからない.
159I：11 が合っているかどうかを確かめるにはどうすればいいですか．式を解いて今，11 が出てきているんだよね．正しいかどうかはどうやって確かめればいいですか.
160S：え，わからない.

161I：もう１回ちゃんと考えると，x なんだよね，11 は．どこで確かめればいいですか．
162S：（式の x を指す）
163I：おお，入れてみますか．まず，上の式に入れてみるか．
164S：（$3x+20$ に $x=11$ を代入する）
165I：今，１個だけに代入したよね．確かめるにはどうする．片方，上をやったんでしょ．そうしたら．
166S：下をやる．
167I：じゃあ，やってみよう．
168S：これに 11 を代入するってこと．（$5x-2$ に $x=11$ を代入）

$y=3\times11+20$　$y=5\times11-2$
$y=53$　$y=53$

169I：いま，11 が正しいかどうか確かめたんだよね．上の式と下の式に入れたんだよね．そしたらこういう結果になりました．これで正しいと言えますか．
170S：言える．
171I：言える．どうして言える．
172S：同じ．
173I：どこが同じ．
174S：ここの答えが．
175I：答えって，何．
176S：53 が．
177I：53 になったから，両方ともにね．
178S：はい．
179I：ってことは，これとこれ２つイコールで結んでいるんだよね．その意味はどういう意味ですか．
180S：どう言ったらいいですか．これとこれですか．イコールで結んだ．
181I：うん．イコールで結んだんだよね．なぜ結んだ．
182S：y と y が同じだから．同じであれば，ここところを，この式($3x+20=5x-2$)にしてもよいから．
183I：なるほど．y と y って．y は何だっけ．さっきからしつこく聞いているけど．
184S：折り紙の総数．
185I：うん．折り紙の総数が．
186S：y．
187I：だから，同じとみていいわけ．
188S：はい．
189I：どうして，同じとみていいの．
190S：同じ式だから．
191I：式は違うじゃん．
192S：ああ，y は折り紙の総数で，y は同じだから．
193I：なるほど，２つの式の y が．
194S：同じ．
195I：うん，だからイコールで結ぶ．
196S：はい．
197I：そうすると，x を入れることによって，この式は値が変わるのがわかりますか．
198S：x に入れる値．
199I：うん，x に数を入れると，y の値変わりますよね．
200S：ああ，変わります．
201I：で，下の式もそうだよね．
202S：はい．

203I : x の 11 ってなんですか.
204S : 生徒の人数.
205I : それを確かめるよ. 例えば, ここに $3x+20$ って書いてくれる.
206S : y イコール
207I : うん, y イコールの式.
208S : (式を書く)
209I : これちょっと, x に 1 から入れてみようか.
210S : はい. (代入した式を書く.)
211I : 12 くらいまでやっておこうか.
212S : はい.
213I : で, もう 1 個の方もやっておいた方がいいよね. 今度, $y=5x-2$ の方もやっておこうか.



214I : やってみて, 何に気が付いた.
215S : 最後の 12 のときは違う.
216I : ちがう, どこがどうなった.
217S : $y=56$ と $y=58$
218I : 違うよね. あれ, 何をしようとしたのかな. $x=11$ を確かめたんだよ.
219S : ああ, 11 は合っている.
220I : どこがどうですか. ○をして.
221S : $x=11$ を○で囲む.
222I : $x=11$ のときにこっちの答えがこれでしょ, こっちの答えがこれでしょ, どうなっているんですか.
223S : 合っている.
224I : じゃあ, 等しいところをずっと○で囲んだ方がいいよ.
225S : ああ, そうか. (上のように○で囲む)
226I : これが何ですか.
227S : 生徒の人数.
228I : うん, 生徒の人数が, 何ですか.
229S : 生徒の人数が 11 のとき, 53
230I : 53 って何ですか.
231S : 折り紙の総数が 53 枚.
232I : うん, それがここに出てくるんです. そこが一致するところだから, 等しい.
233S : 等しい.
234I : そういうことをしているんです.
235S : わかります.
236I : どういうことが, わかった.
237S : だから, 11 のときに, こうやって当てはめてやっていくと, こうなったからこの式とこの式が同じになった. だから, 等しい.
238I : 正しいかな, 本当って聞いたよね. だから, 何ですか. 正しいですか, 間違っていますか.
239S : 正しい.
240I : 正しい. いい, それ. この式とこの式を 1 から動かしていくと, こうなってるよね. こっちは, こうだよね. で, x が 11 のときに y が両方等しくなる. だよね. それを今, 確かめたんです. これが 11 のときだけやってみたんでしょ.
241S : はい.
242I : これが方程式を解くという意味なんだよね.
243S : わかります.
244I : どういうところにつまずいていましたか.
245S : えっと, 最初は, こういうのが苦手なので, 見たら嫌になるんだけど, 先生が, 前言って

いたんだけど，何かしらの方法でやってみろって．それで前こういうのを１回やったことがあって，y=なんとかって出して当てはめてみろって言われて，その方法かなって思って１回やってみて，それで，答えを出したときに，何でこうなったと言われて，自信がなくて説明ができなくて．こうやってやれば，わかるんだけど，説明ができなくて，ここが（等しいところをさして）曖昧で，本当に正しいかって言われると，なんかここが曖昧だから，わからなかった．

246I：だいたい，これあまり意識していなかったよね，最初．（等しい値を探しているところを指して）それをあんまり意識していなくて式をつくってみようと思ったわけだ．

247S：はい．なんか，これは，ちょっとだけ意識してはいましたけど．

248I： イコールをするという意味も曖昧でしたか．

249S：ちょっと曖昧でした．でもこういう方法でやると，ああそう言うことなんだと．

250I：だいたいこれはわかる．

251S：わかるわかる．わかります．

252I：この左辺と右辺が等しいっていうことは，ここを探しているってことなんだよね．

253S：はい．

254I：そういう意識でこれから問題を解くといいと思いますよ．

255S：はい．

256I：難しかったですか．

257S：難しいかったです．

M.Ts　類型０

1I：じゃあよろしくお願いします．問題の(1)をやってみて下さい．

2S：（問題に取り組む）

3I：今，反対に○をしてくれましたよね．なぜ，反対に○をしましたか．

4S：式をつくるっていうのはわかるんですけど，これをどうやって式にするのかが難しいです．

5I：なるほど．(2)はどうですか．手が止まっちゃう感じですか．じゃあ，ヒントカードをもってきたので，これ見て下さい．このうちのどれに当てはまりますか．（５つのカードを並べる）土屋さんのわからないところのポイントはどこかな．

6S：･･･（しばらくながめて，「○　何を文字に表していいかわからない．」を選ぶ．）
（裏を見る「○　生徒の人数と折り紙の総数を文字にできるか考えてください．」）
（しばらく考えて，書き始める）

生徒の人数をx，
折り紙の総数をyにする

7I：何て書きました．そしたら，次はどうですか．自分でいけますか．自分でいけなければ，次のをめくってもらっていいですよ．求めるものがわからないはいいですか．

8S：求めるものはこの２つ．（生徒の人数と折り紙の総数を指して）

9I：うん．今，何をしたかっていうと，

10S：文字で表した．

11I：求めるものを

12S：文字にした．

13I：はい，いいよね．次，どうですか．自力でいけるのか，それとも･･･．

14S：わからない．

15I：どれをいきますか．これをいってみる．（「○　問題文の意味がわからない．」を渡す）

16S：（ヒントカードをめくる）

ヒントカード
「○　折り紙を何人かの生徒に配る．
　　１人に３枚ずつ配ると 20 枚余ります．
　　１人に５枚ずつ配ると２枚たりません．
　求めるものは，生徒の人数と折り紙の総数です．
　　これを求めるために，式をつくることにこだわらず，絵や図や
　表などを使って考えてみてください．」

（しばらく考える）

17I：ここに書いてあるように，式にこだわらなくていいので，答えが出るのであれば，どんなやり方でかまいませんので，どうでしょうか．

18S：･･･

19I：今，困っていることは何ですか．考えを聞かせてもらいたいんだけど．

20S：どうやったら，表せるか．絵や図に表すにはどうやったらいいか．

21I：ああ，そっちを考えているんだね．

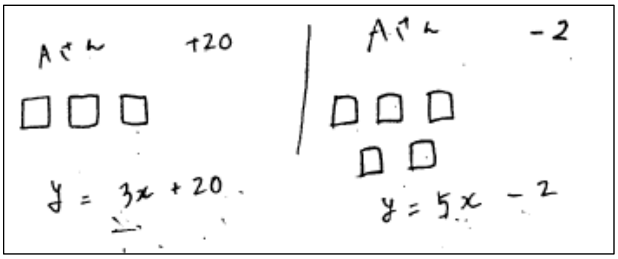
22S：が，よくわからない．どうやって表せばいいかわからない．

23I：この場面はわかりますか．そして今，Ｔｓさんがやってくれたように，何人かを x でおきましょう．折り紙の枚数も y にしましょうですよね．このあとどうでしょうか．

24S：･･･

25I：じゃあ，こっちを考えているということだから，絵や図はどうですか．この上の文章を絵にできますか．

26S：（絵をかく）



（最初は，$3x+20$ と $5x-2$ と書く．y はない．）

27I：どうやって式をつくればいいかわからないって言っていたよね．今，絵に表してみて，Ｔｓさんがわかっていることは何ですか．どういうことを表したのかな．

28S：３枚ずつ配ると，20 枚余る．５枚ずつ配ると２枚たりない．

29I：３枚ずつ配るのは何人に配るんですか．

30S：１人

31I：うん，１人に３枚ずつ配るんですよね．何人かいるんですよね．じゃあ５人いたら，何枚配るんですか．

32S：15 枚，

33I：そうだね．どういう計算ですか．

34S：５かける３

35I：５人で５枚は

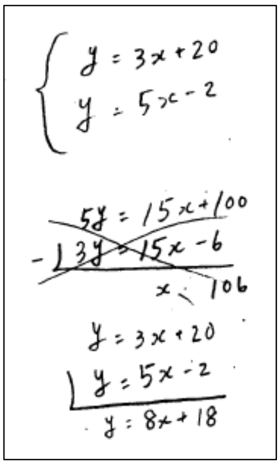
36S：25 枚．

37I：こちらの計算は．

38S：５かける５

39I：何人かわからないんだよね．

40S：（式を書き始める．右の図）わからない．（$3x+20$ と $5x-2$ に y をつけて計算し始める．しかし，答えまでたどりつかなかった）



41I：ここで，式をつくるところを聞きたいんだけど，この絵からこの式をつくった，ここを説明してもらえますか.
42S：x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余るからプラス 20 をして，こっち側は，x 人に５枚ずつ配ったら，今度は２枚たりないから，マイナス２.
43I：うん，それで．y にしているよね，それは．今，説明してくれたものを y としているよね.
44S：･･･
45I：今説明してくれたこっちの式を y とイコールって結んだよね．それは，なぜそうしましたか.
46S：総数が y だから･･･.
47I：これだよね．（ヒントカードを出す.「○　$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない.」
48S：うん．（うなずく）
49I：何を表していますか.
50S：わからない.
51I：じゃあ，裏見て．（「$3x+20$ と $5x-2$ が表している数量は何かを考えます．どちらも折り紙の総数を表しているので，等しいと言えます．すると，式はどうなりますか.」を見る.）どう，これを見て.
52S：これが，（$3x+20$ を指して）総数を表しているっていうのは･･･，生徒の人数 x と枚数の３をかけて，20 をたしたら折り紙の総数.
53I：こっちは．（$5x-2$ を指して）
54S：生徒の人数にこの５枚をかけて，それから２をひけば総数になる.
55I：そうすると，こっち（$3x+20$）もこっち（$5x-2$）も何を表していますか.
56S：折り紙の総数.
57I：その２つはどういう関係になっていますか．これとこれは.
58S：関係？
59I：これだよね．（ヒントカードを出す.「○　$3x+20$ と $5x-2$ はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない」をめくる.「○　$3x+20$ と $5x-2$ が表している数量は何かを考えます．どちらも折り紙の総数を表しているので，等しいと言えます．すると，式はどうなりますか.」を見る.）こう見えましたか.
60S：それはわかった.
61I：一番最初は，空白だったじゃないですか．わからないって発言していたけど，どんなところが難しいですか．今振り返ってみて.
62S：式のつくり方．文章題が苦手なんで，どうしたら，求めたいものになるかっていう式をつくるのが難しい.
63I：今日やって，まず求めたいものを x とか y とか，y にしなくても本当は x だけでも式はできるんだけど，今日やってみてそこから先はどうですか.
64S：そこから先も難しい.
65I：そこはどんなところかな．x とか y とかはヒントカードを見たんだけど，その後何を考えたかな．全然手に負えなかった？
66S：式にしようとするからどうやったら式になるか難しかった．すごい苦手です.
67I：ありがとうございました.

M.Y　類型０

1I：はい，始めたいと思います．よろしくお願いします．問題はこの問題です．ちょっと時間を上げますので，やって下さい.
2S：（問題を読む．しばらく考える）
3I：賛成か反対かどっちですか.
4S：･･･反対.
5I：○をして，理由を書いて下さい.

6S：どんなことでもいいですか.
7I：もちろん．考えていることを書いてもらえれば.
8S：(理由を書き始める)

(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。

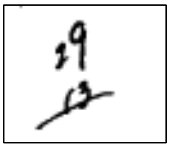
自分はもとめ方がわからないですが、
たしか，前にこのような問題を
やったことがあるので，解くことが
できると思います。

9I：何て書きましたか.
10S：なんか自分はこの求め方がわからないんですけど，前にこういう感じの問題をやったことがあるから，求め方がわかれば，う～ん，何て言えばいいんだろう･･･前にやったことがあるから，解けると思う．今は，わからないけど.
11I：では，挑戦してみますか．この問題をどう解きますかです．式にこだわらず，何でも，図，表，グラフ，絵とか，何でも使っていいですので，やれる範囲で，やって下さい．では，時間を上げますので，挑戦して下さい.
12S：(問題に取り組む)

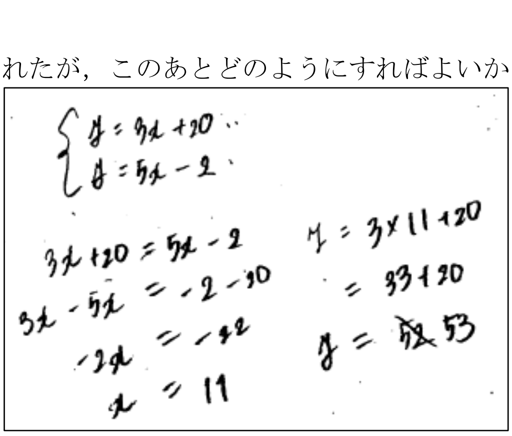
$3x+20$
$5x-2$

13I：そこから先は，難しいですか.
14S：(うなずく)
15I：今，たぶんこの２つかな．(ヒントカードを出す．「①　$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない.」,「②　$3x+20$ と $5x-2$ はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない.」) ヒントカードになっているんだけど，どっちですか，今あなたの困っているところは.
16S：こっち（ヒントカード①）のような気がするし，こっち（ヒントカード②）がちょっと思いつくような，なんか出かけている.
17I：今，こっちの状態だよね．じゃあこっちからいこうか．(「①　$3x+20$ と $5x-2$ は何を表しているかわからない.」を指して）今，つくってくれたのはちょうどこれとこれだよね．$3x+20$ と $5x-2$，これは，何を表していますか．というか，何を考えてこの式をつくってくれましたかということなんだけど.
18S：･･･ここのところを x にして･･･
19I：ん，何を x にしましたか.
20S：え～と，どっち･･･.
21I：何を x としたのかな.
22S：･･･
23I：これは，どういう意識で文字式をつくったのかな.
24S：折り紙か何人かの生徒のどちらかが x になって，だと思って，で，３枚ずつ配るから，$3x$ にして，20 枚余るから＋20.
25I：で，次は.
26S：次は，１人５枚ずつ配るから $5x$，２枚たりないから－２になる.
27I：なるほど．$3x$ の x は何になる.
28S：折り紙･･･
29I：x だけだよ．いいよ．この式をどうやってつくったのかなということを聞いているんだけど

ね.
30S：･･･
31I：じゃあ，３x＋20は何を表していますか．ここの問題だね.（ヒントカードを指して）
32S：折り紙の数？
33I：じゃあ，まくってみましょうか．裏にヒント書いてあるんで.
34S：(「①　３x＋20と５x－２は何を表しているかわからない.」の裏を見る)（「○　３x＋20も５x－２も折り紙の総数を表しています.」と書いてあるのを見る.）（自分の書いた式をながめる）
35I：改めて，３x＋20と５x－２は何を表していますか.
36S：折り紙の総数.
37I：じゃあ，xは？
38S：･･･（考える）
39I：どうかな．出かかっている感じだけど.
40S：･･･
（略）
41I：３x＋20のxは何か．５x－２のxは何か．これどうですか．これがちょっとひっかかっているところだよね．これかな.（ヒントカードを出す.「③　文字を１つ使うとき，何を文字におけばよいかわからない.」）この問題は，求めるものは何ですか.
42S：生徒の人数と折り紙の総数.
43I：それで，これは折り紙の総数を表しているんだよね．xは？じゃあ，これ（ヒントカード）まくってみて.（「○　文字xを使います．この文字xを生徒の人数としてみて下さい.」と書いてある.）
（略）
44I：例えば，こっち（３x＋20）の式で，xが３人だと何枚ってこと？
45S：29.
46I：書いていいよ．下の式は.
47S：13.



48I：そうだよね．いいよ．さて，ここだ.（３x＋20と５x－２と書いてある式を指して）このあとどうしますか.
49S：･･･
50I：今，困っていることは何ですか.
51S：･･･
52I：やろうとしていることは何ですか.
53S：連立方程式.
54I：ほうほう．連立方程式をやろうとして，手が止まっているのは，どうしてですか.
55S：（しばらく考え込む）
56I：まくってみますか.
57S：（ヒントカード「②　３x＋20と５x－２はつくれたが，このあとどのようにすればよいかわからない.」の裏を見る）（「○　３x＋20と５x－２が表している数量は何かを考えます．どちらも折り紙の総数を表しているので，等しいと言えます．すると，式はどうなりますか.」と書いてある.）（これを見て書き出す．式にy＝をつけ，連立方程式を解く.）
58I：これ見て，すぐいったよね．そこを知りたいんだけど．これをy＝の式にしましたよね，どうして.
59S：･･･



60I：y って何ですか．このヒントカードを見ていったんだよね．どっち（$3x+20$ と $5x-2$）も y っておいたんだよね．y を登場させたじゃないですか．何でおいたんですか．
61S：この２つ（$3x+20$ と $5x-2$）は等しいと言えると書いてあったので，同じ文字でイコールにする．
62I：なるほど．等しいから同じ文字でおいたということ．
63S：はい．
64I：その後は．
65S：最初，連立方程式のこういうやつあるじゃないですか．（加減法）それを思いついたんですけど，･･･なんか違うと思って，等しいといったから，この式とこの式（$3x+20$ と $5x-2$）をイコールで結んでいいって，これ（$y=$ でつないだ式）を書いて気付いて，だから，連立方程式じゃあなくて，こっちの方（$3x+20=5x-2$）がいいのかなって思って．
66I：これも連立方程式の一種ですよ．
67S：今，言われてわかりました．
68I：等しいって言われて，気付いたよね．その式が思い浮かびましたよね．これを言われる前はどんなことを考えていたんですか．まったくそれは思い浮かばなかった．
69S：いや，なんかこういう問題のとき，連立方程式を使っていたなってちょっとうっすらあって，一応，言われる前から連立方程式を使うのかなって思っていたけど，間違っているかなと思って，ずっと考えていた．
70I：どういうところが，間違っていると思ったの．
71S：この式が間違っているのかなって自分で考えていて．
72I：突然 y をもってきたよね．それは？
73S：･･･
74I：等しいから同じ文字にすればいいっていうところはどうですか．どうして思いついたの．
75S：なんか連立方程式のイメージがあって，y を使った．
76I：はい．じゃあ，$x=11$ が出ましたよね．これは，何ですか．
77S：生徒の人数．
78I：それが正しいかどうか，どうやって確かめればいいですか．
79S：両方（$y=3x+20$ と $y=5x-2$）に 11 を代入して，x に．その両方が同じ答えになったら，正しいと言える．
80I：ちょっとやってみますか．
81S：（11 を代入して値を求める．）

$y = 3\times 11+20$　　$y = 5\times 11-2$
$= 33+20$　　$= 55-2$
$y = 53$　　$y = 53$

82I：で，どうですか．
83S：正しいと言える．
84I：ここの「等しいと言える」というのを見て，等しいことを確信したんだよね．そこがうまく言えますか．なぜそれが思いつかなかったのか．この２つの式（$3x+20$ と $5x-2$）を書いて，だいぶ時間をかけて考えたよね．そこを振り返ってどうですか．
85S：これ（$3x+20$ と $5x-2$）が出たときに，これ（$y=3x+20$ と $y=5x-2$）が思いつかなくて，連立方程式っていう頭があったんだけど，y がなかったから･･･この式にならないなって思って，あと，この２つの式（$3x+20$ と $5x-2$）が等しいって思ってなかったからできなかった．
86I：ありがとうございました．では，終わります．

解答類型９(どの類型にも当てはまらない解答)の生徒のプロトコル

R.I　類型９

1I：では，始めます．やってみて下さい．お願いします．

2S：これって，自分も式がわからない場合，賛成でいいんですか．

> (1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成　・　反対
> また，そのように考えた理由を書いてください。
>
> 私も式のつくり方が分からないから。

3I：それ，賛成で，はい．

4S：そういう感じでいいんですか．

5I：はい．で，その理由を．

6S：私もわからないからで，大丈夫ですか．

7I：いいですよ．率直に答えて下さい．

8S：(問題に取り組む)

9I：はい，で，ここで言えば，ひろしさんは式では解けないって言っているんです．だから問題が解けないって言っているんだけど．(２)は，あなただったら，どう解きますか．で，式にこだわらずに，この問題を見て，自分だったら，自分のできる方法でやってもらいたいと思うんですけど．できるところまででいいんですけど．少し考えてもらっていいですか．はい，じゃあお願いします．

10S：あの式みたいになっても別にいいですか．

11I：もちろん，もちろん，いいですよ．はい．

12S：(しばらく考えてプリントに書く)
　この後，どうすればいいかわからない．

> $3x+20$　　　$5x-2$

13I：今，その式をつくったのではどのように考えて，その式をつくりましたか．

14S：人数がわからないので，人のやつをxとおいて．

15I：ちょっとそこに書いてもらっていいですか．何をxとしたのか．

16S：(プリントに書く)

> 人数をxとおく
>
> $3x+20$　　　$5x-2$

17I：はい，そして．

18S：それで，最初にこの式（$3x+20$）は，３枚ずつ配るって書いてあったので，人数×３で，$3x$で，余るだからここにたして20.

19I：ここは，プラスなんだね．

20S：はい．

21I：はい，いいよ．

22S：これは，５枚ずつなんで，人数×５で$5x$で，たりないのでマイナスになって－２です．

23I：ああなるほど．そこからどのようにすればよいと思いますか．

24S：イコールでつなげて移項するやつを使う．

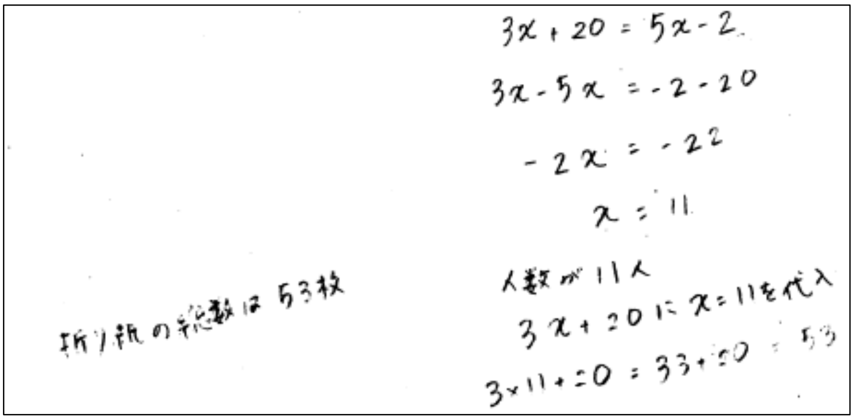
25I：なんでイコールで結ぶんですか．

26S：連立みたいにできないから，連立以外なら，それかなって．

27I：連立以外はそれかなって，そこをもうちょっと詳しく言ってもらいたいんだけど．

28S：だいたいxとyが出てきたとき，私は，連立かなって考えるんですけど，これは，yがないから，それ以外に思い浮かぶのが，移項したやつ．それはすぐに思い出す．

29I：で，今，３x＋20でしょ，５x－２だよね．まず，じゃあ左の方からいこうか，３x＋20って，これ自体で何を表していると思いますか．
30S：あっ，折り紙の全部の枚数
31I：枚数．どうしてそのように思う？
32S：３xがかかった枚数で，３が何個か人数に分かけると折り紙の枚数が出てきて，それで，余った分の20をたすと，その持っていた全部の枚数がわかる．
33I：なるほど．で，今度は，右側の，こっちはどうですか．
34S：これも５枚ずつ人に配っていって，それを，ああ，５枚を人に配っていって，それが枚数かなんだけど，２枚たりないというので，うん．
35I：で，今のことを踏まえて，この後どうすればいいですか．ちょっとやってみて下さい．
36S：･･･
37I：いいですよ，思った通りにやってもらって．
38S：さっきいったようにイコールでもいいですか．
39I：いいですよ．それを別のところにもう１回書きかえて，式をつくってもらっていいですか．はい，そこでいいです．
40S：（式を書いて解く）



41S：人数が11人．
42I：じゃあ，書いて下さい．
43S：枚数も
44I：え～と，そうですね，枚数ですね．できるだけ式も書いて下さい．
45S：（枚数を求める）
46I：はい，できましたね．
47S：おお．
48I：素晴らしいですね．さて，何を考えたかですね．ここでは，賛成って言っているから「私も式のつくり方がわからないから」って言っているじゃあないですか．
49S：うん．
50I：そのときとどのように自分が変化したのか，ちょっと振り返って，教えてもらいたいのですけど．
51S：う～ん，最初ここで，わからないなあって思って，でも一応解くだけ解いておいた方がいいなあと思って，適当に式をつくってみるって，なんかよくテストでやっている．
52I：うふふ，なるほど．ここで，何かよくわからないなって，どういうところがわからなかったですか．
53S：なんかだいたい，なんだっけ，xとかを使う問題は，苦手で，わからないなあみたいなっていうのが出てきちゃう．
54I：これ，どこにもx使えって書いていないですけど，Ｉさんは自分でxを使う問題だってわかったんですか．
55S：「何人かの生徒」だから，何人かわからないから，だいたいxとおく．

56I：で，読んでみたら，わからなかったんですか．
57S：うん．
58I：で，２つつくりましたよね．（$3x+20$と$5x-2$を指しながら）で，今，先生とちょっとやりとりをしましたよね．この後，自分だったら何をしましたか．今，先生と確認したのは，この文字式全体が何を表しているのかを聞きましたよね．自分もし１人だったらどんなふうにしましたか．
59S：７月に解いたときは，ほんとわからなくて，どうしようかなって思って，多分そのままにしたんですけど．文字が１個のときっていうかなんか，受験で勉強していて，こういうふうに解けばいいっていうことを言っていたから，うふふ，なんか･･･
（中略）
60I：Ｉさんが，例えば，こういう問題で難しいって感じるってところはどこですか．
61S：文字に置きかえて考えること．
62I：例えば，これ，文字を使わなくて解けますか．
63S：（首を振る）
64I：それは難しい．
65S：う〜ん．それは難しい．
66I：自分が困ったなとかこういうのがやりづらいなってところはどの辺なんですかね．今，文字におくところが出ましたけれど，他にありますか．
67S：自分で式を考えるところ．
68I：今，ここに折り紙を１人に３枚ずつ配ると20枚余る．１人に５枚ずつ配ると２枚たりないっていうこの場面は自分で想像できますか．
69S：（うなずく）
70I：それは大丈夫．ふ〜ん．なるほど．ありがとうございました．
71S：ありがとうございました．

M.W　類型９
1I：時間を上げますので，やってみて下さい．はい，じゃあ，お願いします．
2S：はい．（問題を読んで考える）
3I：（緊張している様子だったので）リラックスしてやって下さい．間違っていても，正しくても全然問題はないですので．
4S：はい．（書き始める）間違えた．
5I：いいよ，×でもつけて横に書いて下さい．

(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成 ・ 反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
生徒の人数がのっていないけど x などの文字を使って
表せば ~~方程式~~ ~~連立~~ 方程式をつくれると思うから。

6I：はい，賛成，反対どちらですか．
7S：反対にしました．
8I：その理由は何ですか．
9S：生徒の人数がのっていないけれど，xなどの文字を使って表せば，連立方程式をつくれるのではと思ったからです．
10I：では，（２）番では，あなただったらこの問題をどう解きますかというふうにきいていますので，ではこれも時間をあげますので，実際に解いて下さい．あの式にこだわらずに，自分のできる方法でいいですので，自由に考えてもらってけっこうですので，やってみて下さい．はいじゃあお願いします．
11S：（問題に取り組む）

3x 配ると あまりは20枚
5x 配ると 2枚足りない

（上のように書いて考える．しばらくたって）最初，式じゃあなくて大丈夫ですか．

12I：もちろん，もちろん．紙はたくさんあるので，使ってもらっていいですよ．

13S：（再び取り組む）

･･･x＝11，ん，これじゃあ意味がわからないな．

3x 配ると あまりは20枚　　人数をxで代用する。
5x 配ると 2枚足りない

$3x+20=5x-2$　　$3\times 11+20=53$

$3x-5x=-2-20$

$-2x=-22$

$x=11$

A．生徒の人数が11人 折り紙の総数が53枚

14I：なるほど．頑張りましたね．正解だと思いますが．どんなふうに考えました．

15S：え～と，とりあえず人数がわからないから，人数をxにして･･･．

16I：どっかに書いてありますか，人数をxって．人数をxと横に書いて下さい．

17S：あっ，はい．

18I：まず，考えたのは，人数を．

19S：xで対応した．

20I：うん．で，次は．

21S：その，３かけるxを配ると余りが20枚になるから，折り紙の総数は，$3x+20$になって，５x配ると２枚たりないから，総数は$5x-2$になるから，それを方程式にして，移項してxを求めて，でてきた数をxに代入して計算して，折り紙の･･･．

22I：今，折り紙の総数って言ったけど，どこが折り紙の総数なんですか．

23S：えっと，53が．

24I：この式の中で．（つくった方程式を指して）

25S：この式の中は，この，ここにxを代入したときの，このどっち（$3x+20$，$5x-2$を指して）も折り紙の総数になると思う．

26I：それは，これを書いた時点で，もうわかっていたんですか．

27S：途中で気付きました．

28I：どの辺で．

29S：ずっと考えて読んでいたら，これなんか，$3x+20$すれば，あっ，余りが20になるってことは，たせば総数になるのかなって．

30I：うん，その折り紙の総数が，今の文章を読んでわかったことで，式がつくれましたか．

31S：はい．

32I：そこがポイントだった．

33S：はい．

（中略）

34I：振り返ってみて，どういうところが難しいですかね，そこを先生達は知りたいんですけどねと．

35S：まず，折り紙の総数か生徒の人数どちらかが書いてあれば，解きやすくなるけど，どっちも書いていないということで，文字，文字を使った計算とかが苦手だから，それが，文字を入れるとなるとわからなくなっちゃうかなって，７月のをみてちょっと思いました．

36I：なるほど，このときはxとy両方使っているよね，７月の時には．今回はxだけだよね．

37S：はい．

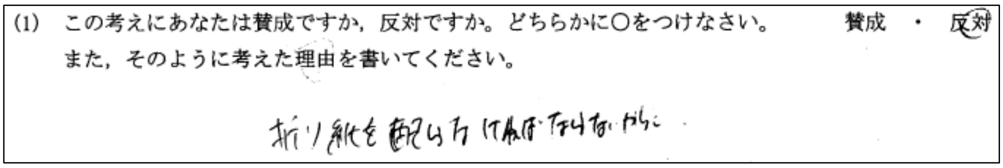
38I：そこの発想の違いは何か，振り返ってみてありますか．文字使うとわからなくなっちゃうのと，今，２つわからない，今から求めなきゃならないものがあるからっていう話なんだけど．だけど，xしか使っていないよね．それはどうしてだったのかな．

39S：う～ん．

40I：今回は，最初からyを使う気はあったんですか，なかったんですか．
41S：最初は，ちょっとyを使うのかなって思っていたけど，こっち（(１)）で連立方程式って書いたので．でも連立方程式だと，何か違うような気がしてきて・・・，どんなんだろう，わからない．えへへ．
42I：ありがとう，わかりました．よく頑張ってくれました．参考にありました．では，終わりたいと思います．ありがとうございました．
43S：ありがとうございました．

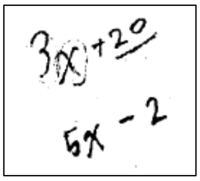
A.K　類型９

1I：では，よろしくお願いします．
2S：（問題を読む．しばらくして反対に○をする．）
3I：理由を書いて下さい．
4S：ひろしさんが問題を解くことができないということについて．
5I：うん，それに対してね．
6S：どうしよう･･･
7I：○はどっちにつけましたか．
8S：反対．
9I：反対ですか．反対，そういうふうに思う理由を書いてくださいね．
10S：（何度も問題文を読んでいる）（しばらくして書き始める）


(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
折り紙を配らなければならないから

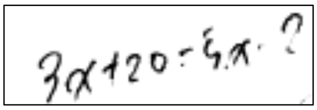
11I：はい，何て書きましたか．
12S：折り紙を配らなければならないから．
13I：どういう意味ですか．
14S：よくよくわからない．
15I：いいですよ．大丈夫ですよ．
16S：う～ん．
17I：どういう意味で書きましたか．
18S：（首を傾げながら）よくわからない．
19I：今，書いたことはどういうことを書いたんですか．
20S：･･･
21I：いいんですよ．率直に言ってもらえば．
22S：この意味がわからない．（問題文を指して）
23I：ん，あっ，なに，問題の．
24S：うんと．
25I：でも，反対だって思ったんでしょ．
26S：（首を傾げる）
27I：それはどうして．折り紙を配らなければならないから，うん，どういう意味かな．
28S：わからない．
29I：うふふ，書いた意味を言ってくれればいいんだよ．
30S：もとがわからないものじゃん．
31I：ん？
32S：問題に解くことができないというのに反対で，だから，折り紙を配らなきゃいけないから．よくわからない．
33I：うん，だから，え～と，ここでは問題を解くことはできないと言っているけれども，そこには反対．

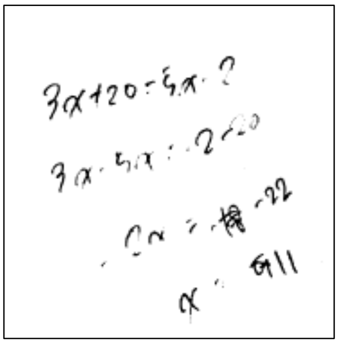
34S：うん.
35I：ということは，問題は解けるってＫさんは思うってことですか.
36S：ああ，そういうこと.
37I：うん．ひろしくんは，どうやってこの問題を解くときに式をつくればよいかわからないって言っているんだよね．どうやって式をつくればいいかわからないって．式がつくれないから問題は解くことができませんよって，ひろしくんは考えたと．それに対して，Ｋさんは，反対なんだよね．なぜ，反対って考えたのかっていうことなんだけど.
38S：え〜っ，何にも考えていない.
39I：ちょっと考えて.
40S：はい，じゃあ賛成.
41I：うん，賛成.
42S：で，解くことができないから.
43I：はい，解くことができないから．なるほど．意味があんまりよくわからないですか.
44S：（うなずく）
45I：問題のね．じゃあ，（２），あなただったら，この問題どう解きますかって聞いています．で，今，式がつくれないからに賛成って，梶原さん言ってくれたんだけど，別に式をつくらなくても解けるよね．だから，表とかグラフとか図とか絵とか，何でもいいので，自分のやれるところで，やれる範囲でやってもらいたいんだけれど，（２）番，いいですか．この問題どう解きますかっていうところです．この下にね．じゃあ，ちょっとしばらく時間を上げますので，頑張ってみて下さい．お願いします.
46S：（問題をもう一度読む）
（しばらくたって）何も思い浮かばない.
47I：思い浮かばない．そうか．今，この問題をさ，読んでみて，その状況はわかりますか，問題で言っている状況は．絵ならかけますか．この状況を絵にかくことができますか.
48S：え〜っ.
49I：今さ，何をしようとした．式を書こうとした.
50S：（うなずく）
51I：それ，難しかった.
52S：式．（式を書き始める）
53I：これがこの場面か.
54S：うん.



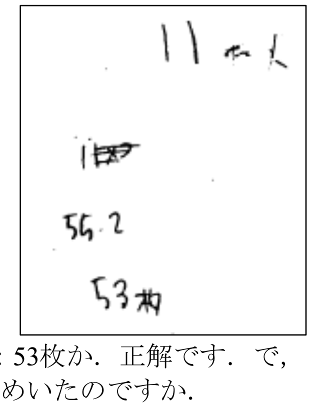
55I：なるほど．で，どうしますか.
56S：やり方覚えていない.
57I：ちょっと考えてもらうとありがたいんだけどね.
58S：（しばらく考える）
59I：この上の，$3x+20$って書いてくれたんだよね．これは何を表していますか.
60S：３枚ずつ１人に配ると，20枚余る.
61I：うん，$3x$って何を表しているの.
62S：３枚ずつ配った人数.
63I：ん，$3x$は人数なの.
64S：違う．えっ.
65I：いいですよ.
66S：折り紙の数.
67I：どこが，$3x$.
68S：（うなずく）
69I：$3x+20$は何を表しているのですか.
70S：折り紙の数.
71I：折り紙の，さっきも折り紙の数って言ったけど，違うんだよね.
72S：折り紙の合計.
73I：うん，折り紙の合計，なるほど．じゃあ，$3x$は.

74S：配った数.
75I：なるほど，じゃあこっち（５x－２）は．５x－２は？
76S：こっちと一緒.
77I：ん，こっちと一緒で．５xは何を表しているの.
78S：配った数で，２枚たりない数.
79I：うん，２枚たりない．で，５x－２で何を表すの.
80S：全部の合計.
81I：うん，とすると，この後何をすればいいのでしょうか．せっかくここまできたから，頑張ってみませんか.
82S：（しばらく考える）
83I：Ｋさんの言ったことをまとめてみると，３x＋20は何を表しているんだっけ.
84S：全部の合計.
85I：だよね．５x－２は何を表しているんだっけ.
86S：全部の合計.
87I：だよね．とすると，今，２つつくってくれたけど，どうすればいいですかね．この２つの式を．今の，Ｋさんの説明だと，どっちも折り紙の合計なんだよね．わかりますか.
88S：（わからない）
89I：難しいか，そっか．あの，同じものを表しているよね．ということは.
90S：あっ，そっか.
91I：ん，もしひらめいたのなら書いてみて下さい.
92S：（イコールで結ぶ式をかく）


３x＋20＝５x－２



93I：なるほど，解けますか.
94S：（書き始める, 右図）
95I：この計算－２－20だから
96S：ああ.
97I：×（ばつ）でいいよ．うん，ですよね．それから今，ここではさ，生徒の人数と折り紙の総数を求めなさいって言っているよね．これは何ですか，11って数は.
98S：人数.
99I：なるほど．ということは単位は.
100S：枚.
101I：人数でしょ.
102S：ああ，人.
103I：では，さっき言った折り紙の総数はどうやって求めます.
104S：（折り紙の総数を求める）

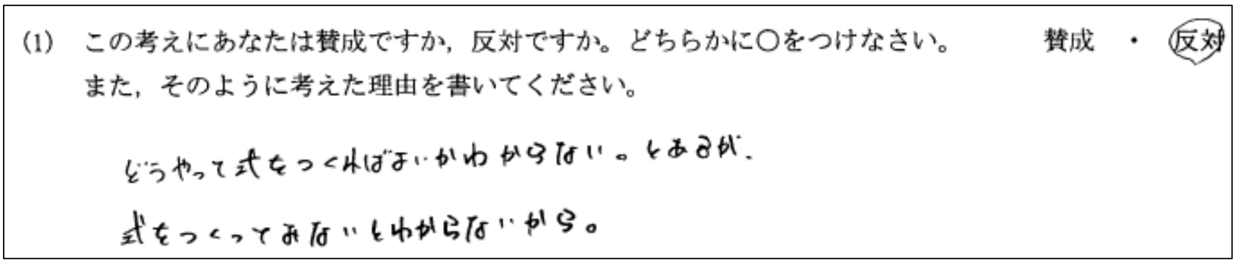


105I：53枚か．正解です．で，さっき，これを見て「あっ」って言ったよね．どんなことをひらめいたのですか.

