修士論文要約

学校数学における公理的構成に焦点を当てた教材開発とその実践に関する研究

佐々木　陽平

要　約

本研究の目的は，現代の論証指導を改善するべく，昭和45年改訂の高等学校学習指導要領にある公理的構成の扱いを明らかにし，それに基づいて公理的構成について指導するための教材を開発し，その価値を明らかにすることである。そのために，当時の文部省の発行する資料を手がかりにして公理の意味と公理的構成とは何か明確にした。それを踏まえて，授業で扱う具体的な問題を球面における正方形の作図とし，証明による前提の見直しが公理を求める方法になりうることを論じた。開発した教材に基づいた授業を実践し，分析をした。その結果，証明したことのある定理は生徒によって見直されたことを特定でき，生徒が自ら前提を見直すことができることを教材の一つの価値であることを論じた。

論文の構成

0. 研究の目的と方法

学校数学における公理の扱いに着目して，過去の学習指導要領を振り返ると,昭和26年，昭和31年，昭和35年，昭和45年改訂の高等学校学習指導要領において公理が学習内容として示されている。特に，昭和45年改訂高等学習指導要領において「平面幾何について，数学における公理の意味と公理的構成について理解させる」(文部省，1972，p.268)とある。ここで示されている「公理的構成」という用語は昭和45年改訂高等学校学習指導要領でのみ用いられている用語である。

一方で，現行の学習指導要領では小学校から高等学校までを通して公理は学習内容として

示されていない。しかし，公理的構成についての指導をするべきであると考える。このことによって，前提をおいて考えることや前提を見直すこと自体の理解を促すことが期待できるからである。前提をおいて考えることや前提を見直すことはものごとを論じるときや合理的に改善するときに役立ち，教育的価値のあることだと考える。ただし，本研究ではこれらのことを重視するので，公理間の関係，無矛盾性や独立性，何を公理とおくべきか，ということまで扱うことは意図しない。

このような考えのもと，公理的構成の扱いについて明らかにし，現代の論証指導への改善に活かすべきであると考える。

本研究の目的は現代の論証指導を改善するべく，公理的構成の扱いを明らかにし，それに基づいて公理的構成について指導するための教材を開発し，その価値を明らかにすることである。

そのために，昭和45年当時の文部省が発行した資料を手がかりに公理的構成とは何か明確にする。教材開発の視点を設定したのち，教材を開発する。授業の実際を記述し，その考察を通して開発した教材の価値を明らかにする。

1. 公理的構成の目的と方法とその教育的価値

まず，公理の意味について概念規定する。公理系について『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』(文部省，1972)において「一つの定理から出発して，次第に根源へさかのぼっていくと，その根底に，これだけは証明なしに認めなければならないいくつかの命題に到達する。それが公理系なのである」（文部省，1972, p.96）とある。

また，結果的に見れば「公理系は，無定義用語間の相互関係を規定したいくつかの命題」でもある（文部省，1972, p.96)。これらのことから公理系とはある定理を保証する証明なしに認める命題群であり無定義用語の相互関係を規定した命題群であると捉えられる。そこで，公理の意味とはこれらの性格をもつ命題群の構成要素として捉える。

また，『高等学校　新しい数学教育－数学教育現代化講座指導資料』（文部省，1968）において数学を作ることについて「数限りないフィードバックにより公理や定理の選択を試みたり，基本的な性質の探索を試みたりするなどの悪戦苦闘があってのことであり，この最終的なまとめとして，きれいに体裁を整えたもの，それができあがった数学なのである」（文部省，1968，p.5）とある。また，『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』(文部省，1972)において「平面幾何の構成」のねらいについて「素朴な概念を分析し，さらに根源へ根源へとさかのぼり，たどりついた究極のものをもとにして，体系的に理論を組み立てていくという公理化の方法を理解させようとする」(p.97，下線筆者)とある。公理化の方法を公理的構成の1つの側面ととらえると，公理的構成についても，前半(二重下線)が示す公理を求める段階と後半(太線)が示す公理に基づいて体系的に理論を組み立てる段階があるととらえることができる。これらのことから，公理的構成とは「公理・定理の選択という試行錯誤を伴いながら公理を求め公理に基づいて体系的に理論を構成すること」ととらえる。

