成長のモデルを中学生はどう構成したか
―指数的モデルからロジスティックモデルへ、さらにカオスへ―

小寺隆幸

指数的モデル、さらにロジスティックモデルの概念は、地球の有限性が顕わになった現代における数学的リテラシーの重要な柱であり、すべての子どもたちに獲得させたい。そのために筆者はタンチョウの個体数変化の教材を開発し、授業を行ってきた。本稿では、中学生がモデルを構成した過程を示し、さらにカオスにふれた姿を紹介する。成長の文脈は子どもたちの知的関心を喚起し、数学観を豊かにしうる。成長を組み込んだ新たな関数教育が求められている。

1. “成長”を数学で考える意義

数学と現実世界との関連を理解することは、単なる数学の「活用」に解消しえない深さを持っている。1976 年にダンブローシオは数学を教える理由として、現実問題への数学の応用という「実用的観点」とともに、世界を理解するという「思弁的観点」を提起した。それは「外界の現象を模写する思考のモデルおよび言語からなる大きな知識体の一部分として」数学を学ぶことである。そのために子どもが現実の問題に迫る中で新しい数学を創ることが必要であり、「構造化されたカリキュラムから離脱し、動機付けをもとにした一連の学際的活動として授業を組み立てる」ことを提起したのである[i]。

PISA の数学的リテラシーの定義の冒頭にある「数学が世界で果たす役割を見つけ、理解する」ことも、この思弁的観点であろう。そのためには現実世界と向き合い、数学化することで世界がより深く構造的に理解できることを驚きや感動を伴って体験することが大切なのであり、しかもそのことは数学自体の理解にとっても本質的である。「実世界の文脈で勉強することは、生徒が根底にある数学的概念をわかるのを助けそれらの概念の良さの理解を育てる」(NCTM スタンダード 2000[ii])からである。

中でも“成長 growth”の文脈はきわめて重要である。人間の身体的成長、生物の個体数変化などは私たちにとっても身近であり、そこに現われる様々な成長のパターンの理解は、環境問題や市場経済なども含む広義の成長の認識や未来予測に欠かせない。特に、人類が直面している地球環境問題は、人間社会の活動が巨大化し、エネルギーや物質の膨大な消費と廃棄物の排出が地球システムに影響を与えるに至ったため生じている。かつては無限とみなされた地球の環境容量の有限性が露わとなっている。そのような時代の市民が持続可能性と成長をどう捉えるべきか、「地球環境問題は認識主体としての自己を含む総体的な問題」[iii]である。

その認識にとって数学は本質的に重要である。この問題を先駆的に提起した 1972 年のローマクラブ報告「成長の限界」の論点は生産や消費が指数関数で増加し続ける点にあった。その著者たちは、その後「人口の動き、経済、環境の多くの要素と無数の相互作用を持つ一つの地球システムとしてとらえる」[iv]ことの重要性を提起している。システムを考える数学が「力学系(ダイナミカルシステム)」であり、そのもっとも基本にロジスティック関数が位置する。

欧米では”成長”の問題を数学教育のカリキュラ

ムに位置づける取り組みが始まっている。前記のNCTMスタンダード2000では第9～12学年の代数で、成長率を2%と仮定して世界人口を予測させ、そこで構成した指数関数モデルが永久に良いモデルであるかの議論を通してモデルの限界を理解し、ロジスティック方程式に出会わせていく。そのことは「広い範囲の文脈から引き出された一層複雑な現象のモデルを創り出し解釈できる」力を育む。そして「人口増加は指数的またはロジスティックな傾向にあることを認識する」ことを通して、「ある実世界の現象を、反復的表現と帰納的表現で記述することを学ぶ」のである。

また PISA も数学教育の4つの包括的アイデアの一つ「変化と関係」について、「変化の基本的な関係と種類を認識し理解すること。生徒は、線形的成長、指数的成長及び周期的成長などの概念を認識すべきであり、さらには非形式的であってもよいから、指数的成長の一つとしてロジスティック的成長についても認識すべきである」[v]と提起している。

ロジスティック的成長は数理生態学で見出された概念で、有限な環境での変化を考える最も基本的なモデルであり、その実例は様々な事象で見られる。厳密には微分方程式の解として定式化されるが、簡単な差分方程式で表し数値計算によって変化の様子を探ることは中高生でも可能ではないだろうか。そのことを実証するために筆者はタンチョウの教材を作り 2002 年から 2006 年にかけて中学生に授業を試みた。最初の授業については本会誌 16 号に報告している[vi]。本稿ではその後の授業での生徒の思考の様子を紹介する[vii]。

なお筆者は中学 3 年の選択数学の時間を活用したが、新課程でその時間枠がなくなる中でも、中学・高校での数学課題学習、あるいは総合的な学習と連携した授業として試行可能であろう。そこで意欲的な実践を積み上げることを基礎に、10 年後の教育課程改訂では、現在の関数カリキュラムを大胆に見直し、成長の問題を中学あるいは高校1年に組み込む可能性を拓いていきたい[viii]。

2 2005年公立中学校3年選択授業の経過

筆者が勤務していた多摩市立和田中学校の 3 年選択数学で 10 時間かけてタンチョウの授業を行った。選択数学は週 1 時間で通年実施、習熟度別ではなく希望生徒を均等に二つのグループに分け、異なる時間帯に同じ内容で授業した。木曜 15 名、金曜 17 名で、数学が得意な生徒ばかりではなく様々な理由で数学を希望した(あるいは他を選択できなかった)生徒も含まれる。(ちなみに受講生の必修数学での5段階評価分布は、5－5名、4－5名、3－16名、2－3名、1－3名である。)

