

数学的モデルをつくる活動を取り入れた授業についての一考察

— 「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を題材として —

太 田 伸 也

「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を題材として、モデル化の過程を生徒にたどらせる授業を試み、線路や駅、電車についての条件を意識しながらこの状況を図に表す場面での生徒の反応や授業での議論を考察した。問題場面を図に表現していくことは、生徒にとって予想以上に難しく、特に「駅のホームを円とみなす」ことに抵抗がある生徒が多かった。このことは、現実の問題を理想化・単純化してモデルをつくり、その妥当性を検討する活動を取り入れることの必要性を示している。

1. 本稿の目的と意図

本稿では、数学的活動¹⁾の中で、現実世界の問題を数学の問題にのせていく過程に焦点をあてていく。特に、生徒が、実際の状況や現実についての条件を意識し、理想化・単純化しながら問題場面を図に表現することにどのように取り組むかを調べようとするものである。これによって、現実の問題から数学的モデルをつくる活動を授業に取り入れることの必要性を明らかにし、指導への示唆を得ることが目的である。

現在の中学校の図形指導では、現実の問題から数学的モデルをつくる活動はほとんど扱われていない。これは、完成された図形の知識や体系を与えることに中心がおかれていることによる。このような図形指導を、生徒に幾何の世界を構成させる図形指導に変えていくという意図から、その重要な側面として現実の問題の数学的モデルをつくる活動を取り上げた。

2. 研究の方法

「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」²⁾を題材として、これを数学の問題にのせていく過程を生徒にたどらせる授業を試みる。そして、線路や駅、電車についての条件を意識しながらこの状況を図に表す場面での生徒の反応や授業での議論を考察する。

取り上げる課題は次のようなものである。

カーブしているホームに電車が止まるとき、ホームと電車との隙間は最大でどのくらいになるだろうか。(最大になる部分と最小になる部分との差はどのくらいになるか。)

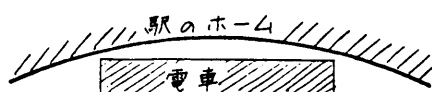


図1 カーブしている駅のホームと電車

この問題を考えるためには、ホームを線路と同じようにカーブする円の一部、電車を長

方形とみなして図に表すことが必要である。また、ホームの曲率半径、電車の長さ、電車とホームとの最小間隔を知らなければならない。

この問題を、図を与えないで考えさせ、この場面をどのような図に表現していくか、そのときに、実際の状況や現実についての条件をどのようにとらえていくかを生徒の反応から考察する。特に、駅のカーブを円とみなしてよいか（どのような曲線とみなすか）を議論させ、そこから「カーブを円とみなして考える」ことに対する生徒の意識をさぐる。

3. 授業の実際

(1) 指導の概要

先に示した「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を中学3年で扱った。実施時期は1994年11月で、三平方の定理を含め、ほぼ中学校の数学の内容を学習し終えたところである。授業の概要は以下の通りである。

①課題を提示し、そのとらえ方を個々に考えさせる。（0.5時間）

学校の最寄駅である「大泉学園駅」（西武池袋線）——ホームの一部がカーブしている——を例に出しながら、カーブしている駅のホームと電車との隙間が一定ではないことに気付かせ、次の課題を提示する。

いま、線路が曲がっている場所に駅をつくるとする。このとき、ホームと電車との隙間が最大でどのくらいになるのかを知りたい。これを知るには、何がわかればよいか（どんなデータが必要か）。どのようにして求めるかを考えながら書いてみよう。

この課題の提示にあたっては、黒板などに

図を示すことはせず、場面を絵や図に表すことを含めて生徒個々のとらえ方に任せておく。

②議論を通して問題場面を図に表し、必要なデータを得る。（1時間）

大泉学園駅の場合について、「カーブしているホームに電車が止まる」場合をどのように図に表すかを考えさせる。その中で、曲がり具合をどのようにとらえるか、円の一部とみなしてよいかどうかを議論させる。また、円とみなしたときに、隙間を求めるのに必要なデータが何かを考える。

③ホームと電車との隙間を計算で求める。

（1時間）

大泉学園駅の場合について、電車とホームの隙間がどのくらいになるかを計算で求め、実際の場合と比較する。また、カーブがもっときつかったらどうなるかを考えさせる。

なお、授業にあたって、教師の側では図2、図3のような資料を調べておいた³⁾。大泉学園駅のホームの最大曲率は、上りホームで $R=400$ 、下りホームで $R=620$ のことである。

