素因数分解を利用した自然数の累乗の和の求め方とその指導

吉　川　行　雄

自然数の累乗の和を、素因数分解を利用してもとめる方法を思いつき、これを中心に、累乗の和を求めるくふうを考える授業を試みてみた。

素因数分解を利用するくふうとは、まず、$S(n)=1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r$ について、$n=1$ から、$n=20$ ぐらいまで、実際に計算して$S(n)$を求める。つぎにその求めた結果を素因数分解し、因数と n との関係を探していく。授業で扱う $r\leqq 4$ の場合は、$S(n)$の次数も高くなく、n、$n+1$ を因数に持っているので、このあたりから関係を予想していくことは、さほど困難なことではない。もちろん、整数の範囲で話を進めるために、途中から$S(n)$のかわりに $2S(n)$ や $6S(n)$などについて調べていくくふうが必要になる。

本稿では、この教材で、高校２年生に行った授業について報告する。

1.　はじめに

自然数の累乗の和の求め方については、昔からいろいろなくふうがなされてきた。とくに、$\sum_{k=1}^{n}k$、$\sum_{k=1}^{n}k^2$ については、図形を利用したものなど、その種類も多い。

雑誌「数学セミナー」（日本評論社）で紹介されたものだけでも軽く十指に余る。(1)

1989年の本誌研究会でも内海庄三先生の研究が紹介された。この研究結果は日数教会誌にも掲載されている。(2)

しかし、そのいずれもが、実際の授業でとり上げて生徒に考えさせ、自主的な活動を発動させていく教材としては問題が多く、教師主導に終始しがちである。

だからといって、この教材を捨てたくない。自然数の累乗の和を求めることは、区分求積の基礎となるばかりでなく、実際の計算で確かめながら思考を進められること、数学のいろいろな内容を学習できることなど、魅力的な教材である。

とくに、電卓やコンピュータがこれだけ普及してきた現在、電卓やコンピュータの力をかりながら作業を能率よく進めるくふうも考えられるから、いっそうこの教材の価値は高まっているといえよう。

本稿は、素因数分解を利用することで、数学が苦手の高校生が累乗の和を求める公式をつくっていった授業について報告する。

2.　対象とした生徒

本校（東大附属中・高）では、高校２年生に対し代数・幾何３単位を必修とし、あと２単位分を基礎解析か数Ⅱのいずれかを選択必

修として選ぶことになっている。

この選択2単位分は、3学級を解体し、基礎解析2コース、数学Ⅱ2コース、計4コースに分かれて授業することが多い。(生徒の希望の数により形が異なることがある。)

今回の授業は、数学Ⅱを選んだ生徒のうち、とくに数学を苦手だと思っている生徒を集めたコースで行った。1990年と1991年の2回、同じような組成の生徒に対し、同じような構想でほぼ10時間ほどの授業を実践した結果、2回とも、ほぼ同じような展開となった。

そこで本稿では、この2回の授業の結果を総合し、ひとつの流れにまとめて報告することにする。

3. 授業のあらまし

(1) 1から17までの自然数の和

まず、次の課題にとり組ませる。

〔課題〕

次の和を、求め方をくふうして求めてみよう。1通りでなく、いろいろな求め方をくふうしてみる。

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17$$

生徒から、次のような求め方が発表された。

① 20をつくる。

$$1+2+(3+17)+(4+16)+(5+15)+(6+14)+(7+13)+(8+12)+(9+11)+10$$
$$=(1+2+10)+20\times 7$$
$$=153$$

② 10の位(10の部分)と1の位とに分ける。

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+10\times 10+(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)-18-19-20$$
$$=55\times 2+100-57$$
$$=153$$