106S：同じだと思った．（２つの式を指して）
107I：うん，同じだと思った．それでイコールで結んだ．
108S：（うなずく）
（中略）
109I：そっか．こういう問題は，どうですか，Ｋさんにとって，難しいですか．
110S：なんか，最近やっていない勉強をやると忘れちゃうから，復習をしていればできる．
111I：うん，どういうところが，Ｋさんにとって難しいですか．まず，ぱっとみて，どんなところが手が付かない部分なのかな．
112S：文字がたくさんある．
113I：ああ，文章の言葉が．
114S：（うなずく）
115I：あとは．
116S：理由を書くところ．
117I：ああ，なるほど，理由が難しいか．この問題，式をつくるところはどうですか，どんなところが難しいですか．少し苦労したよね，式を立てるときに．
118S：式は，最初からわかった．
119I：ああ，なるほど．

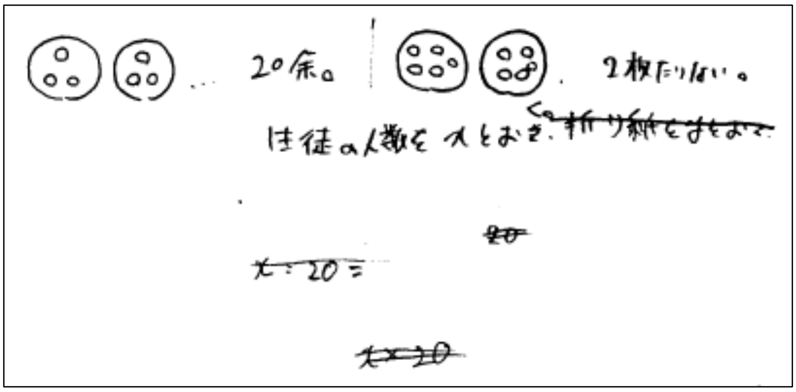
A.T　類型９　図で表す

1I：では，ちょっと，時間を上げますので，やってみて下さい．はい，では，お願いします．
2S：（問題を読む）
（反対を○で囲み理由を書く）


(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。

どうやって式をつくればよいかわからない。とあるが，
式をつくってみないとわからないから。

3S：これ名前書いていいですか．
4I：はい，お願いします．
5S：（名前を書く）
6I：書けましたか．賛成，反対どっちですか．
7S：反対．
8I：それは，どうしてですか．理由を何て書いたんですか．
9S：どうやって式をつくればわからないと書いてあるけど，なんか，ちゃんと式をつくってみないとわからないから．
10I：そうですか．では，（２）ですね，あなただったら，どう解きますか，解く過程をできるだけそこに書いてもらって，答えを求めてもらいたいと思います．ちょっと時間を上げますので，やってみて下さい．お願いします．
11S：（問題を考える）
12I：え～と，式でなくてもいいですよ．絵でもそれから表でも図でもそういったものを使って，なんでもいいですので，自分のやれる方法で，できるところまででいいですので，やってみて下さい．はい，お願いします．
13S：（問題を解き始める）
（しばらくして考え込む）



14S：あっ，そうか.
15I：あっ，そうか，って言ったよね．何に気付いたんですか.
16S：え.
17I：いいよ，いいよ.
18S：折り紙をxとおいたら，なんか式にならないなあと思って.
19I：それで，何をxとしたの.
20S：折り紙の･･･総数.
21I：総数をxとしたの，うん．で？どうしようと思ったの.
22S：･･･
23I：今，何を考えていますか.
24S：生徒の人数.
25I：を考えている．生徒の人数をどうやって出せばいいかを考えているの.
26S：（うなずく）
27I：xにおくものを何にしたんですか，結局.
28S：生徒の人数.
29I：最初は，折り紙の総数をxとしようとしたんですか.
30S：yをしようとした.
31I：yと，うん．それで，ここに書いてあるように生徒の人数をxとしたんですか．そっかって言ったのは，あれ？ちょっとわからなくなっちゃったんだけど．そっかって言ったのは，なんで，そっかって言ったの.
32S：･･･
33I：気付いたことがあったんでしょ.
34S：（首を傾げる）
35I：そうじゃないの.
36S：うふふ.
37I：どうですか．続けられますか.
38S：わからない.
39I：わからない，どういうところが困っているんですか.
40S：文章問題が，あまり好きじゃない.
41I：うん，今，ここまでおいたよね．今ここでは，何に困っているんですか．何をしようとしたのか振り返って言えますか.
42S：･･･
43I：今，考えていることを.
44S：式をつくろうとした.
45I：どういう式をつくろうとした．今，書き始めたよね．x＋20って，今どういう式を書こうとしたの.
46S：･･･
47I：今，この状況はわかりますか．問題で言っている状況はつかめる，つかめている.
48S：うん.

49I：で，xを人数にしてやろうと思ったけど，式が立てられなかったっていう，そういうところですか.
50S：うん.（小さくうなずく）
（中略）
51I：今回は，式をつくろうとしたってことかな.
52S：（うなずく）
53I：うん，どんなところが難しいですか．どんなところにつまずいた．今，ずっと考えてくれていたんだけど一生懸命.
54S：生徒の人数と折り紙の総数の２つを求めなければいけないから.
55I：そのあとは，だから.
56S：できない.
57I：できないって思ったんだね，式がね．うん．あのさ，この問題は，３人に配ったら20枚余るんだよね．20かけるの？余りだよね，20は．３枚ずつ配ると20枚余るんだよ．xは人数なんだよね，３枚ずつ配るんだよね．そうすると，20枚余るんだよね.
58S：（x×３＋20と書く）
59I：今度は，また，別だよね，式は．５枚ずつ配ったら２枚たりない．これはどうですか．２枚たりないんだよ.
60S：（x×５－２と書く）
61I：というのとこれがつながりますか．あんまりつながんない.
62S：･･･
63I：ありがとう．一生懸命考えてくれて．どうですか，これでわかった，どうすればいいですか，この後.
64I：今ので，かけるを省くとどうなりますか.
65S：（式をかく）

$x \times 3 \cdot 20$　　$x \times 5 \cdot 2$

$3x + 20 = 5x - 2$

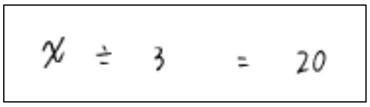
66I：それを，同じ，その３x＋20は何を表していますか．この場面で何を表していますか．３x＋20と５x－２って何を表していますか.
67S：３x＋20は，１人に３枚ずつ配ると20枚余って，５x－２は，５枚ずつ配ると２枚たりない.
68I：それは，何を表しているの.
69S：生徒の人数，えっ.
70I：生徒の人数はxとしているんでしょ.
71S：あっ，折り紙の
72I：折り紙の？
73S：総数.
74I：うん．その間には何が入るんですか.
75S：イコール.
76I：というふうにやるんです．いいですか，そこまで.

Y.O　類型９

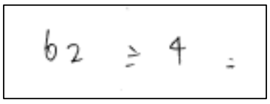
1I：では，よろしくお願いします.
2S：（問題を考える　反対に○をするがその後，手が止まる）

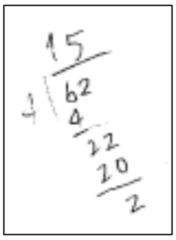
(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　　賛成　・　反対
また，そのように考えた理由を書いてください。

3I : 反対に〇をしてくれたんだよね．じゃあ式はつくれるということですよね．じゃあ，そういうふうに書いて下さい．
4S :（しばらく考える）
5I : ごめん，まずさ，（1）の反対に〇をしてくれたんだよね．その理由は何ですか.
6S : わからない･･･.
7I : 率直に言ってくれれば，緊張しないで．何でも大丈夫です．思ったことを言ってくれれば.
8S : うふふ．できると思ったから.
9I : できると思ったからね．じゃあ，（2）はあなただったらこの問題どう解きますかと言っているんです．で，ひろしさんはさ，式がつくれないから，この問題はできないっていっているんだけど，式にこだわらなくて，どんな方法でもいいです．この問題をOさんが，どのように解くかを見たいと思いますので，ちょっと取り組んでもらっていいですか.
10S : はい.
11I : じゃあ，お願いします.
12S :（問題を読んで解き始めるが，１つの式をかいて手が止まる）



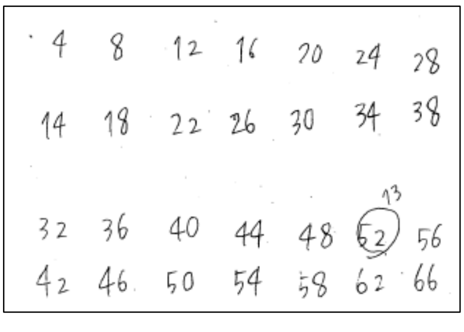
13I : 難しいですか．じゃあさ，これに似た簡単な問題に取り組んでもらっていいですかね．この問題はどうでしょうか.
14S :（しばらく考える）
15I : 式を書いていいよ．どんどん書いてもらっていいですよ.
16S :（式を書く）





17I : これさ，何を求めるんだっけ.
18S : 生徒の人数.
19I : そうだよね．そのわからない生徒の人数に４枚ずつ配ったら10枚余ったんだよね．そしたら，それが62枚．で，今，どんなことを考えたのですか．この62÷４．なぜ，わる４をしたんですか.
20S : え～と，62枚の，ん？･･･わからない.
21I : わからない．なんでわったのかな．なぜわり算を選択したの.
22S : 配るから.
23I : 配るからね．こっち（最初の問題）もそう思ったんだ.
24S : はい.
25I : で，このときさ，62枚全部配ったわけじゃあないよね.
26S :（うなずく）
27I : どうしてそれがわかる.
28S : ･･･
29I : 10枚余っているんでしょ．どうすればいいかな.
30S : ･･･
31I : じゃあ，配ってみる？１人に配ったら，何枚.
32S : １人に配ったら･･･
33I : だって１人に４枚配るんだもん.
34S : ４.

35I：４でしょ．ちょっとここに書いてみて．２人に配ったら．
36S：８．
37I：３人に配ったら．
38S：12
39I：うん，12．４人に配ったら．
40S：16.
41I：次は，５人は.
42S：え〜と，20.
43I：次は.
44S：24.
45I：次は，次々といこう
46S：28，32，36
47I：10 人は.
48S：40.
49I：11 人は.
50S：44
51I：12 人は.
52S：48
53I：13 人は.
54S：52
55I：14 人は.
56S：56
57I：うん，そこまでちょっと書いてみようか．10 枚それぞれ余っているんだよね．だから，１人に配ったとき，４枚で，10 枚余るから本当は何枚あるの．もし１人だと仮定したら，10 枚余るとしたら，何枚あるということ．
58S：14 枚.
59I：14 でしょ．この下に書いてくれる．14，次は．いつも 10 枚余っちゃっているんだから．
60S：18.
61I：全部やってみて．
62S：22，26，30，34，38，42，46，50，54，58，62，66．
63I：そうすると，全部で折り紙何枚
64S：66 枚.
65I：いや，この問題は 62 枚でしょ．
66S：62.
67I：そこに〇して．そこ何人だっけ．
68S：13.
69I：13，上に書いてみて．
70S：(13 を書く)



71I：でしょ．そのときにわり算使いましたか.
72S：使っていない.

73I：何を使いましたか.
74S：たし算.
75I：うん，今 10 たしたよね．その前は．これを出したときは何算ですか.
76S：かけ算
77I：だよね．じゃあ式は書けますか．ここ（生徒の人数）を求めるから，ここを何とする．まだわからないとして式をつくるとすると.
78S：x
79I：うん，x とするとどういう式になりますか.
80S：x×13
81I：13 はわかっていないんだから.
82S：あっ，そうか，x×４
83I：それに，たし算っていったよね.
84S：10.
85I：それが，
86S：62.

$x \times 4 + 10 = 62$

87I：じゃあ，こっちどうですか.（最初の問題を指して）
88S：（数を書き出す）
89I：何枚までいった.
90S：13 枚.
91I：じゃあそのくらいにしていこうか．さっきと同じように何枚余ったんだっけ．それを書こうか.

3	6	9	12	15	18	21	
23	26	29	32	35	38	41	
24	27	30	33	36	39		
44	47	50	53	56	59		

92I：そこまでにしておこうか．で，今度は，５枚ずつ配ると２枚たりないんだよ．そっちもちょっとやってみる.
93S：はい.（配った数を書く）
94I：今度は，２枚たりないんだよ．今，出た値からどうすればいいのかな.
95S：－２.
96I：じゃあしてみようか.
97S：（下に２枚たりない数を書いていく）

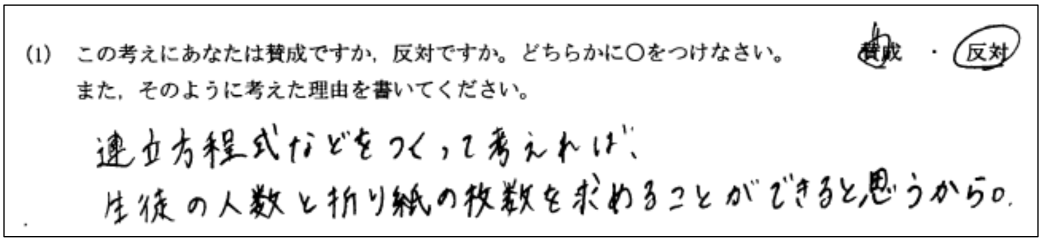
5	10	15	20	25	30	35	40
3	8	13	18	23	28	33	38
45	50	55	60	65	70	75	
43	48	53	58	63	68	73	

98I：よし，それで見比べてみよう．２こやったよね．どこが同じですか.
99S：ここととここ.
100I：じゃあそこに○をして下さい.
101S：（○で囲む）
102I：ということは，
103S：生徒の人数が，11 人.
104I：両方とも 11 人だった.

105S：はい．
106I：じゃあ，そこに書いて．等しいのは，
107S：折り紙の枚数
108I：うん，だから．
109S：53 枚．
110I：とやる．式はどうなるかな．
111S：･･･
112I：またあとで考えてみて下さい．時間なので，ここで終わりにしたいと思います．こういう問題は難しいですか．
113S：はい．
114I：どこが難しいですか．
115S：文章問題
116I：文章問題，今みたいに関係をつかめばどうですか．
117S：簡単．
118I：はい，ありがとうございました．

S.H　類型９

1I：理由を書いてもらっていいですか，少し時間を上げますので．
2S：（問題を読んでしばらく考える）
　　これって，この意見に賛成か反対かですか．
3I：そうそう．
4S：（うなずいて，再び考える　賛成に○をするが）
　　やっぱり反対にしていいですか．
5I：どうぞ．
6S：（理由を書き始める）


(1)　この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。どちらかに○をつけなさい。　賛成 ・ 反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
連立方程式などをつくって考えれば，
生徒の人数と折り紙の枚数を求めることができると思うから。

7I：うん，何て書きました．
8S：連立方程式をつくって考えれば，生徒の人数と折り紙の枚数を求めることができると思いました．
9I：なるほど，じゃあ今度は２番です．あなただったらこの問題をどう解きますか．できるだけ解く過程を，式だけでなくても，自分のやれる方法でいいと思いますので，できる範囲で，（２）をちょっと取り組んでもらっていいですか，じゃあまたちょっと時間を上げますのでやって下さい．
10S：（しばらく考えるが手が止まる）
11I：難しい．
12S：（うなずく）
13I：じゃあ，少しこっちの問題に取り組んでもらいたいと思います．今と同じような感じなんだけど，これだとどうですか，式だけでいいんですけど，立式できますか．
14S：（問題に取り組む　すぐに式をつくる）
15I：うん，解ける．解いてみて．

折り紙が全部で62枚あります。生徒に一人4枚ずつ配ったら，10枚あまりました。生徒の人数を求めなさい。

$4x+10=62$

$4x=52$

$x=13$

16I：じゃあ，こっちです．（最初の問題をさして）今のことを踏まえるとどうですか，これを見ながら．
17S：（式を書き始める）
18I：はい．答えはどうですか．
19S：（答えまで書く）

$$\begin{cases} x=3y+20 \\ x=5y-2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & x-3y=20 \\ -) & x-5y=-2 \\ \hline & 2y=22 \\ & y=11 \end{array}$$

$x=20+33$

$x=53$

$x=53$枚　$y=11$人

20I：11は何ですか．何を求めたんですか．
21S：･･･
22I：何の数．
23S：生徒の人数．
24I：じゃあ，11は何ですか，
25S：（単位の人を書く）
26I：じゃあ，53は．
27S：（単位の枚を書く）
28I：なるほど，この11人は合っていますか．どうやって確かめればいいですか．11が正しいかどうかを確かめるときにはどうすればいいか．
29S：･･･（しばらく考える）
30I：今，xが11で，yが53って出たんですよね．それが正しい答えかどうか確かめるにはどうすればいいですか．検算って言えばいいかな．検算するにはどうすればいいですか．
31S：11をyにところに代入してxが53になるかどうか．（xとyを逆にしたが）
32I：なるかどうか，なるほど．ちょっとやってみてくれる．両方とも．
33S：（検算する）

$x=33+20$

$x=53$

$x=55-2$

$x=53$

34I：うん，なるほど，等しいから，これでどうですか.
35S：あっている.
36I：あっている，ＯＫ．なるほど．で，今さ，ずっと手が止まっていたんだけど，この問題やったら思い浮かんだよね．何が変わりましたか．今，振り返って.
37S：この問題は，折り紙の全部の枚数が62枚ってわかっていたから，こっちは折り紙の枚数がわからなかったから，xにして，同時に生徒の人数がわからないから，生徒の数をyとおいてやりました.
38I：そうすると，これをやったことによって思い浮かんだということですか.
39S：はい.
40I：うん，最初これ手が止まったよね．どんなところに困ったの.
41S：なんか，どうやって式を立てていいかわらなかったから.
42I：そこが，何が原因かな．こっちはすぐにできたよね．どうしてその式が思い浮かばなかったのかな.
43S：･･･
44I：困っているところが知りたいんだよね．そこをなんとかしたいんだよね.
45S：え～と，こっちは，わからない，求めたいものが２つあったからできなかったけど，こっちの問題は１つしかわからないものがなかったから式が立てやすかった.
46I：ありがとうございました．難しいですか，こういう問題は.
47S：はい.
48I：ああ，そうですか．ありがとうございました.

資料３　第４章第３節　インタビュープロトコル

Ａ中学校２年生インタビュー対象生徒

通番	イニシャル	質問紙1		質問紙2	
		立式	答	3xのよみ	3x+20のよみ
28	H.Y	連立方程式○	×	生徒数	折り紙の総数（枚数）
9	R.N	一次方程式○	○	1人に折り紙を３枚ずつ配ること	生徒に３枚ずつ配り，20枚余ったこと
57	K.M	類型２	枚数のみ	生徒に配られた折り紙の枚数	生徒に配られた枚数と余った枚数
64	Y.T	一次方程式○	○	３枚ずつ配った生徒の数	折り紙を3人に配り20枚あまった
5	S.S	連立方程式○	○	1人に３枚ずつ配る	1人に3枚ずつ配ると20枚余る
12	T.H	類型９（文字使用なし）	×	生徒の人数	生徒の人数
53	S.N	類型９	○	生徒1人にくばる紙の枚数	折り紙の総枚数
62	T.S	類型９（文字使用あり）	×	１人３枚の折り紙を何人にくばったか	x人に3枚ずつ配ると20枚余ること

Ｂ中学校２年生インタビュー対象生徒

通番	イニシャル	質問紙1		質問紙2	
		立式	答	3xのよみ	3x+20のよみ
11	Y.N	連立方程式○	○	生徒の人数	1人に３枚ずつ配ると20枚余ること
25	H.N	一次方程式○	×	何人に３枚ずつ配ったか	もともとあった折り紙の数
54	M.O	連立方程式○	○	３枚ずつ何人にくばるか	３枚ずつ何人かにくばり20枚余ったこと
77	Y.Y	連立方程式○	○	３枚ずつ配ったときの生徒の人数	1人に３枚ずつ配ると20枚余ること
6	K.O	連立方程式○	×	x=生徒の人数 ３＝生徒１人あたりに配る枚数	1人に３枚ずつ配ると20枚余る式

28	R.H	連立方程式○	○	３は１人に配る折り紙の枚数，xは生徒の人数	１人に折り紙を３枚ずつx人に配ると20枚の折り紙があまること

Ｂ中学校１年生インタビュー対象生徒

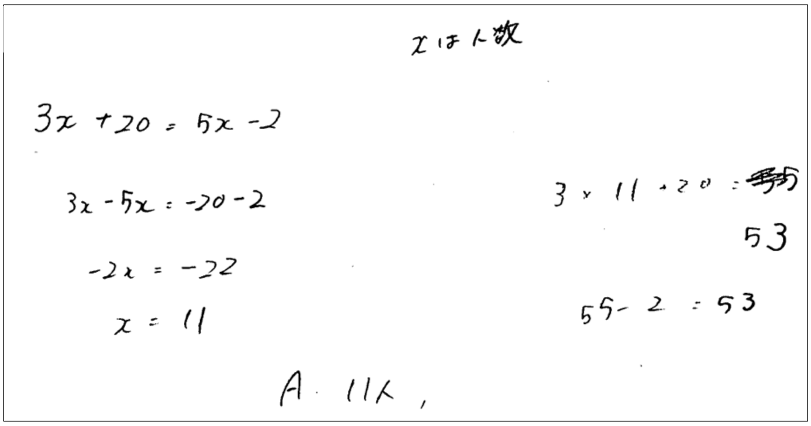
通番	イニシャル	質問紙1		質問紙2	
		立式	答	$3x$のよみ	$3x+20$のよみ
41	Y.F	連立方程式○	×	生徒の人数	１人に３枚ずつ配った時にあまる数
13	M.Y	一次方程式○	○	生徒の人数x×配る枚数３枚	①の式＋余りの枚数20枚
40	R.N	一次方程式○	○	１人に３枚配る×生徒の人数x	折り紙の総枚数
49	Y.T	一次方程式○	○	生徒の人数×３	折り紙の総数
33	M.K	一次方程式○	11のみ	配る枚数	１人に３枚ずつ配ると20枚あまる
43	Y.M	一次方程式○	× x○y ×	１人あたりの折り紙の枚数	折り紙を配り余った分をたしたこと
76	K.K	一次方程式○	○	１人３枚ずつ配る折り紙の枚数	１人に３枚ずつ配ると20枚余ること
81	M.C	一次方程式○	○	１人に配る枚数	１人に配る枚数が３xで ＋20が余った枚数

	日　時	インタビュー対象生徒
(1)	平成29年12月20日(水)午後	H.Y，R.N，K.M，Y.T，
(2)	平成29年12月22日（金）午後	S.S，T.H，S.N，T.S
(3)	平成30年1月19日（金）放課後	Y.Y，R.H
(4)	平成30年1月23日（火）放課後	H.N，M.O
(5)	平成30年1月25日（木）放課後	Y.N，K.O
(6)	平成30年1月26日（金）放課後	Y.F，M.Y
(7)	平成30年2月1日（木）放課後	R.N，Y.T
(8)	平成30年2月6日（火）放課後	M.K，Y.M
(9)	平成30年2月8日（木）放課後	K.K，M.C

Ａ中学校２年生インタビュープロトコル

28H.Y

1I：ではお願いします．前にやってもらった，この問題ですけれど，問題をもう一度読んでもらってここにやってもらいたいと思うんですけど．
2S：うふふ．はい．
3I：じゃあ，お願いします．
4S：（問題に取り組む）


xは人数

$3x+20=5x-2$

$3x-5x=-20-2$

$-2x=-22$

$x=11$

A. 11人，

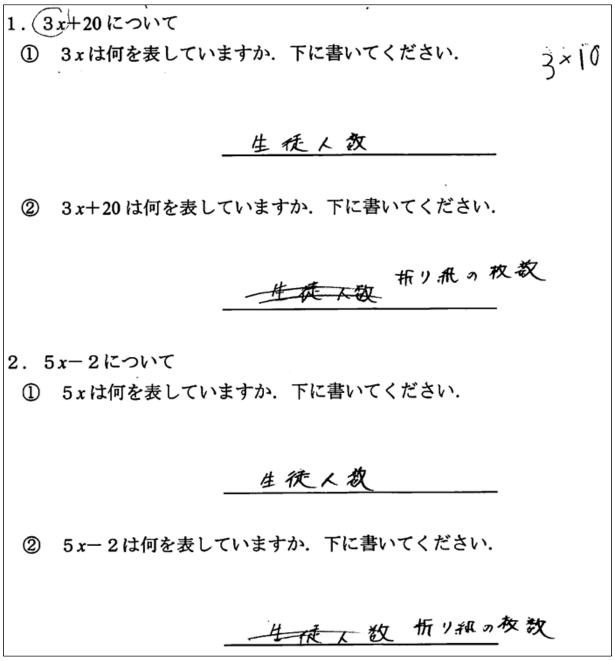
$3\times 11+20=$ ~~55~~

53

$55-2=53$

5I：答えまで書いてください．
6S：はい．
7S：（2 分 40 秒経過後）手が止まる．
8I：何に困っていますか．
9S：人数
10I：これ今何を出したのですか．
11S：あっ，違う，人数じゃなくて枚数ですね．
12I：枚数．はい．
13S：枚数をどう解けばいいのか．
14I：なるほど．今，x は何にしたのですか．
15S：人数．
16I：人数ね．じゃあ，どこかに，x は何においたって書いておいてください．
17S：ああ．（「x は人数」と書く）
18I：で，どうですか．
19S：･･･
20I：難しい．
21S：んー，うふふ．
22I：はい，では，次に，これも前にやってもらったのですけれど，じゃあ今度こっちにいきます．今，Y さんがつくってくれた式なのですけれど，こっちと同じ問題ね．同じように $3x+20$ と $5x-2$ というふうにつくっています．それで，この２つの式について聞きます．$3x+20$ について，この問題において，$3x$ は何を表していますか，それから $3x+20$ は何を表していますか，同じように $5x-2$ についてもちょっと書いてもらっていいですか．
23S：（問題２に取り組む）4 分経過
24I：はい，ありがとう．まず，$3x$ の方，こっちね．生徒の人数と答えてくれたんだけど，これはどうしてそう思ったのですか．その理由は何ですか．
25S：え～
26I：思ったことを言ってくれればいいですよ．気軽に言って下さい．
27S：･･･，この x が生徒人数を表しているから，１人３枚配るって，何かかけたら出るんじゃあないかなという．
28I：うんうん，じゃあその生徒の人数 x に３をかけたら生徒の人数を表していると．そういう

ことでいいですか.
29S：うなずく.
30I：うん，で，今度は，こっちは，$3x+20$は.
31S：えっと，この生徒人数に20枚余るって書いてあるから，なんかたしたらそうなっているのかなってみたいな.
32I：うん，そう思ったのね．例えば，これさ，こっちは，生徒11人だけど，$3x$のxのところに，3×10，10人だとするよ．こういう式になるよね.（3×10と書く）これは，何を表しますか.
33S：･･･
34I：この10は10人だよね．さっきのは11人だけど，変えて10人にするよ.
35S：うん.
36I：10人にすると，3×10という式になるよね，$3x$ のところはさ．3×10と今度は数値にしたときに，この3×10は何を表しますか.


1．$3x+20$について
①　$3x$は何を表していますか．下に書いてください．　3×10
生徒人数
②　$3x+20$は何を表していますか．下に書いてください．
~~生徒人数~~　折り紙の枚数
2．$5x-2$について
①　$5x$は何を表していますか．下に書いてください．
生徒人数
②　$5x-2$は何を表していますか．下に書いてください．
~~生徒人数~~　折り紙の枚数

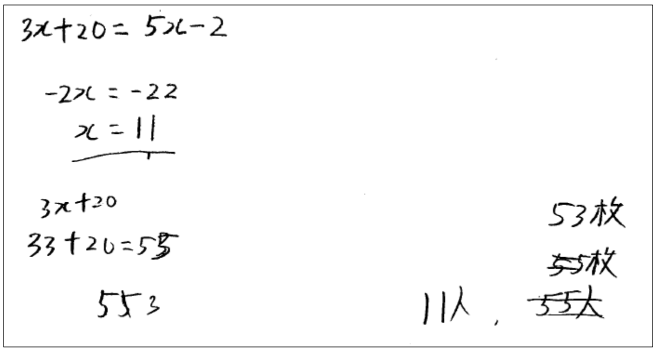
37S：枚数･･･うふふ．わかんない.
38I：かな.
39S：枚数･･･
40I：それはどう．$3\times x$のときと3×10のときは違う？
41S：同じ.
42I：なんで同じと思う.
43S：･･･
44I：xってどういうものなの.
45S：生徒の人数
46I：うん，生徒の人数で．それが10に変わったときは，これが枚数で，こっちは生徒の人数っていうのはどうなんだろう.
47S：ふふふ．違うってことかな.
48I：違うってこと，うん．今，Yさんは，この$3x$が生徒の人数.
49S：んー.
50I：これがあやしくなった.
51S：うん.
52I：それで，こっち（$3x+20$）は折り紙の枚数．いいよね．こっちも同じように$5x$が生徒の人数，$5x-2$が折り紙の枚数．そうすると，この式をつくってくれたよね.（問題1のときにYさんがつくった式$3x+20=5x-2$を指して）これどういうふうにしてイコールの式がつくれたの.
53S：･･･とりあえず，人数を求めるときにわからないからxにおいて，1人3枚ずつと書いてあるから$3x$とおいて，20枚余ると書いてあるから＋20と書いて，この式とこの式が等しいというか，同じ枚数だから，イコールでつないだみたいな.
54I：最初から枚数が同じとみられていたの.
55S：うん.
56I：そうすると，ここでの解釈は$3x$が人数.
57S：んー.
58I：$3x+20$は折り紙の総数．どうですか.
59S：んー.
60I：そういうことで，最初そういうふうにみていたの.

61S：かな～.
62I：今，この怪しくなったところをみて，どんなふうに変わっていますか.
63S：え～.
64I：今のYさんの話だと，この文章にあるとおりに，式をつくった感じ.
65S：ははははは・・・.
66I：うん．イコールはどういう意味で使っていたのかな.
67S：等しい.
68I：何と何が等しいとみたの.
69S：折り紙の枚数.
70I：折り紙の枚数が等しいと見たんだ．例えば，問題がこうなったらどうですか．（②の問題を提示）折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．このとき，どういう式になりますか.
71S：６x･･･
72I：うん，ちょっとここに書いてください.
73S：（$6x+18=8x$ と式を書く）
74I：うん，だよね．そしたら，さっきのYさんの解釈でいくと，６xは生徒の人数で，これ（$6x+18$）で折り紙の枚数でしょ．８xが生徒の人数なので，それとイコールってならない.
75S：ああー．そっか.
76I：そうすると，もう１回何を表しているのか，考えることできますか.
77S：（しばらく考える）
78I：（８xと囲んで）これは何なのかな．ここでいうとこれ（$3x$）だよね．これは何なのか.
79S：えー.・・・人，んー
80I：人数.
81S：枚かな.
82I：枚数じゃあないかな．xは人数なんだよね．それに８かけて.
83S：んー.
84I：Y さんは最初，人，人数って思ったんだよね．本当は，ここは何なの．８かけたり，３かけたりするここ（$8x$，$3x$を指して）は.
85S：ああ，枚数．枚数かな.
86I：おお，ここ枚数．なんでそう思いましたか.
87S：決まっているからかな．xが，人数がもう.
88I：うん，それはどういうこと．例えば.
89S：･･･
90I：そうか，もう１回，xは何．決まっているからってどういうこと．すごい大事な，興味があるところなんだけど．今，言ったことを丁寧に言ってみるとどういうこと.
91S：え～.
92I：いいんだよ.
93S：･･･，xの値は変わらない，っていうそういう感じがする．だから，んー.
94I：決まっているというのはどういう意味で言っているのかな．そこを詳しく知りたいんだけど.
95S：何て言ったらいいのかな．生徒人数はxとおいてあるから，この１人８枚という数をかけても，なんか，人数は変わらないっていう.
96I：うん，人数が変わらないから，８枚配ったら，それは８xっていうのは何を表しているの.
97S：枚数，合計
98I：どういう合計なの.
99S：配った，８枚ずつx人に配った枚数.
100I：そのときのxって今までどういうふうにみていたの．どういう感じで使っていたのかな.
101S：なんか，あんまり考えないで，適当に式を立ててやっていたかな.
102I：そうか.

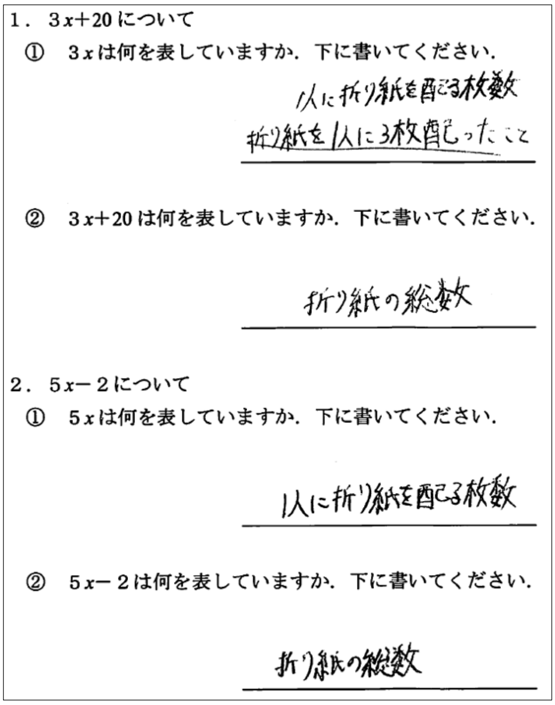
103S：あんまり深々と考えていなかった．
104I：この６x＋18 は枚数だし，６x も枚数だという，８x も枚数という，それいいですか．
105S：んー．８x は人数，あっ違う，枚数か．
106I：うん．
107S：枚数で，これ全部そうなると人数になるのかな．
108I：これ全部人数．
109S：かな．え～．
110I：だって，枚数とイコールなんだよ．
111S：･･･．
112I：これ（６x＋18）を枚数とみているんじゃあないの．
113S：うん．･･･．
114I：ね．
115S：んー．
116I：どう，頭の中，整理できていない．
117S：できていない．難しいです．うふふ．
118I：もうちょっと，１回考えてみて．どういうふうに整理できていないですか．
119S：･･･
120I：そうすると，今，ここで 11 で困っていたよね．答え出ますか．折り紙の数が出なくて困っているって言っていたよね．この後，答えが出るんですか．
121S：･･･．
122I：よく考えて．
123S：んー
124I：これ今，11 人が出たよね．そうしたら，どうやれば折り紙の枚数が求まりますか．求められると思うかな．
125S：んー．
126I：だって，さっき，３×10 ってやったんだよね．10 人だった場合を．今，11 人なんでしょ．折り紙の総数はどうやれば求まるかな．
127S：･･･代入して求める．
128I：うん，どうぞ代入してみて．
129S：（３×11＋20＝53 と書く）
130I：どう．こっちもやってみる．
131S：うん．（55－2＝53 と書く）
132I：それが．
133S：枚数．
134I：どう，少しは整理できた．
135S：首を傾げる
136I：だめ．
137S：えー難しい．
138I：どんなところが難しいですか．
139S：なんか，深々考えていくと，絡まってぐちゃぐちゃになってきちゃうから．
140I：改めて考えて，３x は何ですか．
141S：枚数．
142I：どういう枚数，ここで使っている３x は．
143S：１人に３枚配った枚数．
144I：いいですか．じゃあ，ここで終わりにします．ありがとうございました．

9R.N
1I：最初は，これ前回にやってもらっているのですけれど，この問題を読んでもらって，そして，ここに解いてください．

2S：はい．
3I：では，お願いします．
4S：（問題1に取り組む）1分30秒経過後
5I：ちゃんと計算して．ん，33＋20だよ．



6S：あ～すみません．（33＋20＝55と書き，53に訂正する）
7I：じゃあ次ね．こっちの問題ね．これもやってもらったと思うのですけれど，よく読んでその意味を書いてもらえますか．
8S：はい．問題1に取り組む（2分経過後）
9I：じゃあ，ちょっとこれについてききたいと思うんだけど．
10S：はい．
11I：３x＋20の３xね．まあここ（問題１の解答を指して）でもＮ君書いてくれたんだけど．
12S：はい．
13I：３xというのをこういうふう(折り紙を１人に３枚配ったこと)に書いたよね．これ，どういう意味で書いたんですか．
14S：なんか，折り紙･･･，えっと，xが，えっと，人．
15I：うん，人ね．
16S：生徒の人数なので，折り紙･･･，x，この３という数字が１人に３枚配るということを表しているので，こういう答えをつくって･･･．
17I：で，変えたよね．
18S：はい．
19I：それは．
20S：え～と，ああ，書いていて，ここのところ（５x は何を表しているかを問うている問題文を指して）をつくろうとしたときに，１人に５枚配ったことだと，折り紙がたりないので，合わないなと思って，答えを変えました．
21I：で，何て変えたの．
22S：１人に折り紙を配る枚数
23I：１人に折り紙を配る枚数ってどういうことを言っているの．
24S：生徒１人に何枚折り紙を配るかということを表しています．
25I：うん，３枚配るんだよね，１人に．
26S：はい．
27I：だから．
28S：あっ，１人に３枚，配ること．
29I：１人に３枚配ること．何人に，１人しかいないの，ここには．
30S：ああ，11人に．
31I：この場合はxだよね．
32S：ああ，x人に３枚折り紙を配る枚数．
33I：という意味．それでいい？
34S：はい．
35I：はい，そして，３x＋20は折り紙の枚数．折り紙の総数ね．今，Ｎ君がつくってくれたイコールの式は，左辺と右辺がどういう関係でイコ


1．3x＋20について
①　3xは何を表していますか．下に書いてください．
~~1人に折り紙を配る枚数~~
折り紙を1人に3枚配ったこと
②　3x＋20は何を表していますか．下に書いてください．
折り紙の総数
2．5x－2について
①　5xは何を表していますか．下に書いてください．
1人に折り紙を配る枚数
②　5x－2は何を表していますか．下に書いてください．
折り紙の総数

ールにしたんですか.
36S：折り紙の枚数の総数でイコールにしました.
37I：この両方（$3x$+20と$5x$－２）ともそれを表している.
38S：はい.
39I：で，中にはですね，これ$3x$を生徒の人数と思っていて+20があまった折り紙の枚数と思っていて，それで，解釈すると，人数+余った数と人数－たりない数でイコールという生徒がいるのね．それについてどう思いますか.
40S：･･･
41I：言っている意味わかる.
42S：だから，この$3x$っていうのが人で.
43I：そう，人数だと思っていて，で，20は余った枚数だと．で，$5x$は人数で－２は２枚たりないという，この文章の状況をイコールで結んだという人がいるんだけど，それについてどう思いますか.
44S：正しくないと思います.
45I：正しくない．どういうふうに正しくないですか．その気持ちはわかりますか，わからないですか.
46S：わかりません.
47I：うん．どういうふうにそういっている人には説明しますか.
48S：生徒の人数をxとして方程式をつくりなさいと書いてあるので，この$3x$全体を生徒に人数として考えたら，いけないと思います.
49I：そのときにほら，xは人数だからそれを３倍すると人数だと思ってしまっている子がいるんです．それはどうですか.
50S：それは，違うと思います.
51I：それは，そういう子にはどういうふうに説明しますか.
52S：この３という数字は，１人に３枚ずつ配るということを表しているので，人数にかけてしまったら，それは問題の意味とは違ってきてしまうので，違うと思います.
53I：もう１回，３はどういう意味なの.
54S：この１人に生徒に折り紙を，何枚折り紙を配るかだと思う.
55I：で，xが人数だと，どうしてこれで枚数になるのですか.
56S：もう一度，お願いします.
57I：３は，１人に３枚ずつ配るよという意味だよね.
58S：はい.
59I：それに，人数のxをかけるわけだよね．それでなぜ枚数になるのかというところに引っかかっている子どもがいるのですが，そういう生徒に，そういう友達にどういうふうに説明しますか.
60S：う～んと，･･･.
61I：例えば，どんな式をもってきて説明しますか.
62S：･･･．折り紙と人数がなぜごっちゃになっているかということですよね.
63I：そうそう．そういうときに何か具体的な例で説明できますか．xだからわかりにくいんだよね．例えば，どういう式で説明する.
64S：この式自体をですか.
65I：そう．この$3x$のところを．数値に戻せばいいような気がしませんか．数でやってみる．例えば，10人だったらって.
66S：ああ，当てはめるということですか.
67I：そうすると，解釈がわかりやすいですか.
68S：はい．３×10とやると，30枚.
69I：30人ではなく，30枚.
70S：はい.
71I：そうですよね.
72S：はい.