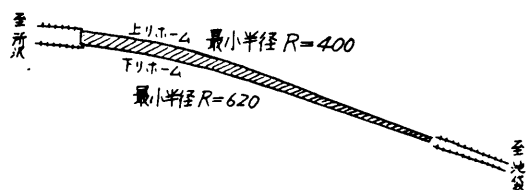


図2 大泉学園駅（西武池袋線）の状況

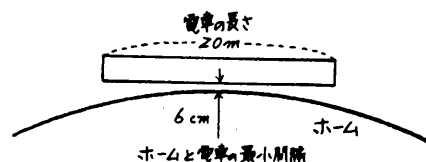


図3 電車の長さとはホームとの最小間隔

(2) 授業の実際と生徒の反応

①「電車とホームの隙間」を「円と直線（弦）との間隔」ととらえることができたか

生徒の多くが利用している「大泉学園駅」の状況に触れながら、次のように問題を投げかけた。

T（教師） 大泉学園駅で電車に乗るとき、ホームと電車との隙間はどのくらい？

P（生徒）（口々に）10cm, 15cm, 30cm……
（「落ちた人がいる」「くつを落とした」「かさを落とした」等の声）

T どこでも隙間は一定ですか？

P 違う。

T なぜ？

P ホーム（線路）が曲がっているから。
階段の下あたりが曲がっている。

T そう。

それでは、こういうことを考えてみよう。
線路が曲がっているところに、駅をつくることになった。電車とホームとの隙間が最大どのくらいになるかを知るには、何がわかればよいだろうか。駅を設計するつもりになって、どんなデータが必要かを考えてください。また、そのデータがわかったらどのようにして隙間を求めることができるかも考えてください。

この時間は、黒板に図などは一切示さなかった。このときの生徒32人の記述を、「円と直線（弦）との間隔」ととらえているかという観点で分類した結果が表1、図4である。

表1で(り)や(わ)が多いことからわかるように、この段階では問題の状況をとらえていない生徒が半数以上いる。また、(エ)のように、線路がカーブしている場所での傾きを問題にしている生徒も出てきた。取り上げてい

くべき問題ではあるが、全体の議論の中では、問題の所在に触れるだけにとどめることにした。

②授業での議論はどうだったか

第2次は、次の発問から授業に入った。

『カーブしているホームに電車が止まったときの状態を図に表してみよう。』

以下では、このときの生徒の活動について、特に「ホームの曲がり具合を円の一部とみなしてよいか」をめぐる議論の進展を示す。

(7) ホームと電車の位置関係がなかなか図に表せない

「図に表してみよう」という発問の後、机間巡視の間に生徒から次のような質問があった。

A₁ 曲がり具合は一定ではないんですか？

B₁ 電車が止まるのはカーブの内側ですかそれとも外側ですか？

C₁ 図って、どこから見た図ですか？ 上から見たところ？ ホームに立ったところ？

D₁ 1両だけで考えるか、何両もつながっている場合かによって違うんじゃないですか？

A₁ や B₁ のような生徒は、ほぼ状況をつかんでいると言えるが、どちらかというところ

C₁ や D₁ のように状況をつかむ視点をしぼりきれていない生徒が多かった。これらの生徒の声から、問題場面をとらえ、理想化・単純化しながら図に表すときに、生徒は多くの事柄を検討しながら必要な条件を取捨選択している様子がわかる。

(イ) 線路と駅との位置関係をとらえる

最初に指名、発表させた生徒Eは、黒板に、カーブしている線路に対して駅を長方形とす

表1 カーブしているホームと電車との隙間のとらえ方（最初の自由記述：32人中）

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
円と直線（弦）との間隔ととらえた	曲線と直線との間隔を考えているが明確でない	とらえかけているが不明確	カーブでの車両の傾きを考えた	とらえていない、その他
4	8	9	1	10

