東京学芸大学附属高等学校紀要 56 pp.21～24，2018

初等幾何の扱い（垂心）

－難しい補助線の除去－

A study on the Euclid geometry about orthocenter

－ To be overloaaded with certain the folding line －

数学科　荻原　洋介

＜要旨＞

教科書に書かれている垂心の証明で扱われる補助線は非常に技巧的である．好事家のためには良いかもしれないが，全体教育で扱うには不向きである．基礎的な知識を積み重ねることによって証明可能である．

その証明の紹介と，それを基礎とした授業順序の提案である．

＜キーワード＞　幾何の指導順序の提案，難しい補助線の除去

1　はじめに

数学 A で扱う平面図形において，三角形に対する垂心の存在証明は，教科書を見ても外心の存在に帰着させる方針で書いてあり，図 1 が付されているのみである．

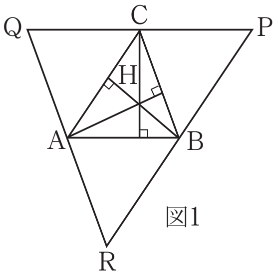


図1

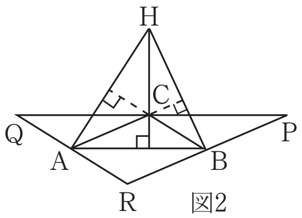


図2

まず，教科書の証明は鈍角三角形についての言及がない．同様の方針で証明できるのであるが，一言述べておかないと証明としては不完全である．

小平［4］は，図 2 も付した上で証明しており，さらに別証明もある．

また，教科書の証明で利用される補助線は，それ自身としても非常に思いつきづらい．

大学入試に平面図形が頻出であった頃の問題集（黒木・山本［6］）を調べてみたが，同様の補助線で解く問題は掲載されていないことから考えても，この補助線は応用性に乏しいようである．

閃きに頼る補助線は，特に幾何が苦手な者にとっては非常に辛いものである．そこで，1 年生程度の知識のみで，初等的でありかつ応用性のある証明を紹介することを試みてみた．その実践記録である．

なお，直角三角形の場合は自明であるから以下の証明では省略する．

2　証明

2－1　チェバの定理を用いる証明

△ABC の各頂点から対辺へ，垂線 AP，BQ，CR を引く．

図3

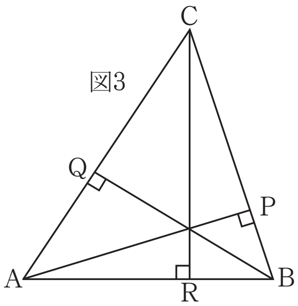
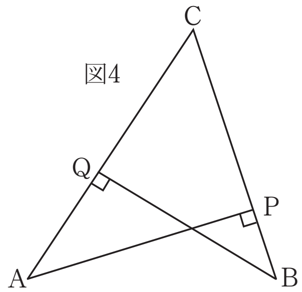


図4



このとき，

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{AQ}\cdot\frac{BP}{BR}\cdot\frac{CQ}{CP}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

図 3，4 を参照せよ．△ACP ∽ △BCQ であるから

$$AC:CP=BC:CQ$$

$$\frac{CQ}{CP}=\frac{CB}{CA}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

同様に，△ABP ∽ △CBR，△CAR ∽ △BAQ であるから

$$\frac{BP}{BR}=\frac{AB}{CB}\quad\cdots\cdots\text{③}$$

$$\frac{AR}{AQ}=\frac{CA}{BA}\quad\cdots\cdots\text{④}$$

②～④ を ① に代入して

$$\frac{AR}{AQ}\cdot\frac{BP}{BR}\cdot\frac{CQ}{CP}=\frac{CA}{BA}\cdot\frac{AB}{CB}\cdot\frac{CB}{CA}=1$$

チェバの定理の逆を用いて，AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

鈍角三角形における証明は図 5 を参照すると，相似の証明方法に対する相違はあるがそのまま適用できる．

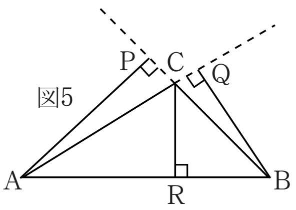


図5

2－2　方べきの定理を用いる証明

図 3，図 5 を見ると，対角の和が 180° である四角形の存在に気づく．これから，四角形の外接円を利用することも考えられる．

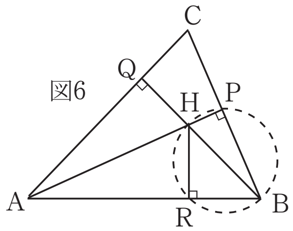


図6

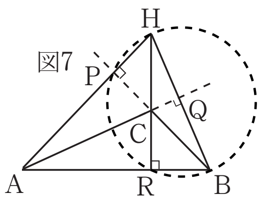


図7

A，B から BC，CA へおろした垂線の足をそれぞれ P，Q とし，AP と BQ の交点を H とする．

H から AB へおろした垂線の足を R とする．

図 6 を見よ．△ABC が鋭角三角形のときは

$$\angle BPH + \angle BRH = 180°$$

である．

図 7 を見よ．△ABC が鈍角三角形のときは

$$\angle HPB = \angle HRB = 90°$$

であるから，円周角の定理の逆によって，いずれの場合も 4 点 B，P，H，R は，BH を直径とする円周上にある．

この円について方べきの定理を用いて

$$AR \cdot AB = AH \cdot AP \quad \cdots\cdots ⑤$$

また，$\triangle AHQ \backsim \triangle ACP$ であるから

$$AH : AQ = AC : AP$$

$$AH \cdot AP = AQ \cdot AC \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥ より，$AR \cdot AB = AQ \cdot AC$ であるから，方べきの定理の逆を用いて，4 点 C，Q，R，B は同一円周上にある．