これらを踏まえて公理的構成の目的と方法について論じる。『高等学校　新しい数学教育－数学教育現代化講座指導資料』（文部省，1968）において，現代数学について「問題があり，これをきっかけとして，これまでの数学的事実を含めて，もっと見通しのよいものにすること。また，厳密に理論を展開すること。ここに，数学の新しい体系ができてくるといえよう。数学を，単に論理的

に無矛盾な形式的な体系を作るだけのものとみてはならないのである。具体的な問題に当面し，これを打開するとともに，その基礎を明らかにするところに，公理論的方法をひっさげての現代数学があると思われる」（文部省，1968,pp.3-4）とある。公理的構成も，問題をきっかけとしてこれまでの数学的事実を含めて見通しのよいものにする方向に向かうのではないだろうか。具体的な問題に当面し，これを打開するとともに，その基礎を明らかにすることが公理的構成の目的であるととらえる。また，公理的構成の方法として，先ほど下線部で示したように，数学的事実や数学的知識から公理を求めることと公理に基づいて理論を構成することがあるととらえている。

公理的構成の教育的価値は，前提を見直すことや前提をおいて考えることが合理的に改善するときやものごとを論じるときに役立つということである。何か議論をしているときお互いが論理的な説明をしているのにも関わらず何か矛盾があるときは，そこに前提の対立があるはずである。その矛盾を解消するために前提を見直しすることが役立つ。つまり，前提を見直すことによって前提の対立を修正し，有意義な議論をすることができるだろう。また，何か議論をしようと思ったら，議論で定めた前提に基づいて考えることで議論を有意義にすることができるだろう。

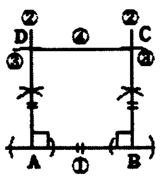
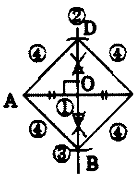
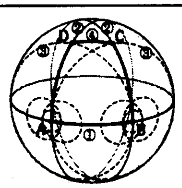
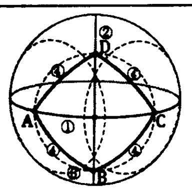
2. 公理的構成の目的と方法を踏まえた教材開発

本研究では，具体的な問題を「球面上に正方形を作図できるか」とする。すなわち，非ユークリッド幾何学的に，球面上の直線と円の作図の組み合わせによって正方形を作図できるか，という問題である。その理由を以下に述べる。

中学校の論証指導の題材は主にユークリッド幾何である。ユークリッド幾何における初等的な定理が既知であるならば，証明を保証する前提が公理を求めるよりどころになると考える。そういう意味で，ユークリッド幾何を題材とした具体的な問題はありうる。一方，ユークリッド幾何における初等的な定理が既知ならば，その定理を保証する公理系を求める動機づけをしなければならない。本研究では，その動機付けをするための題材として非ユークリッド幾何に着目する。なぜなら，ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何には共通の公理系と対立する公理系があり，これによって平面における定理ついて，定理の前提を観点にして定理を整理する必要がでてくると考えるからである。これと同じ着想をもっているのが Lenart(1993,2013)である。Lenart(2013)は球面幾何学の教科書『Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere』と球面上の作図・測定道具を開発している。その教科書のカリキュラムのねらいの１つに公理的体系とは何かの理解と複数の公理的体系がいかにして同時に存在し得るかということの理解をあげており，証明について「平面と球面幾何学間の比較は生徒に“なぜ”の疑問を尋ねるすばらしい機会を提供する。なぜ平面上で生徒が受容した定理が球面上に異なったふるまいをするのだろうか？なぜ生徒は平面においてこれらの定理の有効性を確信したのだろうか？彼らの確信の背後にある仮定は何だったのか？この文脈における証明は興味深いものになる」(Lenart, 2013, No.172)とある。要するに，平面における定理を保証する公理系によって，球面においてその定理が成り立ったり成り立たなかったりするのである。そこで，本研究も非ユークリッド幾何の１つである球面幾何に着目する。日本においても球面幾何に着目している先行研究はいくつかある(西脇(1964,1967)，横山(1970)，狭間・中西・田中ら(2005)，中西(2006))。球面三