以下、木曜の授業を主に紹介する。

1時間目＜課題のおかれた文脈の理解＞

生物絶滅の歴史を紹介し、釧路湿原のタンチョウの映像を見せ、絶滅の危機から蘇ったタンチョウの個体数変化を考え今後の数を推定することは保護の為に重要であることを理解させた。文脈の理解に 1 時間かけたことで、個体数変化を考えることを子どもたちの共通の問題意識にすることができた。

2時間目＜個体数変化の将来予想＞

1952 年 33 羽→2002 年 908 羽という二つの数値のみ提示し、その間の個体数変化の様子を推定させ、さらに将来の個体数変化について予想グラフを考え、それを巡って話し合った。色々な意見が出され討論する中で、将来の変化は条件によって変わりうること、そこで予想とは何らかの仮定をおいて考えることであることを理解していった。

3時間目＜場所も餌も充分ある場合のモデル＞

一旦現実のデータから離れ、理想的な場合を考えてみようと言い、次の課題を提示した。

課題:200 羽のタンチョウが5年後 280 羽になった。増え方が同じとしてその後を予想しよう。

10名が$\boxed{200-280-360-440-520}$…Aと予想。

ほかの5名のうち由は「死んでいく鳥もいるからちょうどにはならない」と$\boxed{200-280-353-435-514}$とした。健は「80 をもとにして増えることも減ることもある」と言い$\boxed{200-280-350-440-520}$とした。そこで私が「実際の数は変動するかもしれないが、大体80と考えている点ではほかの人と同じといって良いかな？」と言うと二人はうなずいた。

一方壮は「次の5年では 80＋ちょっと増えるはず。90 増えるとこうなる」と$\boxed{200-280-370-460-550}$と書いた。栞は「増える数が増えていく。数は良くわからないが…」と$\boxed{200-280-360\text{以上}-440\text{以上}}$とした。私が「増える数が少しずつ増えるということ？」と問うと、壮は考えて$\boxed{200-280-370-470-580}$…Bと修正した。

最後に残った淳は「最初 80 増えたから次はもっと増えるから 100、次は 120 増えると考えた」と発言し、$\boxed{200-280-380-500-700}$と書いた。壮が淳に「120 増えた次はなぜ 200 増えるのか」と質問。淳は「200 羽のとき 80 増えたから、400 羽では 160 増える、さらに 100 羽で 40 増えるのだから 500 羽では 200 増えると考えた」と発言。これを聞いて健や壮太は自分の意見を取り下げて賛成。健は「親が増えるから生まれる数も増える。だから淳の考えが良いと思った」、壮は「200 羽の群れが 2 つあればそれぞれ 80 増えるから 400 羽なら 160 増えるとわかった」とうれしそうに発言した。

そこで私が「淳の考えをもとにもう一度考えよう」と提起。しばらくして健が「116 羽増える」とつぶやき、280÷200=1.4　80×1.4＝112 と書いた。「この 1.4 は何だろうか」と問うと、壮は「1羽あたりの子を生む数だ」、健は「増えた割合。淳の考えは増える割合が同じだということだ」と発言。そこで最初の課題の「増え方が同じ」という言葉には、「同じ数ずつ増える」と「同じ割合で増える」という二つの意味が含まれているね、とまとめた。そして5年ごとに 1.4 倍になる$\boxed{200-280-392-549-769}$…(C)を作った。

ここでABC3 つの変化の様子を比較した。「Aは変化の割合が一定で 1 次関数」と秀が発言。グラフは飛び飛びだが、その間も増えているから直線で結ぶことを確認。次のBのグラフは「曲線になる」、Cは「もっと急に増える曲線になる」ことに気づいた。5年毎の増加数はAは一定、Bは 10 ずつ増える、Cは 5 年ごとに 1.4 倍(増える割合が一定)とまとめた。(ここではふれなかったがBは 2 次関数である。)

このように子どもたちは個体数変化の文脈の中で、「増え方が同じ」という仮定だけから指数関数モデルCを構成することができた。それを皆が納得しえたのは、数学が得意ではない健が「親が増えるから生まれる数も増える」と発言したからだった。

4時間目＜指数的変化の計算とグラフ＞

最初に前回のモデルCでは 50 年後に何羽になるかと問いかけた。予想は1500から10000。電卓で 5785 を求め、急激に数が増えることを確認した。その後、5 年ごとに「2 倍」「1.2 倍」など何通りかの表とグラフを描き、変化を比べた。

5時間目＜指数関数の定義、データの分析＞

これまでの議論を振り返り、「親が増えれば子も増える」とは「増える数はそのときの総数に比例する」ことであるとまとめた。(「総数が増えれば子も増える」ことがある程度成り立つには群れの年齢構成が安定していることが条件だが、そこまではふれなかった。)

ここである時点での総数yに対し、その後5年間で増える数を$\triangle y$で表すことを教えた。$y=200$ の時に$\triangle y=80$ であることから$\triangle y=0.4y$と定式化でき、5 年後は$y+0.4y=1.4y$だから 1.4 倍になること、2 期後(10 年後)は 1.4^2倍になることなどを生徒は見出した。x期後は　$y=200\times1.4^x$　となることを導き、指数関数ということ教えた。そして「同じように増える」条件を皆で考え、「住む場所も餌も充分にある

場合に、タンチョウの数は指数関数で増えると予想できる」とまとめた[ix]。

では実際にもそうなるだろうか、と問いかけた。「実際にはそんな規則的になるはずがない」という意見が多かった。そこで初めて 1952 年から 2002 年までの実際のデータとグラフを提示した。

年	52	55	60	65	70	75
数	33	61	172	172	179	194
年	80	85	90	95	2000	2002
数	267	384	499	607	798	908