73I : それから，前にN君がやってくれたときには，この２つの式（$3x$＋20と$5x$－２）書いて，同じことを指していると書いているんだけど，同じことを指していると，どうして同じことをと書いたのかな．今は，折り紙の総数が等しいからと言ってくれたから，よくわかったのだけれど，このときは，同じことを表しているというのは，どういう考えで書いたのかな．
74S : それも折り紙の総数と同じ意味で書きました．
75I : はい，わかりました．
76S : ありがとうございました．

53K.M

1I : まず，この問題をやってください．じゃあ，お願いします．
2S :（問題１に取り組む）5分20秒経過（$3x$＋20＝$5x$－２と書いて，$5x$－$3x$として止まる．）
※移項が間違っていたので，$3x$－$5x$と訂正する．その後も解き方を一緒に確認しながら，答えを導く．

$3x+20=5x-2$
$\cancel{5x}-3x$
$3x-5x=-2-20$
$-2x=\cancel{16}$
-22
$x=11$

$33+20=55-2$
53

3I : この出た数は何ですか．
4S : 53が折り紙の枚数です．
5I : いいですか．
6S : はい．
7I : じゃあ，次ね．
8S :（問題２に取り組む）
9I : 今，Mさんがつくってくれた問題で，$3x$＋20 がすぐにできたよね，$5x$－２も．
10S : はい．
11I : イコールで結べたよね．
12S : はい．
13I : これ，$3x$は何を表していますか．
14S :（「１人に配った折り紙の枚数」を表していると書く．）

①　$3x$は何を表していますか．下に書いてください．

1人に配った折り紙の枚数．

②　$3x$+20は何を表していますか．下に書いてください．

1人に配った折り紙と余った折り紙の合計の枚数．

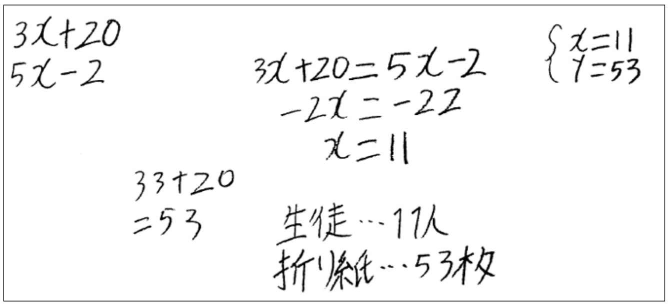
15I : じゃあ，$3x$＋20は．
16S :（「１人に配った折り紙と余った折り紙の合計の枚数」と書く．）
17I : はい，ありがとう．そうすると，1人に配った折り紙の枚数というのは，xが出てこないんだけど，$3x$について聞いているのに．
18S : はい．
19I : それは，どういう意味ですか．xはどうしてないのですか．xはどう解釈する．
20S : ん，･･･．
21I : この今の言い方だと，１人に配った折り紙の枚数といったら，１人が３枚もらったから，３枚っていう答えになっちゃうよね．それを言っているわけではないでしょ．
22S : ああ．
23I : どういうふうに言いたいの．
24S : ･･･．
25I : Mさんの書いてくれたことで，枚数ということはわかったのですけれど，何の枚数かな．$3x$について，これが何を表しているのかを聞いているので．
26S : はい．
27I : ３とxというのを使わないで書いてくれているので，それをもうちょっと聞きたいのだけれど．
28S : ああ．
29I : どういうことかな．xって人数だよね．
30S : はい，何人かの生徒の人数です．

31I：それに３かけたものはどういう意味を表しているかです．言っていることは，わかるのだけど，もう少し具体的に，これ以外表現ない．
32S：う～んと，･･･．
33I：私の言っていることわかる．
34S：もう１回お願いします．
35I：１人に配った折り紙の枚数というと，その１人に配った枚数というのは３枚じゃん．
36S：はい．
37I：このＭさんの書き方だと３枚じゃあないですかと言われてしまう．でも３枚のことを言っているわけではないんだよね．
38S：はい．
39I：わかる．１人に配った折り紙の枚数というのは１人に３枚配られるんでしょ．この文章問題でいくと．だけど，３枚のことを言っているわけではないでしょ，$3x$は．
40S：ああ．
41I：$3x$は何を表しているのかをもう少し詳しく言ってほしいのですよね．そこがわかればこっちは大丈夫なので．どう，言っていることはわかった．
42S：ちょっと待ってください．･･････．
43I：例えば，xを10人としようよ．そうすると，3×10は何を表している．
44S：30．
45I：30だよね．30とは何を表しているんですか．
46S：全員に配った折り紙の枚数の合計です．
47I：これがxに変わったらどうなるんですか．どういうふうに，今度は解釈できますか．今度はx人になるんですよね．
48S：はい．
49I：10人だったら，今言ったように，30となって，30枚なんだよね．
50S：はい．
51I：それは，10人に配ったときの枚数なんだよね，Ｍさんが言ってくれたように．
52S：はい．
53I：じゃあ，xだとどうなるんですか．
54S：･･･．
55I：難しいかな．
56S：ちょっと･･･．
57I：xというものはどんなふうに，どんな数だと思っていますか．
58S：x，xは，いる人数の合計で．
59I：うん，人数の合計．
60S：はい，人数の合計で．
61I：$3x$になると．
62S：$3x$になると，ああ，あっ，折り紙の合計．
63I：どういう合計なの．
64S：何人かの生徒に配った折り紙の枚数の合計．
65I：何人かに何枚配ったの．
66S：何人かに･･･．
67I：$3x$でしょ．
68S：はい．ん．
69I：何人かいるよね，その人たちに何枚配ったの．
70S：合計でですか．
71I：$3x$というのはどんな枚数を表しているのか．x人に１人に何枚ずつ配っているのですか．
72S：３枚ずつ．
73I：そうだよね．それがイメージできていますか．
74S：たぶん，できていません．
75I：どんなふうに思っていたの．$3x$というのはどんなものだと思っていたのかな．

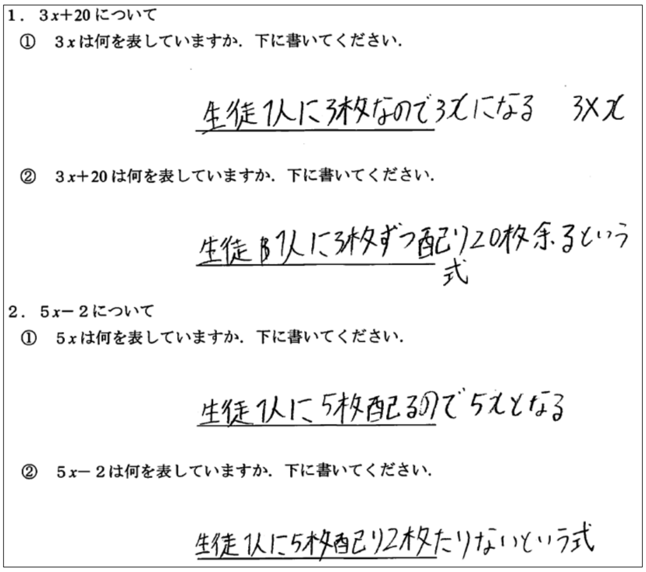
76S：雰囲気的に，多分同じようなことは考えていました．はっきりとはあんまり．
77I：３枚ずつ x 人にって，人数がわからないじゃあないですか．そう配ってしまうと 20 枚余ってしまうという状況ですよね，$3x+20$ は．それはイメージできたのですか．
78S：はい，それはイメージできました．
79I：そうですか．ありがとうございました．

64Y.T

1I: じゃあ, まずこれは前にやってもらったんですけれど, この折り紙の問題を読んでもらって，そして，解いて見てください．


$3x+20$
$5x-2$
$3x+20=5x-2$
$-2x=-22$
$x=11$
$\begin{cases} x=11 \\ y=53 \end{cases}$
$33+20$
$=53$
生徒…11人
折り紙…53枚

2S：はい．
3I：お願いします．
4S：（問題１に取り組む）1 分 10 秒経過　解を求める．
5I：そうすると，この質問に答えを書いてください．
6S：（答えを書く）
7I：じゃあ，次にこっちの問題です．これも前にやってもらった問題です．今，つくってくれた $3x+20$ と $5x-2$ ね．この 2 つの式について聞きます．まず，$3x+20$ ね．$3x$ は何を表していますか. それから $3x+20$ は何を表していますか. そして，こっち，$5x-2$ も．ちょっと書いてみてください．では，どうぞ．
8S：うまく言葉にできないと言うか･･･．


1．$3x+20$ について
① $3x$ は何を表していますか．下に書いてください．
生徒1人に3枚なので3xになる　3×x
② $3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．
生徒1人に3枚ずつ配り20枚余るという式
2．$5x-2$ について
① $5x$ は何を表していますか．下に書いてください．
生徒1人に5枚配るので5xとなる
② $5x-2$ は何を表していますか．下に書いてください．
生徒1人に5枚配り2枚たりないという式

9I：あとで説明してくれればいいよ．
10S：あっ，はい．（問題２に取り組む）3 分後
11I：は，では，$3x$ から聞こうか．
12S：はい．
13I：これ，どういう意味で書いたのですか．
14S：え～, 折り紙を１人に３枚ずつ配るということだから，$3\times x$ にして，$3x$ になった．
15I：$3\times x$ ね．じゃあ，$3\times x$ と書いて．どこかその辺にね．
16S：（問題２に $3\times x$ と書く）
17I：はい，で，x は何を表しているんでしたっけ．
18S：１人に, あ～違う違う, 折り紙･･･．あっ，ちょっと･･･．
19I：うん,「生徒１人に３枚なので」ということで，３は $3x$ の３だよね．
20S：うん．
21I：x は何を表しているの．
22S：何人かの生徒に配る枚数を･･･ん～，折り紙を配る生徒の数．
23I：うん，x は，折り紙を配る生徒の数．
24S：折り紙を配る生徒の数を x としました．
25I：はい，$3\times x$ だよね．これは，３枚なのでというのは，どんな数を表しているの．何を表しているの．
26S：生徒１人に，生徒の人数，生徒の人数を x として，その人に３枚ずつ配るということだから，$3x$.

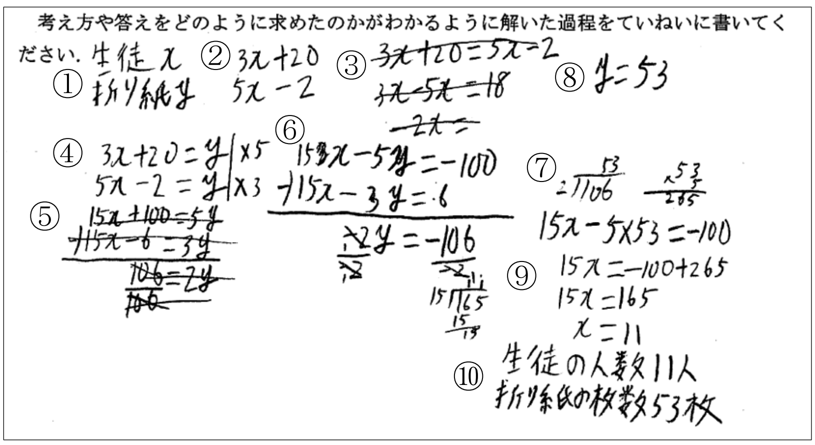
27I：それは何を表しているのかな．この場面で言うと．え～と，単位は．
28S：生徒１人に折り紙を３枚ずつ配るということを３x．
29I：それを表している．
30S：はい．
31I：３x で何かを表しているわけではない．今の言い方だと．
32S：３x で･･･．
33I：これこれなので，３x なのね．
34S：多分．
35I：はい．じゃあこっちいこうか．３x＋20．「生徒１人に３枚ずつ配り，20 枚余るという式」これは，どういう意味ですか．
36S：え～，生徒に３枚ずつ折り紙を配って，３枚ずつ配っちゃうと残り 20 枚余るということを式としてつくりたかったから，生徒の人数３x，え～．
37I：なになに．
38S：え～
39I：じゃあ，こんなふうに，3x＋20 がこの場面においてどれが相応しい単位かを選んでくださいということで，これが人，これが枚，３x は人で 20 が枚，３x は枚で 20 が人，どれですか，あなたの３x＋20 の表し方は，どれに近いのですか．
40S：上から３番目．(３x 人＋20 枚)
41I：ああ，そうですか．なんでそう思うのですか．
42S：生徒 x 人に３枚折り紙をわたすということだから，３x 人として，で，残りの折り紙の枚数が 20 枚だから．
43I：なるほど．で，こっちも同じ．５x－２も同じ感じ．
44S：はい．
45I：じゃあ，この問題と似ているのだけど，この問題をやってもらえるかな．(補助問題①)「折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい．」式，書けますか．
46S：(式を 62(４x＋10)と書く．) ああ，これじゃあおかしいや．
47I：全部で 62 枚あるんだよ．生徒１人に４枚ずつ配ったら 10 枚余ったという，これはどういう式になりますかということだよね．もう１回考えてみる．
48S：ちょっとわからないですね．
49I：うん，これ，４x＋10＝62 じゃあないですか．ちょっとそこに書いてください．
50S：(４x＋10＝62 と書く)
51I：じゃあ，こっちの問題．(補助問題③)「折り紙が全部で 42 枚あります．生徒１人に３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れました．生徒の人数を求めなさい．」これはどうですか．
52S：42＝３x
53I：うん，だよね．そうすると，さっき，これに○をしてくれたよね．３x は人なんだよね．でも，42 枚とイコール．それで，こっちは，４x＋10 だから，４x が人で 10 が枚だけど，62 とイコール．
54S：ああ．･･･．
55I：どうかな．
56S：じゃあ，一番上になるということ．((３x＋20) 人を指す．)
57I：変わる．なるほど．なんで人になるの．一番上．理由はわかる．
58S：生徒１人に４枚ずつ配る･･･．ふふ．
59I：どう．うふふ．
60S：でも，最初おかしい．
61I：ん，何がおかしい．
62S：う～ん．
63I：これ，決着つけたいね．もう１回見ようか．③は全部で 42 枚あって，３枚ずつ配ったら，全員にぴったり配れましただから，42＝３x．
64S：うん．

65I：つまり，折り紙42枚と $3x$ が等しいよという式だよね．こっちは，まず全部で62枚あります．生徒1人に4枚ずつ配ったら10枚余りました．この場面設定はこれ（元の問題）と一緒だよね．1人3枚ずつ配ったら20枚余りますが $3x+20$ だから，$4x+10$ これはT君できた．
66S：うん．
67I：これを62とイコールで結ぶということを言ってこういうふうに式がなったのだけれど．これは納得できますか．まず，こっち（$42=3x$）は納得できますか．
68S：こっち側は納得できる．
69I：うん，自分でこの式を書いたんだもんね．こっちはどうですか．（$4x+10=62$）
70S：こっちは･･･．生徒1人に4枚ずつ配ったら10枚余りましたというのと，折り紙が全部で62枚ありますというのが等しいから，このイコールで結ばれて，$4x+10=62$ という式になる．
71I：なるほど，ということは，$4x+10$ は何を表しているの．
72S：生徒，え〜･･･．折り紙が全部で62枚あって，そのうちの生徒1人に4枚ずつ配ったら，10枚余ってしまったというのを表している．
73I：なるほど，同じように $4x$ は人で10は枚．
74S：両方とも枚数．
75I：ああ，なるほど．なぜそう思ったのですか．
76S：1人に4枚ずつ配るということは，これで，$4x$ で，（$4x$）枚みたいな．
77I：ということは，見直してみるとどれかな．（単位の選択肢を指して）
78S：これ（（$3x+20$）枚を指して）かな．
79I：なるほど．じゃあそれに○をして．そうか．じゃあ，（もとの問題に）戻ろうか．$3x$ の x って，どんなふうに見ているのかな．こういうふう（$3x$ 人＋20枚）に見ているときとこういうふう（（$3x+20$）枚）に見ているときとで違いがありますか．式の見方が違っていましたか．振り返るとどういう感じですか．
80S：･･･．う〜んと．
81I：難しい．
82S：うん．
83I：$3x$ はなんで人と考えたの．
84S：最初は，あの，1人に3枚ずつ配るから単位は人になるのかなと思って．
85I：それは，1人に．
86S：1人に．
87I：3枚ずつ配るから？そのときの x は1人なの．
88S：x はこの人の．
89I：その人を表している．
90S：うん．
91I：なるほど．それも1回，自分の言葉で言ってほしい．x は？
92S：x は，生徒1人に．生徒，ああ何て言ったらよいか．生徒1人に3枚ずつ配ったこと．
93I：それがなぜ人になるのか．x をどう見ているのかを知りたいんだけど．
94S：･･･．
95I：単純に x が人数を表しているからじゃあないんだよね．その感じは．
96S：う〜ん．
97I：1人にというというところがどういうふうに考えているのか．1人にというところが x なの．そうじゃない．
98S：枚数．えっ，枚数が x なの．
99I：人数は x としてって書いてあるから，x は人数です．
100S：･･･．
101I：$3x$ の説明に x が入っていないので，x をどういうふうに解釈しているのかなということが知りたいんだよね．
102S：生徒1人というのを x とおいて，3枚なので，$3\times x$ としている．
103I：生徒1人が x なんだ．そこには生徒がイメージしている，x という．
104S：そうです．

105I：わかりました．それが，こっち（（３x＋20）枚）になったってことは，x 人に３枚ずつということで３x が枚になったということはいいですか．それは．
106S：それは，あの，･･･．
107I：ん，納得？
108S：･･･．
109I：まだ納得できていない．
110S：う〜ん．
111I：まだ釈然としない．どういうところが釈然としないのですか．
112S：３x とこの枚数．枚数と人の違いというか･･･．
113I：x 人いて，x 人て何人かわからないんだよね．
114S：うん．
115I：それを例えば，10 人と人数にしたらどう．３×10 とやったらどう．
116S：30 枚
117I：それは枚でしょ．
118S：ああ．
119I：それはわかる．
120S：はい．
121I：だって，10 人に３枚ずつ配れば，折り紙の枚数は 30 枚必要．それが３x になってしまうと人になってしまうということ，T 君，それはどう．
122S：そっか．
123I：どう，T 君，今の説明で納得．
124S：x に代入してみて，そういう考え方なんだってわかった．
125I：その代入する x というのは，T 君の中ではどういうふうにイメージしているのかな．
126S：え〜，･･･．
127I：x って何だろう．
128S：１人に３枚ずつ配っていく全体の枚数みたいなのが３x．
129I：わかりました．
＜インタビュー終了後＞
130S：x に 10 を入れると枚数だとわかるけど，文字だけだとわからなくなる．式をつくるときちゃんとイメージがないままやっていました．
131I：そうか．わかりました．ありがとうございました．

5S.S

1I：じゃあ，よろしくお願いします．最初に，前にもやってもらったと思うのですけれど，この問題を読んでもらって，解いてみてください．お願いします．
2S：はい．（問題１に取り組む）6 分経過（①〜⑩は記述した順序）



3I：はい，ありがとう．今，やってもらったんですけれど，これも前回聞いていますけれど，この同じ問題で，生徒の人数を x としたときに，S 君もつくってくれた $3x+20$，それから，$5x-2$ の２つの式をつくりました．この２つの式について聞きます．ということで，$3x+20$ について，$3x$ は何を表していますか．これどうですか．

4S：（「１人の生徒に３枚折り紙を配ること」と書く．）

5I：はい，じゃあ，$3x+20$ は．

6S：（「１人の生徒に３枚折り紙を配ると 20 枚余ること」と書く．）

7I：これ，下（$5x-2$ を指して）も同じ．

8S：うん．

9I：この配ることというのは，どういうことを表しているのかな．

10S：３枚ずつ分けてわたす．（配るジェスチャー）

11I：これ自身（$3x+20$ を指して）で余ることを表している．

> ①　$3x$ は何を表していますか．下に書いてください．
>
> 1人の生徒に3枚折り紙を配ること
>
> ②　$3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．
>
> 1人の生徒に3枚折り紙を配ると20枚余ること

12S：･･･．

13I：例えば，この $3x$ ね．１人の生徒に３枚折り紙を配ることと S 君書いてくれたけど，これを絵にするとどういう絵になりますか．

14S：３人，あっ，３人じゃない．１人生徒がいて，違う，何人か生徒がいて，それで１人に３枚，どんどんわたしていくという．（配るジェスチャー）

15I：なるほど，そういう絵ですか．そういう絵がイメージできる．

16S：（うなずく）

17I：そうすると，それで１つの集まりを表していますか．何を表していると言えますか．

18S：３枚ずつその生徒に配っていくと，合計で 20 枚余っている．

19I：それで，前にさ，S さんは，こんなふうに書いてくれたんだよね．（質問紙調査を出す．）前は $y=$ でつくってくれたんだけど，このときを聞くけど，y は何にしているんですか．

20S：y は折り紙の総数．

21I：折り紙の総数．x は．

22S：生徒の人数．

23I：うん，それで，ここにね，１人の人を x とおく．これどういう意味ですか．

24S：あっ，１人の生徒を x と例えておいている．

25I：なるほど．ですので，イメージは１人の生徒が x になる．

26S：･･･．違いますね．

27I：そうじゃあない．どういうふうにイメージしているのか，それを説明してくれるとありがたいのですけれど．

28S：生徒の全部の人数を x とたとえる．

29I：そうすると，生徒は 1 人なのですか．

30S：何人もいる．

31I：何人もいる．はい，それで．その何人もいる生徒がどういうことなのですか．

32S：何人もいる生徒の人に３枚ずつ折り紙を配って，それで余った数が 20．

33I：なるほどね．じゃあちょっと，この問題を見てもらいたいんだけど．（補助問題①）「折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．生徒の人数を求めなさい．」どういう式になりますか．

34S：（「$4x+10=62$」と書く．）

35I：それ，どういうふうに解釈しますか．

36S：えっと，生徒１人に，生徒何人もいる中で，４枚ずつ配って，それの余りが 10 なので，＋10 で，折り紙は全部で 62 枚なので，それで枚数が合うように．

37I：とすると，これは，さっきと同じように何を表していますか．（$4x+10$ を指して）

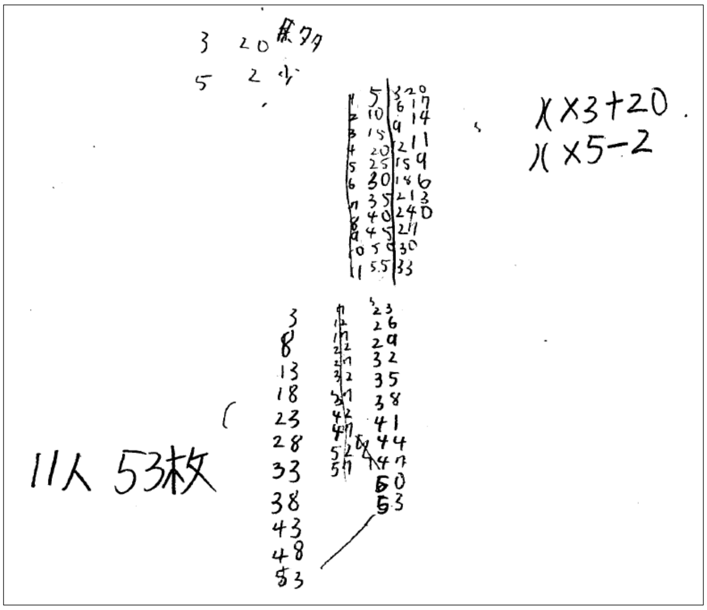
38S：生徒全体，あっ，違う．折り紙の 62 枚ある，違う．生徒に４枚ずつ配るときの余る，10 余る数，２つ．

39I：これが折り紙の総数の 62 とイコールだよね．これはどういうふうに考えていますか.
40S：この生徒に 4 枚ずつ配って 10 余ったら，その 62 個という枚数になる．それで，等しくなる．
41I：なるほど，そうすると $4x+10$ は．何ですか.
42S：折り紙の数を表している.
43I：折り紙の数を表しているんだ．そのときに，x というのは，人数といったよね．x は人数なのに，$4x+10$ は折り紙の枚数でいいですか．それは OK.
44S：･･･．ぶつぶつつぶやく.
45I：納得？
46S：･･･.
47I：ん，どこが迷っているのか教えてもらえるといいんだけどね.
48S：生徒の人数と折り紙の数が等しい，それで合うのかというところ.
49I：どこが，生徒の人数と思っているの.
50S：生徒の人数は，x.
51I：そして，$4x$ は.
52S：生徒 1 人に配る枚数.
53I：なるほど，じゃあ，大丈夫．じゃあ問題戻るよ．この $3x+20$ の，この式のどれがふさわしい単位か．これどうですか．今，この問題ね．（元の問題を指して）戻ったよ，問題は.
54S：これ.
55I：○をして下さい.
56S：(「($3x+20$）枚」を選ぶ）
57I：どうしてそれを選びましたか.
58S：$3x$ は 1 人にわたす紙の枚数で，20 枚は数が余ることを表しているので，この２つは，枚数になるのかなと思って.
59I：これ全体で，どういう枚数ですか.
60S：えっと，もとにある折り紙の総数.
61I：今みたいな式の読みね．これを最初につくるときに意識できていましたか.
62S：意識していなかったです.
63I：うん，どんなふうにこの式をつくったんですか.
64S：このときは 1 人に 3 枚で，最初，生徒が x で，折り紙が y と考えて，それで，1 人 3 枚わたして 20 枚余ったから，+20 と書いた.
65I：そうすると，x は 1 人という感じだった.
66S：そう 1 人.
67I：なるほど．その考えはどうでしたか.
68S：違うというふうに.
69I：うん，どんなふうに違いましたか.
70S：生徒 1 人だけだと，生徒の人数がわかって，1 人しかいないようになってしまうから.
71I：から．最後まで言ってくれるとありがたいのだけれど.
72S：だから，それで折り紙の枚数も全部わかっちゃうから．多分そんな感じ.
73I：はい．ありがとうございました．じゃあ，終わります.

12T.H

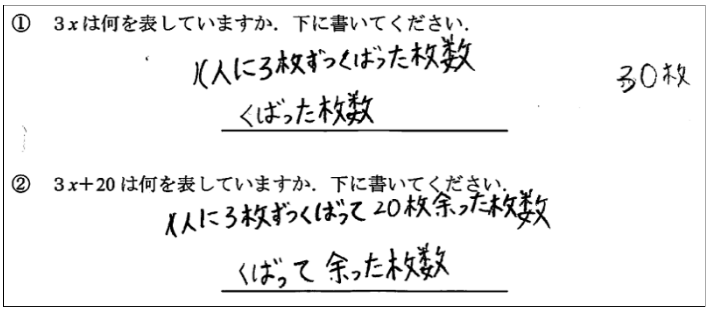
1I：よろしくお願いします．じゃあ，最初に，前にもやってもらったんだけど，この問題を読んで，解いてもらっていいでしょうか.
2S：式はつくれなくてもいいですか.
3I：いいよ．自分のやり方で.
4S：（問題 1 に取り組む）表を作る　9 分 20 秒経過
5I：はい，どういうふうに考えましたか．これは何を書いたのですか.
6S：5 枚ずつ配ると 2 枚たりないから，全部ひいて折り紙の全部の枚数が同じになるまでやる.

こっちは，３枚配ると 20 枚余るので，３の倍数と 20 をたして，さっきつくったのと同じになるまでつくる．



7I : で，その線は．53 が結ばれている．
8S : 同じになる．
9I : 同じになったんだ．それで，答えは．
10S : 11 人と 53 枚．
11I : なるほど．これ，方程式をつくってという問題だけど，どうなのかな．
12S : 方程式, 方程式はわからない．
13I : どこがわかりにくいのですか．
14S : えっ，方程式って x とか，あ～．どこを x にするのかがわからない．
15I : どこを x にするのかがわからない．この場合，例えば，生徒の人数を x とおいたら，どうなりますか．というふうに問題に書いてあったら．
16S : $10x$･･･えっ，生徒の人数 x.
17I : 生徒の人数を x とおいたら，どういう式ができるかな．
18S : $20x$･･･．１人に３枚･･･．え～，x×３＋20
19I : ちょっと式を書いてごらん．
20S : (「x×３＋20，x×５－２」と縦に並べて書く)
21I : なるほど，それが．今，H 君がやってくれたように，これなんだよね．とすればどうすればいいのですか．
22S : あ，x に 11 をおく．
23I : そうすると．
24S : x に 11 をおいて，あっ，枚数ができる．
25I : 方程式はこの後どうする．
26S : えっ．方程式･･･．
27I : この（x×３＋20）式とこの（x×５－２）式はどういう，難しい言葉で言うと，どういう関係か．
28S : x が同じ．
29I : うん，x が同じ．なるほど，あとは．
30S : え～．
31I : だって，ここでこうやって線で結んだんだよね．
32S : はい．
33I : ということは，あと何が等しくなる．
34S : これ．
35I : すると，どういう式になりますか．どれが等しいって．
36S : こっち（x×３＋20）とこっち（x×５－２)．
37I : なるほど．どういう式になりますか．
38S : 式．あっ，x を枚数にする．
39I : x は今，生徒の人数においたんでしょ．
40S : はい．
41I : じゃあ．そこまでね．こっちを聞きます．それでは，よろしいですか．今，２つ式をつくってくれました．これ，かけるを省くと，$3x$＋20，いい．
42S : はい．

43I：かけるを省くと５x－２．
44S：はい．
45I：いいですか．そして，今，同じ問題で，生徒の人数を x 人として，x を使って，３x＋20 と５x－２というふうに，H 君がやってくれたように２つ式をつくりました．いいですか．
46S：はい．
47I：いいですか．じゃあ，３x＋20 について聞きます．３x は何を表していますか．
48S：人数と配る枚数．
49I：３x で，ですよ．３x で何を表すか．
50S：３x は，あっ，配った枚数．
51I：書いてみて．
52S：(「配った枚数」と書く)
53I：３x＋20 は．
54S：配った枚数と余った枚数
55I：それも思ったように書いてみて．
56S：(「くばって余った枚数」と書く．)
57I：じゃあ，聞きますよ．配った枚数ってもう少し詳しく言うとどういう配った枚数．
58S：えっと，配った，生徒に３枚ずつ．
59I：３x がどういう意味を表しているかを詳しく書くと．

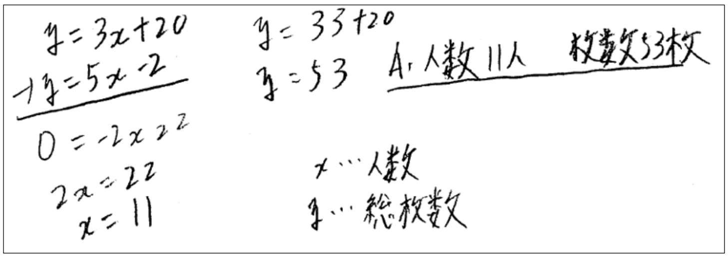


60S：３x･･･．
61I：いいよ．さっき言ったことを書いてみて．さっき，何て言ったっけ．
62S：えっと，人に，３人に，あっ，違った，x 人に３枚配った･･･．
63I：ああ，じゃあそういうふうに書いてみて，そこの上にでも．
64S：(「x 人に３枚ずつ配った枚数」と書く．)
65I：この x 人というのは，どういうイメージをもっていますか．絵にかくとどういう感じ．x 人に３枚ずつ配ったってどういう感じ．
66S：なんか．１人かたくさんいるか，たくさんいる中に３枚ずつわたす．
67I：なるほど，そういう感じ．例えば，x が 10 人だったら．
68S：10 人に３枚ずつ配って･･･．
69I：大きく書いていいよ．
70S：(30 と書く)
71I：30 は何．単位は．
72S：枚
73I：なるほど．それでこっちは，どういう意味か．
74S：x 人に３枚ずつ配って 20 枚余った．
75I：余った何．
76S：枚数．
77I：枚数．じゃあ，そういうふうに書いてみてください．
78S：はい．(「x 人に３枚ずつくばって 20 枚余った枚数」と書く．)
79I：今，ここまできたね．３x＋20 についてね．この場面で，どれがふさわしい単位か．
80S：単位．
81I：単位．これで全部で人か，これで枚か，３x が人で 20 が枚か，３x が枚で 20 が人なのか．どうですか．
82S：これは，x を求めている．
83I：そう x を求めようとして今書いてくれた，この式（３x+20）のことを聞いています．
84S：x だったらこれが人，これは．(「３x 人＋20 枚」を指して)

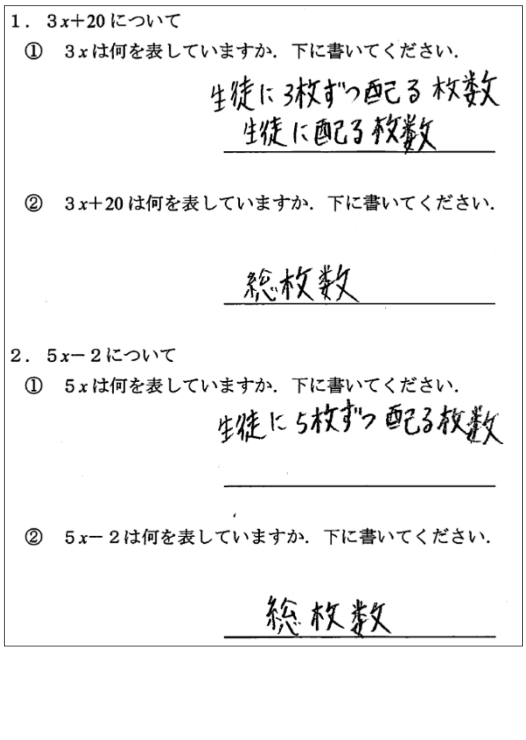
85I：これは，$3x$ が人でこっち（20）が枚ね．
86S：これ（「$3x$ 人＋20 枚」を指す）．
87I：それ．
88S：$3x$ は人．
89I：$3x$ は単位で言うと人でいいの．
90S：ああ．
91I：さっき，ここでは枚数と言っているよ．30 枚と言っているよ．もう一度そこを整理してみて．どういうこと．
92S：どっちも枚か．x だから．ああ，どっちも枚になる．
93I：じゃあ，どれになる．
94S：これ．（「（$3x$＋20）枚」を指して）
95I：今，迷った，これ（「$3x$ 人＋20 枚」を指す）じゃあないのね．どうして迷ったの．
96S：x があって，x がひとだから．ああ，x をひとということにしているから．
97I：x がひとというのはどういうイメージ．
98S：あっ，人数．
99I：人数ね．x は人数だよね．それで．
100S：だから，こっち側は枚とわかっているので，こっちはひとかなと．
101I：なるほど．今までそういうふうに思っていたのですか．
102S：今まで．
103I：うん．
104S：そういう感じでした．
105I：そうすると $3x$ は，x は人だから，$3x$ も人じゃあないかなと．
106S：はい．
107I：さっき，x というのは，1 人の人なのですか．
108S：たくさん，複数．
109I：そういうイメージ．
110S：はい．
111I：なるほど．今日それはどの辺でわかったんですか．
112S：ああ，このこれ（式 $x\times3+20$）をつくるとき，方程式をつくるとき，x を，x にするのを，あっ，x を何に表すかで，複数の人になる，あっ，人数ということがわかった．
113I：H 君は，この段階では（表でかいた数値を指して）もうかけ算しているときに，単位は何を意識していたのですか，数字では．
114S：えっと，枚数
115I：枚数だということはわかっていた．x になると，今まではわからなかった．
116S：はい．
117I：わかりました．振り返ってみて，x というものは，どういうふうに今までは捉えていたかなと振り返られますか．
118S：なんか，x は，x は，決まっている感じ．元々決まっているものみたいな．
119I：元々決まっているというのは．
120S：え〜，なんか，え〜x か〜．x･･･何がはまるのかよくわからなくて片っ端から解いていくのだと思って．
121I：じゃあさっきも言ってたけど，x を何に置けばいいかわからないって言っていたよね．そういう感じだったのですか．
122S：はい．
123I：よく頑張ってくれました．終わります．

53S.N
1I：では，始めたいと思います．まずですね．前にも解いてもらったんですけれど．この問題を読んでもらって，そしてやってみてください．
2S：はい．（問題 1 に取り組む）1 分 25 秒経過

3I：はい，ありがとう，今，x と y を使って式をつくってくれましたよね．x は何ですか．
4S：x は，え～と，生徒の人数です．
5I：じゃあ，そういうふうにどこかに書いておいてください．それいつも心がけるようにした方がいいですね．



6S：はい．（「x･･･人数」と書く）
7I：で，y は．
7S：y は，枚数です．総枚数です．（「y･･･総枚数」と書く）
8I：今，これを加減法ですか．解いてもらったら，とここ（y 同士のひき算の結果）がないじゃないですか．どうしてないの．
9S：y を計算しちゃったからです．
10I：何も書かなくていいんですか．
11S：･･･．
12I：どうですか．ここね．
13S：先に移項させた方がよかった．
14I：いや，いいんだけど．このままで，空欄でいいんですか．
15S：あっ，0か，0だ．
16I：そうだね．
17S：（0を書き込む）
18I：じゃあ，いい．
19S：はい．
20I：いきますよ．次に，これも前にやってもらったんだけど．N さん，２つ式をつくってくれました．$3x+20$ と $5x-2$ ね．同じ問題で，この場合，生徒の人数を x 人とします．ですから，N さんと同じです．
21S：はい．
22I：そして，方程式をつくるために，x を使って，$3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくりました．という考え方で，$3x+20$ について，$3x$ というのは何を表していますか．と聞いています．この問題で $3x$ は何を表していますか．
23S：生徒に配る枚数です．
24I：それを書いてください．
25S（「生徒に配る枚数」と書く）



26I：次に，$3x+20$ は，何を表していますか．
27S：（「総枚数」と書く）
28I：この生徒に配る枚数というのは，もう少し詳しく言うと．$3x$ だよね．この $3x$ を使って表すと，もう少し詳しく言うとどういうことですか．
29S：$3x$ ですか．
30I：うん．
31S：え，３枚･･･．
32I：３と x を使って表せますか．
33S：わかりません．え，どうやって．
34I：じゃあ，$5x$ にいってみようか．$5x$ はここ何になりますか．
35S：あっ，同じです．
36I：同じだよね．同じってことは，等しい．
37S：等しくありません．３枚ずつ･･･．
38I：それを詳しく言ってほしいということです．
39S：あっ，３枚ずつ配るときの枚数ということですか．
40I：ああ，それじゃあ，ちょっと上に付け足して書いておいてください．
41S：（「生徒に３枚ずつ配る枚数」と書く）

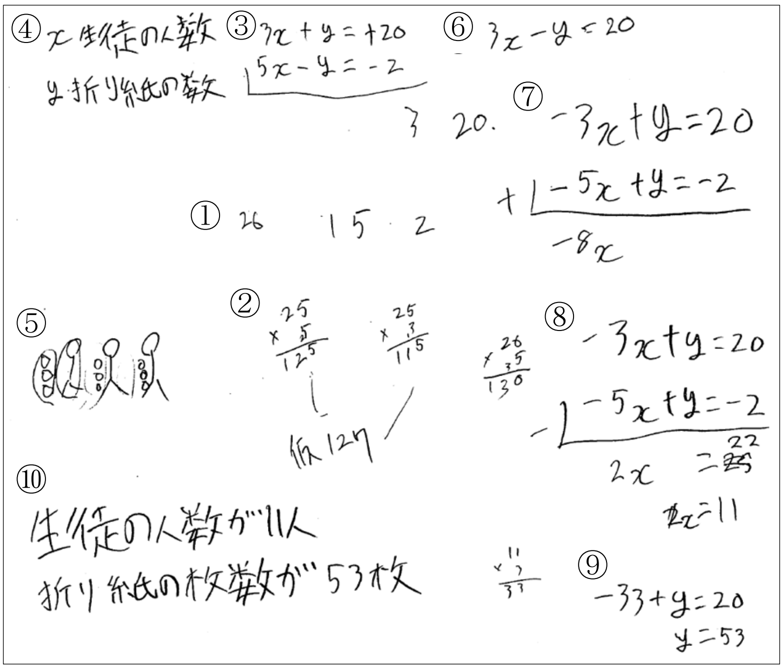
42I：そうすると，５xは.
43S：５xは，生徒に５枚ずつだから･･･.（「生徒に５枚ずつ配る枚数」と書く）
44I：はい，下（５x－２は何を表しますかの問題を指して）は何になりますか.
45S：下は，総枚数.（「総枚数」と書く）
46I：これはどうなんですか．ここ（３x＋20の総枚数）とここ（５x－２の総枚数）は同じなんですか，違うのですか.
47S：あっ，え，同じ.
48I：じゃあ，同じ言葉でいいですね.
49S：はい.
50I：はい，じゃあ，次ね．この３x＋20について聞きます．この場面において，３x＋20でね．この式はどれがふさわしい単位ですか.
51S：単位.
52I：うん，（３x＋20）で人なのか，（３x＋20）で枚なのか，３xは人で20は枚，３xは枚で20は人なのか．どれでしょうか.
53S：これです.（「（３x＋20）枚」を指して）
54I：じゃあちょっとそれに○をしてください.
55S：はい.
56I：どうして，それですか.
57S：両方枚数なので，３枚ずつと５枚ずつ.
58I：そうすると，中には，xは人数にしているじゃあないですか．人数だよね.
59S：はい.
60I：そうすると，３xは人数じゃあないかと思う人がいるんですけれど．これについてどう思いますか.
61S：人数は，配る枚数にあまり･･･.
62I：ん，もう一度．どういうことですか.
63S：枚数と人数，あまり関係がないと思う.
64I：それは，どうしてですか.
65S：枚数を求めるので，人数がわからないと，その３枚を何人に配るかわからないと，配る枚数がわからないので，xと置いている．別にxが人数を表してもいいと思う.
66I：なるほど，そうすると，枚数なんだよね，これ.
67S：はい.
68I：具体的に，例えば，10人に配るとなったら，説明しやすいですか.
69S：何の説明ですか.
70I：枚数になるという説明は.
71S：ああ，･･･．10人に３枚ずつ配ると，３＋３＋３＋･･･を10回やるので，３×10になって，３プラスを10個やるのと，３×10は同じなので.
72I：それが，何になるのですか.
73S：枚になります.
74I：じゃあ，これがxに変わったときはどうですか.
75S：･･･．さっきと同じように，さっきは３×10だったので，xになると変わらず３×xになると思います.
76I：それが，枚でいいのですか.
77S：はい.
78I：そのxをどういうふうに見ているのかを知りたいのですけれど，Nさんが．10人だったら，３＋３＋･･･でいいと言ってくれたよね．xだったらどういうふうに見るんですか.
79S：３たすをx回やるという.
80I：それが人数ではないというのはどうしてわかるのですか.
81S：枚数をたしていくので，人数は関係ありません.
82I：なるほど．わかりました．それで，３x＋20これが総枚数というのは，両方等しいと言っているけれど，その意味をもう少し詳しく言うと，総枚数とは何の総枚数なのですか.
83S：･･･．生徒に３枚ずつ配る枚数と余った20枚をたした数です.
84I：で，こっち（５x－２）は.
85S：こっちは，５枚ずつ配ったときに２枚たりなかった枚数です.
86I：この２つは同じでいいのですね.