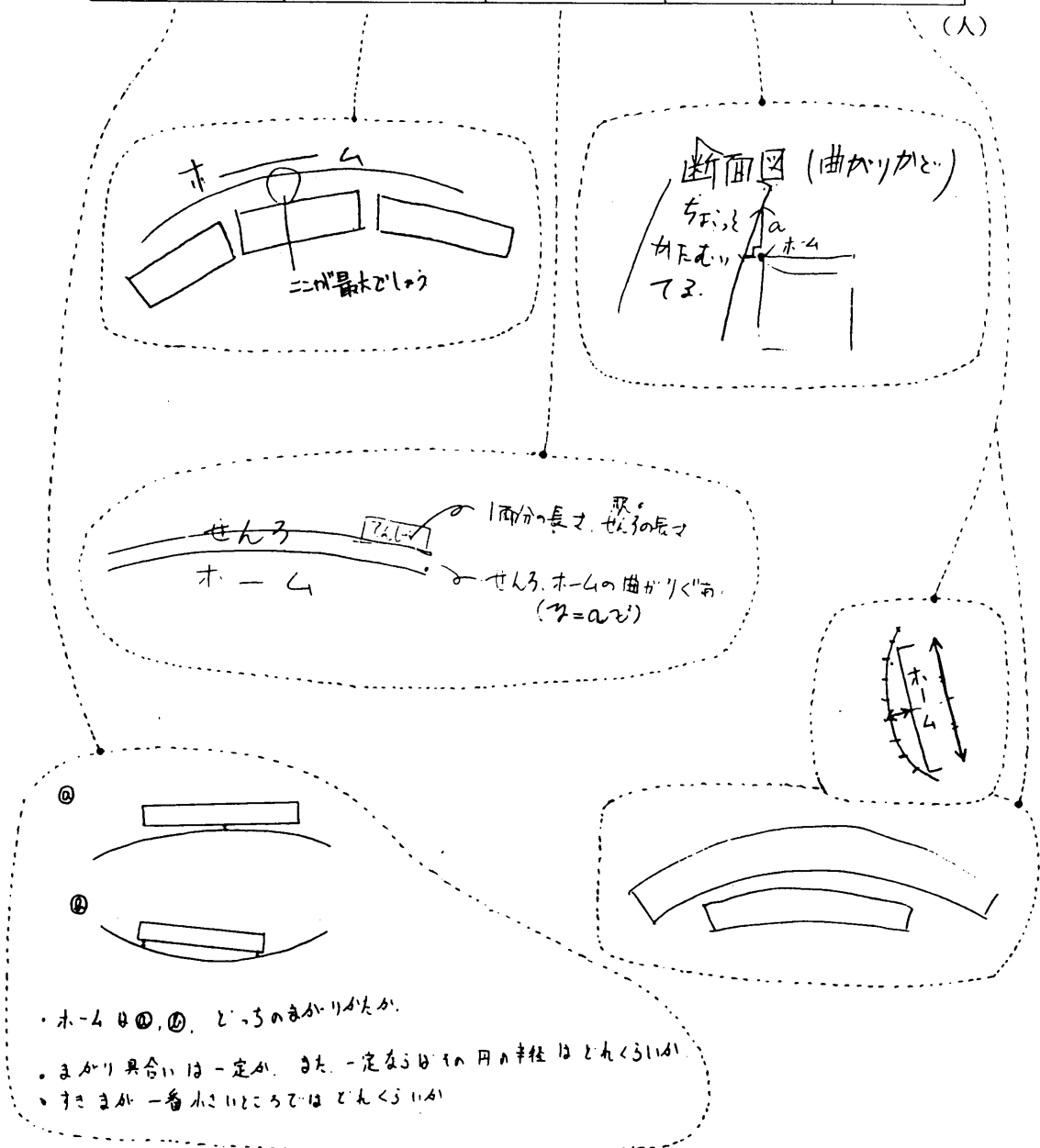


図4 カーブしているホームと電車との隙間を考えようとした生徒の反応例

る図をかいた。

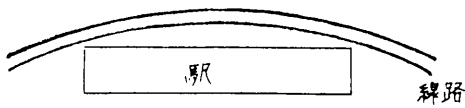


図5 駅を長方形とみなした生徒の図

これに対し、

A: 駅を曲げたらどうかな。

という指摘があったが、生徒Eは、次のように、駅を直線、線路を弧（扇形）としてとらえることを主張した。

E: 曲がっているところを考えると、……絶対こんなのないけど、わかりやすくかくと、この曲がっているということは、こういうふうにすれば扇形になるわけで、……、（隙間が）一番大きいというのはここ、扇形の一番真ん中のこの所で、……

このように、カーブを円ととらえてはいるものの、ホームを直線でとらえてしまっている。これは、次のように生徒F、G、Hの発言によって修正され、「線路と駅が同じ感じに曲がっていないと隙間ができてしまう」ことを認めていった。