60 年代にはなぜ増えていないのかという疑問が出たので次のように話した。

「60 年代にタンチョウが有名になり、多くのカメラマンが来てタンチョウを追いかけ、驚いたタンチョウが舞い上がって電線にぶつかる事故が相次いだ。1971 年に死んだ 23 羽中 20 羽が電線衝突事故だった。このころ平均して年 24.6 羽のタンチョウが生まれたが、死ぬ数とほぼつりあって増えなかった。70 年代に電線移設やカメラマン規制を行った結果、死亡事故が減り、タンチョウの数は増えていった。」

そこで個体数の変化の傾向をとらえるために三つの時期に分けることを提案した。第Ⅰ期は 1952 年から 60 年で、人間による冬の給餌が始まり、えさ不足で個体数が絶滅寸前まで減っていたタンチョウが急激に増えはじめた時期。第Ⅱ期は 60 年から 70 年代初めの停滞期。第Ⅲ期は 70 年代から現在で、環境が整備され再び増えている時期である。

6時間目＜Ⅰ期 指数モデル定式化＞

Ⅰ期のデータが指数関数モデルにあてはまるかどうかを考えさせた。一年ごとの倍率はどれくらいにしたら良いだろうか。各自適当に見当をつけて電卓で計算してみた。その結果数名が $y=33\times1.23^x$ でほぼデータと合うことを見つけた。

そこでタンチョウの生態の資料を配り、一つがいが産む卵の数、孵化率、1年生存率のデータをもとに考えると1.23はタンチョウにとってベストの成長率であることを具体的に提示した。

次にこのモデルで増え続けたとしたら 2002 年には何羽になるかを勘で予想させた。

5千:2 名　1万:4 名　5万:1名　10 万:5 名

電卓で計算すると 1032213 羽。こんなに増えることはありえない。指数関数モデルは最初はあてはまっても、ずっとそれでいくはずはないと気づいた。

7時間目＜Ⅲ期の成長率の計算＞

Ⅲ期も同じように指数モデルで考えてよいかと問い、まず成長率を調べてみようと提起。子どもたちは電卓を使い 5 年ごとの比率が 1.37 1.43 1.29 1.22 1.31 と変動していることに気づいた。

そこでまず 75 年～90 年について考えさせた。ここでは 5 年毎にほぼ 1.4 倍になっている。そこで電卓で 5 乗して 1.4 になる値を求めさせてみた。この計算にはみんな興味を持ち、すぐに 1.07^5 がほぼ 1.4 であることを見出した。こうしてこの間の年成長率は約 7%であることがわかった。

そこで75年から1, 2, 3…年後を考え、帰納的にx年後は $y=194\times1.07^x$ となることを導いた。

その次の 85 年～2002 年については、木曜授業では、85～90 年 1.29 倍、90～95 年 1.22 倍、95～2000 年 1.31 倍なので平均して 1.27 倍と考えさせた。(本来は相乗平均であるのでこれは誤りだが、そこは不問に付した。) 生徒は1年ごとの倍率を1.05とした。2002 年は $384\times1.05^{17}=880$ となり、少し少ないが大体あっている。(金曜授業では 85 年から2002 年を通して電卓で倍率を見つけさせた。$384\times(\quad)^{17}\fallingdotseq908$ 生徒はすぐに 1.05 を発見した。) こうして 90 年から 2002 年までの成長率は約5%であることがわかった。

授業の最後に次の問いを提起した。「今までの成長率は“23%→事故で増えない→7%→5%”と

変化しているが今後はどうなると思うか。」

それに対し、「年6～7%になる。環境が良くなるから」1 名、「今後も年 5%で増える」2 名、「もう少し減り年4%くらいになる」8名と分かれた。(金曜授業ではそれぞれ1名、5名、8 名だった。)

8時間目＜有限な環境での成長モデル＞

前時の問いを改めて取り上げ、その際、病気発生など他の条件は考えない、餌は人間が与えるから充分ある、北海道の環境は今と同じと考える、という条件を示した。次の意見が出された。

ア:今までの平均を考えると年 8%増える。(壮)

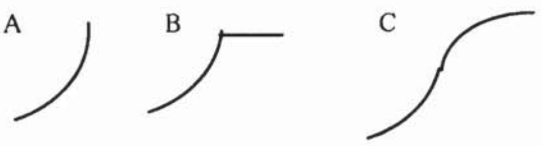
イ:これからも年 5%増える。(秀、健)

ウ:少しずつ増え方が減っていく(残りの生徒)

壮は今までの増え方が違うから平均で考えると発言。他の全員は増えるはずはないと反対。

次に皆でイを計算してみると 2055 年に 11683 羽になる。こんなに増えるはずはないとなった。

そこで今後の予想をグラフで描かせてみた。



1名　5名　8名

B を描いた壮は「一定の数に達するとそれ以上増えないから」と主張してから、C の生徒に「C も横ばいになるのですか」と聞き、「だんだんそうなっていく」と言われ、「C の方が良いかな」と呟いた。

C は徐々に成長率が減る場合であることを確認し、なぜ減っていくのかを考えさせた。「一定の数に達するとそれ以上増えられない」「住める場所が限られている」という意見が出された。

そこでタンチョウの生態の資料を配り、湿原の環境が現状維持でも、数が増えれば 1 つがいあたりの縄張りが減り子育てしにくくなるから、子どももそれほど増えなくなる可能性があると話した。

さらに現在の分布地図を見て道東の限られた地域にしか住んでいない状況を確認した。そして現在の環境で生きることができるタンチョウの数の上限を「環境包容力 K」、新たなタンチョウの受け入れ可能な数を「環境の余裕 K−y」と定義し、生徒とやり取りしながら新たなモデルを定式化していった。

まず環境の余裕がゼロになればどうなるかを問うと「新たなタンチョウが生きる余裕がないから成長率 r もゼロになる」とほぼ全員が考えた。では「環境の余裕が今の半分になれば成長率は？」と問うと「半分になる」という意見が多かった。もちろんこうなると断定はできない。減ることは確かだろうが、減り方はより複雑に変化するかもしれない。しかしここでは生徒の直感的な比例感覚に依拠し、環境の余裕 K−y と成長率 r が比例するモデルを構成した。比例定数をsとすると、