87S：はい.
88I：いいですか．最後に，前のときにNさんは，こういうふうに式をつくってくれたんですよ．覚えていますか.
89S：あんまり覚えていません.
90I：こういうふうに式をつくって，加減法をやろうと思ったけど，×××として，ここで突然 y が出てくるんですよね.
91S：はい.
92I：ここで，何を考えたのか，わかりますか.
93S：最初，やったんですけれど，これだと，式がない.
94I：式がないとはどういうこと.
95S：え〜と，式って，何とかイコール何とかじゃないですか．それがないので，変な感じになったので，方程式をつくるときは，y イコール何とか x プラス，あっ，ax プラス b みたいな式で，それで，もう1回やり直した.
96I：なるほど，このときの y はどんなものだと思って，y にしているんですか.
97S：y は総枚数.
98I：それを意識してやっていましたか.
99S：はい.
100I：最初から.
101S：最初からではなくて，途中から.
102I：このとき困ったよね．困って，y をつけようという，そのときの y はどういう位置付けで，Nさんが y イコールとしたのかが知りたいんだけど.
103S：これだと，総枚数，総枚数を求めるのに，何か違う数を求めていると思ったので，総枚数を求めるには，y が必要かなと思った.
104I：途中から y は総枚数だと意識した．最初はどういうふうに思って y をつけたの.
105S：最初は，まあ公式に当てはめただけです.
106I：そのとき y はあまり意味をもたなくてやっているのか，それとも意識をしてやっているのですか.
107S：あんまり意識していなくて y をつけました.
108I：ああ，y はどんな感じ．y イコールの式に当てはめてみようという感じ.
109S：はい.
110I：どんな感じ．この困ったときにどんなふうに考えたの.
111S：まず，これ，この式に当てはめて，公式に当てはめて.
112I：公式というのは.
113S：y イコール何とか x プラス何とかという式.
114I：ああ.
115S：で，やっているときに y は総枚数でこの式を y＝につなげると総枚数が求められると思ったので.
116I：ありがとう．協力してくれて助かりました．では，これで終わります.

62T.S

1I：これ，前にやってもらったんですけれど，この問題ね．まず読んでもらって，そして，解いてみてください．それでは，お願いします.
2S：はい．（問題1に取り組む）あれ，どうだっけ．4分経過後
3I：何に困っているの.
4S：あの，ちょっとどう答えたかなと思って.
5I：ここに方程式をつくって解いてくださいと書いてありますが，方程式をつくれますか.
6S：この前のときは，方程式をつくっていなかった気がするんですけど.
7I：いや，そんなことないよ.

8S：そうですか．あっ，連立にしちゃったのかな．･･･．あっ．1 分 30 秒経過後
9I：じゃあ，ちょっと確認しようか．x は何にしていますか．
10S：x は，その生徒の人数．
11I：じゃあここに書いておいて．
12S：はい．(「x 生徒の人数」と書く．)
13I：で，y は．
14S：y は折り紙の枚数．
15I：じゃあ，それも下に書いておいて．
16S：(「折り紙の数」と書く)
17I：式をつくりましたよね．この式を読んでみようか．
18S：３x＋y
19I：何を表していますか．３x って何．



①～⑩は記述した順

20S：３x は，なんだっけ，１人に３枚ずつ配るから，その３枚を何人に配ったか．
21I：何人に配ったかというのは，これ単位は何になるのですか，３x の．
22S：３x の単位．え～と，生徒の人数．
23I：生徒の人数になる．そして，y は．
24S：あっ，y は，折り紙の枚数．だからはい．
25I：それをたしているんだよね．
26S：あっ，だから，マイナスにしないといけない．
27I：え～と，３x 自体は，生徒の人数ね．
28S：はい．多分．ん．
29I：３x って何を表していますか．
30S：ん～，３x･･･．あっ，折り紙の枚数？えっ．
31I：どういうふうに変わった．
32S：なんだっけ，その，１人に３枚配るから，その，３×x だから，折り紙自体が３だから．
33I：折り紙の．
34S：折り紙の枚数が３だから，え～と，それをかけているから折り紙の枚数になる．
35I：そのときの x って何．
36S：x は生徒の人数になる．
37I：生徒の人数ね．
38S：はい．
39I：生徒の人数に折り紙の枚数をかけているね．で，３x は何を表しているんだっけ．
40S：３x は，その～，１人あたりの折り紙の･･･．あっ，違うな．折り紙の数．
41I：x は生徒の人数なんだよね．枚数３をかけて，３×x は何を表しているのかという質問なんだけど．
42S：折り紙の総数じゃあないんですか．えっ．
43I：x は何ですか．しつこいようだけど．何度も聞くようだけど，そこをはっきりしたいので．
44S：x は生徒の人数．
45I：人数ね．その３×x のイメージは絵にかけますか．
46S：（絵にかく）３人いたら，こういう感じの１人に３枚ずつ配られる．
47I：その３というのは生徒，それとも小さく書いたもの，どっちが３．
48S：これが３になって（絵の中の生徒が持っている小さい四角３つを指して）

49I：x は.
50S：x はこの人たちのこと.
51I：これ１人１人が x なのですか．どういうイメージですか.
52S：１人１人が x･･･.
53I：x は生徒の人数なんだよね．そう言ったよね.
54S：はい.
55I：生徒の人数というのは，どこに現れてくるのかな．x っていうのはどこに現れてくるのかな.
56S：x は，この人たちの全員の数という.
57I：全員の数．これ１人が x じゃあないんだね.
58S：あっ，ん.
59I：そうじゃあないんだね.
60S：１人が x.
61I：うん，そうじゃあないんだね．確認，確認.
62S：僕のイメージ.
63I：僕のイメージを聞いているんだよ．もう１回，どういうこと.
64S：え～と，何て言うんだろう．x はこの人たちの全員の数.
65I：なるほど，それが x ね.
66S：はい，x.
67I：それで，これが折り紙３枚，３枚ずつ持っているという.
68S：はい.
69I：じゃあ，$3x$ は．くどいようだけど．この絵のどこに $3x$ は出てくるのですか.
70S：x は･･･．この絵のどこ．$3x$ はこの折り紙の，その～，枚数.
71I：じゃあ，いいね．$3x$ は．それに y は何でしたっけ.
72S：y は，あれ，そうか．y は人数.
73I：y は人数.
74S：まった，あっ，そっか，折り紙の枚数，ん.
75I：だよね．確認だよ．そしたら，それをたしているんだよ.
76S：これ，間違えました．はい.
77I：じゃあ，ここにもう１回書き直して.
78S：(「$3x-y=20$」と横に書き直す)
79I：もう１回言うと，書き直してくれたからね.
80S：はい.
81I：$3x$ が何ですか.
82S：$3x$ が折り紙の枚数
83I：何の折り紙の枚数，どういう.
84S：あの，その，人が持っている，この人たちが持っている折り紙の枚数.
85I：それからひくんだよね，この y は.
86S：y は，その何て言うんだろう．折り紙だから，何て言うんだろう，この，折り紙があったら，この人たちに配っているから，マイナスされる.
87I：それで，イコールで.
88S：イコールで 20 枚.
89I：書いてみて.
90S：20 枚余る，みたいな.
91I：そうすると，$3x$ の方が大きいのね．余るってことは.
92S：あれっ．あっ，えっ．$3x$ が大きい･･･.
93I：こういうふうに配った枚数の方が，だって，＋20 ってことは，折り紙の枚数をひいたら 20 になるというとは，この配った枚数の方が多いということでいい．それでいい.
94S：あっ，･･･．ん，違うか･･･．あっ，そっか，もともと･･･．すいません.
95I：いいよ.
96S：こっちが，やっぱり，$-3x$ で，まあ，$+y$ で $+20$.（「$-3x+y=20$」と書く）
97I：なるほど，今度はどういうふうに考えたの.
98S：今度は，あの～，ちょっといろいろ変わってすみません.
99I：いいよ．うふふ.

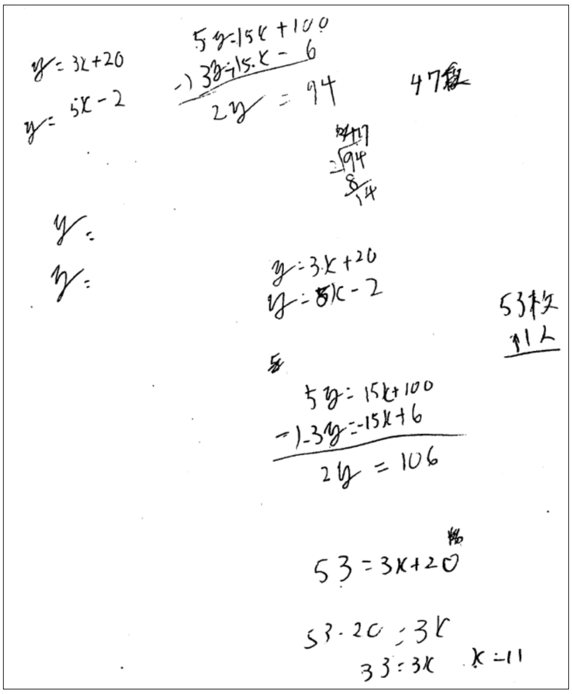
100S：あの～，もともとプラスの大量の折り紙があるじゃないですか．そこから･･･．
101I：プラスの大量の折り紙ってどういうこと．
102S：何て言うんだろう．ま，たくさんの折り紙があるとして，そこからその生徒たちが 1 人３枚ずつ取っていくから，生徒の，$3x$ をマイナスにして，で，この折り紙の枚数からひいていく．
103I：なるほど．
104S：そしたら，20 枚余った．
105I：じゃあ，今度，下の式は．
106S：下の式もこれもちょっと間違った．
107I：いいよ．どうぞ書き直して．
108S：(「$-5x+y=-2$」と書く）
109I：うん，今後は．
110S：今度は，さっきと同じように折り紙がたくさんあって，今度は，１人あたり５枚ずつ取っていったら，２枚たりなくなったという感じです．
111I：このイコールは，これ（$-3x+y$）とこれ（20）が等しいでいいですか．
112S：ああ～，等しい･･･．
113I：うん，この式と，文字式（$-3x+y$）と 20 は等しいでいいね．
114S：は・い．
115I：等しいでいいね．じゃあ，計算してみて．
116S：･･･．
117I：ん．えっ，何．
118S：いいえ，何でもないです．
119I：いいよ．迷っていることがあったら言って．
120S：（$-3x+y=20$ と $-5x+y=-2$ の連立方程式を加減法で解く）1 分 40 秒経過
121I：はい，答えは．
122S：生徒の人数が 11 人で．
123I：どこかに書いて．
124S：(「生徒の人数が 11 人，折り紙の枚数が 53 枚」と書く.）
125I：はい，ありがとう．それで，今後，もう 1 つね．こっちね．今，S 君は連立方程式でやってくれたんだけど，他のやり方としては，同じ問題ね．生徒の人数を x として，方程式をつくるために，$3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくるという方法があるんです．
126S：はい．
127I：この $3x+20$ ね．さっき，散々 $3x$ について聞いたけど．$3x+20$ の $3x$ は何を表していますか．$3x+20$ は何を表していますか．これどうですか．まず，$3x$ は何を表していますか．
128S：$3x$ は，何だっけ．$3x$ は生徒全員の，ん，何て言うんだろう，折り紙の総数．
129I：ん，$3x$ は．
130S：その生徒たちがもっている折り紙の全部の枚数．
131I：なるほど．じゃあ，$3x+20$ は．
132S：$3x+20$ は，なんだっけ．生徒たちがもっている折り紙の全部の枚数と余った折り紙の枚数．
133I：それは全部で何を表していますか．
134S：もともとあった折り紙全部の枚数．
135I：じゃあ，この式ね．この場面で，$3x+20$ はどの単位がふさわしいのか．$3x+20$ で人なのか，$3x+20$ で枚なのか，$3x$ は人で 20 は枚なのか，$3x$ は枚で，20 は人なのか．これどうですか．
136S：･･･．え～と．（$3x+20$）枚．
137I：どれか○をして．
138S：はい．（$3x+20$）枚に○をする．
139I：はい，それはどうしてそう思いましたか．
140S：やっぱり，さっきの説明だと，あの，$3x+20$ でもともとあった折り紙の枚数だから，これ自体が折り紙の全部の枚数だから，枚になるんじゃないかなと．
141I：それは，今日はじめのところからわかっていましたか，振り返ってみて．今日やったことを振り返ってもらいたいと思うのだけれど．
142S：最初はちょっと，何て言うんだろう．どっちが x かというのがあまりわかっていなかっ

た．
143I：式をつくっているとき？
144S：つくっているときは，生徒の数がどっちが x なのかわからなくて，一応，数を入れてみて，その式ができあがったときに x と y のどちらを生徒の数にすれば式ができるかがわかった感じがします．
145I：つくった後に．
146S：はい，つくった後に．
147I：じゃあ，つくったときに，x と y というのはどういうイメージで式にしたのですか，最初．
148S：一応，その問題に１人に３枚ずつ配るとあったので３と，１人に３枚ずつだから，その１人は何人いるかわからなかったから，一応 x に変えてみて，y がちょっとわからなくて，一応入れてみて，何かわかるかなと思って入れてみて･･･．
149I：そのときの y は，これ書いてくれたよね．折り紙の枚数と．
150S：はい．
151I：そのときは．
152S：そのときはちょっとわからなくて・・・．
153I：とりあえず y にしてみた．
154S：はい，とりあえず y にしてみた．何かわかるかなと思って．
155I：それでつくったのね．
156S：はい．
157I：それで，今，質問にいろいろ答えて，だんだんわかってきた．
158S：はい．
159I：はい．わかりました．ありがとうございました．どうですか，こういう問題は．
160S：僕はあまり数学得意じゃないんですよ．難しいなと思って．
161I：ありがとうございました．じゃあ，終わります．

B中２年生インタビュープロトコル

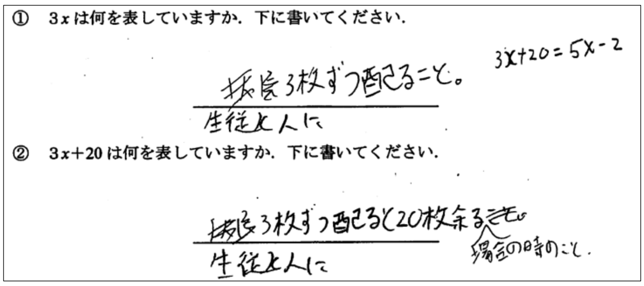
77Y.Y

1I：前にやっていただいたこの問題，これを読んでもらってですね，やってみてください．
2S：やっていいですか．
3I：はい，どうぞ．
4S：これ名前書きますか．
5I：はい，名前書いてください．
6S：（一旦答えを出すが，間違っていることに気付き，もう１回やり直す）５分経過
7I：はい，ありがとう．どういうふうにやりましたか．どんなふうに考えたのかを振り返ってやり方を説明して下さい．
8S：えっと，最初に y を生徒の，y を生徒の，あっ，違う，合っているか，y を生徒の人数にして，x を折り紙の総数にして，まあ教科書通りのような考え方で．
9I：y が出たときに，いくつって言ったんだっけ．もう１回言って，何を x，y においたの．
10S：えっ，ちょっと，待ってください．･･･ y を生徒の人数．あっ，違う，折り紙の総数かな･･･．ん，あっ，折り紙の総数だ，すみません．折り紙の総数にして．



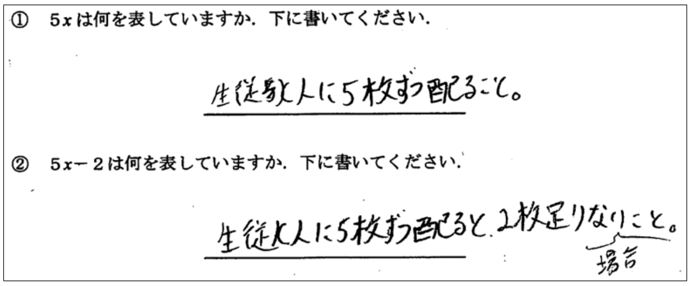
11I：はい．
12S：x を生徒の人数にして，教科書通りのような考え方で．
13I：教科書通りってどういうこと．もうちょっと，詳しく言って．

14S：方程式を立てて，xの数を15に合わせて，他も全部かけて，で，xを消してyの数字を求めて，枚数を求めて，そこからもう１回方程式にyの数を入れて，11人と求めました．
15I：それで，ここが，知りたいんだけど．このyイコールの式はどんなふうな考えでつくったのですか．
16S：とりあえず，yと書いて，１人に３枚ずつ配ると20枚余りますだから$3x+20$で，１人５枚配ると２枚たりないから$5x-2$にしました．
17I：今，これをイコールでつないでいますよね．これは，どういう意味でイコールでつないでいますか．
18S：その後に，こっちの問題の意味を考えて，どっちだっけ，折り紙の総数をyにしてイコールにしました．
19I：じゃあ，このyと$3x+20$はイコールということは等しい，これはいいですか．
20S：はい．
21I：下（$y=5x-2$）もそう．
22S：はい．
23I：下はどんなふうに解釈できるのですか．
24S：下も同じような考え方で，こっちの折り紙の総枚数も同じだから，こっちは５枚ずつ配ったから$5x-2$にしました．
25I：はい，ありがとう．じゃあ，これも前にやってもらったと思うんだけど，今，つくってもらったこの式ね．これは，こんなふうに解いているんですね．同じ問題ね．これ，同じことが問題に書いてあります．生徒の人数を求めるために，生徒の人数をx人として，方程式をつくりました．そのときに，方程式をつくるためにxを使って，$3x+20$，今Y君がやってくれた式と$5x-2$，これ下の方だよね．というふうに２つの式をつくりました．いいですか，ここまで．
26S：はい．
27I：この問題の考え方の中で，この$3x+20$と$5x-2$について聞きます．$3x+20$の$3x$は何を表していますか．それから$3x+20$は何を表していますか．
28S：はい．
29I：じゃあ，ちょっとここにかいてもらっていいですか．
30S：（書き始める）25秒後
31I：どういう考え方でそのように書いたのか，教えてください．
32S：えっと，こっちの紙で同じような考え方でやったので，方程式をつくったときに，１人３枚ずつ配るところなので，「１人に３枚ずつ配る」，で，＋20は20枚余っていることだから，というふうに．



33I：そのときに，xは，どういうふう．
34S：xは･･･．
35I：今，書いてくれたものにxが入っていないのだけれど．xってどういうものと考えているのですか．
36S：xは，生徒の人数をx人にしてと書いてあるので，生徒の人数になる．
37I：そうすると，もう一度，$3x$は何を表していますかと聞かれたら，何と答えますか．
38S：ああ，生徒に･･･．生徒x人に，（書き始める）
39I：ここの下にでも．
40S：（「１人に」を消して，「生徒x人に」と書き直す）
41I：それは，どういうことですか．
42S：さっき，ちょっと問題をよく読んでいなくて，生徒の人数をx人としてということなので，１人の部分が違うので，生徒の人数がまだわかっていないので，x人にしました．
43I：そうすると，$3x$というのは，生徒x人に３枚ずつ配ることを表しているんだね．

44S：はい.
45I：それで，こっち（$3x+20$）は，配ると 20 枚余ることを表している.
46S：はい.
47I：下（$5x$，$5x-2$）はどうですか.
48S：（$5x$ は「生徒 x 人に５枚ずつ配ること」，$5x-2$ は「生徒 x 人に５枚ずつ配ると，２枚たりないこと」と書く）


① 5x は何を表していますか．下に書いてください．

生徒数x人に5枚ずつ配ること。

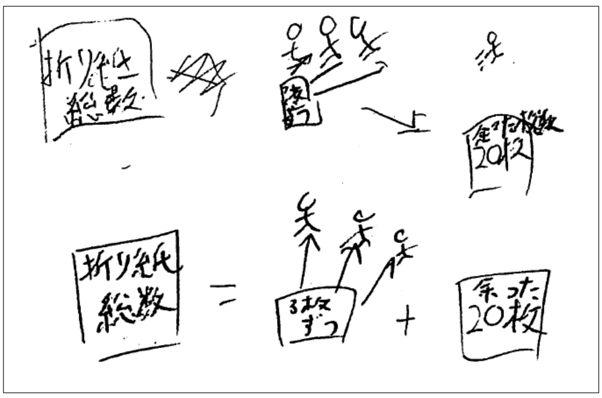
② 5x－2は何を表していますか．下に書いてください．

生徒x人に5枚ずつ配ると.2枚足りないこと。

場合

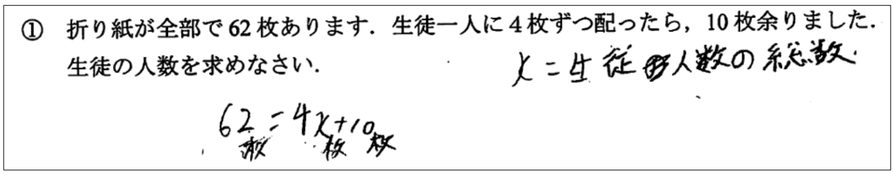
49I：なるほど．ことを表しているんだね.
50S：はい.
51I：で，今，加減法で，連立方程式で解いてくれたじゃあないですか．もう１つのやり方はわかりますか．今，Ｙ君は，x と y 使ってくれたよね．こっちの問題は x しか使っていないよね.
52S：はい.
53I：こっちのやり方で式つくれますか．ここに書いてみて.
54S：えっ．ああそういうことか.（「$3x+20=5x-2$」と書く）
55I：なるほど．これはどういうふうにつくったのですか.
56S：ちょっと待ってください．･･･えっと，$3x+20$ が，だから３枚ずつ配るとかと，やっているのと元は同じ数のはずだからイコールで結びました.
57I：これイコールで結んでいいのですか.
58S：いいと思う.
59I：いいと思う．今，Ｙ君は，生徒 x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余ること，こっちは，生徒 x 人に５枚ずつ配ると２枚たりないことだと．この２つはイコールで結んでいいのですか.
60S：ん～書き方が悪かった.
61I：私から見ると，違うことを書いていて，それをイコールで結んでしまっているというふうに見えるんだけど．それはどんなふうに説明しますか.
62S：えっと･･･，(書き始める「場合の時のこと」と書く)だめだ，同じだから.
63I：それは，どんなことを考えたのですか.
64S：いや，そういう場合になることもあるという.
65I：そういう場合になることもある．「なること」と「なること」がイコールという，そういう感じ.
66S：う～ん．y を使いたい･･･.
67I：y を使いたい．なるほど，それはどうして.
68S：y が折り紙の総数を表してくれるので，イコールでつなぎやすい.
69I：じゃあ，こっち側（$3x+20$ と $5x-2$ を指して）は何を表しているの.
70S：こっち側は，えっと，生徒 x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余る･･･何だろうな･･･，やっぱり余る場合かな.
71I：うん，こっちは余る場合なんだね．もう１回，y は折り紙の総数なんだね.
72S：はい.
73I：こっち（$3x+20$）は，x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余ることを表していて，それをイコールで結んでいる.
74S：はい.
75I：これは，イコールでいいんだね.
76S：はい.
77I：どうしてイコールでいいと言えますか.
78S：折り紙の総数が，折り紙を配っていて，その折り紙の総数から３枚ずつ配ると 20 枚余るという事柄を表しているので.
79I：事柄を表している．なるほど，じゃあ，$3x+20$ のことをもう少し詳しく知りたいんだけど，

（プリントを提示して）ふさわしい単位を聞きたいのです．$3x$ と 20 が，あるいは $3x+20$ がどんな単位を表しているか．単位はわかる．枚とか人とか．
80S：はい．
81I：１つは，$3x+20$ 全部で人を表している．$3x+20$ 全部で枚を表している．次は，$3x$ が人を表していて 20 は枚を表しています．もう１つは，$3x$ が枚を表していて 20 は人を表していいます．Ｙ君はどんなイメージをしていますか．
82S：え〜，ちょっと待ってください．２か３なんだけど･･･．
83I：うん，２か３．どんなふうに考えたの．
84S：いや，とりあえず，枚数のところは人ではないので，総数は枚数のところなので，人ではないので．
85I：20 のこと．ああ，20 は人ではなくて枚数．はい．
86S：で，２か３で迷っています．どっちも合っているような気がするんだけど．
87I：x は何なの．
88S：x は，え〜と，生徒の人数です．
89I：そのときに $3x$ が何を表しているか．これどうですか．
90S：$3x$ が配ることを表しているから，生徒 x 人に３枚ずつ配る事柄かな．
91I：じゃあ，これはどんなふうになるかな．
92S：ん〜，２のような気がする．
93I：なぜ．
94S：えっと，これが総数で，イコールで，その生徒 x 人に３枚ずつ配る事柄と 20 枚，それに余った 20 枚とたすと，すべての枚数になるということを表していると思うので．
95I：そうすると，$3x$ は配ることを表しているんだ．
96S：うなずく
97I：なるほど．３は３枚だよね．x は人数だよね．それなのにことを表すんだね．
98S：事柄．う〜ん．
99I：これ，２だったら，どういうふうに絵がかける．
100S：絵ですか，これの．
101I：イメージ．この問題文にそって，どういうふうなイメージをもっているのかな．
102S：折り紙が･･･．（絵をかき始める）みたいな感じですかね．
103I：なんてかいたの．20 は何．
104S：余った枚数．
105I：ああ，余った枚数ね．
106S：かいた方がいいかな．
107I：はい，じゃあかいておいて．自分が考えたことをできるだけかいておいて．なるほど，これ矢印なんだね．数学では，これをイコールで結ぶよね．Ｙ君の式では，$y=$ としてこう結んでいるんだけど．
108S：はい．
109I：イコールということは，等しいという関係じゃあないですか．いいのかな．
110S：ああ，この･･･．
111I：いいよ，違うところにもう１回書き直して．
112S：（書き直す．図の下の絵）



113I：そこはイコールなんだ．それでたす（＋）なんだ．これはどういう．
114S：さっき，場面で思い浮かべていたんですけど，確かに折り紙の総数はこっちと同じことなので，３枚ずつ配って余った枚数をプラスして折り紙の総数を表すということを表しました．
115I：そうすると，今，選んだどれ（単位の選択肢を指して）に当たるのですか．今のことから．
116S：あれ，３番（$3x$ 人＋20 枚）かな．いや，でも２番（($3x+20$) 枚）でいいような気がしま

す.
117I：なるほど，２番．３番と迷っているのはどうして.
118S：３番も一応単位は合っているから，人と枚で.
119I：人と枚で合っているんだ．どうして．そこを詳しく.
120S：ああ，でも20枚余ったことについて枚でいいのかという感じが.
121I：こっち（20枚を指して）はね．$3x$が人だということは，これは？
122S：それは生徒･･･ああ，でもかぶっちゃうか．２ですね.
123I：ああ２なんだ.
124S：かぶっちゃうような気がします.
125I：どういうこと，それ，もう１回.
126S：このxのことが，生徒x人に３枚ずつ配ることを単位に人とすることはおかしいと.
127I：なるほど，で，配ることだけど，全部が枚でいいんだ.
128S：（うなずく）
129I：それで，$3x$は枚なの，人なの.
130S：$3x$は･･･ああ，でも配る事柄という感じかな.
131I：事柄．なるほど．わかりました．じゃあもう１問．ちょっと，式をつくってほしいんだけど.
132S：はい.
133I：折り紙が全部で62枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら10枚余りました．これだとどういう式が立てられますか.
134S：え～と．これ，xとか使っていいのですか.
135I：いいよ，もちろん．そこに書いてみて.
136S：（式を書く）「x＝生徒人数の総数　62＝$4x$＋10」と書く.
137I：そうすると，これはどういう意識でつくったのかな.
138S：え～と，とりあえず全部で62枚あるので，62枚イコール生徒１人に４枚ずつ配ったので，４かける生徒の人数の総数プラス10枚余ったので，＋10.
139I：そうすると，このイコールの右辺と左辺の関係は，どんなふうに見るの．まず，こっち（$4x$＋10）を見る方がいいかな，右辺を.
140S：右辺は･･･.
141I：さっきのこれ（質問紙２を指して）と同じように，説明できる.
142S：すみません．もう１回言ってもらっていいですか.


① 折り紙が全部で62枚あります．生徒一人に４枚ずつ配ったら，10枚余りました．生徒の人数を求めなさい.

x＝生徒~~の~~人数の総数

$\underset{枚}{62}=\underset{枚}{4x}+\underset{枚}{10}$

143I：今，式をつくってもらったじゃないですか．このつくった式の右辺はどういう･･･，この問題を読んで，式のつくり方をしたのかということです.
144S：右辺は，最初に左辺を求めて，62と決めた後に，４枚ずつ配ったら，生徒１人に４枚ずつ配ったら，ここに生徒の人数がわからないので，とりあえずxとおいて，10枚余りましたで，それからx人のときを考えました.
145I：さっき（$3x$＋20）は，x人に配ると20枚余ることだよね．こっち（$4x$＋10）も同じ事柄.
146S：総数のような気がします.
147I：もう１回，それどういうこと.
148S：えっと，生徒人数の総数をかけていると思うので，･･･ことって付けにくい.
149I：ことって付けにくいね．62と等しいんだよね．62がさっきの解釈でいくと，どうなるんだっけ.
150S：この絵でいくとここが62になって，ここを４枚ずつにしてここは10枚になるんですけど．生徒･･･．これが単位が枚だから･･･.
151I：こっちは.

152S：これは10枚になるのかな．まあ，でも10枚として．
153I：４xはどうするの．
154S：４･･･．４枚ずつ配っただから･･･枚になるのかな．同じように．
155I：そこも同じように枚．そうすると，さっき，こっちでは，違うこと言っていたよね．それを振り返ってどうなの．
156S：ちょっと，こっちでミスっちゃった．
157I：いやいや，ミスちゃったとかではなく，どういうふうに考えたのかを教えていただけるといいんだけど．
158S：えっと，４xは，確かに４枚ずつ配ったことと生徒の人数なんですけれど，結局はかけたところで，枚数が求められるじゃないですか．
159I：ああ，それがわかった．
160S：わかりました．
161I：なるほど．じゃあさっきはどう思っていたの．
162S：さっきは，単純にここが配ることの人数だと思っていて．
163I：これ($3x$)が人数だと思っていた．
164S：xがその人数のことというふうに思っていたんですけど，よくよく考えたら，やっぱりこんな感じ（２番の($3x+20$)枚を指して)，枚になるのかなと思いました．
165I：やっぱり２番なんだ．
166S：２番です．
167I：そのときのxって，x人というxはどういうふうに見ているのかな．やっぱりこんな感じ（絵を指して)．
168S：こんな感じになりますね．頭の中では．絵をかくというとこんな感じ．
169I：x人というここは．今，(絵では) ３人かいてくれたけど．
170S：ああ，とりあえず３人にしたけど，はてななんですけど．
171I：どんな感じ，イメージとしては．
172S：まあ，無数にいる人の中で，３枚ずつ分けていって，総数がこんな分厚いのがあって，それを分けていって，余ったのが20枚．
173I：そのとき，無数と言ってくれたけど，いっぱいいるの．
174S：とりあえず，いっぱいいて，減らしていくという感じです．
175I：ああ，いっぱいいるけど，その中で減らしていって，いくつか決まるという感じ．
176S：ここで計算で求めちゃって，こっちがわかれば，ほらだいたい何人いるかは計算でわかるんですけど．
177I：わかりました．ありがとうございました．

28R.H

1I：では，前にもやってもらったんですけど，この問題ですね．これちょっと読んでもらってここに解いてもらいたいと思います．リラックスしてやってください．
2S：（解き始める）これ連立方程式でいいですか．（1分経過後）
3I：いいよ．連立方程式でも．
4S：（式を書き始める）3分経過
5I：じゃあ，どんなふうに考えて，式をどういうふうにつくって，どんなふうに計算したのか，自分で説明できますか．
6S：え〜と，･･･もともとの折り紙の枚数がわからないからyに置き換えて，人数もわからないから，それをxに置き換えて，３枚ずつ配るというのは，枚数かける人

$$\begin{cases} y = 3x + 20 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$$

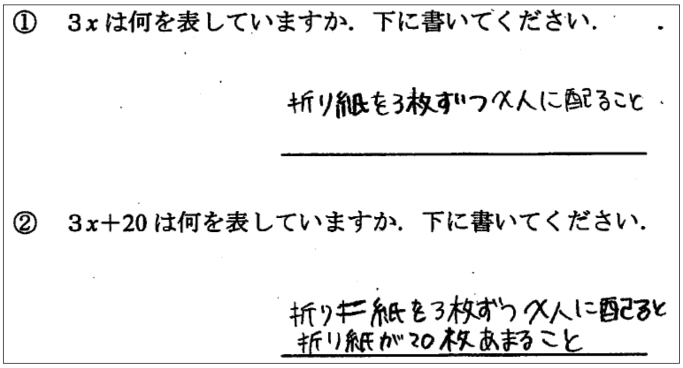
$$\begin{array}{r} y - 3x = 20 \\ -)\ y - 5x = -2 \\ \hline 2x = 22 \\ x = 11 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y &= 55 - 2 \\ &= 53 \end{aligned}$$

A．生徒の人数 11人．折り紙 53枚

数，たす，20枚余るのはプラス20で．5枚ずつx人に配って，そこから2枚たりないからマイナス2をかいて連立方程式で解きました．
7I：はい．このとき$3x+20$とyをイコールで結んでいますよね．これは，yとこっち（$3x+20$）が等しいと見ているのですか．
8S：うん．
9I：見ているということですか．何が等しいとみているのですか．
10S：うんと，折り紙の枚数と3枚ずつx人に配ってプラス20枚で，折り紙のyと，ん？yになるから･･･イコール．
11I：なるほど，今，配ったxに3をかけ算してプラス20したものがyになるからって，そこはどういう関係？yになるってどういうこと．
12S：比例？関係？比例？
13I：え〜と，これ(y)とこれ（$3x+20$)はどういうこと．これ（$3x+20$)がyになるっていうことは，これ（$3x+20$)はそもそも何を表しているのかな．
14S：折り紙の枚数．
15I：を表しているのね．それで，式を解いて，ここで間違えたよね．
16S：うん．
17I：ここ（生徒の人数を53と書いて11に訂正したところを指して）はどんなことを考えたの．
18S：･･･．
19I：53と書いたんだよね．それで，あっ，違うって気付いたんだよね．どんなふうに考えたのですか．
20S：何だろ･･･．
21I：わからない．じゃあ，次に行きましょう．これも前にやってもらったんですけれど，これ，同じ問題です，ここ．いいですか．こっちの問題は，生徒の人数を求めるために，生徒の人数をx人として方程式をつくるという，そこだけこれとは違います．けど，同じ問題です．考え方は，方程式をつくるために，$3x+20$と$5x-2$という2つの式をつくりましたというのがここですよね．この2つの式です．（Hさんがつくった式を指して）
22S：うん．
23I：この2つの式について聞きます．いいですか．まず，$3x+20$です．$3x$はこの問題の中で何を表していますか．それから$3x+20$は何を表していますか．この2つをちょっと答えてもらっていいですか．
24S：書きますか．
25I：はい，書いて下さい．
26S：（書き始める）あっ，$3x$か･･･．（$3x$を，「折り紙を3枚ずつx人に配ること」，$3x+20$を，「折り紙を3枚ずつx人に配ると折り紙が20枚あまること」と書く）
27I：そうすると，さっきここ（方程式を解いた方のプリントを指して）で言ったよね．yは何だっけ．このHさんがつくってくれた式の．
28S：折り紙の全部の枚数．
29I：全部の枚数だよね．それが，今，イコールで結んでいるこっち側（$3x+20$）は，「折り紙を3枚ずつx人に配ると折り紙が20枚あまること」（Hが書いたところを読む）を表している．この2つ（yと$3x+20$)を，イコールで結んでいるよね．この2つはイコールでいいのですか．
30S：うん．･･･．
31I：いい．
32S：う〜ん．
33I：いい．どうしてそういうふうに思いますか．どんなふうに解釈しますか．
34S：え〜と，20枚余るっていうのは，20枚あるということで，$3x$をたしたら全部の数になって，だから，それを合わせて，全部で折り紙の枚数になる．
35I：なるほど，そういうふうに解釈するんですね．では，今の$3x+20$ね，単位をききたいと思います．今，②で答えてくれた$3x+20$ね，この場面では，この式，どれがふさわしい単位か．単位はわかる．人とか枚とか．いい．
36S：（うなずく）