$\angle BRH = \angle CQB = 90°$ であるから，この円の直径は BC である．

$\angle CRB = 90°$ であるから，3 点 C，H，R は一直線上にあり，AP，BQ，CR は 1 点 H で交わる．

3　教科書再考

以上のように証明した上で，教科書の証明や演習問題に戻ると生徒の読み方にも変化があるようである．

例えば，垂心の存在を先に証明しておいた上で，外心の存在証明をするような流れにすると，明確な根拠があるわけではないと思われるが，各辺の中点を結ぶことで図 8 の構図を自然な形で導く生徒が少なからず出てくる．

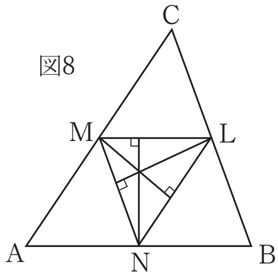


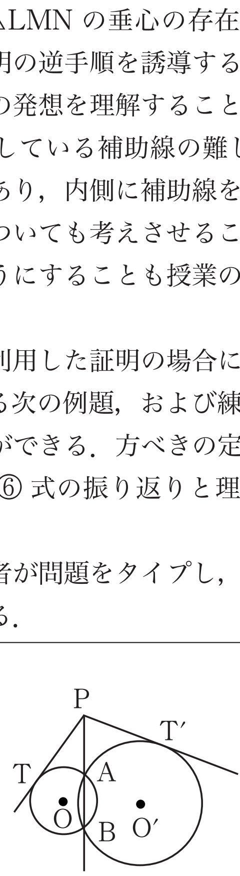
図8

すなわち図 8 において，△ABC の外心の存在を，各辺の中点を結んでできる △LMN の垂心の存在に帰着させるという，教科書の証明の逆手順を誘導することも可能になり，教科書の証明の発想を理解することに繋がると同時に，教科書で紹介している補助線の難しさが，外側に補助線を引くことにあり，内側に補助線を引く方が容易であるということについても考えさせることができ，理解の深化に繋がるようにすることも授業の方向性として考えられる．

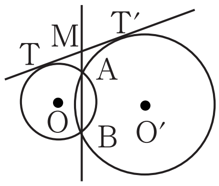
さらに，方べきの定理を利用した証明の場合には，参考文献 [1] に掲載されている次の例題，および練習問題も関連事項として扱うことができる．方べきの定理の練習よりも一歩踏み込んで，⑥ 式の振り返りと理解を促すことも可能になる．

なお引用に際しては，筆者が問題をタイプし，図版も作成したものを利用している．

例題・8　右の図のように，2 つの円 O，O′ が 2 点 A，B で交わっている．線分 AB の延長上の点 P から円 O，O′ に引いた接線の接点をそれぞれ T，T′ とするとき，PT ＝ PT′ であることを証明せよ．



問題・31　右の図のように，2 点 A，B で交わる 2 つの円 O, O′ にそれぞれ T, T′ で接する直線を引く．この直線と直線 AB の交点を M とするとき，M は線分 TT′ の中点であることを証明せよ．



4　総括と提案

以上のように難しい補助線を引かなくても，いくつかの事実を積み重ねることで垂心の存在は証明できると同時に，上記 2 つの証明の考え方は，他の問題にも応用が効くものである．

伝統的な証明方法を紹介することも教育では重要なことであるが，自力で再現できる証明をすることで本当の理解に繋がるのではないだろうか．

教える側としては，その両側面の観点から展開できるようにすることが望ましいように思われる．

筆者が実際に授業を行った際には，チェバの定理の証明を紹介した．そのために，平面図形の指導順序を，

1. メネラウスの定理，チェバの定理，方べきの定理
2. 三角形の五心

のようにしたが，体系的に教えられるという点でメリットは大きいと考える．

また，本稿の内容を理解していれば次の問題への対応は容易になるだろう．この問題であれば，以上の証明の後に 1 年生で十分対応可能である．

以上甚だ簡単ではあるが，参考になれば幸いである．

参考　鋭角三角形 △ABC において，頂点 A，B，C から各対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろす．これらの垂線は垂心 H で交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

（1）　四角形 BCEF，AFHE が円に内接することを示せ．

（2）　∠ADE ＝ ∠ADF であることを示せ．

（2016 東北大学，前期，文理）

参考文献

[1] 長谷川考志他，『数学 A』，第一学習社，2018
[2] 高橋陽一郎他，『詳説　数学 A』，啓林館，2011
[3] 俣野博他，『数学 A』，東京書籍，2013
[4] 小平邦彦，『幾何のおもしろさ』，岩波書店，1985
[5] 藤田宏他，『大学への数学 Ⅰ & A』，研文書院，1996
[6] 黒木正憲，山本矩一郎，『大学への数学　臨時増刊号　幾何・解法の探求』，東京出版，1962