$r=s(K-y)$ここで、成長率$r=\triangle y/y$より両辺に y をかけ

$\triangle y=sy(K-y)$　言葉で表すと

増加数=比例定数×総数×(環境包容力－総数)

これを有限な環境での成長モデルとした[a]。

そして実際のデータを代入して係数を決め、

$\triangle y=0.00029y(1500-y)$ と定式化した。生徒の受け止めは、木金併せて、「良くわかった」4 名、「何となくわかった」8 名、「少しわかった」4 名、「わからない」9 名であった。わからないという生徒の中には、その後の数値計算の中で理解した生徒もおり、決して中学生に無理な内容ではないと感じた。

9時間目＜数値計算とグラフ作成＞

前回の定式化を復習し、1975 年から 5 年おきに 2060 年まで、この式に逐次代入する計算に取り組んだ。計算はみんな意欲的に行った。

「この計算はおもしろかった」21 名、「計算の仕方がわかった」5 名、「少しわかった」1名であった。浩は「この計算の仕方はけっこう興味深くて面白いなあと思いました。手順を覚えれば後は同じように変化の様子をずっと書けるので、電卓があれば簡単

年	75	80	85	90	95	2000	2005	2010
実数	194	267	384	499	607	798	?	?
モデル	194	267	362	481	623	781	944	1096

にできるなと思いました」と書いた。また計算結果と実測値が 2000 年までほぼあっていることに多くの生徒が驚いた。例えば彰は「実際のデータとほとんど重なっていたのでとても驚いた。ここまで正確だと少し怖い気がする」と記している。

さらにグラフ用紙にプロットするときれいなS字型曲線が描けたことに皆が喜んだ。「すごい」、「きれいなカーブ」、「実際の数値とあって驚いた」、「楽しかった」などの感想を全員が書いている。

$\boxed{\text{10時間目}}$<まとめとビデオ>

ここまでの結果を振り返り、実際のデータにかなり近いモデルが創れたこと、今までの状況が大きく変わらない限り未来がこうなる可能性が高いが、上限の数は人間が努力して環境包容力を大きくすれば変わりうることなどを話した。アンケートの後でタンチョウが絶滅から甦った歴史のビデオを見て、タンチョウの今後に思いをはせて締めくくりとした。各自がエクセルでグラフを描き、環境包容力を変えればグラフがどう変わるか調べることもさせたかったが、パソコン室が塞がっており断念した。

3 この授業を子どもたちはどう受け止めたか

授業の理解と数学観の変容を子どもたちの声から探ってみよう。

①"親が増えるから子も増える だから生まれる数はその時の数に比例する"ということの理解

指数モデルの基礎となったこの考えを納得した生徒が多く、成長の文脈の有効性を実証できた。

「親が増えれば子も増える、ということは増えた子どもがその親にたされて、また同じ割合で増えても親が多くなっているから生まれる子どもも増える、ということがかなり納得出来ました。」(浩)「親が増えればそれだけ子が生まれるので当然だと思った。出生率などもわかって良かった。」(健)

②初期段階の指数関数モデルの理解

x を正の整数に限定した離散的指数関数を構成し、いくつかの例についてグラフを描いたのだが、成長の文脈の中で指数関数の意味を理解するとともに、新たな関数への興味が生じたように思う。

「少しわかりました。指数関数をどんどん計算して行くと面白いなあと思いました。」(雪)「指数関数なんて言葉はこの授業ではじめて聞いたしあまり良くわかりませんでした。でもタンチョウの数が指数関数になるのはなるほどと思い、なんとなくわかりました。」(優)「わかったと思います。でも指数関数の意味をきちんと理解できていないと難しい。」(志)

③$\triangle y=0.00029y(1500-y)$の理解

この授業の最大の難所であるロジスティックモデルの式理解について次のような感想が多かった。

「yの値が増えれば数は増えるけど、1500 という最大数からそのyを引いているからだんだんと増える割合が伸び悩み、横ばいになって行くということが、実際にグラフを書いて良くわかった。」(浩)「環境の余裕などを考えなくてはいけないので、少し難しかったけど意味は理解出来た。」(聡)「正直、完璧には理解できていない。だけど計算して行くうちになんとなくわかってきました。でもこの式は難しいと思いました。」(優)「意味が良くわかった。タンチョウの増える数を上限と決めてやったので、よりリアルだった。少しずつ計算してわかっていったので楽しかった。」(健)「最初は何のことだか良くわからなかった。けれど何度も同じ式を見て、考えて、少しずつだけれどわかるようになってきました。」(志)

この意見からロジスティックモデルを構成し理解することは中学生にも可能であることがわかった。

④繰り返し数値を代入する計算への興味

またその後の電卓を用いた再帰的な計算の過

程自体が中学生には魅力的であることもわかった。「計算の答えが出るとまた次の計算ができるところが面白かった。」(聡)「少しずつわかっていくのが面白かった。次の年のことを予測するのがとてもおもしろかった。」(健)などと全員が感じていた。

⑤S 字形曲線を自分で描けたことへの感動

数値計算後、点をプロットしてきれいな曲線が描けたことにも多くの生徒が感動し興味を持った。

「その地域に住める最大数に近づくにつれてグラフが横ばいになり、それまでは大体一定に増えるというモデルを数学の計算式で表せるのはすごいと思いました。」(浩)「計算をしただけなのに予想以上に本格的なグラフが書けたのですごい。」(聡)「いっぱい計算して数だけでなんだろうと思ったけど、グラフにして見ると良くわかりました。」(雪)「最初予想していたグラフとなんとなく似ていて良かった。やっぱり S 字型になるんだなと改めて思いました。表ではわからないことも、グラフではわかるので、グラフは大切だと思いました。」(優)「きれいな S 字になり驚いた。ピークがあることがわかった。」(結)