37I：３x＋20 で人を表しています．次は，３x＋20 で枚を表しています．３x は人を表して，＋20 は枚を表しています．３x は枚を表して，＋20 は人を表しています．Hさんはどれがふさわしい単位だと思いますか．



① 3xは何を表していますか．下に書いてください．

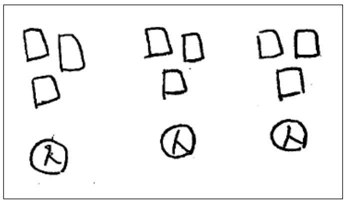
折り紙を3枚ずつx人に配ること

② 3x+20は何を表していますか．下に書いてください．

折り紙を3枚ずつx人に配ると折り紙が20枚あまること

38S：３x＋20 が枚．
39I：それはどうしてですか．
40S：３は３枚で，人数をかければその枚数になるから，３x も枚で，20 も枚．
41I：なるほど．じゃあ３x はここに「折り紙を３枚ずつ x 人に配ること」って書いてあるけど，これは枚数を表しているということですか．どうして配ることと書いたのですか．
42S：x 人だったから，配って，３枚ずつを配っていく．けど，折り紙だから，折り紙を求めるから，ん，求める？というか･･･．うふふ．
43I：いいよ，いいよ．もう１回．
44S：３枚というのは折り紙の枚数で，それを人に配るけど，配る物が折り紙だから，配るって書いた．
45I：だけそれは，結局単位は．
46S：枚．
47I：枚で，20 も枚だもんね．
S48：うん．
49I：それで，全体で枚を表すと考えたと．なるほど．それで，この３番目（「３x 人＋20 枚」を指して）のように，x は人数を表しているじゃあないですか．さっき言ってくれたように．そうしたときに3x とやったときに単位は人だというふうに言う人がいるわけ．そのように考える人の気持ちはわかりますか．
50S：うん．
51I：それはどんなふうに考えますか．
52S：人だったら，３人というふうに捉えちゃうから．x が人とわからないから，選ばない．
53I：どういうこと，x が人とわからないからって．ごめん．
54S：えっ，３x と書いただけでは，どっちが人数とか枚数とかわからないけど，数字の方が単位とかついているから，人では駄目という．
55I：じゃあ，この問題を見てもらっていいですか．式だけでいいんだけど．
56S：うん．
57I：これね，折り紙を何人かに配ります．１人に１枚ずつ配ると 16 枚余ります．また，１人に３枚ずつ配ると２枚たりません．これはどういう式になると思いますか．そこに式を書いてくれる．
58S：（y＝x＋16，y＝３x－２と書く）
59I：さっき，こっちの方（もとの問題）は，３が枚だからと言ったけど，今度 x でここ前がないよね．これはどういうふうに解釈するのですか．
60S：ん，ほー．
61I：確認だけど，これはどうですか，単位は．
62S：枚かな．
63I：うん，こっちと同じなんだね．ここ x だよね．これどういうふうに，Hさんは考えていますかね．説明してくれるとありがたいんだけど．
64S：x の前は，１というのがもうおかれているから x と書いても枚になる．
65I：x は人数だけどね．
66S：うん．
67I：x 人数だけど，もう１回言って．

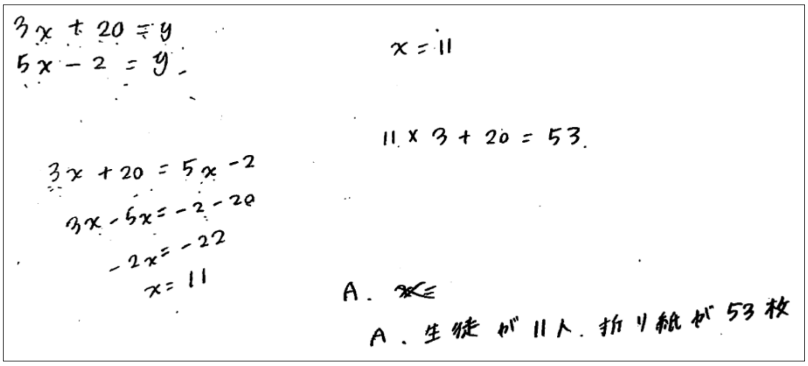
68S：人数だけど，x の前に１がおかれているから，１をかけていることになる．
69I：そうすると，これの単位は．何を表していますか．
70S：んー．
71I：単位は．
72S：枚かな．
73I：何を迷ったの．
74S：人と迷った．x を人数に置き換えているから･･･．でも枚．
75I：なるほど，ありがとう．もし，$3x+20$ を絵にかくとすると，どういうイメージを持っていますか．
76S：うふふ．
77I：$3x+20$ を，この場面の絵で表すとどういうふうに表せますか．それを最後に聞きたいのだけれど．
78S：折り紙が３枚ずつセットになっているのがおいてあって，そこに１人１人いて．
79I：ちょっとそれをここにかいてみて，その絵を．ははは．



80S：（絵をかきはじめる）
81I：何でもいいよ．イメージ，イメージ．
82S：（絵をかく）
83I：20 枚余るはどうなっているの．今これは $3x$ ね．
84S：あっ，まだいっぱいあるけど．ああ，11．
85I：まだ 11 ってわからない状態だよね．$3x$ って．一杯あるのね．20 枚余るってどういうこと．
86S：人がついていて，つかなかったところに 20 枚余っていたということ．
87I：で，$5x-2$ は．
88S：５枚ずつになっていて，また，人がついていて，でも１人の人が，ん，１人？人がついたところに折り紙が５枚あるはずなのに，２枚たりなかった．
89I：それで，人がついているのだけれど，人じゃあなくて枚なのね，単位は．
90S：う～ん．
91I：このどっちを数えているということ．$3x+20$ って．
92S：そうか．枚数．
93I：枚数なんだね．
94S：うん，でも考えるときは，人がついているけど，問題は配るだから，折り紙の枚数の枚をつける．
95I：そうか．これ，今，連立方程式でやったけど，もう１つの方法としては，$3x+20$ と $5x-2$ がイコールと書くのはわかりますか．
96S：うん．
97I：それで，こっち（$3x+20$）とこっち（$5x-2$）がイコールというのは，これは，意味は？どういうことなのかな．
98S：ああ，$3x$ の x と $5x$ の･･･，あーなんだろ．
99I：今，ちょっとその式を書いてくれる．
100S：（$3x+20=5x-2$ と書く）
101I：こういうふうに式をつくることもありますよね．
102S：うん．
103I：このときに，これとこれが等しいんだよね．それはどういうふうに意味付けをしますか．
104S：え～，x が等しいことを示すから．
105I：それは x が等しいことを示しているの．
106S：う～ん，あっこれは，２つの式が同じことを示している．
107I：同じことを示している．その２つの式っていうのは，これ何を表していますか．
108S：え～，３枚ずつ，えっ，x 人ずつに配るのが同じで，折り紙の枚数は違うけど，人数で同じにしていくってこと．
109I：ありがとうございました．

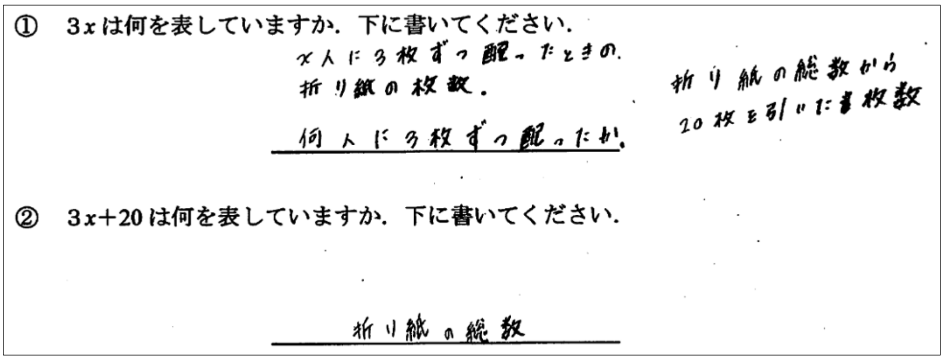
5H.N

1I:この問題を読んでもらって,そして方程式をつくって解いてください.やってみてください.じゃあお願いします.
2S:（問題を解き始める）３x＋20と５x－２を上下に書いてしばらく考える．4分20秒後
3I：どんなふうに考えてそこまで式をつくりましたか.
4S：1人に３枚ずつだから，この生徒の数をxとして，３かけるx，20枚余るだから＋20．で，それと同じように５枚ずつで５x，２枚たりないから－２.
5I：うん，で，どんなところに困っているのですか.
6S：ここから方程式をどうやってつくればいいのかわからなくて.
7I：このときの３x＋20って何を表しているのですか.
8S：折り紙の総数.
9I：それで，下（５x－２）は.
10S：同じ，下も.
11I：そうすると，どうすればいいかな.
12S：･･･.
13I：この２つから何をしたいんだっけ.
14S：方程式をつくる.
15I：うん．どう，そこは.
16S：･･･．あっ．これって何の方程式でもいいんですか.
17I：いいですよ.
18S：（yとつぶやきながら書き出す）
19I：答えまで書いて.
20S：（答えを書く）2分経過
21I：はい，ありがとう．そうすると，ここで少しお話をしたよね．あって言って気が付いたのは何をどんなふうに考えたのかちょっと教えてもらえますか.

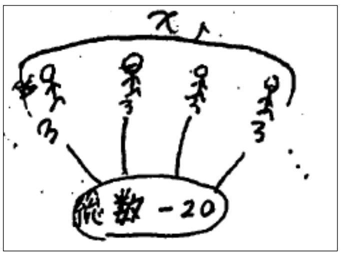


22S：どっちの式も折り紙の総数ということがわかって，折り紙の総数をyとしてイコールyってなったら，この式（５x－２）もyだから，こっちに当てはめて，それで，xごととか計算したら，11人と出て，それで，11かける３枚ずつ，プラス20で53枚というふうに考えました.
23I：なるほど，そうすると，この式（y＝３x+20とy＝５x－２）からこのイコールの式にしているよね．これはイコールで結んでいいんですか．そこはどういうふうに考えましたか.
24S：えっ，どっちも折り紙の総数だからいいのかなと思って.
25I：そうすると，３x+20と５x－２がイコール，等しい，これはいいですか.
26S：うん.
27I：どうしてイコールで結んでいいのかな．この式を書くときに.
28S：式の表している意味が同じだから.
29I：おおなるほど．式が表している意味って何.
30S：どちらもこの式は折り紙の総数を表しているから，いいのかなって.
31I：折り紙の総数は両方とも.
32S：同じ.
33I：同じなんだ．なるほど，それで結んだと．はい.
34S：はい.
35I：じゃあ，これも前にやってもらった問題ですけど．今，つくってもらいましたよね，式を．この３x+20について聞きますと．２つつくりましたので．３x+20の３xは何を表していますか,

36S：$3x$ は，･･･何人に 3 枚ずつ配ったか.
37I：ちょっとそれを書いてくれますか.
38S：はい.（プリントに「何人に 3 枚ずつ配ったか」と書く）
39I：これについてちょっと聞きたいと思うのですけれど．何人に配ったかというは，じゃあ人数を表しているのですか，$3x$ は．それを N さんどういう意味で書きましたか.
40S：･･･.
41I：私，この文章を見ると，何人に配ったかと書いてあるのをみると，$3x$ は単位としては人なのかなって，これを見ると思うのですけれど．N さんそういうつもりで書いていますか.
42S：ああ.
43I：それとも違うんだったら，こういうつもりで書いてますって言ってもらうといいんだけれど.
44S：いや，人と言うより，何て言うんだろ･･･，何人に 3 枚ずつ配ったか，で，こう，それが，x がわかったら，それに，20 をたしたら，53 がでるから，何て言うんだろ，枚の方が正しい.
45I：それで，じゃあこっち $3x+20$ は.
46S：え～，(「折り紙の総数」と書く）
47I：何て書いたの.
48S：折り紙の総数.
49I：そうすると，$3x$ の方は，何人に配ったかという「人」というふうに思っちゃうんだけれど，もう 1 回，訂正できますか．訂正するというか，N さんが思ったことが伝わるように書くとすると，どういうふうに書けばいいですか.


① $3x$ は何を表していますか．下に書いてください．
x人に3枚ずつ配ったときの。
折り紙の枚数．
何人に3枚ずつ配ったか．
折り紙の総数から
20枚を引いた書枚数
② $3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．
折り紙の総数

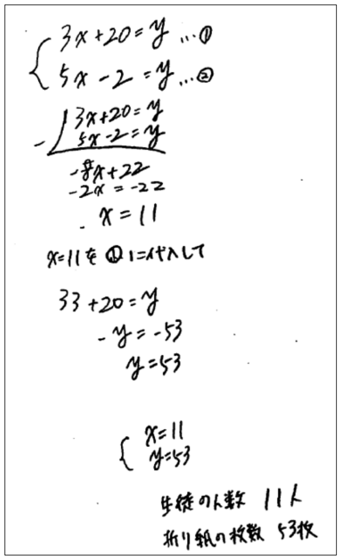
50S：･･･.
51I：この横にでも書いて下さい.
52S：(「折り紙の総数から 20 枚を引いた枚数」と書く）
53I：なるほど．そっちから攻めたのね.
54S：うふふ.
55I：$3x$ という額面通り捉えた，その $3x$ は何を表しているのかな．そこが知りたいんだけど，N さんが考えている $3x$.
56S：え～，･･･.
57I：どう説明できますか．その $3x$ を絵にかける？
58S：え.
59I：どんなイメージをしているのかが知りたいんですけれどね．そこにかける？$3x$ ってどういう状況かな，この場面で.
60S：絵って，絵をかく.
61I：うん，簡単な絵でいいよ.
62S：（かき始める）はい.



63I：うんうん，これ（$3x$）さ，20 はないから，ここ（$3x$）のイメージはどういうイメージ．ここが $3x$？（絵の上の方を指して）
64S：･･･.
65I：3，3，3っていくんだよね．x はどこに出てくるのですか.
66S：x は，ここの人.
67I：そうすると，1 人ずつ x，x，x？
68S：いや，あっ，そういうことか．x が，生徒の人数.
69I：うん.
70S：だから･･･.（しばらく考える）1 分後
71I：x ってものの存在を，N さんのイメージとしてどういうふうに持っているのかを知りたいん

だけどね．
72S：･･･．棒人間でいいですか．
73I：いいよ．
74S：こうなっていたときのここの人（ひと）のところの全体が x.
75I：それが．
76S：人（ひと）．
77I：そこが人（ひと）なの．
78S：うん．
79I：それで，３x 自体は．
80S：３x･･･．
81I：今３x のことをやっているんだよね．
82S：うん．･･･，x 人に，違うな，同じになっちゃう･･･．x 人に３枚ずつ配ったときの折り紙の枚数．
83I：なるほど，じゃあそういうふうに書き直してくれる．
84S：(「x 人に３枚ずつ配ったときの折り紙の枚数」と書く）
85I：今そのように３回書き直したんだけど，最初にイメージしたときと最後にかいたとき，イメージは変わっていますか．
86S：うん．
87I：どんなふうに，振り返ってみると最初は思っていたんですか．
88S：最初は，その何人に３枚ずつ配ったかという，その何人がメインになっていたけど，最後は，全員合わせた x 人に３枚ずつ配った折り紙の枚数で，枚数がメインとなって残った．
89I：なるほど，ここで，今，書いたときはどんなふうなイメージだったの．
90S：こっちのときは，こっちかな．
91I：例えば，この３x は，x がメインだった．何人に配ったという人（ひと）がメインになっていたと考えていた．
92S：あれ，でもこっちは何枚の方かな．
93I：何枚の方ね．
94S：うん，何枚．
95I：もう１回振り返ってみて，この y とおいたときね．この y とおいたときは，どういう心境というか，考えで y とおいたの．ここおけなくて困っていたよね．
96S：うん．
97I：あっ，って言って y とおいた，そこを振り返るとどういう考えで y とおけたんですかね．
98S：x 人に３枚ずつ配ったときの折り紙の枚数＋20，それが折り紙の総数，でもその数がないから y をおいて，こっちも同じようにして y をおきました．
99I：最終的には，y とおいて，y が同じだからって言っていたけど，これとこれの式が同じって見えたんですか，見えていなかったんですか．
100S：見えました．
101I：どの時点で見えたんですか．
102S：どの時点．
103I：最初から
104S：あっ，最初から同じ折り紙の総数のことを表しているのかなと思いました．
105I：なるほど．でも３x のときは人がメインかなと思った．
106S：何て言うの．こう改めて３x は何を表していると言われると，人になっていたけど，計算するときは，頭の中では枚と，何ていうのかな･･･．
107I：そういうふうにやっていたと．
108S：うん．
109I：わかりました．ありがとうございました．一生懸命やってくれてとてもよかったと思います．

54M.O



1I：じゃあ，早速．１つ目はこの問題です．前にもやってもらったと思うのですけれど，折り紙の問題です．

2S：はい．

3I：読んでもらってですね，そして，方程式をつくって解いてもらいたいのですが，いいですか．

4S：はい．

5I：Oさん，フルネームでかいてもらって，はじめてください．

6S：（名前を書く）

7I：じゃあ，どうぞ．

8S：（問題を解き始める）2分30秒後

9I：はい，どんな考えで，どういうふうにやったのか，説明して下さい．

10S：え〜と，生徒の人数をまず x と，折り紙の総数を y と考えて，３人，あっ x 人に３枚ずつで，３かける x で $3x$ で，それで配っていくと，20枚余るということで，余りが20で＋20で，それを合わせると折り紙の総数になるというのと，え〜と，それと同じで，５枚配ると，x 人に５枚配ると，５かける x で $5x$ で，２枚たりないので，マイナス２で合わせて，枚になる．

11I：それで，今加減法を使ってくれたけど，これさ，$3x+20$ と $5x-2$ は同じ y だから．$3x+20$ と $5x-2$ は，どういう関係ですか．

12S：え〜．

13I：どっちも同じ y においたんですよね．こういうとき，両方とも y だと思ったときは，この式（$3x+20$）とこの式（$5x-2$）はどういうつながりだと思っていましたか．

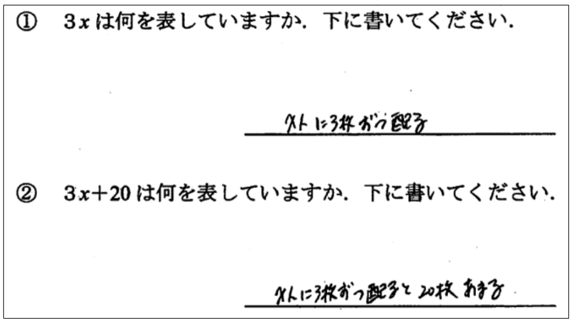
14S：何て言えばいいのかな．

15I：あんまり考えていない？

16S：あんまりそんなこと考えていない．

17I：はい，じゃあ，もう１問ね．今の問題で，これと同じ問題です．ただ違うのは，こっちはね，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人とおいて，方程式をつくるという問題です．考え方は，方程式をつくるために x を使って，$3x+20$ と $5x-2$，今，Oさんにつくってもらったこの式，この y の左側の２つの式，これをつくりましたと言っています．それで，$3x+20$ について聞きます．この $3x+20$ の $3x$ は何を表していますか．次に，$3x+20$ は何を表していますか，この２つを答えてもらっていいですか．

18S：（書き始める．$3x$ は「x 人に３枚ずつ配る」，$3x+20$ は「x 人に３枚ずつ配ると20枚あまる」と書く）


① $3x$ は何を表していますか．下に書いてください．

x人に3枚ずつ配る

② $3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．

x人に3枚ずつ配ると20枚あまる

19I：うん，そうすると，$3x$ の方は，なぜこのように答えたのかちょっと説明してもらっていいですか．

20S：え〜と，生徒の人数を x 人と考えて，３枚ずつ配ると $3x$ なので，それぞれ３枚ずつ配ると３かける x になるというのがわかるので，それを x 人に３枚ずつ配るというふうに表しました．

21I：はい，それで，$3x+20$ は．

22S：え〜と，その x 人に３枚ずつ配ると20枚余るというのを，20枚余るとその残りが20枚残るので，それをプラス20と考えてつくりました．

23I：はい，じゃあ，同じように下の方（$5x$ と $5x-2$）も答えてください．

24S：（$5x$ は，「x 人に５枚ずつ配る」，$5x-2$ は，「x 人に５枚ずつ配ると２枚たりない」と書く）

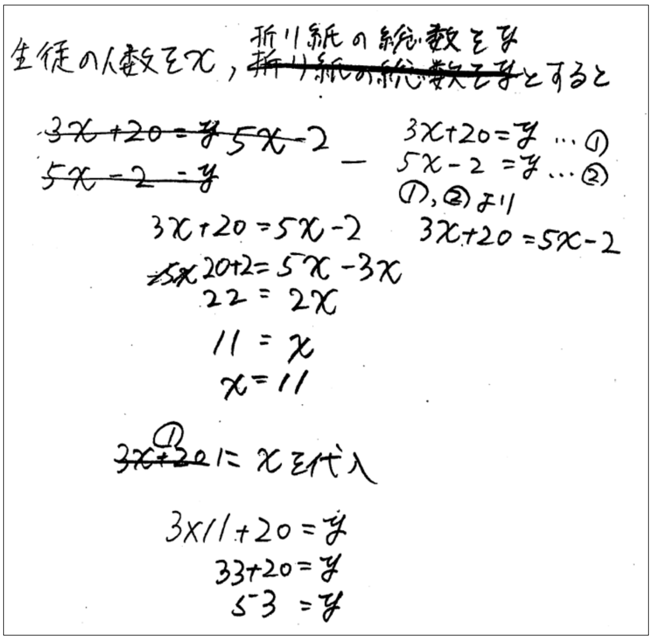
25I：はい，今度は，同じように説明して下さい．

26S：今度は，５人，あっ，５枚配るので，５かける x で，x 人に５枚ずつ配るので．それで，$5x-2$ の方は，x 人に５枚ずつ配ると今度，全部の折り紙から２枚たりないということがわかるので，マイナス２で．

27I：それで，２枚たりないってことだったよね．
28S：はい．
29I：そうすると，こっちの式（$3x+20$）をもう１回見てみると，今ここで書いた x 人に３枚ずつ配ると 20 枚余るっていうものを y とおいている．ね，それで，x 人に５枚ずつ配ると２枚たりないを y とおいているよね．同じ y とおいていいのですか．
30S：･･･．
31I：そこを説明できますか．
32S：ん～．ちょっと･･･．
33I：でも，y とおいているんだよね．あと，うまく計算できているんだよね．y とおいたんだよね．ここをなんで y とおいたのか．Ｏさんがどういう考えだったのかを聞きたい．
34S：x の人数を，x，あっ，生徒の人数を x と，折り紙の総数を y と考えて，計算すると y になった．
35I：そうすると，見た目から言うと，この２つは違うことを言っているように思うじゃあないですか．でも，Ｏさんはこれを同じ y とおいているんだよね．その y とおいたというそこをききたいんだけど，どう．
36S：ん～．
37I：うまく説明できる，なんで y とおいたのか．
38S：決まった人数それを x だと考えるけど，結局，３枚ずつ，５枚ずつ配っても＋20 と－２を合わせると，同じ折り紙の総数になるのは変わりないので．
39I：なるほど．じゃあこれはこういうふうに書いているけど，これは結局，何を表しているということ．
40S：折り紙の総数．
41I：なるほど，そういうふうに最初から見えていたということ．
42S：（うなずく）
43I：うん，なるほど，じゃあですね，今の $3x+20$，この単位ね．人数を表しているのか，枚数を表しているのかということなんだけど．$3x+20$，この式は，どれがふさわしい単位を表していますか．いい．全体で括弧して $3x+20$ で人，全体で $3x+20$ で枚，$3x$ は人を表して＋20 は枚を表している．$3x$ は枚を表して＋20 は人を表している．Ｏさんは，どれがふさわしい単位だと思いますか．
44S：$3x+20$ が枚になる．
45I：どうしてそう思いますか．
46S：え～，この方程式と一緒で，$3x+20$ は，x 人に３枚ずつ配って＋20 枚たすと折り紙の総数になるので，それが枚になる．
47I：なるほど，ここで，$3x$ をさ，x 人に３枚ずつ配ると書いてあるけど，これも配るっていうことをもう１回見直すと，何を表していますかという問いには何て答えますか．
48S：折り紙
49I：ああ，それもうちょっと，もう１回言って．どういうふうに説明できますか．
50S：x 人に３枚ずつ折り紙を配って，20 枚折り紙が余るということで枚数を表しているっていうか･･･．
51I：じゃあ，$3x$ の方は．
52S：$3x$．え～と，生徒の人数に，生徒に，x 人に３枚ずつ折り紙を配るというので，$3x$ になる．
53I：なるほど．で，なんか配るという操作，動きみたいなものを答えてくれているけど，本当は？Ｏさんの頭の中では，それは何を表しているの，端的に言うと．
54S：３枚ずつに分けたとき．
55I：分けたときの？
56S：の折り紙の･･･残りの･･･枚数．
57I：ああ，枚数を表している．いいですか．
58S：はい．
59I：それで，中には，この３つ目の単位のように，x は人数じゃあないですか，だから，$3x$ は人数を表していると思っている人がいるんです．
60S：ああ．
61I：それをＯさん，どう思いますか．20 はもう枚じゃあないですか，余っている枚数っていっているんだから．

62S：うん．ほー．
63I：それはわかる，それともわからない．
64S：でも，３x 人って，人って考えちゃうと，もともと x が生徒の人数なのに，さらに３倍になっちゃうので，そこは，３x は枚数になる．人だったら x になるはず．
65I：x 人に３枚ずつ配るだよね．それは，人数じゃあなくて何？
66S：・・・・・・．
67I：人数じゃあないんだよね．これは，おかしいだよね．そういうふうに言っている人に何て説明しますか．
68S：x 人に３枚ずつ配るという折り紙を３枚ずつ配ると 20 枚余るわけだから，全体の折り紙の総数が $3x+20$ で求められるというふうに教えたい．
69I：で，前回，Oさん「３枚ずつ何人に配るか」と書いたの．（前の解答用紙を見せる）
70S：ああ．
71I：覚えている．
72S：はあ．
73I：「３枚ずつ何人に配るか」というのは，３x は人数を表しているのではないかなと，この言い方だとそう思うじゃあないですか．
74S：ああ．
75I：それを聞きたかったんだけど．このときに考えていたことと，今考えていることは同じですか，違いますか．
76S：たぶん同じだと思います．
77I：同じだった．なぜこのように書いたのかな．そのときどんなイメージを持っていたのか，そこを今日聞きたかったんだけど．
78S：う～ん．
79I：思い出せないかな．
80S：・・・．３枚ずつ何人に配るか．
81I：これだけ読むと，３x って人数を表すと思っているのかなと思ったんだけど．そうじゃあないんだよね．
82S：はい．
83I：このときどういう考えでこういうふうに書いたのか．何かOさんなりの考えがあって，そう書いたのだと思うのですけれど．
84S：う～ん．
85I：どうですか．
86S：３枚ずつをその x 人を何人に配るのかという，３枚で，x を何人というふうに考えて配ると書いたのかな．
87I：そのときは，x の方が頭にイメージしているのかな．３x の人の方にイメージがいっているの．
88S：そう．
89I：同じことを表そうと思ったの．
90S：同じことを表そうと思った．
91I：なるほど．わかりました．ありがとうございました．これで終わりにしたいと思います．

11Y.N
1I：じゃあ，お願いします．これは前にもやってもらったんですけれど．折り紙の問題．
2S：ああ．
3I：ちょっと読んでいただいて，この問題を方程式をつくって解いてくださいということで，やってみてください．
4S：はい，わかりました．
5I：じゃあ，お願いします．
6S：（解き始める）4 分 20 秒後
7I：はい，ありがとうございます．じゃあ，どのようにやったのか説明をして下さい．
8S：え～と，まず，生徒の人数と折り紙の総数が不確かなので，まず，x と y で代入して，x，y に置き換えて，それで方程式をつくりました．
9I：不確かというのはどういう意味ですか．



10S：まだ，答えがわからないので，1かもしれないし，100 人かもしれないので，そこがわからないので，まず先に x とおいて，あとからそこに答えを代入していくという形にしました．

11I：つくった式はどういう考えでつくりましたか．

12S：20 枚余るということは，20，＋20 でその折り紙の総数になるので，こっちの３枚ずつ配って 20 枚余るという方は，１人に３枚ずつ，１人，１人に３枚ずつ配るということは，生徒の人数かける３なので，$3x+20=y$ にして，逆に，２枚たりないということは，マイナス２をすると，その折り紙の総数になるので，５枚ずつ配ると２枚たりないというところは，$5x-2=y$ で，どちらも $=y$ で，この①，②よりとありますが，y で同じだから，この $3x+20$ と $5x-2$ も同じということを表しているので，$3x+20=5x-2$ にして，そこからマイナスがつくことが苦手なので，$3x$ をこっちに移項すれば，正の数で計算することができるので，計算して，それで，最後はこの①の式に x を代入して，y の折り紙の総数を求めました．

13I：では，これも前にやってもらった，次の問題にいきたいと思います．今と同じ場面です．

14S：はい．

15I：同じ場面で，違うのは生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x として方程式をつくりなさいという問題になっています．考え方としては，方程式をつくるために x を使って今つくってくれた同じ式だよね．

16S：ああ．

17I：これをつくりました．この考え方の中でつくった２つの式 $3x+20$ と $5x-2$ について聞きますと．$3x+20$ についてまず聞きます．$3x$ は何を表していますか．

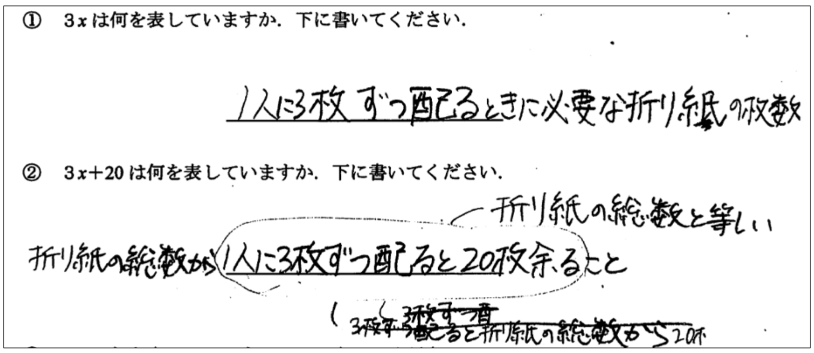
18S：はい．

19I：そして，②もね．

20S：はい，わかりました．（書き始める）１分 20 秒経過．はい，できました．

21I：じゃあ同じように下の方（$5x$ と $5x-2$）もお願いします．

22S：はい，わかりました．（書き始める）30 秒経過．はい，できました．



23I：ありがとう．じゃあまず $3x$．これ説明して下さい．なぜ，こういうふうに書きましたか．

24S：え～と，x は生徒の人数なので，その x 人に３枚ずつ配ると，３枚ずつ配るときに $3x$ というのは必要な折り紙の枚数だと思います．

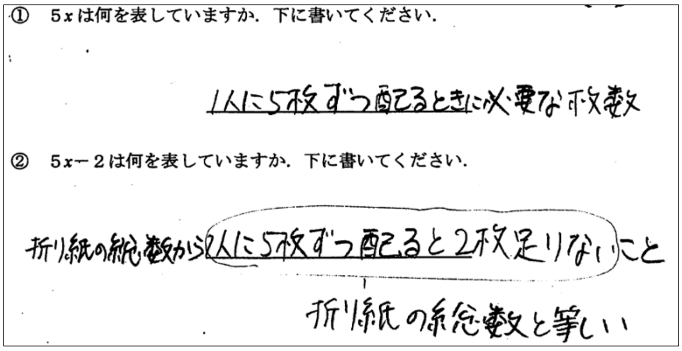
25I：それで，$3x+20$ は．

26S：$3x+20$ はえ～と，その $3x$，１人に３枚ずつ配ったら，その元の折り紙の枚数よりも 20 枚余ったことを意味していると思います．

27I：同じく $5x$ の方は．

28S：$5x$ は，これと，$3x$ と同じように，５枚ずつ配るときに必要な折り紙の枚数を表していると思います．

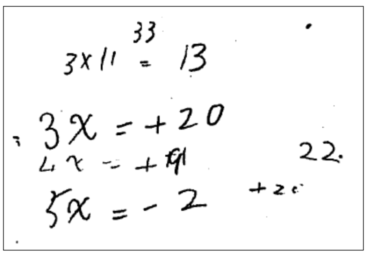
29I：で，$5x-2$は．
30S：$5x-2$は，$3x+20$と似ているんですけど，−2ということは，その元の数よりも2こたりないから，そこを削って元の数にしているということなので，5枚ずつ配ると2枚たりないことを表しているかなと思いました．
31I：そうすると，今Nさんの式を見てみると，$y=$で式をつくって，ここで，$3x+20=5x-2$というふうに，この2つをイコールで結んでいますよね．そのときの意味が，②（$3x+20$）が，1人に3枚ずつ配ると20枚余ることで，$5x-2$が1人に5枚ずつ配ると2枚たりないことだよね．これをイコールで結んでいいのですか．
32S：そっか．ああ多分説明不足．1人に3枚ずつ配ると20枚余る･･･，ん，1人に3枚ずつ配ると20枚余る･･･元の折り紙の枚数から1人3枚ずつ配ると20枚余ること．そうすればどっちも元の数をプラスしたとかマイナスしたとか．だって，どっちも元の数イコール元の数かなと思います．



33I：そうすると，もう1回言い換えると，ごめん．等しく結んでいるんだよね．
34S：はい．
35I：今，先生には，〜すること，･･･することと等しいようには見えないんだけど．
36S：そうだった．
37I：はい，それを説明すると．
38S：元の折り紙の枚数から1人に3枚ずつ配ると20枚余ることと，元の折り紙の･･･ん，折り紙の総数か，折り紙の総数から1人に5枚ずつ配ると2枚たりないことを表していると思います．
39I：その元の折り紙の総数からというのはどういう意味．
40S：え〜と，何も手を付けていないというか，元々あった総数から，ん．
41I：総数からっていうのが，これとこれ等しいんだよね，イコールで結んでいるから．
42S：はい，え〜と･･･．
43I：等しいことはどんなふうに言えるのですか．
44S：等しいこと･･･．
45I：だって，イコールで結んでいるよね．
46S：はい．え〜と，総数，3枚ずつで総数にたりなかったというか，合わなかった．その合わなかったから20枚たしたというか，この元にあった総数から，20枚ひいた数しか使わなかったから，20枚たした，余ったということは，この数はその折り紙の総数と同じで，1人に5枚ずつ配ると2枚たりないというのは，逆に5枚ずつ配ったら2枚オーバーしてしまったことを表しているから，−2をしてあげると元の数に戻ると思って，これも折り紙の総数を表すから．
47I：ああ，じゃあそれもかいておいて．
48S：はい，OKです．
49I：消さなくていいからね．補足して書いて．
50S：(「1人に3枚ずつ配ると20枚余ること」を○で囲んで「折り紙の総数と等しい」，「1人に5枚ずつ配ると2枚足りないこと」を○で囲んで「折り紙の総数と等しい」と書く）
51I：ありがとう．そしたら，今度は，この$3x+20$について聞くね．この場面において，この式は，どれがふさわしい単位かです．人とか枚とかね．
52S：はい．
53I：これ全体$3x+20$で人，全体$3x+20$で枚，$3x$で人，+20で枚，$3x$が枚で，+20が人．これどうですか．
54S：これ，2番目が正しいと思います．
55I：なるほど，その理由は．
56S：この先に，$3x$というのは，折り紙の使った枚数を求めているから，人数を求めているわけではなくて，+20というのも枚数を表しているので，その時点で1番と3番がなくなって，20というのは20枚余ったという，え〜とこの問題にも書いてある通り，20枚余ったという単

位で，余っているから人が余っているのではなくて，書いてあるとおり枚数が余っているので，枚かなと思いました．
57I：それで，N君さ，前回には３xを生徒の人数と書いているんですよ．
58S：は．
59I：覚えている．
60S：いや．覚えていないです．
61I：そのときを振り返ってみて，思い出してもらって，なぜ生徒の人数と答えたのかなあって，今日，そこが聞きたいんです．
62S：ああ，ほんとだ．え〜，焦りとかもあったし，先入観，ちゃんと深掘りしなかったという，見直さなかったというのもあると思います．
63I：それで，どういう先入観だったのかな．振り返ってみると．
64S：えーと，xは人（ひと）だから，人（ひと）だからと勝手に思い込んじゃって．
65I：ああ．人（ひと）ということはどういうこと．xは人（ひと）というのはどういうイメージ．
66S：えーと，不特定，だけど，たぶんそのときは３×xを人（ひと）×人（ひと），ん，だから何て言えばいいんだろう．だから，３の方を人（ひと）と考えたのか，勝手にもう人（ひと）を求めると思ったのか，きっと，そうですね．
67I：そうすると，xは今，人数とおいているんだよね，だけど人（ひと）ってみているの，そのときは．
68S：ああ，そっか，そっか．
69I：今の，発言を聞いていると．
70S：ああ，説明不足ですね．人（ひと）の数ですね．正式には．
71I：正式にはそうだけど，このときに見たのは，どのように見ているのかな．
72S：そのときに見たのは．３x･･･，ああ，そうか，人数ってわかっていたけど，その，やっぱxの文字を重要視しちゃって，人数しかわからなかったという感じですか．
73I：そのxの方が．
74S：大きい感じ．
75I：なるほど，それでそう書いてしまった．
76S：はい．
77I：それで今振り返るとどうですか．
78S：あのー，そもそもここときっき，ここところが似ていると書いたのに，枚数と人数が違うというのが，まず見直していないなと思って，今思ったらおかしいなと感じます．
79I：そのときはそういう感じで書いちゃったんだね．
80S：はい．
81I：ありがとうございます．では，これで終わりにしたいと思います．
82S：ありがとうございました．

6K.O



1I：では，まず最初は，前にもやってもらったと思うのですが，この折り紙の問題です．読んでもらってですね，方程式をつくってこの問題を解いてくださいということでお願いしたいと思います．
2S：はい．（問題を解き始める）4 分 40 秒後
3I：じゃあまずO君，どういうふうに考えたのか言ってくれる．
4S：あ，はい．折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に３枚ずつ配ると 20 枚余るので，３xイコールで，20 枚余ったから＋20 かなって思って．５枚ずつ配ると２枚たりないので，５x＝－２．で，まあ，差が 22 あるので，４xに時点では，９枚余るって考えて，３xから５xの間が 22 だったので，え〜と，xは 11 だと思って，生徒の人数は 11 人いるのかなと思いました．で，そこから計算して，３×11 で 33，それで 20 枚余ったので，53 枚だと思いました．
5I：そうすると，今，３x=20 という式を立てたよね．
6S：はい．
7I：これどんなふうにイメージしているんですか．