この生徒は $1+2+\cdots+10=55$ を知っていて、これを利用したという。

③ 小さい方と大きい方のバランスを考えて18をつくる。

$$(1+17)+(2+16)+(3+15)+\cdots\cdots+(7+11)+(8+10)+9$$
$$=18\times 8+9$$
$$=153$$

④ ③で9ひとつがはんぱになることから、0を導入してすべて対にするくふう。

$$(0+17)+(1+16)+(2+15)+\cdots\cdots+(7+10)+(8+9)$$
$$=17\times 9$$
$$=153$$

⑤ 18をつけ加えて、すべてを対にするくふう。

$$(1+18)+(2+17)+(3+16)+\cdots\cdots+(8+11)+(9+10)-18$$
$$=19\times 9-18$$
$$=153$$

⑥ $1+2+3+4+5+\cdots\cdots+15+16+17$

$17+16+15+14+13+\cdots\cdots+3+2+1$

$(18\times 17)\times\frac{1}{2}=153$

(2) $S(n)=1+2+3+\cdots\cdots+n$ を n の関数とみる。

① n をつぎつぎに変えながら、それに対応する $S(n)$ を答えさせる。この中から、n と $S(n)$ との対応関係をしだいに強く意識させていく。

1 ……… 1

2 ……… 3

3 ……… 6

4 ……… 10

……………

n ……… S(n)

(2) 「関数」という言葉をひき出し、関数は関係であるから視覚などではとらえにくいという話をする。それをわかりやすくするくふうとして

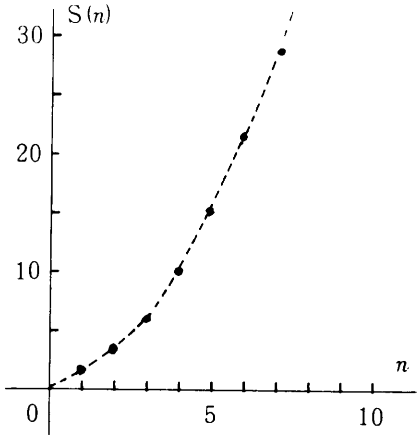
・表　・グラフ　・式

などの表現を思い出させる。

③ n とS(n)の表をつくる。

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

④ グラフをかく。



⑤ グラフから関数の種類を予想する。

グラフは曲線の上にのっているようだ。

そこで、グラフが曲線となる関数で知っているものをあげてみる。

・反比例（双曲線）

・二次関数（放物線）

・三角関数

このうち、三角関数の周期性のあるグラフとはかけ離れているし、反比例の関係ではないから、放物線ではないか、という予想がでてくる。

すると、S(n)は n の二次関数になるのではないか、ということになる。

(3) S(n)を n の2次式で表す

S(n)が n の二次関数ならば、S(n)は n の2次式で表されるはずである。

そこで、

$$S(n)=an^2+bn+c$$

として、a、b、c を決めるくふうを考える。

上のように置いてみる発想は、生徒にいっては難かしいようで、でてくるのにだいぶ時間がかかった。

a、b、c を決定する方法については、表を満足するように、連立方程式をつくる案が比較的かんたんに出てきた。

すなわち、

$$S(1)=1、S(2)=3、S(3)=6$$

を満足するように a、b、c を決めればよいのだから、連立方程式

$$a+b+c=1$$
$$4a+2b+c=3$$
$$9a+3b+c=6$$

を解けばよい。

これを解くと

$$a=\frac{1}{2}、\quad b=\frac{1}{2}、\quad c=0$$

が得られるから

$$S(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。

⑷　⑶の結果についての議論

⑶で得た　$S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$　について、nにいろいろな数を入れて確かめてみる。

$n=1$、2、3 については、成り立つように a、b、c を決めたのだから成り立つのは当然だが、もっと大きな数についてはどうなのか、という疑問を持たせたい。

また、二次関数ということ自体が予想したものであり、二次関数とわかっているわけではなかった、ということも問題にしたい。

要するに、すべての自然についてこれでよいという保証がほしいという話をする。

それはなかなか難かしいことなのだが、数学ではこういう時の「秘策」があることを話す。

$S(n)$は、nのつぎでどうなるかを調べる。

$$\begin{aligned}S(n+1)&=S(n)+(n+1)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)\\&=(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)\\&=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\end{aligned}$$

$$S(\boxed{n+1})=\frac{1}{2}(\boxed{n+1})((\boxed{n+1})+1)$$

と $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$ とを比較して、同じ関係になっていることを確める。