⑥現実事象を数学で読み解くことの理解の深まり

「数学で本当に生物の数の変化がわかるか」という問いかけに対し、次のようにある程度は予測できるという意見が多かった。

「全てとはいかないがある程度は考えられる。」(浩)「大まかな感じはわかると思う。授業でやったように、子を産む確率、上限などを考えれば大体はわかると思う。他の生物も調べて考えて見たい。」(健)「大体は予想がつくと思いますが、自然は予想外のことが起こるのでそのことを考えると微妙。」(昌)「モデルならかなり複雑な式に表せる。今回のことで数学の世界は幅広いと思ったから。」(壮)「調べるものによるけど、公式などがあればそれにそってできるんじゃないかと思う。」(汐)「多少は考えられると思った。授業をやる前はそんなに考えられるとは思っていなかった。」(優)「思う。ちゃんと考えて計算などもしておれば考えられると思う。考えられなくはない!」(香)「ここまで正確なグラフができたから、考えられると思った。」(栞)

上記の意見でも不確定要因を考えている生徒もいるが、それを明確にしている生徒もいた。

「病気などが発生しなければある程度正確な数の変化が考えられるけど、未来のことはわからないから 100%の予想はできない。でもこうなるだろうという予測はある程度できると思う。」(聡)「環境問題、病気、いろいろな問題があり何が起きるかわからないと思うから、本当に考えられるとは思わない。けど、一つの目安になると思う。」(優)「アバウトにならいえる。正確には多分無理。」(雅)「予想は昔のデータを使えば何通りかできると思う。しかしその予想とぴったりというのはない。」(彰)

一方、予測できないという生徒もいた。

「考えられない。数学では計算で決められた数だから、これからのことがはっきりできない。」(雪)「わからない。動物に何が起きるかわからないし、ぴったり合わせることは難しいと思う。」(志)

実際のタンチョウのデータが数値計算の結果とかなりよく合致したことに影響され過ぎているとも言えるが、数学で予測するということは、ある仮定の下での予測であり、絶対ではないが一つの目安となりうるということは多くの生徒が理解したように思う。

⑦数学についての見方の変化

数学で現実の問題が考えられるということに驚き、数学の意味を見直した生徒が多かった。

「とにかく数学はすごいということが頭に刻み込まれた気がする。普段の数学は計算とかばかりでつまらない時もあるけど、こういう数学の姿を見ると興味を持つことができた。」(聡)「数学は今まであまり興味がなかったけれど、生物が増えるグラフを式で表してグラフにできるなんてすごいなぁと思いました。少

し考えが変わったような気がします。」(浩)「生き物について数学でグラフにできるなんてびっくりした。少し数学についての興味が出た。」(優)「難しくてわからないところもあったけれど、数学でタンチョウの数が予想できてよかった。予想が実際の数と同じになったのはすごいと思った。数学はいろいろなことに使えると思った。」(結)「複雑なモデルも式で表せることに関心が持てました。今回の授業で難しかったけれどいろいろなことを知りました。数学を用いて式を作るととても便利だということがわかりました。数学の世界は奥が深いなと実感した授業でした。」(壮)「数学は奥深くあるからおもしろい!!この機会にけっこう興味が持てた。」(香)

この授業から数学の楽しさを感じた生徒も多い。「数学をやっているとあきたり、頭が痛くなったりしていたけど、この授業を受けて違う考え方や使い方があるんだなあと思った。こういう授業はやってもあんまりあきないし、楽しかった。」(亮)「数学はおもしろくてすごいと思った。生物の数をここまで正確に当てるのがすごくてびっくりした。」(健)「最後にやったグラフとか計算で、ぴったりとまではいかないけど、ほとんど同じ位にできるのがすごいと思った。数学は本当にいろいろなことに使えるということが良くわかった。おもしろかった。」(秀)「とにかくわかるまで難しくてやる気が出なかったけどわかればおもしろい。数学を使って生物のことを勉強したのは初めてだったからとても興味深いものだった。他の動物でもやってみたい。」(彰)「やはり数学はおもしろいと思います。それに予想以上に正確だとわかりました。またもしできるなら、他の生物でもやって見たいです。」(昌)「数学のすごさが改めてわかった!!計算のやり方とかおもしろかったので、他のことでも使ってみたいと思った。」(栞)

最初に述べたようにこの子たちは数学が得意な生徒だけではない。その子たちが10時間の授業を通じて数学に対する見方を大きく変え、また数学の楽しさを実感したことの意味は大きい。10 時間という時間は長過ぎると思うかもしれないが、現実の状態から自分たちでモデルを構成する体験はこれまでも今後もおそらくない中で、中高のどこかの時期に一度はこのようなまとまった時間をとることは必要ではないだろうか。そこではこれまで学んできた様々な数学的な思考が集約される。そしてまた高校で学ぶ指数関数の素地指導にもなっている。さらにロジスティックモデルを考え数値計算することを通して、システム的な思考法も身に付いていく。そのことの意味は非常に大きいと思う。

4 カオスにふみ込んだ2006年の授業

①初期の成長率ではどうなるか

その後筆者は 2006 年 10 月から 2007 年 3 月まで東京学芸大学附属大泉中学校 3 年生に教える機会を得て、離散的関数を組み込んだ関数指導を必修の授業で行うことと並行して、選択教科と総合学習をあわせた「知的探求」の授業(週 2 時間、半年)で「生物と数学」を開講し、11 名の 3 年生と学びあうことができた。前半は「生物の形と数学」をテーマに、オームガイなどの実物を調べる中で相似に着目し、等角らせんや指数関数へ発展させた。