F: 駅と電車を入れ替えて、電車を直線、駅を曲線にすると説明が成り立つと思う。

G: ホームはどこでどう曲がっているかわからないけど、列車の1両というのは必ずまっすぐだから。だから、駅をまっすぐとするより、列車をまっすぐとした方がよい。

H: 現実問題としては、こっちは絶対ありえない。駅と線路が離れてしまって、列車に乗れないから、ありえないでしょ。ホームと線路の幅になってしまう。

(ウ) ホームを円の一部分とみなしてよいかを議論する

ホームは線路と同じように曲がっていることを確認した後、さらに次のようなとらえ方が出された。

G₂: 車両っていうのは絶対まっすぐですよ。だから、ホームは少しくらいまがってても、……だから、ホームの一番曲がり具合がはげしいところに、それを想定しているのだから、その曲がり具合の激しいところのまわりにそれで円をかけば、これが成り立つ（円と見てよい）んじゃないですか。ホームは、全部同じ曲がり具合では曲がっていないということ、だから、一番離れているところを知りたいのだったら、一番曲がっているところに、扇形みたいなものをつくって、それで考えればいい。

これに対し、「一番曲がっているとしても、電車の止まり方によって、隙間があまりあかない場合もある。一番曲がっているところが必ずしも開くとは限らない」という指摘があったが、「電車が駅を通っていく間にはどこかで最大になる場合がある」ことも指摘され、その場合を考えることにした。

それでも、次のように、円とみなすことには疑問をもつ生徒がいた。

I: 曲がり方が、円とは限らないから、予想できないんですよ。

J: 円なんですか、楕円なんですか？

A: 2度、3度と曲がっている可能性はないんですか？

そこで、「円とみなす」ことの是非についての議論を進めたところ、次のような考えが出された。

A₄ 円でもいいんだろうけど、放物線の方がゆるやかだから、いろんな形が表現できる。

G₁ ある一定のとこだけだったら、ほんのちっちゃな弧としてみなせないわけではなけれど、もし、全体を考えるんだったら、弧とはみなせない。

(E) ホームを円の一部分とみなしていく

以上のような議論を経たところで、この問題で考えているカーブの範囲がどのくらいかをとらえさせるために、図2に示すようなカーブの曲率半径、電車の長さなどのデータを与えていった。特に、曲率半径については、部分部分でその曲がり方を変えていること、緩和曲線を使っていることなどに触れながら、OHPで、地図にかかっている実際の数値を見せていった。

そして、曲率半径

400mのカーブに長さ20mの電車が止まっている状況を、縮図にかくとどのようになるかを考えさせた。半径4cmの円に対して0.2cmの弦に

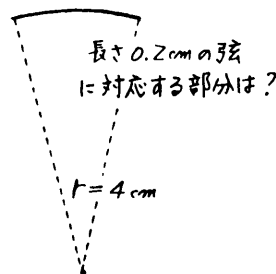


図6 縮図で弧の大きさを調べる

径40cmの円に2cmの弦をかくて見せた。

G₄ 中心角は3°くらいじゃない？ あっ、違う、もっと小さい。

このような中で、次のような発言もあった。

G₅ やっぱり、電車1両の長さのところは弧とみなさなければ、今の計算では出せないから、……短い角度でこんなふうになっていたら電車が入らないからここで計算

できないんですよ。……さっきのこういうゆるいカーブのところがあっても、この図に、放物線を使ったとして、列車が1両分がこうやって（放物線の軸に垂直に）来れば計算で出せるんですけど、ここがむちゃくちゃなカーブだったら、……

このように、全体としては、円とみなして考えていくことを認めている生徒が多くなったが、やはり疑問をもっている生徒もいる。ここでは、教師の側から、「円として計算してみよう」として進めていった。また、計算の結果が実際とほぼ合うとすれば、円と考えてしまうことも悪くないということになるし、現実には合わない結果が出てしまったとしたら、円とみなしたことを再検討すべきだということにも触れておいた。