ここで、「数学的帰納法」について、ごくかんたんにふれる。生物を例にして、「自分の子孫を残すことをずっと続ける」ということが、気の遠くなるような長い時間にわたって存在し続けているもとなのだ、という話などをした。

⑸　素因数分解を利用して、$S(n)$を表す式を予想する。

まず、nと$S(n)$の表をつくり、各$S(n)$を素因数分解してみる。その結果は次のようになる。

n	$S(n)$	素因数分解
1	1	1
2	3	3
3	6	2×3
4	10	2×5
5	15	3×5
6	21	3×7
7	28	$2^2\times7$
8	36	$2^2\times3$
9	45	$3^2\times5$
10	55	5×11
11	66	$2\times3\times11$
12	78	$2\times3\times13$
13	91	7×13
14	105	$3\times5\times7$
15	120	$2^3\times3\times5$
16	136	$2^3\times17$
17	153	$3^2\times17$
18	171	$3^2\times19$
19	190	$2\times5\times19$
20	210	$2\times3\times5\times7$

$S(n)$を素因数に分解したのだから、まずnが素数のところに目をつける。すると、

$3\cdots\cdots2\times3$、$5\cdots\cdots3\times5$、$7\cdots\cdots2^2\times7$

というように、$S(n)$はnを因数に持つようである。

ところが2のときだけが例外である。

一方、nが素数でない場合、9や15など、奇数でなければ

$$9\cdots\cdots\cdots3^2\times5=9\times5$$

$$15 \cdots\cdots 2^3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 15$$

のように、S(n)は n を因数に持つ。

S(n)が n を因数に持たない、2、4、6、8、………を調べると、因数に2がひとつ分不足していることがわかる。

そこで、その2を補った2×S(n)をつくってみる。

n	S(n)の素因数分解	2 S(n)	
1	1	1×2	1×2
2	3	2×3	2×3
3	2×3	$2^2\times3$	3×4
4	2×5	$2^2\times5$	4×5
5	3×5	$2\times3\times5$	5×6
6	3×7	$2\times3\times7$	6×7
7	$2^2\times7$	$2^3\times7$	7×8
8	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	8×9
9	$3^2\times5$	$2\times3^2\times5$	9×10
10	5×11	$2\times5\times11$	10×11
11	$2\times3\times11$	$2^2\times3\times11$	11×12
12	$2\times3\times13$	$2^2\times3\times13$	12×13
13	7×13	$2\times7\times13$	13×14
14	$3\times5\times7$	$2\times3\times5\times7$	14×15
15	$2^3\times3\times5$	$2^4\times3\times5$	15×16
16	$2^3\times17$	$2^4\times17$	16×17
17	$3^2\times17$	$2\times3^2\times17$	17×18
18	$3^2\times19$	$2\times3^2\times19$	18×19
19	$2\times5\times19$	$2^2\times5\times19$	19×20
20	$2\times3\times5\times9$	$2^2\times3\times5\times7$	20×21

もう一度表を見直してみると、素因数13は13のところだけでなく、12のところでも因数になっている。他の素数についても同様で、素因数17は、17のところと16のところに出てくる。

つまり、S(n)は n とともに(n＋1)も因数に持つことが予想できる。

また、2 S(n)の因数のうち、n を除いた残りを調べてみると、すべて(n＋1)になっている。

したがって

$$2\,S(n) = n\,(n+1)$$

であることになり、

$$S(n) = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

である。

(6)　$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2$ への発展

$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2$ について、(5)と同じような方法で、S(n)を表す n の式を求めてみる。