後半でタンチョウを取り上げた。その授業自体は前記の和田中とほぼ同じ展開となった。I 期で指数関数を定式化した後、III 期を考える中でタンチョウの成長率 r が環境の余裕 K-y に比例するモデルを生徒の考えを基に作った。前回の授業をふまえよりていねいに導き、ほぼ理解された。こうして得られたロジスティックモデルが 2000 年までの実際のデータにかなりよくあうことを確かめ、今後もこの式で近似できるとすれば 2050 年に 1493 羽となり、その後はほぼ横ばいになることをまず電卓で順次計算させた。またこの授業では全員がノートパソコンを使える環境があったことから、表計算ソフトを用い上

記の計算を行い、ロジスティック曲線を描いた。さらにK=2000ではグラフはどう変わるかを調べさせた。

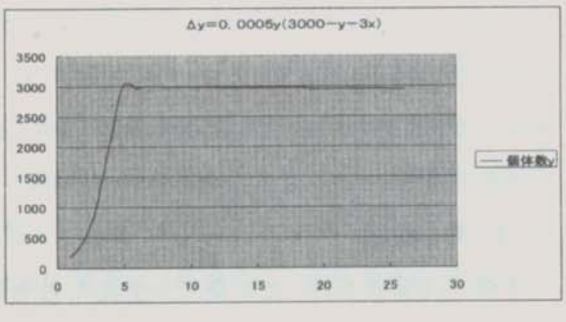
次の時間に、成長率がより高かった1955年を基準に式をつくらせてみた。55年の数y＝61、その後5年間の増加数⊿y＝111 を⊿y＝sy(1500－y)に代入して s＝0.00126 が得られる。

年	55	60	65	70	75	80	85
数	61	172	460	1063	1648	1341	1610
年	90	95	00	05	10	15	20
数	1387	1584	1416	1566	1436	1552	1450

表計算ソフトを使って上記の表と、振動しながら1500に収束していくグラフが得られた。この結果について、環境包容力1500を越えると過密すぎてタンチョウの死ぬ数が増え、その結果少し余裕ができるとまた少し増え、徐々に1500に近づいていき安定するとを生徒が読みとることは容易だった。

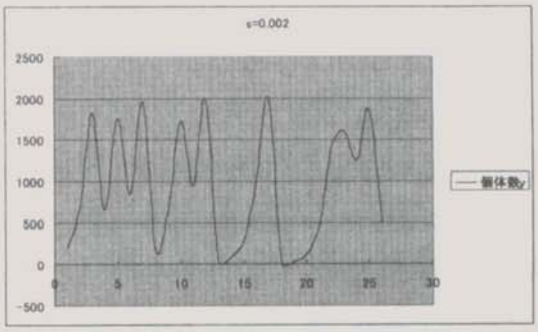
②式とグラフへの数学的興味

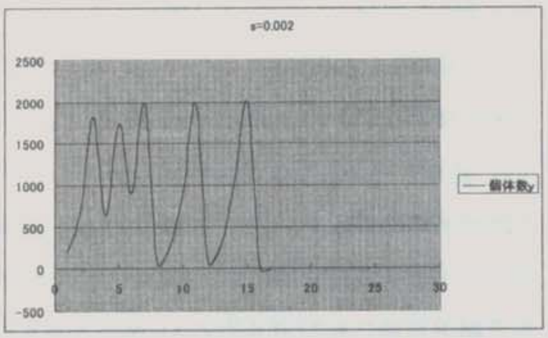
ここまでは実際のタンチョウの文脈で考えたわけだが、生徒の関心は式を変えることによってグラフがどう変化するかに発展していった。そこで自由に試みさせてみた。生徒が考えた式は様々だった。まず⊿y＝0.00005y(1500－y)のように係数を少し変える生徒が多かった。その多くはやはりロジスティック曲線になる。一方藍は⊿y＝0.00029y(1500－3y)とした。これは環境の余裕が総数の3倍で減っていく場合で、上限が500のロジスティック曲線になる。それを見て千早は⊿y＝0.0005y(3000－y-3x)とした。これは環境の余裕が時間と共に減っていくことを意味し、現実のモデルとしても意味がある。この結果は急激に3000まで増え、その後少し振動しながら徐々に減っていくグラフとなった。また昂は係数を大きく変え⊿y＝0.00135y(1500－y)とした。これは1500を軸に振動し続けるグラフとなる。

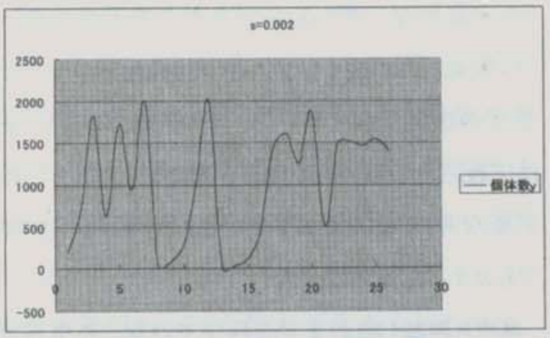


③カオスの探索

そこで私からs=0.002とすることを提案した[vi]。そして初期値194を195、196…と変えさせてみた。1変えるごとにグラフの形が大きく変わることを見て生徒は驚きの声を上げた。（次のグラフはx軸が5年ごとの期。1975年を0期とし、2100年が25期。1975年の初期値は上から順に194、195、196。10期目2025年位から大きく変わる様子が分かる。）







今までの関数では初期値を少し変えても変化の

様子は大きくは変わらなかったが、カオスの場合は初期値をたった1変えるだけで変化の様子が大きく変わることに生徒は気づいた。表計算ソフトを使えばそれは一瞬のうちに観察できる。子どもたちは自由に係数と初期値を動かして探索していった。