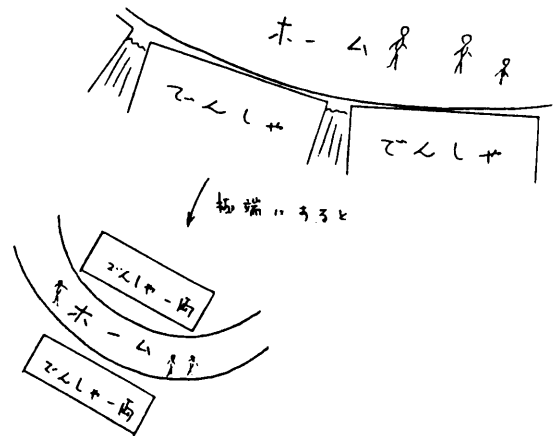


図7 ホームを円とみなす（生徒のノート）

③ホームと電車の隙間を計算する

第3次は、線路やホームのカーブを円とみなすことを前提として、ホームと電車のすきま（一番隙間が広くなるときと狭くなるときの差がどれくらいか）を計算させていった。

計算にのせるためにどんなデータが必要か

を考えさせながら、そのデータを与えていった。設定した条件と、その解決は図8の通りである。

図8のような計算によって、最大の隙間は約18cmくらいになるという結果が出た。この数値が、現実と比べてどうかを聞き、学校の帰りに見てみるように指示した。また、あらかじめとっておいた写真を見せ、最小と最大の差が「18-6だから12cm」という結果が現実とそうずれていないことを確認した。また、下りホーム（ $R=620$ ）の場合には8cmくらいの差ができることを計算により確認した。

さらに、仮に曲率半径を200mとか100mにしたらどうなるかを計算させ、次のことを確かめた。

- ・ $R=200$ のときには、隙間の最大が30cmをこえる。
- ・ $R=100$ では隙間の最大が60cm近くにもなってしまう。

そして、最後に次のことに触れておいた。

- ・円の一部として計算したが、あまり現実とずれない。
- ・円は、中心と半径さえわかれば、曲がり方が決まる。小さい部分については円と見てしまうことで、計算にのせることができる。

4. 考察

「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を題材とした授業での生徒の反応から、次のことがわかった。

- ①線路やホーム、電車についての条件を意識し、理想化・単純化しながら問題場面を図に表現していくことは、生徒にとって難しい。

- ②特に、理想化・単純化する中で、「カーブ

している駅のホーム」を円とみなすことには抵抗がある生徒が多かった。

②については、円とみなしてよいことの根拠が、生徒にとって明確ではないことに注意する必要がある。円とみなした方が便利だが、生徒が言うように、放物線とみなしてもよいかもしれないのである。駅や線路、電車についての知識をもつことも1つだが、近似で考えて現実にあえばよいという判断に慣れることが必要だろう。そうでないと、このような場面で理想化・単純化して考えることができない。

一方、最初から「ホームを円とする」という条件を与えて問題を提示してしまえば、この問題は生徒にとって扱いやすくなる。一般に、このような問題は、三平方の定理の適用問題として、図と条件が与えられて提示される場合が多いのも事実である。しかし、上の①、②は、そのような与え方をするので、生徒が「数学の問題だから解けるように円とみなしているのであって実際にはそうはいかない」ととらえてしまう危険性があることを示している。つまり、理想化・単純化された問題を与えることで、数学の問題と現実の問題は違うのだらうという観念をもたせてしまうのである。

この授業では、ホームのカーブを円とみなすかどうかの議論にほぼ1時間をかけた。最終的には「いろいろな曲がり方をしているけど小さい部分では円とみなしてよいのではないか」という生徒の主張を生かして、次のことを確認しながら「円とみなしていく」ことに決めた。

- ・円とみなしたときの曲率半径に比べて、電車の長さが小さく、円のごく小さな弧を取り

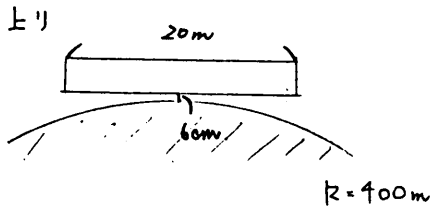
電車-両

ホーム

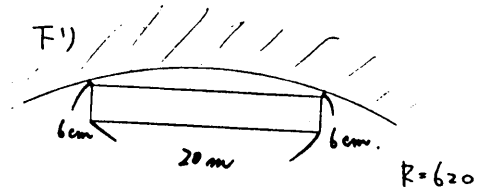
長さ 20m.

 $R = 400\text{m}$ 外 $R = 620\text{m}$ 内
(半径)

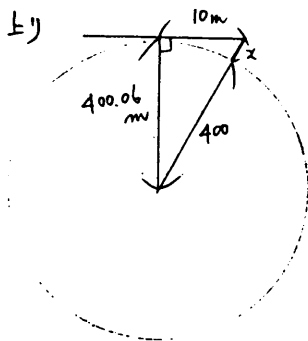
円の一部分と12みよう(弧).