S(n)を求めた結果やその素因数分解は、次のページの表のようになる。

今回も、(5)と同じように n が素数のところに注目すると、S(n)が n と(n＋1)の両方を因数に持つことが予想される。

それをはっきりさせるために、こんどは 2×3×S(n) をつくる。2のところに2、3の因数を、3のところに3、4の因数を……と考えていくと、全体に2、3が不足しているからである。

2×3×S(n)から、一番右の欄のように、

$$n \times (n+1) \times \boxed{}$$

の形に整理すると、$\boxed{}$ のところは

3、5、7、9、11、13、……

という奇数の列になる。n のところでは 2n＋1 になるから、

$$2 \times 3 \times S(n) = n\,(n+1)\,(2n+1)$$

ということになる。したがって

$$S(n) = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$$

n	S(n)	素因数分解	$2\times 3\times S(n)$	
1	1	1	$1\times 2\times 3$	$1\times 2\times 3$
2	5	5	$2\times 3\times 5$	$2\times 3\times 5$
3	14	2×7	$2^2\times 3\times 7$	$3\times 4\times 7$
4	30	$2\times 3\times 5$	$2^2\times 3^2\times 5$	$4\times 5\times 9$
5	55	5×11	$2\times 3\times 5\times 11$	$5\times 6\times 11$
6	91	7×13	$2\times 3\times 7\times 13$	$6\times 7\times 13$
7	140	$2^2\times 5\times 7$	$2^3\times 3\times 5\times 7$	$7\times 8\times 15$
8	204	$2^2\times 3\times 17$	$2^3\times 3^2\times 17$	$8\times 9\times 17$
9	285	$3\times 5\times 19$	$2\times 3^2\times 5\times 19$	$9\times 10\times 19$
10	385	$5\times 7\times 11$	$2\times 3\times 5\times 7\times 11$	$10\times 11\times 21$
11	506	$2\times 11\times 23$	$2^2\times 3\times 11\times 23$	$11\times 12\times 23$
12	650	$2\times 5^2\times 13$	$2^2\times 3\times 5^2\times 13$	$12\times 13\times 25$
13	819	$3^2\times 7\times 13$	$2\times 3^3\times 7\times 13$	$13\times 14\times 27$
14	1015	$5\times 7\times 29$	$2\times 3\times 5\times 7\times 29$	$14\times 15\times 29$
15	1240	$2^3\times 5\times 31$	$2^4\times 3\times 5\times 31$	$15\times 16\times 31$
16	1496	$2^3\times 11\times 17$	$2^4\times 3\times 11\times 17$	$16\times 17\times 33$
17	1785	$3\times 5\times 7\times 17$	$2\times 3^2\times 5\times 7\times 17$	$17\times 18\times 35$
18	2109	$3\times 19\times 37$	$2\times 3^2\times 19\times 37$	$18\times 19\times 37$
19	2470	$2\times 5\times 13\times 19$	$2^2\times 3\times 5\times 13\times 19$	$19\times 20\times 39$
20	2870	$2\times 5\times 7\times 41$	$2^2\times 3\times 5\times 7\times 41$	$20\times 21\times 41$

ここでひと呼吸おくと、数学的帰納法の話題は、生徒の方からも出てくる。

(7)　表を再度見直して

n と $S(n)$ の表を、

$S(n)=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n$

$S(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$

の両方について見直してみる。とくに、$S(n)$ のつくる階差と、$S(n)$ の次数に注目させる。

$S(n)=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n$ のとき、

n	$S(n)$	
1	1	
		2
2	3	
		3
3	6	
		4
4	10	
		5
5	15	
		6 ← 1次式？
6	21	

↖2次式であることがわかった

$S(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$ のとき

n	$S(n)$		
1	1		
		4	
2	5		5
		9	
3	14		7
		16	
4	30		9
		25	
5	55		11
		36	
6	91		13 ← 1次式？
		49 ↖2次式？	
7	140		