その時間の感想として次のように記している。

「少しの差がどんどん大きくなっていって生物の絶滅などにもかかわってくると思うと、不思議に感じた。規則的にならないところがとてもおもしろく、興味を持ちました。カオスを思う存分感じることができた。」(悠)「係数や最初の個体数を変えることによって美しいカオスのグラフが描けるのだが、なぜそのようなグラフになる理由がさっぱりわからない。数学といえばグラフも規則的に並ぶと思っていたら、その予想は完全に裏切られるものとなった。ちょっとショックを受けた。」(芳)「係数を少し変えただけでグラフの上がるところと下がるところが変化することに驚きました。0.002006 にして個体数を 2 ずつ変えるとあまり変化は無く 1 ずつすると一定になりました。」(菜)

このように生徒は自分なりに探求していった。次時にカオスについてこう話した。

“法則が決定論的(ある時点での状態が決まればその後の状態が原理的にすべて決まる)であっても、初期データには必ず誤差がある。そのわずかな誤差が増幅され、結果として非常に複雑で不規則かつ不安定な振る舞いをし、将来における状態が予測不可能になることをカオスと言う。カオスとは「決定論的なシステムがつくり出す非周期振動」という現象。決定論システムとは、破ることができない不変の法則からなる系で、カオスは、不変の法則に支配される系にありながら法則性のない予測不可能な非周期的振舞いということ。単純な方程式でもカオスを表現できる。

カオス理論はこれまでの科学では捉える事ができなかった自然や生命、社会や経済などの複雑な現象に適用され成果をあげている。授業ではタンチョウのデータを基に変化をよく近似するロジスティック方程式を作り将来をシミュレーションした。(ここまでは実際の個体数変化のモデル)その上で係数を変えるとカオスが発生することに気づいた。(ここは純粋に数学的な思考)そのようなカオス的変化はコクゾウムシの個体数変化[xii]にも表れている。カオスという数学は自然を理解する新たな武器である。”

最後に生徒は次のように感想を記している。

「カオスを作ってみて数学って面白いなと感じた。決定論であり、確率に近いという不思議さがとてもよかった。最後にカオスの仕組みを理解できてよかったです。」(弘)「最初に入れた値によって結果が全然違うというところはとても不思議に思う。そこがカオスの面白さ。数学にとどまらず生物学で使えるところが面白いなあと思った。」(尚)「学べば学ぶほど数学の世界や生態学の世界が広がって面白かったです。初期値を少し変えただけで全く違うものになるということを知って、この世界は本当に針の上に成り立っていると改めて思いました。」(藍)

このように中学生もカオスという現象にふれ、それまでの数学観が揺さぶられるとともに、新たな数学への、そして世界のより深い見方への興味を募らせている。ここではカオスについて理解させることが目的ではないが、現代数学の最先端にふれることは大いに価値があることであろう。

なお、カオスを数学教育で取り上げる意義として、丹羽敏雄の次の指摘[xiii]は重要である。「それまでの単純な法則からの単純な現象という常識を破るものであった。これは逆に、一見すると複雑な現象のもとに単純な法則性が存在しうることをも暗示する。」数学と現実世界との深い関係を理解することは、数学の有用性をより豊かにとらえることにつながる。

5、まとめと課題

本稿では筆者が行った授業での生徒の思考の

様子を紹介し、この授業が中学 3 年生や高校生には十分可能であることを明らかにした。この授業はさしあたって課題学習や総合学習で取り組むべきだが、将来は関数カリキュラムに組み込みたい。

そもそも日本の数学教育では“成長”をも含む“変化”それ自体の扱いが充分ではない。“運動”や身近な変化は関数の導入や応用として扱われても、授業の大半は文脈から切り離された数学的関数の系統的な指導にあてられる。“変化”を扱う場合もすぐ関数式(“対応”)が求められるようなものに限られる。しかし現実の事象では最初に関数式が求められることはまれであり、変化の様子を調べることが重要になる。それは入力を変化させたときに出力がどのように変わるかを調べることであり、時間変数であれば刻々と動く局所的な変化の様子を調べることである。その分析から変化全体を貫く大域的な式を考えることが数学的に重要なのであり、差分方程式・微分方程式を解くこと、解けない場合は数値解を求めていくことにつながる。このような“変化”と“対応”の両輪を押さえ、結び付けることが関数指導の柱として位置づけられねばならない。

そのためには、1 次関数・2 次関数という関数式から入るのではなく、“一様変化”から1次関数を、“一様加速変化”から 2 次関数を定式化していく過程をていねいにたどるべきである。さらに中学ではその理解を深めるために離散的な変化を扱うことが重要である[xiv]。

本稿で考察した指数関数についても、従来から数学教育協議会の教師たちは、代数的形式からではなく、“一様倍変化”から定式化してきた。例えば中学では紙を繰り返し半分に切ることから離散的指数関数を、高校ではオウムガイの渦巻きの回転数と中心からの距離を考えることから連続的な指数関数を定式化[xv]する授業などが試みられてきた。

しかし筆者は、最初から一様倍変化が見えていない例で、局所的な変化の様子から一様倍変化を導くことも重要であると感じてきた。そのことは既に 1966 年に長妻克亘が、「指数関数はyの変化率がy自身に比例する関数として特徴付ける」[xvi]と提起していることである。当時、それを受けて今井義一は、光の吸収法則を利用し、yの1当たりに対する変化率$(1/y)\cdot(dy/dx)$が一定であることから指数関数を定式化する中学の授業を構想した[xvii]。

それに対して筆者は、中学や高校 1 年では、指数関数のこのような定式化は離散的変化で行うほうが良いと考えている。指数的変化は $dy/dx=py$、$y(0)=c$ で特徴付けられる。この微分方程式を解けば $y=ce^{px}$ となる。この指標 $p=(dy/y)/dx$ は近似的には $p\fallingdotseq(\triangle y/y)/\triangle x$、特に離散的変化で$\triangle x=1$とすれば$p=\triangle y/y$となる。森毅[xviii]が指摘するようにここで効くのは差ではなく倍である。連続的変化でも時刻 x の時の量 $y(x)$から時間 t が経った $y(x+t)$まで、比が t だけで定まる。