約 18cm



約 14cm



$$\sqrt{400.06^2 + 10^2} - 400$$

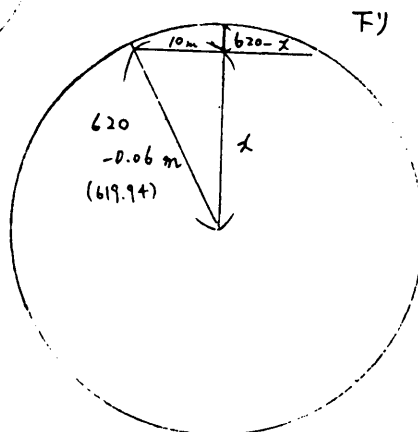
$$= 0.18495$$

 $R = 200$

最大 31cm < 511

 $R = 100$

→ 56cm < 511



$$620 - \sqrt{619.94^2 + 10^2}$$

$$= 0.14067$$

図8 カーブしている駅のホームと電車との隙間を求める(生徒のノートから)

上げているにすぎない。

また、円とみなして計算した後で、次のことを確認した。

- ・円とみなして計算した結果が、現実とあまりずれていない。

- ・円とみなすことで計算にのせることが容易になった。

現実の問題を扱う場合には、このように理想化・単純化する過程をたどらせることと、それによって得られた数学的な解を現実に戻しながら検討し、モデルの妥当性を確認したり、必要に応じてモデルを修正したりする活動が必要である。このような活動なしには、生徒にとって「円とみなしたことが妥当であったのか、有効であったのか」という確認ができず、現実の問題のモデルとなっていたのかどうか分からないからである。

今回の授業での扱いに関して言えば、この点での扱いは不十分であった。たとえば、「カーブを放物線とみなそう」という生徒の主張をもっと丁寧に取り上げるべきであった。また、「カーブしている部分では線路に傾斜がついている」ことを指摘しようとしていた生徒のとらえ方も取り上げて検討させるべきであった。カーブにおける線路の傾斜も、ホームと電車との間隔を決める要素であり、三角比などの数学的内容につながっていく。このように、いろいろなモデルの可能性について1つ1つ検討していくことを大切にする必要がある。

5. まとめと今後の課題

「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を考えさせたときに、問題場面を図に表していくことは、生徒にとって予想以

上に難しいことであった。また、「いろいろな曲がり方をしているホームを円とみなして考える」ことは生徒にとって決して当然のことではなかった。このことは、現実についての条件や状況を意識させ、理想化・単純化しながら図に表していく過程をたどらせることの必要性を示している。同時に、モデルの妥当性を確認したり、必要に応じてモデルを修正したりする活動を授業に取り入れていくことの必要性を示している。

数学の授業で扱われている問題は、最初から条件が設定され、図が与えられている場合が多い。これでは、「現実とはそれほど理想的にはいかない」「実際にはこのように単純化できないが数学の問題だからそうしている」ととらえる生徒を残していつてしまう。このような観念をもたせないためにも、現実の問題を授業に取り入れ、モデル化の過程をたどらせていくことが必要である。そこからどのように「幾何の世界」を構成させていくかという問題を含め、現実の問題から数学的モデルをつくる活動を取り入れた授業についての実践的研究を今後の課題としたい。

今回、「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を授業で取り上げるにあたっては、あらかじめ多くの資料を得る必要があった。このように、現実の問題を扱い、理想化・単純化して数学の問題にのせるときには数学以外の多くの知識を必要とする。扱う題材についての専門的内容にも入り込むことになり、それは個々の教師の教材研究の範囲を越えている場合が多い。授業で扱える教材を用意し、特に現実についての条件や専門的知識が容易に手に入るような条件を整えていく必要性を感じている。

注および参考文献

¹⁾ 島田 茂 「オープンエンド アプローチの意義」, 『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』, みずうみ書房, 1977, pp.14-21

²⁾ 島田 茂 「数学的モデル」, 『教師のための問題集』, 共立出版, 1990, pp.44-51

³⁾ 西武鉄道会社要覧 (’94-’95)他

西武鉄道工務部の方から、軌道に対する車輛限界、駅の建築限界、車輛の大きさなどについてのデータをいただいた。授業では、このデータを生かしながら、実際のデータに近い値を提示していった。しかし、生徒が必要とするデータがそのまま設計基準として決められているわけでもない場合もあり、得たデータをもとに教師の側で選択したり、現実に近い範囲で予測して与えたデータもある。たとえば、車輛の大きさも電車によって異なるが、代表的な場合を想定した。

(おおた しんや

東京学芸大学附属大泉中学校

〒178 練馬区東大泉 5-22-1)