$3\times11+20=53$
$44+9=53$
$55-2=53$
5

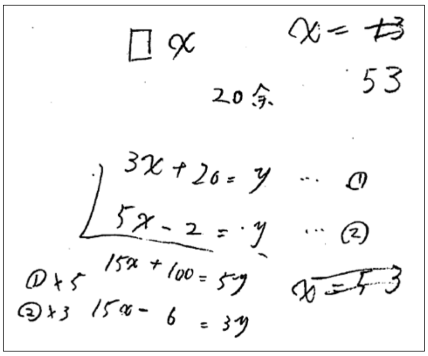
8S：う～ん．
9I：式から見ると，３x と 20 が等しいという式だよね．
10S：うん．
11I：これをどのようにＯさん考えたのですか．
12S：あっ，そっか．
13I：いや，今，つくった式をどういうふうに考えたのかを言ってくれるといいんだけど．
14S：はい．えっと･･･３枚ずつ生徒に配ったら 20 枚余った．で，癖かな，わかんないけど，こういうふうに求めています．
15I：それで，今，そっかっていったよね．それはなぜそっかって言ったの．
16S：ああ，３x の場合，この x が 11 だった場合だと，33 で 20 と等しくないなと思って，計算式間違えたなと思いました．
17I：じゃあ，今振り返ってどう．どんなふうにつくればいいと思う．
18S：いや，なんか．
19I：じゃあ，下の方見てみようか．下の方の式はどういうふうに，この５x＝－２，これどういうふうにつくったの．
20S：ここも同じでえ～と，５枚ずつ配って２枚たりないので，そうです．同じでつくりました．
21I：そうすると，なに，これはどこを読んで，読んだままをつくったのかな．どんなふうにやったのかな．
22S：はい，読んだままつくりました．
23I：じゃあ，考えようか．これもどう x に 11 が入ったとき．
24S：x に 11 が入ったときは，え～と，３×11 でこれに 20 をたして 53 で，４のときは４×11＋9 で 53，５x のときは，55(５×11)－２で 53 です．

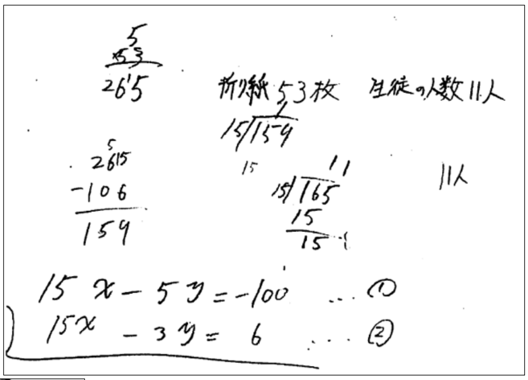
$44+9$

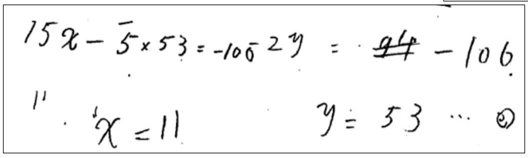
25I：そうだよね．じゃあ，どんな式が正解となる．
26S：ほんとは連立方程式でやった方がいいのかなって思ったけど･･･．
27I：なるほど，じゃあ，どんな式になるかな．書けますか．
28S：いや．ちょっと．y がないと･･･．３x･･･プラス･･･う～ん，難しいな．
29I：これ見てみればいいよね．（本人が数で計算した式を書いたところを指して）ほら．

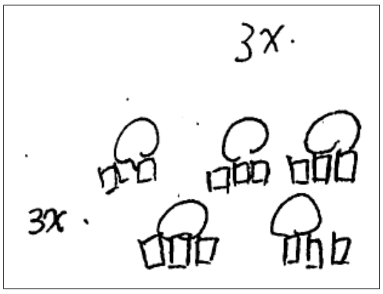
$3x+20=\cancel{53}\ y$

30S：あっ，そっか．連立方程式作らなくてもできるのか･･･あっ，20 のところが･･･わかんない･･･．これは，y とかつくって，使った方がいいのですか．
31I：いや，どっちでもいいですよ．なくてもいいし，あってもいいし．
32S：じゃあ，３x＋20＝53･･･．あっ，53 って答えがわかっていないので･･･．
33I：うん，わかっていないんだよね．
34S：ここが y かな，たぶん．
35I：なるほど．
36S：それで下も５x－２＝･･･，なんだろうな．こうかな．５x－２＝y と書く．（連立方程式を解き始める．解き方を指導しながら解を導く）5 分 30 秒後
37I：でた．
38S：でました．
39I：いいよね．そうしたら，まずこの最初につくった式を振り返ってもらうよ．
40S：はい．
41I：３x＋20 とつくったじゃないですか．このときの３x の x はどんなふうにイメージして x としていますか．
42S：うんと，３は３枚ずつの３で，x はその生徒の人数がわからなかったので，その生徒の人数が x です．
43I：そうすると，その３x のイメージはどんなふうに絵にかけます．
44S：絵？絵ですか．

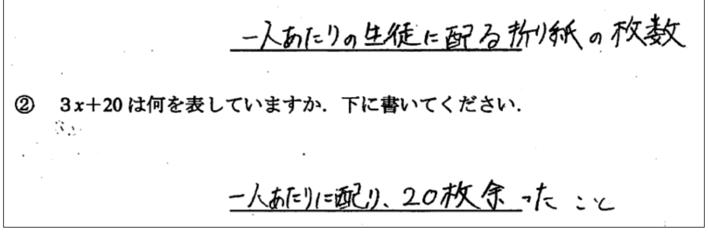








45I：絵にかけますか，イメージを．
46S：え〜と．11人か，あっ，でも．
47I：まだわからないからね，人が何人いるかは．
48S：（絵にかく）だいたいこのくらいいたとして．え〜と，紙がたくさんあったので，これを3枚ずつ（絵をかきながら）そうしたら20枚余った．
49I：そしたら，いいよ．どういう意味．
50S：20枚余った．
51I：で，そのときにイコールで結んでいるけど，等しいんだよね．イコールということは．そこはどう，考慮しているのですか．
52S：いや，考慮していないです．
53I：どんなふうなイメージでイコールを書いているのですか．
54S：なんとなく，つなげる．$3x$ につなげるのが，$3x+20$ でそのままにしたら，おかしいなと思って．
55I：なるほど．では，次ね．今，せっかくつくってもらったので，今後はこのことを聞きます．
56S：はい．
57I：今と同じ問題でね．生徒の人数を x としています．そうすると，今，O君もつくってくれた $3x+20$ と $5x-2$，つくってくれたよね，ここで．
58S：はい．
59I：この（$3x+20$）式についてききます．$3x$ は何を表していますか．次は，$3x+20$ は何を表していますか．これどうですか．
60S：え〜と，$3x$ は･･･（書き始める）はみ出してもいいですか．
61I：もちろん．
62S：（書き続ける）（$3x$ は「1人あたりの生徒に配る折り紙の枚数」，$3x+20$ は「1人あたりに配り，20枚余ったこと」と書く）


① $3x$ は何を表していますか．下に書いてください．

一人あたりの生徒に配る折り紙の枚数

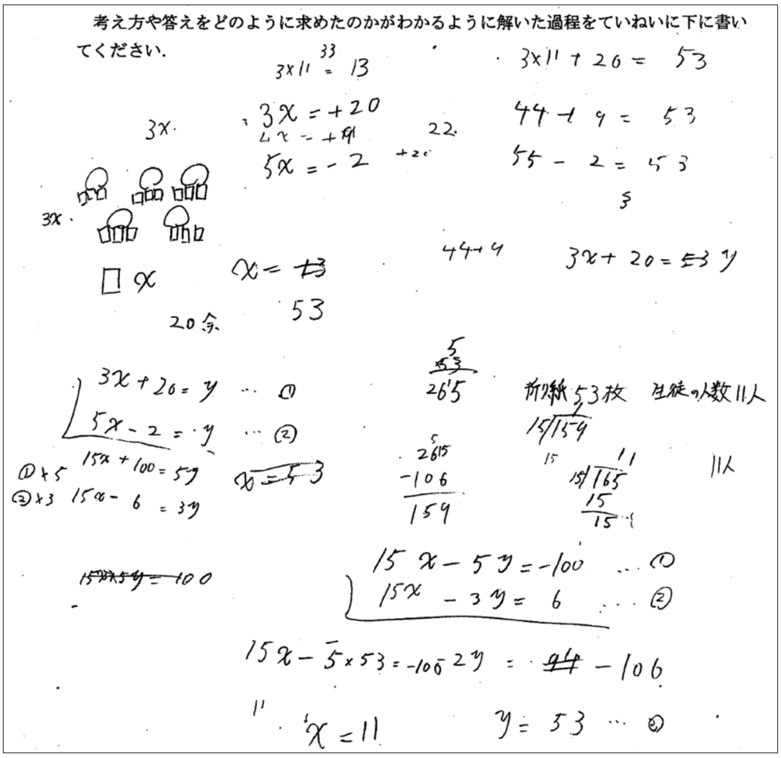
② $3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．

一人あたりに配り、20枚余ったこと

63I：じゃあ，ちょっと説明してください．$3x$ は．
64S：$3x$ は，え〜と，生徒1人あたりに配った折り紙の枚数．
65I：これは，今，書いてくれたよね，$3x$.（絵を指して）これ，イメージは．
66S：あっ，はい，そんな感じです．
67I：そうすると1人あたりの生徒っ

て, ちょっと先生, 理解できないんだけど, どんなふうなことでそういうふうに書きましたか.
68S：ああ，え〜と，たくさんいる中で，たくさん生徒がいるとして，その人に３枚ずつ折り紙を配るじゃないですか.
69I：はい，はい.
70S：それで，１人あたりに３枚ずつ配ったら，あっ，３枚ずつ配ることを３xと捉えました.
71I：じゃあ，xって１人なの．１人あたりというと１人だよね．それに３枚という感じがするんだけど．それはどう．
72S：ああ，あの，大勢いる中で１人に配る枚数，が，３x.
73I：１人に配るのは３枚じゃあないの.
74S：３枚です．３枚.
75I：じゃあ，xは.
76S：え〜と，３xは，あっ，そうか．１人に３枚ずつ配った枚数･･･，ん，えっ，xが何人かの生徒で，３が折り紙の枚数なので，何人かの生徒に３枚ずつ配ったことかな.
77I：ことなのね．最初書いたときのイメージと今のイメージ同じですか．言葉の使い方とか.
78S：あっ，言葉の使い方はなんか間違っている気がします.
79I：ああ．振り返ってどう.
80S：なんか伝えたいように伝わっていないかな.
81I：なるほど.
82S：そんな感じがします.
83I：イメージはこうなんだよね.
84S：はい，イメージはこうです.
85I：こういうふうに（３xの絵を指して）思っていたら，これ（３x）が 20 とイコールではないということは，どうなの.
86S：20･･･
87I：最初につくった式は，今振り返るとどう.
88S：あっ，おかしい.
89I：どこがおかしい.
90S：20 枚余っているはずなのに，この＋20 というのは合っていたけど，３xと＋20 が等しくなっているので，書き方としては，計算式で間違っているかなと.
91I：なるほど．それでもう１つね．３x＋20 ね．これはどれがふさわしい単位か．全体で括弧して３x＋20 が人，３x＋20 が枚，３xは人で＋20 が枚，３xが枚で＋20 が人．これ O 君はどれを選びますか．単位としてはどれが正しいと思いますか.
92S：え〜と，３x･･･ここのどっちかで･･･．((３x＋20）枚と３x人＋20 枚のどちらかで)
93I：どういうふうに迷っているの.
94S：上（(３x＋20）枚）にすると，３が３枚ずつ配ってxが人の人数なので，その人を枚で表してよいかわからなくて，でも，(３x人＋20 枚）３xを人にすると，xは人の数だけど，３枚ずつその人達に配っているわけだから，その折り紙の枚数をなんか，人と表すのはおかしいかなと思っています.
95I：で，どうかな.
96S：どっちだろう･･･．下（３x人＋20 枚）だと思う.
97I：それ，もう１回理由を言うとどう.
98S：やっぱり，xが人で３枚ずつ，何人かの生徒に３枚ずつ配っているので，そのx，何人かの人が持っている折り紙の枚数ということで，これは人が持って　いるからそれは人で，後ろは余った枚数だから 20 枚.
99I：今さ，書いてくれたよね，絵をね．これは結局人を表しているんだね.
100S：･･･ああ．･･･ん.
101I：これ（かいた絵）と３xは同じものだよね.
102S：はい.
103I：こっちは，やっぱり人に目が行っているんですか．というか，それが浮きあがっているんですか.

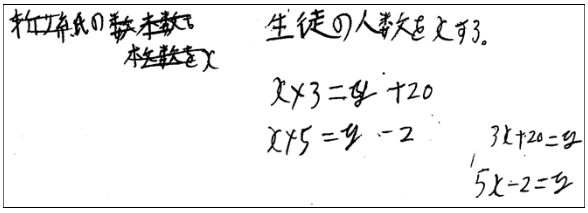
104S：ああ．やっぱり人が目についている，はい．
105I：なるほど，じゃあ，３x が人というのは，これ３x が人を表している．
106S：う〜ん．
107I：そのときの x というのはどういうふうに見ているのですか．また，同じようなことを聞いているんだけど．
108S：ああ，x ですか．ええ〜と，x は何人かいる生徒で･･･．言い方が難しいけど．
109I：x は何人かの生徒なんだね．
110S：何人かの生徒です．
111I：x は生徒なんだね．
112S：x は生徒で･･･．３は折り紙です．
113I：なるほど．ありがとうございました．じゃあ終わりにしたいと思います．



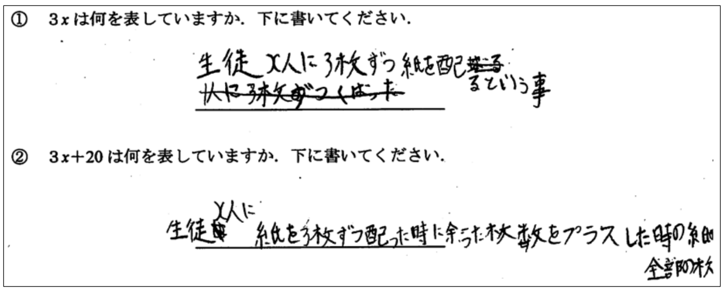
K.O の最終的な記述の様子

Ｂ中学校１年生インタビュープロトコル

41Y.F
1I：まず最初に，これ前にやっていただいたのですけれど，この問題です．折り紙の問題です．読んでもらって，そして方程式をつくって解いてくださいということですので，時間を上げますので，ちょっとやってみてください．はい，じゃあお願いします．
2S：はい．（解き始める）4 分 50 秒経過
3I：じゃあ，そこまでどんなふうに考えたのか，教えてくれますか．
4S：え〜と，ここまでは，生徒の人数を x とみて，まあ１人に３枚ずつ配ったときに，配ったときの枚数に 20 枚をたすと紙の，折り紙の枚数が出てきて，下の方もそれで枚数が出てきて，人数を求めれば枚数が出てくるけど，まだ人数が求められなかったから，出てこなかった．



5I：今，F 君は生徒の人数を x とすると書いてくれたけど，y を使っているよね．
6S：はい．
7I：y は何ですか．
8S：えっと，y はその折り紙の枚数です．
9I：それはなんで書かなかったの．
10S：ああ，え･･･，う～ん･･･，わからなかった．
11I：わからないというのは．y についてはわからなかった．
12S：あ，はい．とりあえずここの y の数字がわからなかったから，その y というのを使った．
13I：なるほど，そのときは，さっき言ってくれた y は何だっけ
14S：y は紙の枚数
15I：そういうふうにイメージして y を使ったのですか．
16S：はい．
17I：でも，わからなかったから y とおいてみた．
18S：はい．
19I：そうすると，こういうふうにつくってくれた式とこの式違うよね．こっちに改めた．
20S：はい．
21I：この式はどういうふうにつくったのか，説明してもらえますか．
22S：これは，$3x$ は人に３枚配ったときで，x が人数だから，それに紙の枚数をたすとこの y が紙のその全部の数になる．
23I：下は．
24S：下も同じで，５枚ずつ配ったときに，その x の数字から２をひけば，折り紙の枚数が出てくる．
25I：一旦，そこまでにしておいて，２つ目の問題にいきましょう．２つ目の問題は，これも前にやってもらったんだけど，今のことを踏まえて，問題は同じです．ただし，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として方程式をつくりなさいという問題です．で，このときに方程式を作るために x を使って，$3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくりました．この問題の中に使っている $3x+20$ と $5x-2$ について聞きます．まず，$3x+20$ ね．F 君もつくってくれた．
26S：はい．
27I：この式の $3x$ は何を表していますか．それから $3x+20$ は何を表していますか．ちょっとこの２つを書いてもらっていいですか．
28S：はい．（すぐ書き始める）
5 分 10 秒経過



29I：今こっち $3x$ から聞きます．ここで迷ったよね．
30S：はい．
31I：なぜそういうふうに迷ったのか説明できますか．
32S：はい，え～と，１人に３枚ずつ配ったという表現だと，x は何を示しているかが出ていないと思ったので．
33I：なるほど，これ１人に３枚ずつ配った何て書こうとしたの．
34S：え～と，配ったとき．
35I：ああ，ときね．それで，x を入れたの．
36S：はい．
37I：次はどういうふうに．
38S：生徒 x 人に３枚ずつ紙を配るということ．

39I：ことなんだね．じゃあ，３x＋20 は．

40S：生徒 x 人に紙を３枚ずつ配ったときに余った紙をプラスしたときの全部の枚数．

41I：なるほど．それで，ふさわしい単位を聞きたいと思うんですけど．３x＋20 ね．この式はこの場面において，どれがふさわしい単位か．全体括弧して３x＋20 が人です．３x＋20 が全部で枚です．３x は人で＋20 は枚です．３x は枚で＋20 は人です．F 君はどの単位だと思いますか．

42S：え〜と，自分は，これだと思います．（３x 人＋20 枚を指す）

43I：それはどうしてですか．説明できますか．

44S：えっと，３x というのは，その人を表していて，ああ〜･･･ん〜．

45I：今，どんなことを考えたの．

46S：いや，なんか，３という数字が入っていたから･･･その x に仮に文字を入れたときに出たときに，出てくるのが枚数だなというのが少し思って．

47I：x に例えば，いくつを入れてみたの，自分で．

48S：数字は特に入れていないけど，もし，仮に４とかにおいたときに，仮に４においたときに 12 にたす 20 枚というふうになっちゃうので．

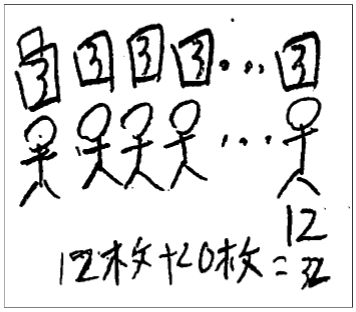
49I：今，F 君は，３x は人だと言ったけど，そのときの x はどういうイメージもっているんですか．

50S：その x は，まあ，その生徒の人数．

51I：うん，その絵をかけますか．３x，今，ここの，かいているこのことはどういうふうに絵にかけますか．

52S：･･･え･･･え〜，だからまあ，これで言っちゃうと（絵をかき始める）これが 12 人･･･

53I：なるほど，今，x が４だったとき．



54S：はい，x が４だったとき，これが 12 になって，そこに紙を，え〜と紙が３枚ずつ．まあこうなっちゃうんじゃないかなとちょっと思いました，はい．

55I：そうすると，12 人ではなくて 12 枚じゃあないかというところが今，F 君が迷ったところ．

56S：はい．

57I：それもうちょっと詳しく言えるかな．

58S：え〜詳しく･･･．え〜．

59I：どうしてそう思ったのかとか･･･．

60S：う〜ん．どうして．

61I：３x は人だってさっき言ったよね．

62S：はい．

63I：そのこと．

64S：ここに人が入っているから，これはこれでこれはこうとなっちゃっているんじゃあないかなと少し思った．

65I：そうすると，②のほうはこれ全部の枚数って言っているけど，ここは．

66S：え，これは，全部の枚数．

67I：それはどういう意味ですか．

68S：これは，仮にこれを，x を４としたときに，３枚ずつ配って，うん，x 人に３枚ずつ配ったら，紙が 12.

69I：４だったらね．

70S：はい，紙が 12 になって，それに 20 枚をたしたら 32 枚．これが全部の紙の枚数．

71I：じゃあ，こっちはどうかな．

72S：こっちも x を４と見立てたときに，20 枚と出てきて，そこから２ひいたら 18 枚という数字が出てきて，仮に４だとしたときにはこの枚数が出てくるのではないか，これが紙の全部の枚数．

73I：そうすると，５x－２はどう解釈しますか．

74S：生徒 x 人に紙を５枚ずつ配ったときに，マイナス２，え〜，･･････．５枚ずつ配ると２枚たりないから･･･．

75I：それは何を表しているのですか.
76S：え〜と，生徒 x 人に５枚ずつ配ってしまうと，紙の枚数が２枚たりていないということを表しているのではないかと思います.
77I：じゃあ，$3x+20$ は全部の枚数だけど，こっちはそうじゃない.
78S：ああ，う〜ん．そうするとなんか，変になっちゃうな.
79I：何が変になっちゃう.
80S：え，ここ（$3x+20$ の表していること）とここ（$5x-2$ の表していること）で共通した答えが出てくるんじゃあないのかなと.
81I：なるほど．今のF君の解釈だと，共通になっていないの.
82S：うん，なっていないですね.
83I：どうすればいいと思う.
84S：ん〜，どうしたらいいんだろう.
85I：こっち（$3x+20$）は，こういうふうにしたときの全部の枚数といっているんだけど，こっち（$5x-2$）はどうなんですか．困っていることはどこ．どこにつっかかっている.
86S：その全部の枚数という表現が違うのかなと.
87I：F君のつくった式を見てみよう．これどうですか．この共通な y というのは同じものですか，違うものですか.
88S：同じ.
89I：同じものを y とおいたんですか.
90S：はい.
91I：じゃあ，こっちは何を表しているかはどうなんですか.
92S：ああ，違うな.
93I：どういうふうに考えているの.
94S：え〜と，普通に生徒 x 人に紙を５枚ずつ配ったときにたりなかった枚数をプラスすれば全部の枚数が出てくるんじゃあないかなと今思いました.
95I：じゃあ，この（$5x-2$ の）単位はどう．さっきと同じようなんだけど．これ見たらどれがふさわしいかな.
96S：え〜･･･.
97I：これ（$3x+20$）と同じになる，違うようになる.
98S：違うんじゃあないかなって･･･．ん〜.
99I：でもF君，同じものを y としたんだよね.
100S：はい.
101I：ということは，これ（$3x+20$）とこれ（$5x-2$）は.
102S：同じ.
103I：うん，同じでなければならないよね.
104S：はい.
105I：だけど，解釈が違うんだ，F君の解釈だと．納得できていない.
106S：う〜ん，なんか.
107I：そこはどうなのかな.
108S：これだと，さっきのこれと同じになっちゃうから，ちょっと違うと思うけど，これが５ x 枚から２人ひいたら全然違う数になっちゃうから違うし，で，だからそうなると，((（$5x-2$）枚を指して）これになると思う.
109I：そうするとこっち（$3x+20$）を見返すと.
110S：こっちもこれ((（$3x+20$）枚を指して）になると思います.
111I：ああ，上ね.
112S：はい.
113I：ありがとうございました.

13M.Y

1I：はい，ではお願いします．まず最初には，前回やっていただいた折り紙の問題なんです．この問題をちょっと読んでもらって，この問題を，方程式をつくって解いてくださいとありますので方程式をつくって解いてください．お願いします．

2S：はい．（問題を解き始める）3 分 50 秒後

3I：はい，ありがとう．では，最初に考えたことから順に，どんなことを考えてそこに至りましたか．

4S：これが最初普通にやってみて，思いついたことです，普通に．

5I：それ，どんなふうに思いついてこうなったの．

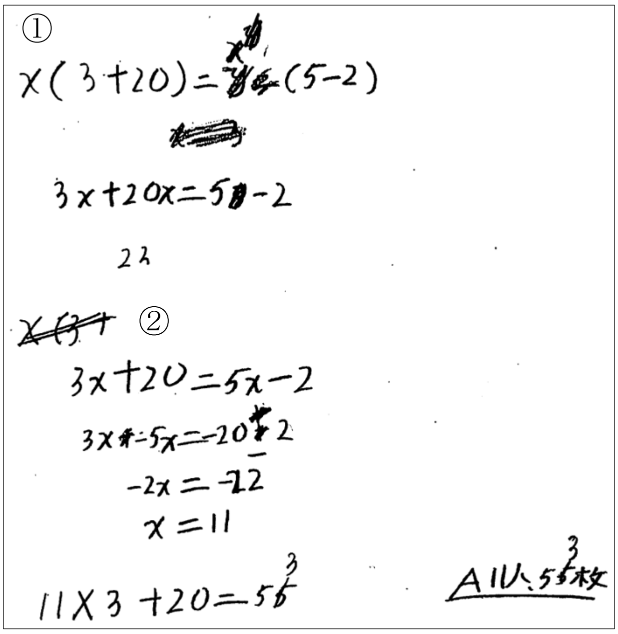
6S：あの一確か，なんだっけ，方程式のやつとかは，括弧とか x×とか使ったのが多かったので，そういうのを利用してやりました．

7I：ごめん．この問題文からどうしてこの式（①）になったの，最初は．

8S：ああ，この３と 20 を両方もう x として見ると，としちゃって．

9I：なるほど，x はそのとき，何を x にしているの．

10S：x はそのときは，ああ，そのとき 20 のほうでしたね，たぶん．



※①，②は筆者が付記

11I：ん．

12S：そのときは，枚数のほう．

13I：x をここに書いているよね．x はどういう x として書いたのかな．

14S：いや，まあ，普通というか．どういう x かというと･･･．

15I：どんなふうにして x を書いたのか．

16S：まあ，両方を x と･･･．

17I：どこにも x と書いていないから，自分で x って書いた，おいたんだよね．

18S：はい．

19I：何を x とおいてやったの．

20S：この２つを x とみて，と考えて，でもこれは，もう普通に x とかはいらなくて，普通にそのようにやりました．

21I：この文章を読んで，まず１人に３枚ずつ配ると 20 枚余りますだよね．これがここになっているのですか．どんなふうに式をつくったの．括弧はどうしてそこに入ったの．ちょっと振り返ってみて，そこが知りたいんだけどね．

22S：･･･ん．そうですねー．

23I：何か意図があって Y 君はつくったんだよね，式を．

24S：はい．これ（①），ぱっと見ですね，これ，だいたいで，それが自分で違うなと思って，こっちにつくり直したという感じですね．

25I：なるほど，こっち（②）は，今度どういうふうに考えたの．

26S：こっち（②）は．あの一，枚数というか１人あたりに配る人数をふつうに x とか ax とみて，求めました．

27I：そうすると，こっちは，１人あたりの･･･，x，人数．

28S：はい．これが人数になって･･･．

29I：こっち（①）は．

30S：これはーいやー何も考えつかなかったですね，自分でやっていても．

31I：じゃあ，どういう意図でそこを x としたの．

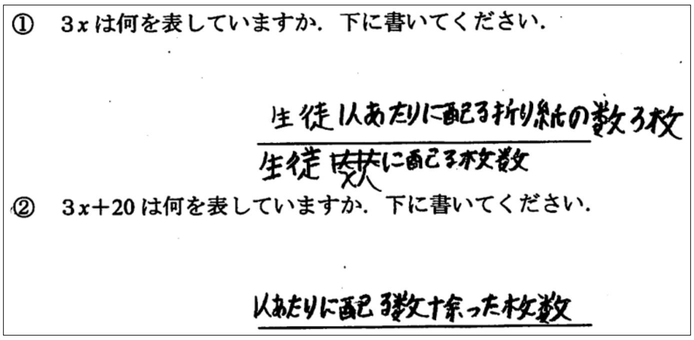
32S：こっち（①）ですか.
33I：うん，上の方（①）
34S：上の方はどういう意図で･･･．えっと，まあ，最初の 1 人あたりに配る 3 枚と，20 枚余る，それを 2 つ x にして，もう片方のと計算するという感じですね.
35I：なるほど，じゃあこっち（②）ね，今度．正しくつくった式は.
36S：これは，普通にこの 3 枚ずつ配るとなので，1 人あたりに配る枚数に x を付けて.
37I：そのときの x は何なの.
38S：そのときの x は，え〜と，生徒のその数ですね.
39I：ああ，はい．そして.
40S：で，これ（＋20）が余るやつで，これはまた，$3x$ と同じで $5x$．今回 2 枚たりないので，－2 して，次は･･･．
41I：それをイコールで結んでいますよね，これは.
42S：ああ，イコールで結んでいるのは，$3x+20$ と $5x-2$，その答えは両方とも同じなので，それで，イコールでつなぎました.
43I：なるほど．その答えが同じという答えって何.
44S：答えというと，この $x=11$ ということなので，まあ，11 のこと.
45I：11 のこと.
46S：はい.
47I：それが等しい．x に入るのが 11 だよね.
48S：その x に入る数が一緒なので，うん，まあ，どっちも枚数が同じだと思うので，どちらもそのある枚数が一緒なので，それを＝でつなげれば，一緒になる.
49I：それで.
50S：それで，x 同士と普通に x のついていない数同士で計算をして，約分をしてこの答えになりました.
51I：そうすると，11 を出したときに，その次に何をしたのですか.
52S：これは，枚数を求めるので，$3x+20$ か，$5x-2$ なのですけど，自分はたし算でやる方がわかりやすいので，1 人あたりに配る枚数とかけて，その後に最初の式だったら，プラスその余る数をたして，$5x-2$ だったら 2 枚たりないので，その 2 をひいて，この枚数を求める．あっ，これで枚数を求めました.
53I：そうすると今，ここいくつ．（3×11 を指して）
54S：33 です.
55I：それに 20 をたすと
56S：55 です.
57I：ん，もう 1 回.
58S：33＋20 は 55 です．あっ，53 です.
59I：じゃあここ訂正しておいて.
60S：（55 を 53 と訂正する）
61I：はい，そうするとここ（①）で使った x とここ（②）で使った x は同じだったのですか，違うのですか.
62S：それをいうと違います.
63I：違う．うん，明らかに前半は･･･．違いはどんなふうに，振り返って言えるのですか.
64S：振り返ってみて･･･，え〜と，上（①）は，普通に x を 2 つ付ければ，付けてそれで式をつくろう，式を解こうと思っていて，それで下（②）は，問題をよく読んでみたら，はい，ああ，こういう式になるなと思っての式です.
65I：普通に考えたというときの式は．x の意味は考えているのですか.
66S：x の意味は，枚数か 1 人あたりの枚数かだったんですけれど，はい，普通に最初の式 2 つに付けて x を 2 つに付けて，ほとんど意味がないと思います.
67I：ああ，そんな感じだったんだ．わかりました．じゃあ次ね．今，式をつくって解いてもらいました．それで，同じ問題ね．生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x として方程式をつくりなさいという問題で，Y 君の同じように $3x+20$ と $5x-2$ という 2 つの式をつくったの

です．この２つの式について聞きますよと．３x＋20 について，まず，３x は何を表していますか，３x＋20 はこの問題の何を表していますか．その説明を書いてくださいということなんですけれど，ちょっと書いてもらっていいですか．

68S：はい．（説明を書く）1 分 10 秒経過

69I：この生徒１人あたりに配る折り紙の数３枚っていうのはどういうこと．絵にかけますか．

70S：絵にかく･･･．人が，これが人数だとすると，まあ３人くらいいるとして，１人あたりに３枚，それで，３枚，３枚配る･･･．



71I：それのどれを表しているの．

72S：その中の．

73I：うん，３x というのは．

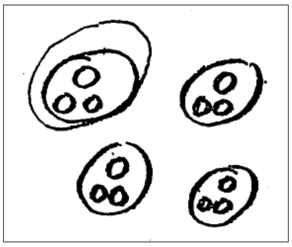
74S：１人あたりに，あっ，ちょっと待って，あっ，そうか．

75I：今は，どういうふうに考えたの．

76S：今は，普通にこれとそのままで．１人．

77I：そうすると，このうちの１人．

78S：はい，あのー，あっ，そうか，そういうことか．



79I：最初は，どういうふうに考えたの．

80S：最初は，もうこれ，（右の絵の左上の１つを囲んで）

81I：それが３x．

82S：はい．

83I：なるほど．うん，それが今，あっ，って言って気が付いたのは．

84S：x がその生徒の人数全部なので，それ，生徒すべてに配る枚数が３枚．

85I：それどうやって気付いたのですか．

86S：それは，えっとまあ，３x の x をさっきの問題と見比べてみて，x が何を表しているのかを見てみて，そうしたら，もう生徒の人数だったので，それで，３x の x は生徒の人数なので，その生徒に配る数３枚となりました．

87I：そうすると，これ今，生徒１人あたりに配る折り紙の枚数３枚という言い方じゃあないよね．書き直せますか，下に．

88S：はい．（「生徒１人１人に配る枚数」と書き直す）

89I：１人１人に配る枚数というと１人１人に配る枚数だから３枚って同じようなことを言っているんだけど，それでいい．

90S：いや，違うな．生徒･･･．あっ．「１人１人を消して x 人と書く」こう．

91I：ああ，なるほど．そうすると，x 人の x ってどういう意味でイメージしているのですか．

92S：x 人というのは，その生徒の人数の数ですね．

93I：そうすると，もう１回絵をかくとどうなる．これはこれで取っておいてもらって，下に．

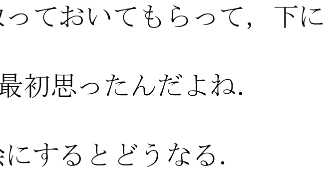
94S：難しいなあ．

95I：Y 君は，ここ（左上の１つの絵だけを指して）が３x だと，最初思ったんだよね．

96S：はい．

97I：それで，次は，さっきあっ，っていって気が付いたことを絵にするとどうなる．

98S：図でいいですか．



99I：図でもいいよ，もちろん．

100S：え〜と．（線分図をかく）

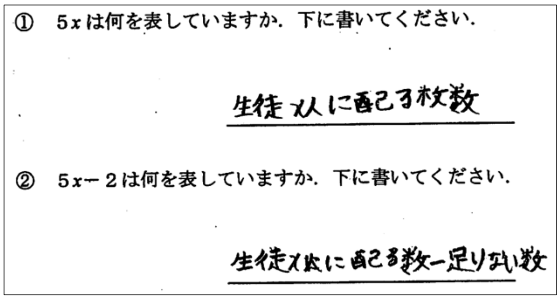
101I：なるほど，３×x の x ってどこに出てくる．３ってどこに出てくる．

102S：３は･･･．

103I：この長さが今３x なんだよね．

104S：はい．これ（線分図の端から端まで）が３×x ですね．この割合が･･･．

105I : x はどこに出てくるのですか.
106S : x は･･･，ちょっとわかりませんね.
107I : この絵（上の絵を指して）でいくと $3x$ は今の Y 君の解釈ではどこですか.
108S : ここでいうと，例えば，10 だったら，そのうちの 1 つ．そうですね．ここということですね．(左上の 1 つを指して)
109I : それが $3x$.
110S : はい.
111I : なるほど，これ（絵の方）はね．これ（線分図）は．例えば，10 って言ったよね．そうすると，どうなっているの.
112S : 違う，これだ．ここ（左端）からここ（途中の線を入れたところ）までが $3x$ で，これが配る枚数．これ（残りの部分）が余った数です．はい.
113I : よし，じゃあ，$5x-2$ の方はどうですか．$5x$ は何を表していますか.
114S : これ･･･．これも同じなんだな.（書き始める）
115I : うん．これ今，Y 君はイコールで結んでいますよね．そうするとこれとこれは.（Y くんが書いた $3x+20$ と $5x-2$ の表している事柄を指して）

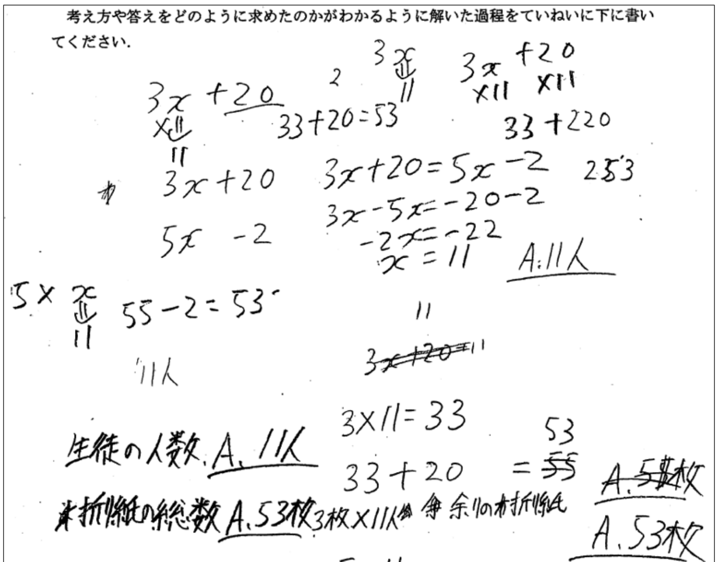

① 5x は何を表していますか．下に書いてください．
生徒x人に配る枚数
② 5x－2 は何を表していますか．下に書いてください．
生徒x人に配る数ー足りない数

116S : これとこれは，同じ答えになる.
117I : 同じ答えになると言ってくれましたよね．同じ答えになるんだよね.
118S : はい.
119I : それで，今の書いてくれたのは.（$3x+20$ を「1 人あたりに配る数＋余った数」，$5x-2$ を「生徒 x 人に配る数－足りない数」と書いていることを指して）
120S : これは，ここの配る枚数はこっち（$3x+20$）は少ないんで余るけど，逆にこっち（$5x-2$）は増えたので，増えすぎて逆にたりなくなっちゃった.
121I : そうすると，これとこれ（$3x+20$ と $5x-2$ の表している事柄を指して）は.
122S : これとこれは，求め方的にはちがくなりますね.
123I : 求め方は違う．で．でも Y 君はイコールで結んでいるんだよね.
124S : ･･･.
125I : 求め方が違うから，これとこれ（$3x+20$ と $5x-2$ の表している事柄を指して）は違うでいいですか.
125S : いやー．ああ，結局どちらも折り紙の枚数は一緒だからイコールで結ぶ.
126I : それに気が付く前は，求め方が違うと思っていた.
127S : まあ，はい.
128I : 違うものと思っていた.
129S : 数だけ一緒みたいな感じですね.
130I : その数というのは.
131S : 数というのは，この問題だったら，折り紙の全部の総枚数ですね.
132I : その数はイコールだと見た.
133S : はい.
134I : これとこれは求め方が違うから違うって見ていた.
135S : はい.
136I : じゃあ，単位ね，単位をききたいと思うのですけれど．$3x+20$ は，この場面ではどの単位がふさわしいですか．$3x+20$ で人を表しています．$3x+20$ で枚を表しています．$3x$ が人で＋20 が枚です．$3x$ が枚で＋20 が人です．Y 君はどれだと思いますか.（選択肢を提示）
137S : これだと思います.（($3x+20$) 枚を指して）
138I : その理由を聞かせてください.
139S : この理由は，x は確かに人数ですけれど，3 とか 20 は配る枚数なので，いくら全員の人数かける 3 でも枚数になっちゃうので，その 20 をたして枚数.