離散的1次関数と離散的指数関数を対比して扱うことは、数Ⅱでの等差数列と等比数列の指導と重なるが、数Ⅱを履修していない生徒がいる現状を踏まえると現行のカリキュラムでは不十分である。むしろ筆者は離散的関数を関数指導に明確に組み込み、中 3、遅くとも高 1 で全員に学ばせるべきだと考えている。そのことの重要性を、森毅は前掲書で次のように指摘している。「指数的変化は普通の自然の変化であるが、人間の感覚は一次変化を考えてしまうから指数的変化を異常と感じる。この＜自然＞と＜人間＞との不適合があるからこそ、＜数学の有効性＞がある。」そしてさらに森は「指数的変化は自然だが、実際には“限界”があるほうが普通である」として“限界つき指数的変化”としてロジスティックを扱うことも提起している。

関数指導をこのような視点で見直すとすれば、成長の文脈がその重要なフィールドとなることは明

らかだろう。今後は高校で、この授業と連続的指数関数や漸化式（差分方程式）とを結びつける実践がなされていくことを切望する。

---

[i] ダンブローシオ．1976.「数学教育の全体的な目的と目標」.数学教育国際委員会編,数学教育新動向研究会訳「世界の数学教育-その新しい動向」共立出版所収

[ii] NCTM「新世紀を開く学校数学」筑波大学数学教育学研究室監修　p300～306

[iii] 武内和彦、住明正、植田和弘『環境学序説』.岩波書店.2002

[iv] メドウズ他『成長の限界　人類の選択』ダイヤモンド社.2005

[v] 国立教育政策研究所監訳『PISA2003 年調査　評価の枠組み』ぎょうせい.2004 年.p83

[vi] 小寺隆幸「現実事象を扱う中学校関数教材の開発とその授業実践に関する研究」学芸大数学教育研究　第 16 号 2004

[vii] 本稿は第 37 回数学教育論文発表会(2004)での報告「現実事象から数学を創る教材の開発－タンチョウの個体数変化から差分方程式へ－」、第 38 回数学教育論文発表会(2005)での報告「現実のデータから成長モデルを構成する中学の授業」、および第 41 回数学教育論文発表会(2008)での報告「成長をどのように取り上げるか～指数関数からカオスまで～」を基に、加筆修正した。

[viii]宇都宮大学教育学部（当時、現山形大学）の井ノ口順一氏は 2004 年に離散数学の授業でタンチョウを取り上げられた。また一関高専の梅野善雄氏は 2005 年から 2 年生に「タンチョウ」の授業を実施され、そこでカオスにまでふれていることに筆者も啓発された。なおタンチョウの教材自体については、小寺隆幸「数学で考える環境問題」明治図書.2004 を参照してほしい。

[ix] 個体群数理生態学ではマルサスモデルと呼ばれている。$dy/dx=ry$ を解き $y=y_0e^{rx}$　これは最も単純な数学的モデルだが、1960 年から 2000 年までの世界人口の推移やハタネズミの個体数変化はこのモデルに良くあっている。(ブラウン「微分方程式上」シュプリンガー.2001)

[x] ロジスティックモデルの定式化には次の考え方がある。

①個体数増加は密度依存的で、個体数増加に対する抵抗は個体数yの関数であり、増加率はyの二乗に比例する抵抗を受けると仮定。$dy/dx=ry-hy^2=(r-hy)y$　(ヴェルハーストの考え)

②$dy/dx=ry$ に競争に関する項を追加する。単位時間当たりに二つの固体が遭遇する回数の統計的平均は y^2に比例するから $-hy^2$ が適当。(上記ブラウンはこの考え)

③単位量あたりの増加率⊿y/y が総数 y に比例して減少するモデルとして規定。(山口昌哉「食うものと食われるものの数学」筑摩書房1985、丹羽敏雄「数学は世界を解明できるか」中公新書1999など)

筆者が中学校で行った最初の授業では複比例とアナロジーさせ増加数⊿yは総数yと環境の余裕K－yの両方に比例すると生徒に考えさせたがやや無理があった。今回は③をもとにした。なお個体数は分離量だが、数が多いときはその変化の様子は微分方程式でとらえることができ、差分方程式よりも一般解が求めやすい場合が多い。しかし中学高校では差分方程式で立式しその数値解を求めることに意味があると筆者は考える。

[xi] 差分方程式Δy＝hy(2―y)は h=1.5 でカオスとなる。(山口昌哉　前掲書)タンチョウでは⊿y=sy(1500-y)、ここで Y=y/750 とおくと⊿Y＝s×750Y(2-Y)　係数 750s＝1.5、つまりs＝0.002 でカオスが生じる。

[xii] 内田俊郎「動物個体群の生態学」京都大学学術出版会.1998

[xiii] 丹羽敏雄　前掲書

[xiv] 小寺隆幸「離散的変化の探求を中学関数指導に組み込む意義と方法」学芸大数学教育研究第 21 号(2009)

[xv] 三省堂数学Ⅱ教科書（平成 5 年文部省検定）

[xvi] 長妻克亘「関数で何を教えるか」（遠山啓編「関数の指導」明治図書 1966 所収）

[xvii] 今井義一「指数関数」（遠山啓編「関数の指導」明治図書 1966 所収）

[xviii] 森毅「微積分の意味」日本評論社 1978

こでらたかゆき

京都橘大学人間発達学部児童教育学科

京都市山科区大宅山田町 34 kodera@tachibana-u. ac. jp