↖3次式と予想される

$S(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$ のとき、$S(n)$ が n の3次式になることは、グラフによらずとも、表を見比べることから予想できる。

(8)　3次式の決定

$S(n)=an^3+bn^2+cn+d$

とおき、

$S(1)=1$、$S(2)=5$、$S(3)=14$、$S(4)=30$

という条件から、連立方程式

$$a+b+c+d=1$$
$$8a+4b+2c+d=5$$
$$27a+9b+3c+d=14$$
$$64a+16b+4c+d=30$$

をつくる。これを解くと

$$a=\frac{1}{3}、b=\frac{1}{2}、c=\frac{1}{6}、d=0$$

となる。したがって

$$S(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$
$$=\frac{1}{6}n\,(2n^2+3n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$$

となり、(6)で求めた結果と一致する。

この場合も、数学的帰納法にふれることになる。

4.　このあとの発展

(1)　評価課題として $S(n)=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ の場合に挑戦させる。

この場合は　$S(n)=\{\frac{n\,(n+1)}{2}\}^2$

となるので、処理しやすい。実際、これまでのことが理解できていれば、$n=5$ ぐらいまで調べれば十分である。

n	$S(n)$		$2^2\times S(n)$	
1	1	1	2^2	$1^2\times2^2$
2	9	3^2	$2^2\times3^2$	$2^2\times3^2$
3	36	$2^2\times3^2$	$2^4\times3^2$	$3^2\times4^2$
4	100	$2^2\times5^2$	$2^4\times5^2$	$4^2\times5^2$
5	225	$3^2\times5^2$	$2^2\times3^2\times5^2$	$5^2\times6^2$

この結果から　$4S(n)=n^2(n+1)^2$

よって　$S(n)=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$

(2) 等差数列の和を、自然数の和と関連づけて求める。

たとえば

3＋6＋9＋…………＋51

の和を求めるのに

3（1＋2＋3＋………＋17）

と考えることで、自然数の和の問題に帰着させるくふうをする。

同じようなくふうで、等差数列全体を扱うことができる。

5. この授業をふり返って

この一連の授業で強く印象に残っているのは、夢中になって計算し、表をつくっている生徒達の姿、ふんいきである。

最近の子どもは計算が嫌いで……という話もあるが、実際には、よい場面さえあれば、いつの子どもも一所懸命計算してしまうものである。今回もそれをはっきりと確かめることができた。

もうひとつの印象は、S(n)の式をつくった生徒のうれしそうな顔である。素因数分解のアイディアは教師からの話等によるのだが、式は何人もの生徒が自分でつくり上げた。

そういう場面を設定できるという意味でもこの教材を評価したい。

なお、電卓を持ってきている場合、その使用が自由なのはもちろんである。

6. 「数をつくる」授業との関連

この指導法を試みる以前は、自然数の累乗の和を求めるのに連立方程式を用いて式を決定する方法を中心にすえていた。その際の数学的帰納法の説明をしているときに素因数分解の利用を考えついた。しかし、本誌第１号に報告した「数をつくる」授業[(3)]の考え方の活用場面を探していたから思いついた、という方が妥当のように思う。

つまり、この指導法は、「素数を材料に乗法で数を生成していく」という数の見方と密接な関係がある。この数の見方を、基本的な見方のひとつとして大切にしていきたい。

参考文献

(1) 白坂　繁「$\sum k^2$と$\sum k^3$を求める簡単な２つの方法」の参考文献　日本数学教育学会誌　第70巻第３号、1988 PP. 33－34がくわしい。

(2) 内海庄三「自然数の累乗の和$\sum k$の求め方について」日本数学教育学会誌　第72巻第５号、1990 PP. 58－65

(3) 吉川行雄「数をつくる」授業の試み　学芸大数学教育研究　第１号、1989 PP. 107－122

（よしかわ　ゆきお

東京大学教育学部附属中・高

〒164 東京都中野区南台1－15－1）