140I：なるほど，こっち（5x－2）もどうですか．（選択肢を提示）
141S：これもこれですかね．（(5x－2）枚を指して）
142I：その理由は．
143S：その理由は，同じで，これも結局xで，xは人数でそれかける5をして，さらにそれからたりなかった枚数をひくので，これも枚だと思う．
144I：なるほど，Y君は今ので，xのことよくわかったんだけど，最初にこういうふうに式をつくったよね．
145S：はい．
146I：このときとだいぶxに対する意識が違っていると思うんだけど，このときを振り返って，もう1回振り返ってもらうんだけど，最後に，最初はどんなふうにxを見ていて，どんなふうに式をつくったのか，言葉で説明できますか．
147S：最初はやっぱり，方程式とかの求め方というのをそんなにわかっていなくて，それで，だいたい記号は，記号というかxとかを求めるというのはわかっていて，それでそのxを求めようとして，どこにつけるか，xを，で，悩んでそれで括弧，これとこれが違うので，ここにxをつけて，ここにxをつけたら求められそうだなと思ってやりました．
148I：ここにxをつけてというときの意味は，どんなふうに思っていたの．
149S：xの意味．まあこのxが生徒に配る総枚数なんだなとか，思っていました．
150I：それに括弧をして，かけるというここについての意味を考えていましたか．
151S：いやー，そこまで，そんなに考えていなかったですね．
152I：なるほど，わかりました．じゃあ，終わりにしたいと思います．
153S：ありがとうございました．

40R.N

1I：まず最初に，これ前にやってもらったと思うんですけれど，折り紙の問題です．読んでもらって，この問題を方程式をつくって解いてくださいということで，ここに考え方を書いて，問題を解いてもらいたいと思います．じゃあ，しばらく時間をとりますので，やってみてください．
2S：(問題を解き始める）6分20秒経過
3I：はい，ありがとう．では，どのように考えたのか，自分でやったことを説明できますか．
4S：はい．えっと，まず，何人かわからないので，1人に配る3枚とそのわからない人数をxとして，3xで，20枚余るから＋20で，イコール．またこっちも5枚ずつ配るけど何人かわからないから5xで，－2はその2枚たりないので，－2で，それをイコールとして，それで，x＝11となって，ここで11人ということがわかるので，生徒の人数が11人ということがわかって，折り紙の総数はまず，こっちのやつは，こっちの式で3x＋20だったので，xが11ということなので，かけるをして33，33プラス，ここの余った数の20枚で53枚を出して，こっちの5枚ずつの方は，まず，さっきと同じようにこっちのxがわかったので，11，で，55．だけど2枚たりないので，ひいて，2をひいて53枚ということがわかります．



5I：はい，そうすると，今この2

つの式を縦にかいて，そしてイコールで結んだんですよね．これとこれ（$3x+20$ と $5x-2$）はイコールということは．

$3x$ +20
×11 ×11
33 +220

6S：え〜と，等しい．
7I：これ，何が等しい．
8S：えっと，生徒の人数と折り紙の総数．
9I：ああ，が等しいんだ．11 人を出したときに，ちょっと止まったよね．何を考えたのですか．
10S：えっと，総枚数のところで，両方に最初 11 をかけてしまったんですけど，それだと，こっちの式と合わないので．
11I：ん，どういうこと．
12S：だから，例えばこっちの $3x+20$ に両方に×11 をしてしまって，こっちは 33 で，こっちは 220 か，え〜と，253 というおかしいけたになっちゃうので，なので，式通りにいけば，x はわからないものなので，そこに 11 を当てはめてそこで 33，そしてこっちだけの，$3x+20$ の方だけではまだ確信，その 53 枚というのが確信できないので，確かめとしてこっちの５枚ずつ配ると２枚たりない方も同じ式に当てはめて．
13I：それで，両方やってみたんだ．
14S：はい．
15I：はい，じゃあ，これも前にやってもらったんだけど，次の問題ね．同じ問題場面です．今と読んでもらった問題と一緒です．ただ，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として方程式をつくりなさいという問題です．で，考え方は，この方程式を作るために x を使って $3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくりました．というふうに今 N 君がやってくれたように，同じように２つの式をつくっているという状況です．この問題で，$3x+20$ と $5x-2$ について聞きます．$3x+20$ について，$3x$ は何を表していますか．また，$3x+20$ は何を表していますか．これのちょっと説明を書いてもらってよろしいですか．お願いします．
16S：はい．（書き始める）
17I：はい，じゃあ $3x$ から説明を言って下さい．
18S：まず，$3x$ の３は，１人の生徒に配る枚数は３枚で，x は生徒の人数を表しているけれど，人数がわからないので，x．そして，そこでその３枚配る，x 人に３枚配る枚数を表すには，３かける，その人数はわからないんですけれど，それを x として $3x$ になります．
19I：はい，そして $3x+$ 20 は．
20S：$3x$ は生徒に３枚ずつ x 人に配る枚数を表していて，そして，＋20 は残った折り紙の枚数で，それをたすと，その２つの枚数をたすと折り紙の総数になる．

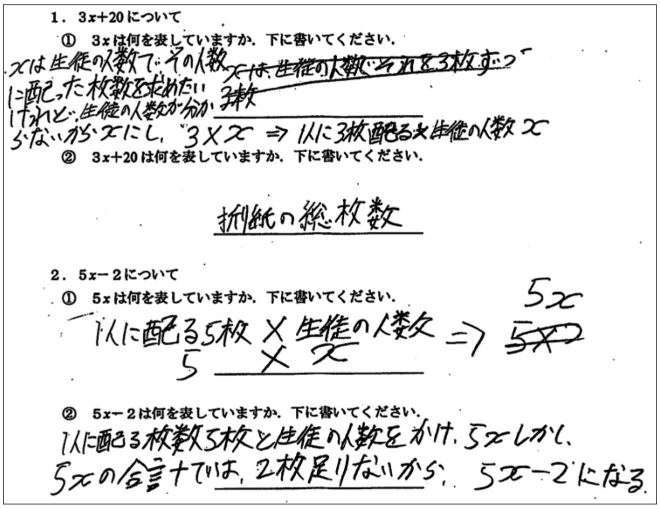
① $3x$ は何を表していますか．下に書いてください．
まず，3は，1人の生徒に配る枚数で，xは，
生徒の人数を現しているが人数が分からないのでx．

② $3x+20$ は何を表していますか．下に書いてください．
$3x$は，~~限られ~~た生徒に3枚ずつx人に配る．
+20は，残った~~折り紙の総~~数でそれをたすと，持っている折り紙の
総数になる．

21I：なるほど，$5x-2$ のこっちはどうですか．
22S：こっちも１人に５枚ずつ配る，ああ，$5x$ はまず１人に５枚ずつ配るけど，また人数がわからないので，その人数がわからないので，そこを x にして，$5x$ になって，そして，そこで折り紙が何枚必要なのかということを知るためには $5\times x$ をしないとわからないので，$5x$ という形になって，$5x-2$ は，$5x$ はまず，５枚を x 人の人に配る枚数で，だけど，マイナス２ということは配るのに２枚たりないので，だから，それを $5x$ からひいてその答えが出せるという感じです．
23I：なるほど，そうすると，さっき聞いたんだけど，もう１回聞くけど，$3x+20$ と $5x-2$ を今解釈してくれたんだけど，これをイコールで結んだんだよね．これは，２つが．
24S：２つの答えが等しい．
25I：それは何が等しいですか．
26S：えっと，折り紙の総枚数．
27I：うん．さっき，人数と枚数が等しいとかって言っていたんだけど，さっきと違う？
28S：･･･．人数も等しいし，枚数は，枚数も一緒．

29I：そうすると，３x＋20 で何を表しているんですか.
30S：３x＋20 で，まあ，･･･.
31I：今，ここにたくさん書いてくれたけど，端的に表すと，３x＋20 が表されていますか.
32S：えっと，･･･．折り紙の･･･，ああ･･･．折り紙の総数.
33I：で，５x－２は.
34S：これが折り紙の総数で，この２つがあることによって生徒の人数が導き出せる.
35I：なるほど，じゃあ次ね．３x＋20 について意味を聞いたんだけど．今度は，この３x＋20 のこの場面においてどれがふさわしい単位なのか. この式はどれがふさわしい単位なのか, いい. ３x＋20 で人，３x＋20 で枚，３x が人で 20 が枚でプラスしている，３x が枚で 20 が人でプラスしている．これどれですか.
36S：･･･.
37I：○をして.
38S：（３x 人＋20 枚を選ぶ）
39I：その選んだ理由を教えて下さい.
40S：まず，＋20，20 枚は余った枚数で，こっちの３x は，１人･･･，こっちかな．((３x＋20）枚を選び直す）
41I：どうして変わったのかな.
42S：こっちは，３x で人だと，そのー，こっちの方は３x･･･，場面においてだから，３は３枚配る，その x はその人の人数で，その余った枚数が 20 枚で，この式に当てはめると，折り紙の枚数を求めることになるんですよ，ここだけを考えると.
43I：今言っているのは下の方？
44S：こっちの３x 人＋20 枚.
45I：はい.
46S：そう考えると，こっちは.
47I：こっちは上の方（(３x＋20）枚）ってこと.
48S：上の方は，３x の枚数と 20 枚で総枚数，総数を表している．それで，こっち（３x 人＋20 枚）だと，こっちの３x 人を表しているけど，３×人数，３枚は全員に配る数で，x は人数なので，配る枚数がわかるので，人ではなくて，こっち（(３x＋20）枚）は配る枚数と＋20 でその総数がわかるから.
49I：なるほど，では，５x－２のこっちはどうですか.
50S：これも一緒で，こっち（(５x－２）枚）はこの一番上の方は，この式自体で求められるのは，総数なので，まず人を求めるのは，当てはめていくと，１人に５枚ずつ配ってその人数をかける，でもたりない枚数が２枚なので，人数というよりその総数を，総数がその式で出てしまうので, なので, こっちの５x－２で総数が出せるので, これ ((５x－２）枚）を選びました.
51I：で，改めて聞くけど，イコールのときは，こちら側（３x＋20）とこちら（５x－２）側は何が等しくてイコールなのですか.
52S：え～と，それは･･･，こっちによって総数.
53I：何の．何の総数かな.
54S：折り紙の総数です．が等しくて，その総数が等しいことによってこの２つで生徒の数が出せる感じです.
55I：じゃあ，これ（３x＋20）もこれ（５x－２）も何を表しているかと聞かれたら.
56S：総数.
57I：何の総数.
58S：あっ，折り紙の総数.
59I：なるほど，それは最初から見えていましたか，この式をつくるときに.
60S：･･･．まあ，最初にこっちの折り紙の総枚数を求めるのは，ちょっと無理なので，こっちの生徒の人数を求めるときにこの式が必要になって，この式が成立するのがわかっていたので，うん.
61I：最初からわかっていた.
62S：はい.
63I：イコールで結ぶときから，あっ，折り紙の総数で等しいというふうに思ってやっていた.
64S：はい.
65I：なるほど．前に，N 君に書いてもらったときに，こういうふうに３x＋20 は折り紙の総数と言っているけど，３×x は１人に配る枚数と x というふうに，こう分割して説明してくれたん

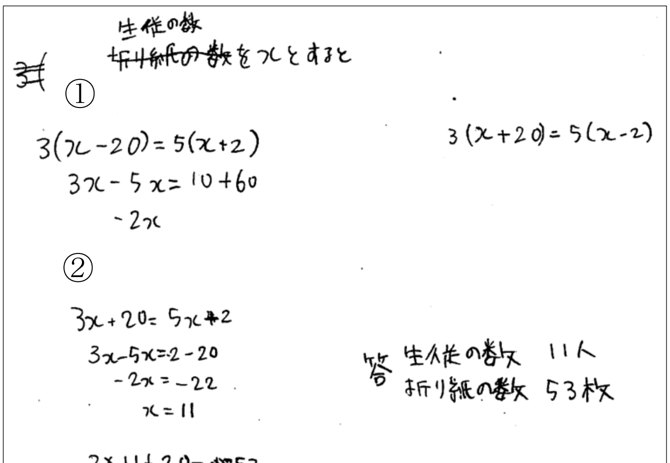
だよね．これは，このとき覚えている．これ前のN君の答案なんだけど．（質問紙調査の時の記述を見せて）
66S：はい．
67I：このとき，どんなことを考えていたのかな．
68S：その，５xのこっちは･･･．
69I：３xも５xも両方ね．
70S：･･･，公式というか，まあ，その公式に合わせて書いたという感じです．
71I：５xは，このとき何を表していると見たんですかね．
72S：それはもう，１人に配って，あっ，生徒に配る枚数が５枚で生徒の人数をかけるから，生徒の人数に，総枚数ではなくて，生徒に配る枚数．
73I：わかりました．ありがとうございました．



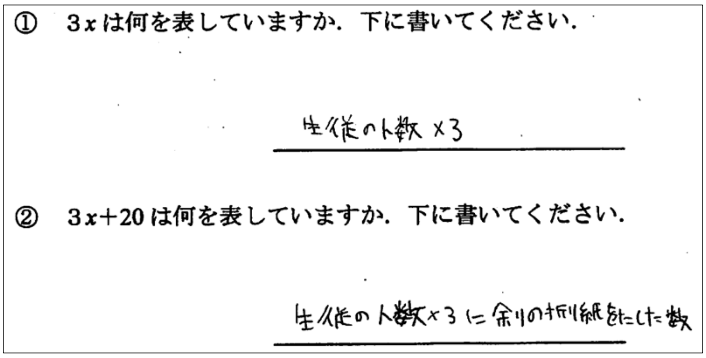
R.Nの質問紙調査時の記述

49Y.T

1I：じゃあ，まず最初は，これ前にやっていただいたのですけれど，この１次方程式の折り紙を何人かの生徒に配るという問題で，この問題を方程式をつくって解いてくださいという問題です．ちょっと読んでもらって，時間を上げますので，しばらくやってみてください．
2S：（問題を解き始める）どうやったっけ･･･．（①をやるが，行きづまってしまい，質問紙調査時のT自身の解答を見せて②を促した．）　8分30秒経過
3I：これどうやって式を立てたのか説明できますか．
4S：えっと，生徒の数に３をかけて，生徒×３だと20枚余るから，こうやって，１人に５枚ずつだと２枚たりないから，その２つの折り紙の数は同じだから，ここがイコール･･･．
5I：それで解いた．
6S：はい．
7I：じゃあ，もう１個，こんな問題です．え〜と，同じ問題です．違うのは生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x として方程式をつくりなさいという問題です．で，今，ここにもやってくれたように方程式を作るために,xを使って３x＋20と５x－２という２つの式をつくりました．この中でつくった３x＋20と５x－２について聞きます．１個目



は，$3x+20$ の $3x$ は何を表していますか．２つ目が $3x+20$ は何を表していますか．ちょっとこれを書いてもらっていいですか．
8S :（書き始める）1分50秒後
9I : まず，１つ目を説明してください．$3x$ は何を表していますか．
10S : え～，生徒の人数×３
11I : これは結局何ですか，$3x$ は．
12S : １人に３枚ずつ配った･･･．
13I : 配った何．
14S : 折り紙の数．
15I : おお．で，今度 $3x+20$ は．
16S : 折り紙の数に余りをたした数．
17I : うん，なるほど．そしたら，今の式の単位を聞きたいと思います．これ，$3x+20$ を今答えてくれたけど，このふさわしい単位はどれですか，いい．１個目は，（$3x+20$）が人，２つ目が（$3x+20$）が枚，$3x$ が人で＋20 が枚，$3x$ が枚で＋20 が人，これどれになりますか．○をしてくれるといいんだけど．


① 3x は何を表していますか．下に書いてください．

生徒の人数×3

② 3x+20 は何を表していますか．下に書いてください．

生徒の人数×3に余りの折り紙をたした数

18S :（（$3x+20$）枚に○）
19I : なぜ，そうなりましたか．
20S : １人に３枚ずつ配った枚数プラス余りの 20 枚の折り紙の数で枚だと思います．
21I : そうか，$3x$ は枚数って言ったっけ，枚数でいい．
22S : ･･･．（首を傾げる）
23I : 人数じゃあなくて枚なんだね．これはいいね．
24S :（うなずく）
25I : どうして枚と言えますか．リラックスしていいですよ．間違っても別にかまいませんので．自分の考えたこと，思ったことを言ってくれれば，それが参考になるので，どうでしょうか．今の T さんの話だと $3x$ は枚．枚数ね，これはいいですか．
26S :（うなずく）
27I : なぜそう思いますか．
28S : １人に３枚ずつ配るから，x は生徒の数を表しているから，その数かける３で枚．
29I : 生徒の数かける枚で何が出ているのですか，$3x$ は．
30S : ･･･．
31I : 質問わかった．$3x$ というのは何を表しているか．
32S : 生徒の人数に３枚かけた数．
33I : それ，絵にかけますか．生徒の人数に３枚かけたというのはどういうふうに T さんがイメージをもっているのかを聞きたいのですけれど．絵にかけます．どういう絵をかく．

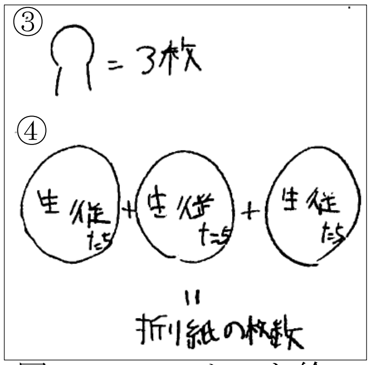


図１　Y.T のかいた絵１

34S :（絵をかき始める）
35I : 簡略的な絵でいいからね．
36S :（右の絵をかく）2分40秒経過
37I : これは何，これ（図１③を指して）は．
38S : ３枚です．
39I : ３枚，生徒が何人か，これ（図１④を指して）が生徒なんだよ．全部が枚数なんだよね．どんなふうに生徒に配られているの．

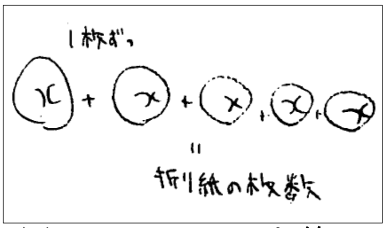


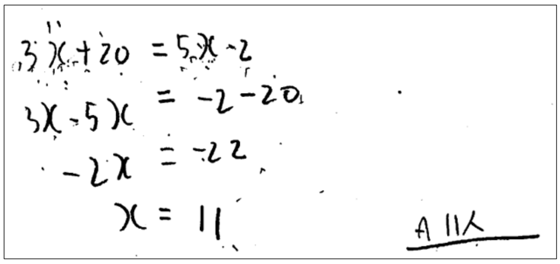
図２　Y.T のかいた絵２

40S : １枚ずつ．
41I : ん．１枚ずつ．
42S : んー．
43I : これ（図１④）が生徒なんだよね，で，３枚はこれ（図１③）が３枚．$3x$ というのは．これが $3x$（図１④全体）．

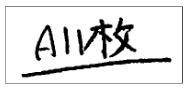
44S：（うなずく）
45I：なるほど．今，生徒３人だけど，３人ですか．
46S：いや，（図１④に「たち」を書き加える）
47I：１枚ずつもっている．それで３x．
48S：（うなずく）
49I：じゃあ，５x－２のほうは．どう，最後ね，これ．５x－２はどう．絵にかけます．
50S：（図２をかく）
51I：こっち（図１）は３人で３x，こっち（図２）は５人で５x．なるほどね．ありがとうございました．

33M.K

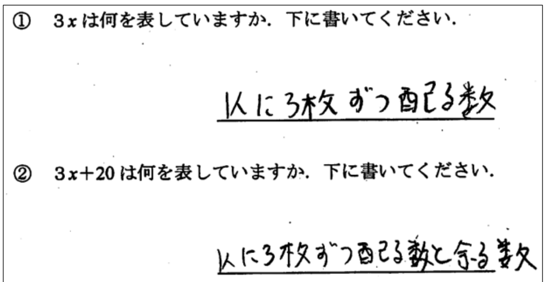
1I：じゃあ始めたいと思います．まず最初，これ前に解いてもらった問題なのですけれど，折り紙の問題．読んでもらって，そして，どのように考えたのかも含めて方程式をつくって解いてください．いいですか，じゃあちょっと読んでもらって，やってください．
2S：（解き始める．x＝11 と解を導き，11 人と書くが，ここで手が止まる）2 分 50 秒経過
3I：じゃあそこまでどんなふうに考えたのかを説明してもらっていいですか．
4S：え〜と，何枚ずつ配るというのを x にして，これは３x で，20 枚余るだから＋20 にして，でイコール，これも５枚ずつを x にして，２枚たりないから－２して，それで，この x をこっちにあのやり方でもっていって，こっちのやつもこっちへもっていって，計算してこうなって，これを計算するとこうなる．



5I：はい，で，もう１回言ってくれる．どういうふうにしてこの式をつくったのか，ごめん．
6S：だから，この x.
7I：何を x としたの．
8S：何枚ずつかを x にして．
9I：何枚ずつかを x．その意味は．
10S：あっ，配る枚数を．
11I：ああ，配る枚数を x としたの．
12S：うん，x とした．
13I：はい，それで．
14S：20 枚余るから，＋20 にして，イコール，５枚ずつを x にして，２枚たりないから，－２にして，その後計算していくと 11 になる．
15I：うん，それはいいよね．そうすると，x は，11 は何．
16S：人数．
17I：あれ，さっき，何て言っていたんですか．
18S：あれ，さっき，何て言ってたっけ･･･．
19I：もう１回言って，この式のつくり方は．
20S：ああ，11 枚ずつ配るということかな．ん．
21I：この式のつくり方は，もう１回，何だっけ．
22S：３枚ずつ配る，あ，３枚ずつ配るのを x にして．
23I：ということは x は何．
24S：配る量．
25I：配る量ね．
26S：うん．だから 11 か，そっか．
27I：それで，11 を出したんでしょう．だけど，人になっているよ．そこはどういうふうに考えたのか教えてもらえればいいんだよ．
28S：これはただ単に間違えた．
29I：本当は，これはこのままでいいよ．
30S：だから 11 枚ってこと．（11 人の下に右のように書く）
31I：この 11 枚って何．



32S：１人あたりに配る折り紙の，折り紙だっけ，あ，折り紙の量.
33I：求めるのは.
34S：人数と折り紙の総数.
35I：じゃあちょっと整理しようか．ここ（x=11 を出したところを指して）で困ったのは何．11 人ってやって，今，困っていたよね.
36S：うん.
37I：ここは何を困っていたの.
38S：このときは，枚数をどうやったっけみたいな.
39I：で，もう１回考えたら.
40S：11 は枚だから，人数をどうすればよいか.
41I：それはどうですか.
42S：・・・・・・.
43I：じゃあちょっとおいておこうか，今のこの計算でね，$3x+20$ と $5x-2$ をつくってくれましたよね．これをイコールで結んだ．これはなぜイコールで結べたの.
44S：え～と，この３枚ずつ配って 20 枚余るというのと，５枚ずつ配って２枚たりないというのは同じ，んー，同じ.
45I：同じ何．何を表しているの.
46S：同じ枚数，うん.
47I：なるほど，それを表しているからイコール．ここの問題は，K 君と同じように，$3x+20$ と $5x-2$ をつくった状況で，今，先生聞きたいのは，つくった２つの式ね，$3x+20$ と $5x-2$ ね．このまず $3x+20$ について，$3x$ というのは何を表しているか，これを知りたいのです．次は，$3x+20$ は何を表しているか，これを K 君がどのように見ているのかを知りたいんだけど，書けますか.
48S：はい．この $3x$ は配る数・・・.
49I：できるだけ詳しく，考えていることを書いてくれるとありがたいのですけれどね.
50S：（書き始める）
51I：それで，さっき，この 11 枚は何を表しているんだっけ．求めているんだよね.
52S：うん．11 枚は 1 人に配る折り紙の枚数.
53I：枚数だよね．ちょっとそれをここに書いてくれる.
54S：（図２を書く）


① $3x$は何を表していますか．下に書いてください．

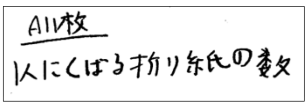
1人に3枚ずつ配る数

② $3x+20$は何を表していますか．下に書いてください．

1人に3枚ずつ配る数と余る数

図１　インタビューの記述１

55I：で，$3x$ は，１人に３枚ずつ配る数って（図１を指して），これ（図１）とこれ（図２）はどんな違いがあるのですか.
56S：ん・・・．だから，これ（図１）は，３枚配って 20 枚余るというので，この場合（図２）は余りがなしで，１人に配る数というか，うん.


A11枚

1人にくばる折り紙の数

図２　インタビューの記述２

57I：じゃあ，$3x$ は，1 人に３枚ずつ配る数なんだよね．こっちは．１人に配る数だから，１人に 11 枚配るという意味だよね．３枚ずつと 11 枚ずつってどういうふうに違うの．私の疑問に思っていることはわかった.
58S：うん．これとこれ.
59I：そうだよね.
60S：・・・．ん，・・・.
61I：イメージはどうなのかな，絵にかけます.
62S：えー.
63I：$3x$ ってどういうイメージをもっているの.
64S：$3x$ は，だからまあ，１人に３枚ずつ配る.
65I：１人にっていうのは生徒だよね.
66S：うん.
67I：絵にかけますか．ここに $3x$ のイメージ.
68S：ああかけばいいのか，１人に折り紙だから・・・．折り紙３枚渡したとして，で，これを何人かに配る.

69I：そうすると，これはまず３xではないんだね.
70S：う～ん.
71I：これが何人かいるってこと.
72S：いや，これ１人.・・・，いや何人も.
73I：うん，何人もいるんだね．じゃあこっちは，この 11 枚って出した答えは，何を表しているのかな.
74S：これは，１人に折り紙を 11 枚配る数.
75I：これ（図３を指して），１人３枚持っているんだよね.
76S：うん.
77I：こっちは.
78S：11 枚．・・・，うん.
79I：じゃあこの３x＋20 は.

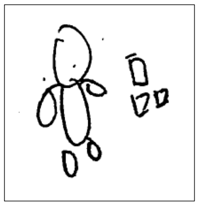
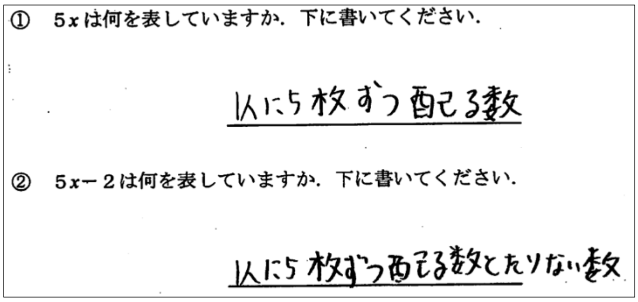


図３　インタビュー時にかいた絵

80S：は，だから，１人に３枚ずつ配る数と 20 は余る数.
81I：それは，これ（３x＋20）全体で表しているのではなくて，これ（３x）とこれ（＋20）という感じ.
82S：うん.
83I：別々に，これ（３x）とこれ（＋20）.
84S：うん.
85I：じゃあ，こっちはどうですか．５x－２についても書いてもらっていいですか.
86S：５xだからえ～と（書き始める）
87I：なるほど，さっき，ここでもう１回，なぜイコールで結べるかって聞いたけど，この場合，3x＋20 は「１人に３枚ずつ配る数と余る数」で，こっち５x－２は,「１人に５枚ずつ配る数とたりない数」だよね．これが等しいと言ったよね.
88S：うん.
89I：どうして等しいと言えるのかな．どういうイメージなのかな.


① 5xは何を表していますか．下に書いてください．

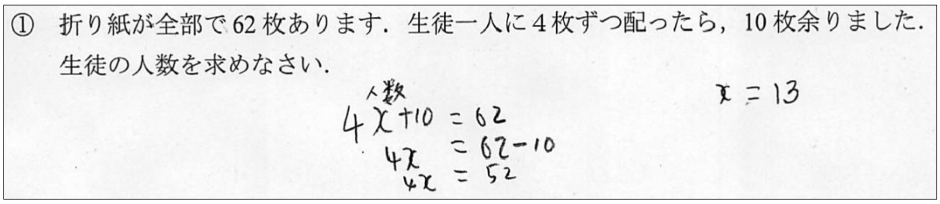
1人に5枚ずつ配る数

② 5x－2は何を表していますか．下に書いてください．

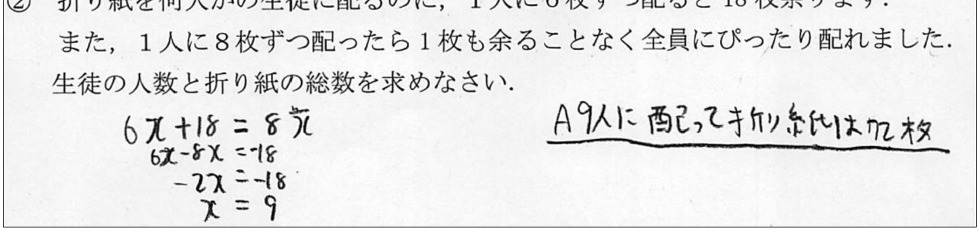
1人に5枚ずつ配る数とたりない数

90S：んー．えー.（「同じ数って言ってもあれだから・・・.」とつぶやく）・・・.
91I：先生から見ると，ここに書いた２つがなぜ等しいのかなって．K 君はどういうふうに見て式をつくったのかなっていうのがわかるといいと思っているんだけど．どんなふうに考えてイコールにしたのかなっていう.
92S：え～，なんでかな．んー．・・・.
93I：ここでイコールで結んでいるときは，そういうことを考えてイコールで結んで式をつくっていますか.
94S：いやー.
95I：どんな感じで式をつくったの．それを振り返ってくれるといいんだけどね.
96S：これ，こう書いた理由は，なんか，授業とかでやったやり方みたいな感じでやっていて・・・．うん.
97I：こんなふうにここの，これ何を表していますかみたいなことは，この時点でどうなんですかね，振り返ってみると.
98S：そこまであんまり考えていない.
99I：でも，とにかくこれ３x＋20 はこの数とこの数と，分かれている感じかな.
100S：うん.
101I：じゃあ，戻るよ．xを 11 にしました．今，K 君は，11 枚，１人に配る折り紙の数だというふうにしました．あと，まだ求めていないものがあるよね．生徒人数です.
102S：人数.
103I：さて，どうやってこれ求まるでしょうか.
104S：えー，人数.
105I：そこだけがんばってみようか.
106S：人数か・・・.
107I：もう１回振り返ってみようか，x＝11 の 11 は折り紙の，ここに書いてくれたように１人に

配る折り紙の数でいいかな．
108S：うん．
109I：この答えが合っているかどうかを確かめるにはどうすればいい．
110S：えっと．計算どうやったっけ．う～ん．
111I：難しい．これ生徒だよね．生徒１人が３枚ずつもっているんだよね．それが何人いるの．
112S：いや，何人かは･･･．んー．えー．･･･．どうなるんだ．
113I：$x=11$ が出たんだよね．$x=11$ が合っているかどうかを確かめるにはどうすればいい．今式があるよね．x は 11 ってわかったんでしょ．どうすればいいのかな．
114S：んー．
115I：じゃあ，ちょっとおいておこうか．ちょっと行きづまっちゃった．じゃあね．この問題を見てください．折り紙の枚数を変えてみます．折り紙が全部で 62 枚あります．生徒１人に４枚ずつ配ったら 10 枚余りました．これはどういう式になりますか．
116S：だから，$4x+10$
117I：いいよ，書いてみて，そこに．
118S：$4x+10=62$．（式を書き問題を解く）52 になるのか．$x=13$ か．


①　折り紙が全部で 62 枚あります．生徒一人に４枚ずつ配ったら，10 枚余りました．
生徒の人数を求めなさい．

119I：この 13 って何ですか．
120S：え～と，生徒１人の･･･．あっ，生徒の人数か．
121I：このときは生徒の人数を求めているんだ．x は何にしているんですか．
122S：ああ，これ配った数か．
123I：ん，x は何にしたの．
124S：だから，配った量か．
125I：えっ，配った量は全部で 62 枚ではないの．
126S：あっ，そうか．これは生徒の人数だ．
127I：x は何にしたの．ちょっと書いてみて．
128S：（式の上に「人数」と書く．）
129I：そうか．そうすると，これ（$x=13$）は．
130S：え～と，何だっけ．生徒の人数．
131I：生徒の人数が．
132S：13 人．
133I：いい．
134S：うん．
135I：いいよね．こっち（もとの問題）は配った枚数なんだね．
136S：ああ，じゃあこれも人数か．そうなると･･･．うん．
137I：じゃあ，今度，この問題．折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．生徒の人数と折り紙の枚数を求めなさい．
138S：（補助問題に取り組む）


②　折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると 18 枚余ります．
また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました．
生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい．

139I：これ（$x=９$）は何．
140S：人数．あっ，うん，人数．

141I：じゃあ折り紙の枚数は.
142S：９枚ずつだから，72 枚.
143I：ああ，じゃあ答え書いて２つ.
144S：人数９人だから，９人に配る.
145I：うん.
146S：（答えの部分を書く）
147I：なるほど，さっき，これは 13 人，人ね．いいですか.
148S：うん.
149I：じゃあ，こっち（最初の問題）に戻ろうか．さあさあこれに戻りますよ．これどうですか.
150S：（何度もうなずく）ここ（xを指して）が人数で.
151I：うん，ちょっと書いてみて．xは何にしたか.
152S：（右のように書く）

x＝人数

153I：なるほど，説明して．この式（最初にK君がつくった式を指して）の説明をして.
154S：だから，え〜と，１人に，あ〜，何人かに３枚ずつ配って，であと 20 枚余るから＋20 にして，ここは，何人かに５枚ずつ配って，そうすると２枚たりないから－２にして，計算していって 11 になるから，人数だから人でいいのか.
155I：ああ，なるほど．そうすると，さっきの問題と同じように，この問題の場合も人数と折り紙の枚数を求めなさいだけど，どう.
156S：４にしたら，どうなるかな．あっ，ちがう.
157I：これは，11 人でいいんだよね.
158S：人.
159I：折り紙の総数はどうなるのですか.
160S：えー，11×人数だから，これ（$3x+20$）だと余って，これ（$5x-2$）だとたりないから･･･
161I：もう１回聞こうか．$3x+20$ で何を表しているのですか.
162S：何人かに配る枚数と余った数.
163I：それは全部で何を表しているのですか.
164S：折り紙の枚数.
165I：なるほど，でもさっきはそう見えていないんだよね.
166S：うん.
167I：で，こっち（$5x-2$）は.
168S：何人かに配る，何人かに５枚ずつ配ったら２枚たりないから･･･.
169I：それは何を表しているの.
170S：だから，５枚ずつ配って，あっ，何人かに５枚ずつ配って２枚たりない.
171I：じゃあ，折り紙の総数求まります.
172S：えーと.
173I：今度はここが 11 ということだよね.
174S：ここを 11 にして（右の式の x の上に 11 を書く）で，３×11 で 33.
175I：ちょっと計算書いてみて.
176S：（右の計算を書く）枚数は 53 枚.

$3\overset{11}{x}+20=5x-2$

177I：なるほど，53 枚．見つけられたね．さて，今ここ 11 人ってやって式をつくったよね．最初見たとき，これ（x）は生徒に配る枚数と言っていたよね．そのとき，$3x$ ってどういうふうに見ていたの．振り返ってみると.
178S：だから，そのときは，１人に配る，ん，１人に３枚ずつ配るって言っていたのか．ただ，１人に３枚ずつ配って 20 枚余るって思っていたのかな．うん.

$3\times11+20=53$

$5\times11-2=53$

179I：というふうに思っていた.
180S：うん.
181I：で，これ（図３）が，１人が３枚ずつ持っている絵だよね．$3x$ というのは.
182S：だから，何人かに配る枚数，あっ，３枚ずつ配る枚数か.
183I：そうすると，これが絵としては.
184S：人が何人もいる.
185I：その何人かが.
186S：11 人
187I：ああ，11 人で，折り紙はどういうふうになっているの.

188S：53 枚あって，それを皆に分ける．うん．
189I：そうすると，最初は，ここ３×x だよね．配る枚数だったら，おかしかったよね．
190S：うん．
191I：その辺はどう，自分で振り返ってみて．
192S：う～ん．おかしいな．
193I：そのときどんなことを考えていたの．今思うとおかしいなって思う．
194S：うん．そのときはまあ，３枚ずつ配る･･･．だから１人だけに３枚ずつ配って 20 枚余るという感じで．
195I：それで式をつくった．
196S：うん．で，こうなってそっちも全部変えた．
197I：最初，５を x におくとかって言っていたけど，そんな感じなの．３を x におく，３枚を x におくと言っていたけど．
198S：うん，うん，うん．
199I：それは．
200S：だから３枚ずつ配る枚数ってこと．枚数を x にした．
201I：少しは，あれですかね．これまでと違うように理解できましたか．ではこれで終わりにしたいと思います．

43Y.M

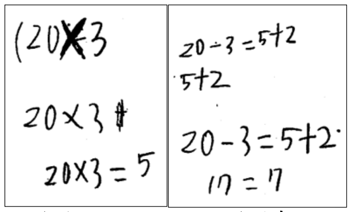


図１　Y.M の記述１

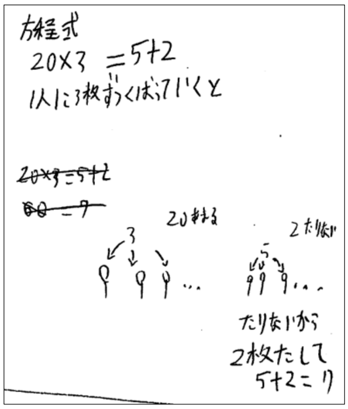


図２　Y.M の記述２

1I：では，前にもやってもらったんですけれど，この折り紙の問題です．ちょっと読んでもらってですね，そして，自分で方程式を使って解いてみてくださいということですので，ちょっとやってみてください．
2S：どうやったっけ．（問題に取り組む　図１）3 分後
3I：それ，文字を使っていないよね．全部数の式じゃないですか．前回できているよ．もう１回下でいいよ．よく読んで，問題をよく読んでやってみてください．
4S：何だったっけ．（もう一度考える　図２）2 分 40 秒後
5I：M 君さ，これこうやっているんですよ．（質問紙調査時の解答を見せる　図３）
6S：そうだ，x，x だ．
7I：じゃあ，もう１回下の方にやってみてくれる．
8S：（方程式をつくって解く　図４）2 分 50 秒後
9I：じゃあ，この式どうやってつくったのか説明できますか．見ちゃったけどね．ふふふ．
10S：３人で，ん，１人に３枚ずつ配るから，枚数がわからないから x，で，20 枚余るからたして，イコール，５x は，５が枚数だから x になって，２枚たりないから－２する．で３x ひく５x で５x を移項してきて－２x でそのまま残して，20 を移項して－20 にする．あと，－２x＝－22 になって，そこから÷2 をすると，人数が 11 人ということがわかって，枚数は 11 人に３枚ずつ配って 20 枚余るからそれをたして答えが 53 枚になる．
11I：なるほど．では，x は何にしていますか．
12S：枚数．
13I：x 枚数ね．
14S：え～と･･･．
15I：枚数でいいの．
16S：･･･．あっ，人数だ．人数．

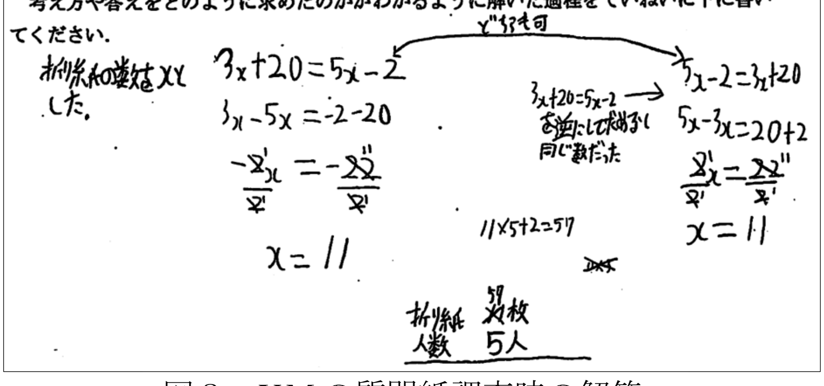


図３　Y.M の質問紙調査時の解答

17I：いいよね．じゃあ，今つくってくれたこの式を．こんなふうに同じ問題で，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として方程式をつくりなさいという問題に，今，M君がやってくれたように，この $3x+20$ と $5x-2$ という２つの式をつくりましたと．いいですかここまで．

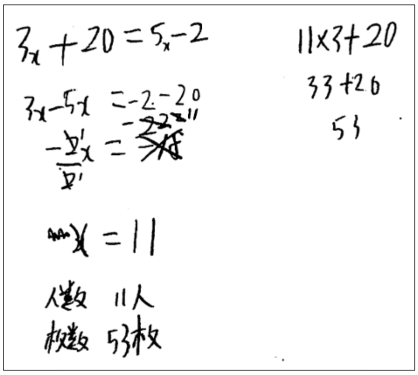
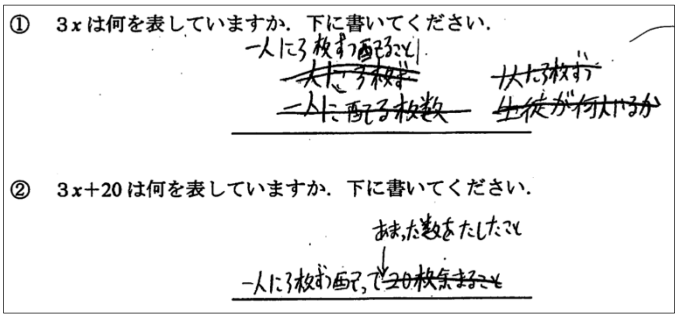


図４　Y.M の記述

18S：はい．
19I：まずこのつくった $3x+20$ について聞きますよ．$3x$ は何を表していますか．次に，$3x+20$ は何を表していますか．この問題で $3x$ と $3x+20$ が何を表しているか書いてもらっていいですか．
20S：はい．（書き始める　「１人に配る枚数」と書く）１分25秒後
21I：はい，じゃあちょっと説明してください．$3x$ は，①は．



22S：１人に配る枚数．
23I：それどういう意味．
24S：どういう意味･･･．
25I：ああ，どうしてそういうふうに考えたのかということね，ごめんね．
26S：何て言うんだ･･･．枚数，この３枚に枚って書いてあるから枚数だと思う．
27I：枚数を表しているんだね．１人に３枚ずつ配るって言っているんだよね．それが $3x$ だよね．$3x$ が１人に配る枚数ってこれどういう意味かな．
28S：･･･．
29I：１人に配る枚数は３枚じゃあないのかな．
30S：１人に･･･あっ，そっか．（「１人に配る枚数」を消して「人に３枚ず」と書いて消す．改めて「生徒が何人いるか」と書く）こういうことかな．
31I：生徒が何人いるかってどういうこと，どういうことを言っているのかちょっと教えてほしいんだけど．
32S：なんだろう･･･．何人いるかわからないから．
33I：うん，何人いるかわからないから，$3x$ は何を表しているかということだけど．
34S：ああ，そうか．え～，
35I：で，最初に書いた１人に配る枚数というのは，１人には３枚配るんだよね．ここ（問題文）に書いてある．
36S：普通に．これじゃあ普通かな．（「１人に３枚ずつ配ること」と書く）書いてあるとおりだなと思って．
37I：配ることを表しているね．ことを表している．
38S：３枚ずつ配る，んー．
39I：絵はこういうこと．（図２の下にかいてある図（図５）を指して）とりあえず，それにしておこうか．じゃあ，こっち（$3x+20$）は．どうしてそういうふうに考えたのですか．
40S：１人に３枚ずつ配って，20枚余ったからその20枚を一緒にたして，その合計，その合計で枚数がわかる．
41I：ということは，これ全体で単位は何．
42S：･･･．え～．
43I：今，言ってくれたよね．たして何が出てくるのか．
44S：たして人数が出てくる．
45I：ん，さっきは違うことを言っていたよね．
46S：枚数．ああ枚数だ．
47I：うん，枚数って言ったんじゃないの．

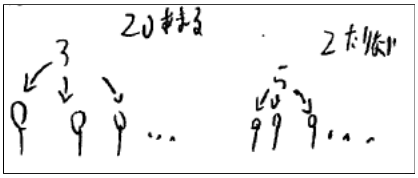
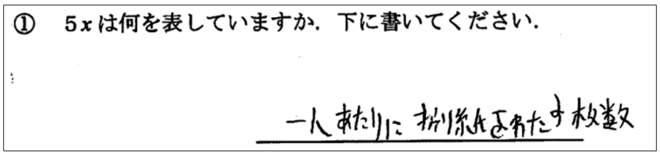


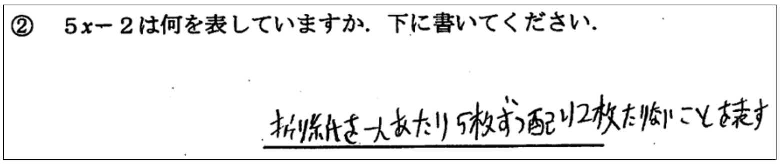
図５　図２の下の図

48S：枚数を表す．
49I：なるほど，じゃあこっち（$5x-2$）は．まず $5x$．
50S：うーん．浮かぶんだけどな．３枚ずつ配ると20枚余るけど，５枚配ると２枚たりないか

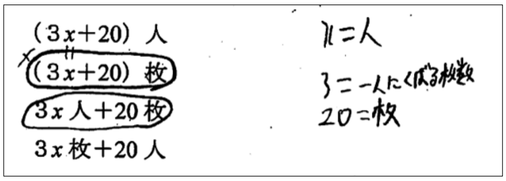
ら，だから１人ずつだいたい４枚ぐらいが一番いいってこと．
51I：ああ，なるほど．
52S：４がいいってこと．
53I：まずいいよ．５xは何を表しているか．
54S：え〜．
55I：どうですか．もう１回考え直して，５xは何を表しているかをちょっと書いてくれるといいんだけどね．
56S：（書き始める）１人あたりに折り紙をわたす枚数
57I：で，５x－２は．
58S：（書き始める）
59I：何て書いたのですか．
60S：折り紙を１人あたり５枚ずつ配り２枚たりないことを表す．



61I：で，イコールで結んでいるよね，式ね．
62S：はい．



63I：だから，ここに書いてある１人に３枚ずつ配って余った数をたしたことと１人あたり５枚ずつ配ると２枚たりないこと，これが等しいということでいいですか．
64S：はい．
65I：そうするとね．今，ちょっと聞いたんだけど，まず３x＋20 のふさわしい単位を聞きたいんです．全部で，３x＋20 で人，全部で，３x＋20 で枚，３xは人を表して＋20 は枚を表す．３xは枚を表して＋20 は人を表す．ふさわしい単位はこの４つのうちどれだと思いますか．
66S：まるする．



67I：はい，○してください．
68S：これ（（３x＋20）枚を指して）だと思う．
69I：なぜそう思いますか．
70S：３枚ずつと 20 枚余るだから．んー．
71I：xは．
72S：あっ．
73I：xはどういうふうに考えるんですか．
74S：あっ，xは人（にん）で人（ひと）だからなあ．え〜と．
75I：ゆっくり考えて．
76S：（選択肢の横に書く）こういうこと．（（３x＋20）枚に×をして，３x人＋20 枚を○で囲む）
77I：で，今これ何を書いたの．
78S：これ，あの〜，xはどういう単位かで，分けて単位を書いてみた．
79I：そうすると，xは．
80S：ひと
81I：ひとでいいの．
82S：ああ，にん．にんで，３は１人に配る枚数，20 は枚．
83I：そうすると，３xというのは．
84S：人．
85I：ごめん，ごめん．何が省かれているんだっけ．
86S：え〜と，省かれる･･･．
87I：何算，何算が省かれているの．
88S：ひき算．ん．ああ，かけ算だ．
89I：だから，３×xだよね．
90S：はい．
91I：そうすると，　３は１人あたりの枚数だよね．
92S：はい．
93I：人数をかけるんだよね．３xは人でいい，それで，＋20 枚．

94S：はい.
95I：じゃあもう１個，こっち５x－２．これはどうですか.
96S：やっぱりこうなる.
97I：そうすると，イコールで結んだときというのは，3xは人で，＋20枚，5xが人で－２が枚，それで等しいという関係.
98S：等しい．はい.
99I：さっき，これは人数だっけ，枚数だっけといったときに，枚数って言ったよね.
100S：はい.
101I：それとは違う関係になったということでいいかな.
102S：考えが変わった.
103I：どうしてそういうふうに変わったの.
104S：分解したら，３が１人に配る枚数だということがわかったから.

（5x－２）人
（5x－２）枚
5x人－２枚
5x枚－２人

5＝一人にくばる枚数
x＝人
2＝枚

105I：じゃあ，この問題式がつくれるかな．ごめんね，次々と．これどうですか.
106S：(問題を読んで解き始める　①から⑦まで試行錯誤して式をつくる)

① 折り紙が全部で62枚あります．生徒一人に４枚ずつ配ったら，10枚余りました.
生徒の人数を求めなさい.

① ~~62÷4~~
② ~~62÷4　+10~~
③ ~~4)62~~
④ ~~62÷4x=~~
⑤ $10+4x=62$
$4x=62-10$
⑥ $62+10=4x$
$4x=62+10$
⑦ $4x+10=62$
$10+4x=62$
⑧ $10+4x=62$

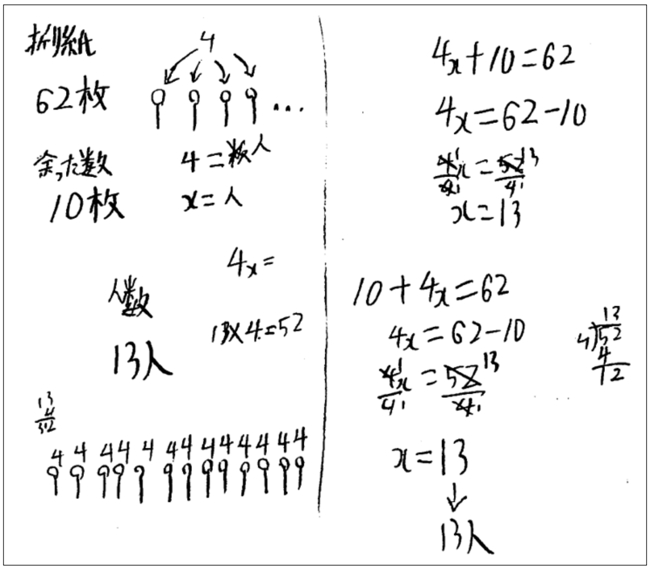
107I：方程式つくれるかな.
108S：あっ，方程式か.
109I：さっきの考えで，4xは何だっけ，単位は.
110S：人（人).
111I：＋10は.
112S：枚.
113I：62は.
114S：枚.
115I：そうすると，4xが人で＋10が枚なのに，62は枚になっているよ.
116S：んー.
117I：じゃあ，もう１個いこうか，これ．今のいい，確認ね．4xが人で＋10が枚で，62は枚，人と枚で人になっているのはおかしくないかというのが１つね．今度は，６枚ずつ配ると18枚余って，８枚ずつ配ったら１枚も余ることなくぴったりといったんだって．これ方程式どうなりますか.
118S：(書き始める)

② 折り紙を何人かの生徒に配るのに，１人に６枚ずつ配ると18枚余ります.
また，１人に８枚ずつ配ったら１枚も余ることなく全員にぴったり配れました.
生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい.

$6x+18=8x$　　$6x$
人　枚　人

119I：今度，こっちは6x人，＋18は枚，8xは人でしょ.
120S：人，枚，人
121I：それでいいかな．こっちは（上の問題の⑦の式を指して）下の式はね．枚プラス人で枚，こっち（下の問題）は，人たす枚イコール人．これどう.
122S：んー．これもしかして.
123I：式はそれでいいんだよ.
124S：式は合っているのか.
125I：合っているけど，M君の今の解釈でいいのかなという．それどういうふうに説明する.
126S：ぴったりか.

127I：式はいいよね．そこだけ聞いて終わりにしたいと思うんですけど．
128S：式はいいんだから，でも式が６枚，あ～，さっきと同じで，こっちは１人あたりが６枚で，１人あたりに配る枚数が６枚で，x が人になって，それで，18 枚余るから＋18 する．で，イコール８x は，余ることがないからひくもたすもなくて８x だけ．
129I：そうすると，さっきとのようにふさわしい単位は，どうなる．
130S：人，枚，人（式の下に書きながら）
131I：それでいいわけだよね．
132S：はい．
133I：それでイコールで結べている．じゃあこっち（問題①）は，式としてはどちらも正解ね，確認は．
134S：はい．
135I：どういうふうに説明できますか．
136S：こっち（問題①）の（⑦の式の）場合は，１人に４枚配ると，１人に４枚配って，x はわからないから，わからない人数だから，人．10 は余ったからたして，62 が合計，全部の数だから，イコール 62 になる．あっ，こっちだと，10 枚に，４枚ずつ配って，１人に４枚ずつ配る枚数を 10 にたしているから．（問題①の⑧を書く）
137I：４x は，今の説明だと．
138S：なくなる．
139I：ん，式はいいんだよ，それで．
140S：あっ，そっか．
141I：４x は，単位は．
142S：え～，枚．
143I：枚なんだ．で，10 は．
144S：10 も，全部枚か．え．
145I：なるほど．それでこっち（問題②の６x の下に書いた「人」を指して）は人でいいんだね．
146S：なんだろー･･･．
147I：そこを解明して終わろう．
148S：計算してみたらわかるかな．
149I：どうぞ．紙を上げようか．
150S：（新しい紙に書き始める）どちらも同じになるんだ．（４x＋10＝62･･･⑦と 10＋４x＝62･･･⑧を解いて（右側）その後，左側の絵をかく）

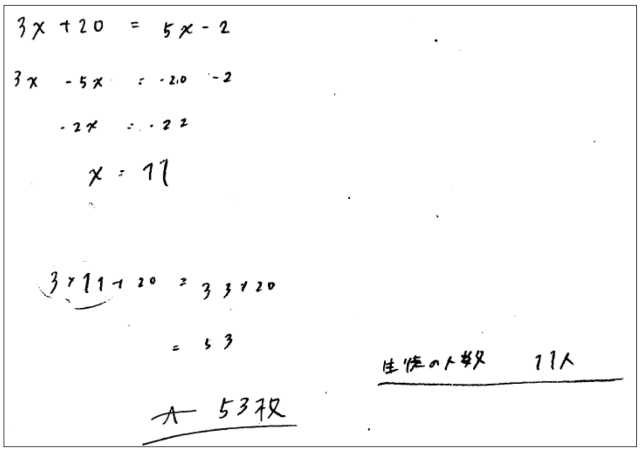


151I：どう，何を考えたのか．
152S：４がなかなか，４x がなかなか出てこない．
153I：なるほど，４x がなかなか出てこないってどういう意味ですか．
154S：枚か人か，どっちか，なかなか･･･．
155I：それはどういうふうに迷っているの．そこをうまく説明できる．
156S：逆に４だけだと，４枚だから４枚になって，x はわからない人数だから人になる．
157I：４x だと人か枚かわからない．で，今のところだと，どっちが強いんですか．
158S：人が強いは強い．
159I：え～と，13 は出たんでしょ．13 人が．
160S：人数．
161I：で，４x ということなんだから，x に 13 入れたらって，それやってみた．
162S：x に 13 を入れる．13x？
163I：13 人だもんね．それで４枚でしょ．これやってみた計算を．
164S：13x･･･．
165I：ううん，４枚もっているんでしょ，13 人が．
166S：４かける 13･･･，合計で 52 枚．
167I：その合計って何を表しているの．合計でいくつになったの．
168S：52 枚．
169I：うん，それ何を表しているの．

170S：数，あっ，枚数.
171I：だよね．じゃあ52は枚数だけど，その前は，4×13 じゃあないですか．そうだよね．それが $4\times x$ になったら，これは何.
172S：$4x$ だから.
173I：$4x$ だからこれは.
174S：う～ん．$4x$ でしょ．x のことだけ考えれば人（にん）.
175I：うん，x のことだけ考えれば人だよね．でも $4x$ だと.
176S：んー，枚，枚．人･･･.
177I：x に13が入れば 4×13 は
178S：52枚.
179I：枚，52枚なんでしょ.
180S：枚，でも $4x$ が枚だと10も62も $4x$ も全部枚数だから.
181I：それでどう.
182S：式を求めるにはいいけど，人数を求めるのになんかおかしい.
183I：ああ，なるほど.
184S：人数求めているのにね，x のね.
185I：わかりました．すごいよく一生懸命やってくれて，ありがとうございました.

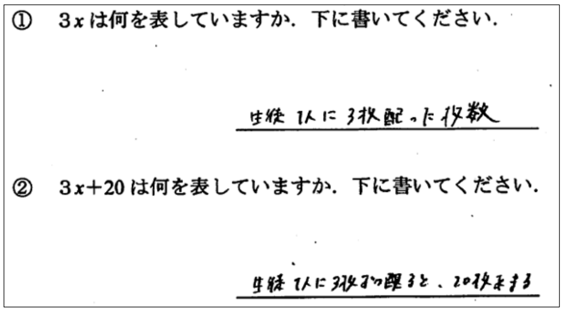
76K.K

1I：じゃあ，よろしくお願いします．では，これ前にやってもらった問題ですけれど，折り紙の問題です．これちょっと読んでもらって，方程式をつくって解いてくださいとあるので，よく読んで，解いてください．よろしくお願いします.
2S：はい.（問題を解き始める）1分20秒後

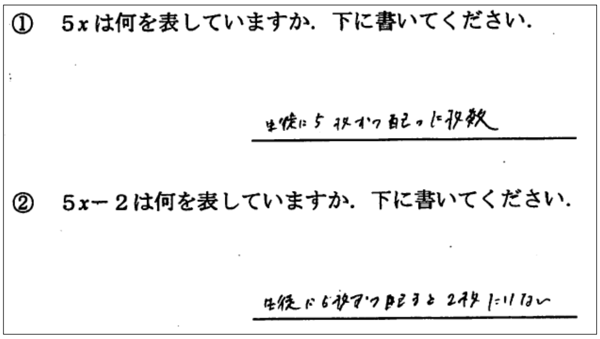


3I：はい，ありがとう．どんなふうにやったのか，ちょっと説明してもらえますか.
4S：えっと，この3枚は1人に3枚ずつ配ると，で20枚余るから＋20で，1人に5枚ずつだと，2枚たりないので，－2で，そこから方程式へ，x と文字式と数字分けて解きました.
5I：なるほど．今，x は何にしているのですか.
6S：x は1人に配る，ん，ちがう，合計の数.
7I：ん，何の合計の数.
8S：折り紙の.
9I：そうすると，説明して，$3x+20$ はどういうふうにつくったの.
10S：えっと･･･，え･･･.
11I：もう1回．x は何にしているの.
12S：折り紙の総枚数，総数なので，折り紙の総数をわる3，ん，違う違う，うんと，x は，生徒の人数を表していて.
13I：なるほど，それはいい.
14S：はい．で，その生徒の人数に3枚配ると20枚余る．で，生徒の人数に1人5枚ずつ配ると2枚余るという.
15I：今，なんで x を勘違いしたのかな，振り返ってみて.
16S：えっと，求めるのが総数だったから.
17I：ああ，なるほど，だから x もそうだと思った．うん．これ x は11って出ているもんね.
18S：うん.
19I：じゃあ，今つくってもらった式をね，これも前にやってもらったんですけど，同じ問題で，生徒の人数を求めるために，生徒の人数を x 人として，この考え方で方程式をつくりました．$3x+20$ と $5x-2$ はKさんも同じようにつくってくれました．で，この $3x+20$ について，3

x は何を表していますか，この問題でね．$3x+20$ は何を表していますか．そうですか，ちょっと答えてもらっていいですか．
20S：（答えを書き始める）40 秒後（最初は $3x$ が「生徒１人に３枚配った」と書いた．）
21I：まず，$3x$ から聞きましょうか，なぜそういうふうに考えましたか．



22S：えっと，総枚数，総数で考えると，総数－20 が，その人数×３なので･･･．
23I：なので．
24S：なので，１人に３枚ずつ配る･･･えー，と 20 枚余るということが示せるかなと思って．
25I：いいよ．それはこっち（$3x+20$）ね．$3x$ だけは何を表しているの．
26S：生徒１人に３枚配った．
27I：生徒１人に３枚配った何？配った何を表しているの．
28S：配った･･･配っただけの枚数．
29I：ああ，じゃあそういうふうに書いて．
30S：配った枚数
31I：うん．
32S：（「生徒１人に３枚配った」の後に「枚数」を書きたす）
33I：そうすると，今，$3x$ を聞いているんだよね．K さん，x について何もそこに触れていないよね．x はどんなふうにここに関係してくるの．
34S：ここが，折り紙の枚数が，この折り紙の枚数－20 が総数で･･･．
35I：何の総数．
36S：全部の，違う，生徒に配った数，なので，その数です．
37I：で，x はどこに関係しているの．
38S：えー．うふふ．･･･．
39I：そのイメージを聞きたいんだよね．x をどのようにイメージしているのかということが知りたいところなんです．
40S：x は１人に配った数．
41I：でも，$3x$ を１人に配ったって書いてあるよね．
42S：ああ，そっか．生徒の数．
43I：x はね．じゃあ $3x$ は．
44S：えー．３×生徒の数．
45I：それが何を表しているんですか．
46S：は，総数から 20 枚ひいたこと．
47I：じゃあこっち（$3x+20$）ね．これはどういうふうに考えたのですか．
48S：１人に３枚ずつ配ると 20 枚余る．
49I：これも x を一緒に考えてみると．
50S：x を何て言いましたっけ．
51I：書いておこうか．
52S：何て言いましたっけ．
53I：ここに書いてあるからね．
54S：$3x$ はあれっ．なんだっけ．
55I：x は何だっけ，まず．
56S：x は生徒の数．
57I：それで，$3x$ は．
58S：あれ，なんだっけ．生徒の数で，３枚配ったから，総数－20 が $3x$．だから，生徒に配った枚数＋20 がその $3x+20$ です．
59I：その $3x+20$ は何を表しているの．K さん，こういうふうに書いてくれたけど．これは何，結局．
60S：全体の数．
61I：何の．
62S：折り紙の．
63I：ああ，なるほど．じゃあ今度 $5x$，今のこと踏まえて書いてみて．


① $5x$ は何を表していますか．下に書いてください．

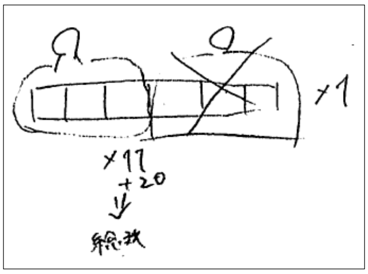
生徒に5枚ずつ配った枚数

② $5x-2$ は何を表していますか．下に書いてください．

生徒に5枚ずつ配ると2枚たりない

64S：（書き始める）１分後
65I：そうすると，今，これもどういうふうに考えたのか，ちょっと教えてくれる．
66S：え〜と．
67I：まず $5x$.
68S：$5x$ は，生徒に５枚配るとだから，総数＋２が生徒に配った数だから，$5x$ は生徒に配った全体の枚数．
69I：で，$5x-2$ は．
70S：元々あるものから生徒に配った合計では２枚たりないということ．
71I：そうすると，今，K さんは，この２つ，これ（$3x+20$）とこれ（$5x-2$）をイコールで結んでいますよね．これはイコールで結んでいいですか．確認ね．
72S：大丈夫．
73I：大丈夫．何でイコールで結んでいいですか．
74S：･･･合計が一緒になる．
75I：何の合計が一緒になるのですか．
76S：折り紙の総数の合計が一緒になる．
77I：だからイコールで結んでいいと．はい．じゃあ，今のことを踏まえて単位を聞きます．$3x+20$ ね．この場面において，この式はどれがふさわしい単位かを選んでください．全体が，$3x+20$ 全体で人，次に $3x+20$ が全体で枚，$3x$ が人で＋20 が枚，$3x$ が枚で＋20 が人．どれがふさわしいと思いますか．
78S：これ．（「$3x$ 人＋20 枚」を選ぶ）
79I：その理由は．
80S：これでも言ったとおり，生徒の数×３が生徒に配った数＋20 すると，この折り紙の総数になるので．
81I：そうすると，今の話だと，生徒に３枚ずつ配った数というのは人ね．
82S：あっ，こっちか．違う．こっち（($3x+20$）枚）です．間違いました．
83I：今どういうふうに考えて変わったの．
84S：こっち（$3x$ 人＋20 枚）だと，x が人になっちゃうので，３×何人だと違うかなと思って．こっち（($3x+20$）枚）は，x が枚になるので．
85I：ん，x は人数だよ．
86S：あっ，えっ．
87I：もう１回，もう１回．これは３×x 人ってやったんだけど，これは，違うなと思ったんだよね．
88S：違うなと思った．
89I：うん，最初に思ったことを振り返ってみて，どういう考えでそういうふうにしたのかな．
90S：え〜と，１人に３枚だから，ここ･･･．やっぱりこっち（$3x$ 人＋20 枚）．ここに人数が入るので，ここが今の答えだと 11 人になるじゃあないですか．
91I：そうすると，計算すると．
92S：これが，配った数＋余った数になる．
93I：ごめん．ここ（x）に 11 が入るよね．そうすると，３×11 で何ができる．
94S：33.
95I：これは何．にん？
96S：･･･．枚．
97I：だよね．そこは？
98S：そうだとすると，こっち（($3x+20$）枚）です．
99I：どこを迷っているのかな．
100S：この x が何を表すか．
101I：なるほど．x はここに書いてあるように人数を表しているんだよね．でも $3x$ ってやるとこれはどうなんですか．
102S：１人に配る数になる．
103I：１人に配る数になる．１人なのね．
104S：１人．ん，違うな．１人に配ると何人まで配れるかがこれです．

105I：とすると，改めて聞くとどっちになるんですか．
106S：え～，こっち（$3x$人＋20 枚）．
107I：そっちなのね．じゃあ，ここ（$3x$）は人でいいのね．
108S：人です．
109I：今，ここで計算した３×11 をやってくれたここは人なのね．人に＋20 たしているのね．
110S：はい，ん．枚でした．うふふ．
111I：どうしてそうなったのかを聞きたいんだけどね．
112S：ここ全体が枚．ここが全体で枚になるから枚かな．
113I：そうすると，改めて聞くとどっちですか．
114S：こっち（（$3x$＋20）枚）です．
115I：その迷っているのは何かな．ここがすごい聞きたいんだけど．どうして迷っているの．
116S：何を求めたいか，$3x$ で何を求めたいかを迷って．
117I：で，何を求めたいの．
118S：今は，３人，１人３枚ずつ配ると何人に配れるかを求めたい．
119I：それが x なんだよね．うん．だから人になっちゃった．
120S：そう．でも，折り紙の総数を考えると，$3x$ で，配れた枚数＋20 で総数になるから，というのを考えて迷いました．
121I：それで，イコールで結んでいるときはどうなのかな．それをうんと意識してやっているのかな．
122S：いや．
123I：どんな感じでこのイコールの式をつくったかな．
124S：授業で習った通り．うふふ．
125I：どんなふうに．
126S：ここ（$3x$＋20）とこっち（$5x$－２）は同じ枚数だとすると，というふうに考えたら，$3x$＋20＝$5x$－２っていうふうに．
127I：で，今，１人に配ったたって言っていたけど，この $3x$ のイメージね，絵にかくとどういうイメージですか．$3x$ って．今ここを迷っていたよね，K さん．
128S：絵にかくとこれが折り紙，これが１人に３枚，１人に３枚．
129I：それがどうなっているの．今，２人しか書いていないけど．
130S：×10，あっ，違う違う．
131I：今，$3x$ ね．
132S：ここを 11 にすると，あっ，＋20 にすると，折り紙の総数．

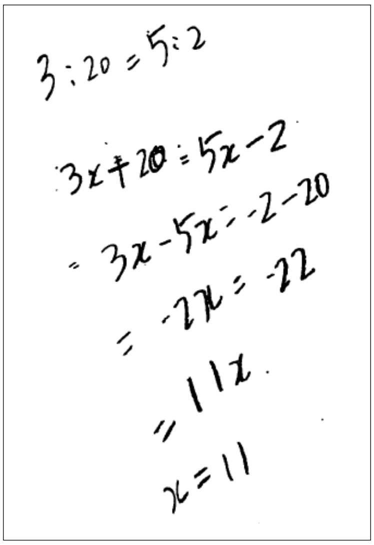


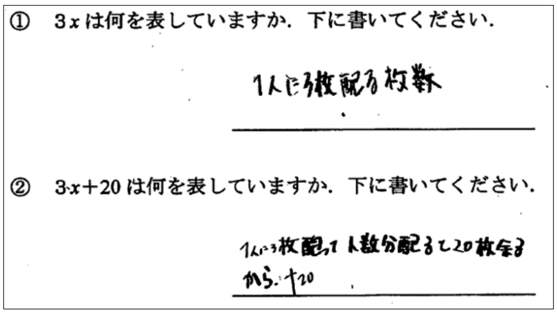
133I：これ２つかいて消したのは．
134S：間違えました．
135I：１人に．これが $3x$
136S：$3x$
137I：これ１つが．
138S：$3x$
139I：なるほど．わかりました．ありがとうございました．これだけやっておこうか，確認ね，$5x$－２の単位，この単位はどうですか．
140S：これもこっち．（（$5x$－２）枚を選ぶ）
141I：これ．そうすると，両方とも表しているのは，○をしてくれたのは．
142S：１人に配ると何枚できるか，です．
143I：だから，イコールで結んでいい．
144S：（うなずく）
145I：わかりました．ありがとうございました．

81M.C

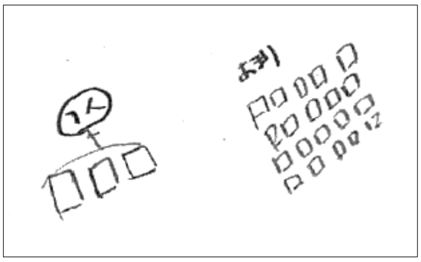
1I：まず，前にやってもらった問題なんですけど，折り紙の問題．この問題を方程式をつくって解いてくださいとあります．じゃあ，ちょっと読んでもらってここに解いてみてください．じゃあ，お願いします．
2S：（問題を解き始める．3：20＝5：2 と書いて止まる）1 分 30 秒後

3I：よく考えてみて下さい．前できているんだよ，C さん．
4S：（その後，３x＋20＝５x－２をつくって x=11 を導く）3 分 40 秒後
5I：どんなふうに考えた．
6S：えっ．
7I：まず，x は何にしましたか．
8S：x は３．
9I：３を x にした．ここの文章の中でだよ．
10S：ああ，人数．
11I：何の人数．
12S：１人．
13I：１人の人数を x とした？
14S：あっ．
15I：緊張している．
16S：ふふふ．･･･．
17I：x を自分で使ってくれたよね．何を x にして式を作ろうとしたんですか．
18S：ふふ．
19I：どうかな，どういう気持ちで x を使ったのかな．
20S：生徒の人数を求めたいから．
21I：求めたいから，x は何にしたの．
22S：･･･．
23I：生徒の人数を求めたいから何をしたの．その後を知りたい．
24S：１人に３枚ずつ配ると 20 枚余るのと，５枚ずつ配ると２枚たりないのを求めて･･･．
25I：うん，x で表しているものを何にしたのですか．どうして x を使おうとしたんですか．
26S：･･･．
27I：意識なく．
28S：なんとなく．
29I：わかりました．じゃあね．この今と同じ問題ね．生徒の人数を x 人，x とします．いいですか．
30S：うふふ．
31I：そうすると，ここでつくってくれたように２つの式，３x＋20 と５x－２という２つの式ができました．これいいですか．C さんがつくってくれたやつね．まず，３x＋20 について聞きます．３x は何を表していますか．そして，３x＋20 は何を表していますか．この２つちょっとかけますか．３x という文字式があるよね．これは何を表しているか．次は，３x＋20 は何を表していますか．かけますか．どうでしょう．
32S：（書き始める　３x は「１人に３枚配る」と書く）2 分 20 秒後
33I：はい，ちょっと説明して．まず３x は．
34S：１人に３枚配る．
35I：配る何ですか．
36S：枚数．
37I：ああ，枚数，じゃあどうぞ．
38S：（「１人に３枚配る」のあとに枚数と書き足す）
39I：じゃあ，下は．３x＋20 は．
40S：１人に３枚配って人数分配ると，20 枚余るから＋20，余るとプラスだから＋20．
41I：なるほど，じゃあこっちは言葉で説明できますか．５x は．
42S：１人に５枚ずつ配る．
43I：配る何ですか．
44S：枚数．
45I：で，２つ目は，５x－２は．
46S：１人に５枚ずつ配ると２枚たりないから－２．
47I：それで今，言ったことをイコールで結んでいますよね．これイコールで結んでいるのはな





ぜいいんですか.
48S：んー，$3x+20$ と $5x-2$ が同じだから.
49I：同じだから，でも見かけは違うよね，$5x-2$ と $3x+20$ って．その何が同じなのかな．それどうイメージをもっている．これ何が同じなんだろう.
50S：･･･．折り紙の全部の数.
51I：それを両方とも表している，なるほど．じゃあ，ちょっと単位を聞きます．まず，$3x+20$ ね．これ $3x+20$ が全体で人，人数の人ね，を表しています．$3x+20$ 全体で枚を表しています．$3x$ が人で，$+20$ が枚を表しています．$3x$ が枚を表して，$+20$ が人を表しています．これ，どれでしょうかね，問題を見てもらって，この場面でのふさわしい単位はどれかを選んでもらいたいのですけれど.
52S：これ．(「$(3x+20)$ 枚」を指して)
53I：うん，○をしてみて.
54S：○で囲む.
55I：どうしてそれを選びましたか.
56S：１人に３枚で 20 枚余るから.
57I：なるほど，こっちは，今度は，$5x-2$．これどうですか．同じね．全体が人か，全体が枚か，$5x$ が人で -2 が枚か.
58S：(「$(5x-2)$ 枚」を○で囲む)
59I：これもどうして選びましたか.
60S：５枚ずつ配って２枚たりないから.
61I：なるほど，だから枚なんだね．で，例えば，この $3x+20$ ってどういうイメージをもっているか，絵をかける.
62S：(右の絵をかく)



63I：これで $3x$？（絵の左側を指して）
64S：う〜ん.
65I：x のイメージはどうなのかな，どういうふうにもっているのかな.
66S：･･･.
67I：これは $+20$ を表している．(絵の右側を指して)
68S：うん.
69I：これが $3x$ を表しているということでいい．(絵の左側を指して)
70S：うん.
71I：この「１人」が x って感じ．そこだけ最後知りたいんだけど．ここに書いてある１人に３枚配る枚数ということは，これが $3x$ かな．それとももっと違う感じ.
72S：ふふ.
73I：今，C さんが書いてくれたこれ（$3x$ が何を表しているかの記述）から考えると，この絵が $3x$ というイメージかなと思うんだけど．C さんどうかな.
74S：そんな感じです.
75I：そんな感じですか，わかりました．今度，$5x$ の方は，ここ（絵の左側）が５枚で，２枚たりない感じ．これが１個ね．ありがとうございました．じゃあ，終わりたいと思います.

謝　辞

本論文を作成するにあたっては，多くの方からご指導とご支援を賜った．ここに記して御礼を申し上げたい．

西村圭一先生（東京学芸大学教授）には，小学校，中学校，高等学校を見通した広い視野から先生のご経験を踏まえて，本研究全般についてのご指導を賜った．先生ご自身が大変ご多用であるにもかかわらず，常に筆者の質問等にも快く答えてくださり，力不足の私を温かく見守ってくださった．先生の励ましとご助言が，本研究を進めるにあたって大きな後押しとなった．心より感謝を申し上げたい．先生の研究者として，そして指導者としての姿勢を見習い，今後も研究を続けたいと考えている．

また，中村光一先生（東京学芸大学教授）には，博士課程のはじめの３年間，指導教員としてご指導を賜った．先生からは，自分の力で深く考え論理的に研究を進めるという研究者としての心構えをご教授いただくとともに，子どもの理解をどのように捉えるのかといった具体的な研究姿勢もご指導を賜った．本論文の重要な部分となるアイディアについてご助言をいただき，研究を進展させるきっかけとなった．先生から賜ったご指導を忘れず，今後も精進を続ける所存である．

道工勇先生（埼玉大学教授）には，数学的な視点から生徒の理解の捉え方について貴重なご意見を賜り，本論文の分析の参考とさせていただいた．澤隆史先生（東京学芸大学教授）には，発達支援の立場からインタビュー調査における生徒の理解の分析について貴重なご意見を賜り，本論文の調査研究の方法の基本的な部分として参考とさせていただいた．池田敏和先生（横浜国立大学教授）には，数学教育の立場から研究全般について貴重なご意見を賜った．

筆者が本研究を進めることができたのは，東京学芸大学数学教育研究室の先生方，諸先輩方，大学院生の皆様，また長期研究生の先生方のおかげである．

太田伸也先生（東京学芸大学教授）には，生徒の理解を捉える枠組みや分析結果の関連性などについてご指導を賜り，何度も温かい励ましの言葉をかけていただいた．清野辰彦先生（東京学芸大学准教授）には，ゼミの中で研究の方向性を示唆していただき，先生のご助言を本論文の鍵となる部分の構築に役立てさせていただいた．成田慎之介先生（東京学芸大学講師）には，博士課程の先輩として，指導教員として数多くの貴重なご意見をいただき，先生の論文から研究に対する姿勢を学ばせていただいた．

また，博士課程の途中までご指導いただいた藤井斉亮先生（東京学芸大学名誉教授）には，学部生，修士課程大学院生（山梨大学）のときからご指導をいただき，筆者の文字式の理解の研究のきっかけを与えてくださった．先生から修士課程の院生時代にご指導いただいた研究を進展させ，１つの成果として残したいという思いが契機となり，本論文の作成に至った．先生から教えていただいた

「守・破・離」の精神を全うできるよう今後も努力を続けたいと考えている．
杉山吉茂先生（東京学芸大学名誉教授）には，中学校教諭時代から長年ご指導を賜っており，本論文の内容について常に気にかけてくださり，叱咤激励をいただいた．その中で，顕在化した生徒の理解を基にして，そこから見いだされた課題を克服するための学習指導を考案し，実践していくことの大切さをご指導いただいた．このことを肝に銘じ，今後の研究を進めて参りたい．
清水美憲先生（筑波大学教授）には，本研究について何度も励ましの言葉をかけてくださり，論文完成に向けて筆者の背中を押していただいた．この場を借りてお礼を申し上げたい．
博士課程の先輩である小林廉先生（東京学芸大学附属校国際中等教育学校教諭），小岩大先生（東京学芸大学附属竹早中学校教諭）には，研究内容や，ご自身の研究のご経験から数多くの貴重なアドバイスや激励をいただいた．また，博士課程の大学院生である松田菜穂子先生（東京学芸大学研究員），太刀川祥平先生，福嶋卓海先生には，ゼミ等で数多くの貴重なご意見をいただいた．数学教育研究の同志として，刺激をし合い，お互いに切磋琢磨し合う存在であった．また，東京学芸大学大学院修士課程の皆様や長期研修生の先生方には，貴重なご意見をいただくとともに，提案の調整，資料の印刷等，多くのご支援を賜った．

本研究の調査にご協力いただいた甲府市立東中学校の仙洞田茂雄前校長先生，高橋真人先生（現在，甲府市立北中学校教諭），甲府市立北東中学校の数野保秋前校長先生（現在，甲府市立北中学校長），内藤雄一郎先生，甲府市立北西中学校の向山和徳元校長先生，小林富一郎元校長先生，井村一聡先生，パイロット調査にご協力いただいた笛吹市立御坂中学校の茅野賢一前校長先生（現在，甲府市立上条中学校長）に感謝を申し上げたい．本研究がこのような形でまとめることができたのは，調査対象とした生徒たちの率直な自分の考えの記述と口述に依るところが大きい．実態調査に御協力いただいたすべての生徒に感謝したい．そして，そのような豊かな考えや理解を引き出せたのは，先生方のご指導の賜である．貴重な生徒の反応を記録させていただいたことに御礼を申し上げたい．

また，山梨大学の教授でいらっしゃった故中村享史先生には，筆者を大学教員としての道に誘っていただき，本研究も様々な面で応援してくださった．そのおかげで，よい研究環境を与えていただき，本論文を完成することができた．このことに大変感謝をしている．
なお，ここにお名前を挙げさせていただいた方以外にも数多くのご指導・ご支援を賜った．改めて御礼を申し上げたい．
最後に，筆者の研究活動を常に陰で支えてくれた妻と家族に感謝の意を表したい．

2020 年 3 月

清水　宏幸