角法や三角形の定義や性質についてといった差異はあるが，どの先行研究においても扱われている題材は球面上の直線と三角形である。定義について指導する題材としては三角形で十分であるが，公理的構成の理解をねらう題材としては三角形では十分ではないと考える。なぜなら定義に基づいて考えることができれば三角形の存在はすぐに示せるからである。大事なことは公理を求め公理に基づいて理論を構成することである。つまり，定義に基づいて考えてもその図形が存在するかどうかすぐにわからない題材がよい。そこで，本研究では正方形の作図に着目する。平面における正方形の作図の方法を球面における正方形の作図の方法とみなして球面上に図形を作図すると多様な図形がえられる。典型例が以下の２つである。

表１：正方形になる／ならない作図方法

	２直角方法	対角線方法
方法	①線分 AB ②A を通り AB に垂直な直線 　B を通り AB に垂直な直線 ③中心 A 半径 AB の円 　中心 B 半径 AB の円 ④線分 CD	①線分 AC ②AC の垂直二等分線 ③中心 O 半径 AO の円 ④線分 AB，線分 BC 　線分 CD，線分 DA
平面		
球面		

ここで想定する理論は，平面と球面において線対称や点対称を規定する「対称性の理論」と，平面において図形の大きさによらず内角の和が一定であることを規定する「角度一定の理論」，球面において図形の大きさが大きくなれば内角の和が大きくなることを規定する「角度増加の理論」とする。これらの理論に基づけば，平行四辺形を点対称な四角形を定義し直して作図することを可能にする。

ここで公理を求める方法について考察する。この場合において具体的に述べると，「２直角方法によって作図した図形は平面において正方形になるが，球面において正方形にならない」という数学的事実に何の数学的事実が効いているのかあるいは既知の数学的知識で何を用いるべきなのか調べるのに証明は有効であるととらえている。証明によって結論に効いている前提を見直すことが合理的な改善の方法となる。例えば，平面において正方形になることは以下のように証明できる。

【証明】

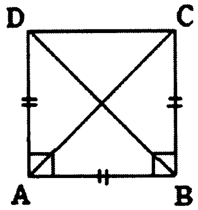


図１：三角形の合同に基づく証明

線分 AB，線分 CD をひく（直線の作図）

△ABC と△BAD において

AB＝BA（共通）

AD＝BC（円の作図）

∠BAD＝∠ABC（＝90°）（垂線の作図）・・・①

よって△ABC≡△BAD（２辺夾角）

ゆえに AC＝BD（合同の性質）・・・②

△ACD と△BDC において

AC＝BD（②）

CD＝DC（共通）

AD＝BC（円の作図）

よって△ACD≡△BDC（3 辺相等）

ゆえに<u>∠ADC＝∠BCD</u>（合同の性質）・・・③

四角形 ABCD について

∠DAB＋∠ABC＋∠BCD＋∠CDA＝360°（四角形の内角の和は 360°）

90°＋90°＋∠BCD＋∠CDA＝360°（垂線の作図）

∠BCD×2＝180°（③）

∠BCD＝90°

よって<u>∠BCD＝∠ADC＝90°・・・④である</u>

よって△ABD≡△DCA（直角三角形の合同条件：斜辺と他の一辺が等しければ合同）

ゆえに AB＝DC（合同の性質）・・・⑤

よって AB＝BC＝CD=DA（⑤）

また∠A＝∠B＝∠C＝∠D（＝90°）（①，④）

ゆえに四角形 ABCD は正方形

【終】

一方で，球面では∠C＝∠D＞90° であることが予想される。

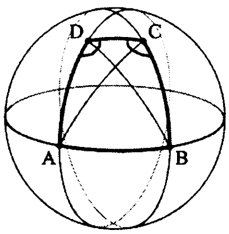


図 2：∠C＝∠D＞90°

これによって∠C＝∠D であることを保証する前提は平面と球面で同じであるが∠C と∠D の大きさが 90° であることを保証する前提は平面と球面で異なることを見いだすことができる。これを繰り返すことによって，平面と球面で合同に関する性質は同じであるが内角の和に関する性質あるいは平行線に関する性質が異なることを見いだすことができる。つまり，証明によって結論に効いている前提が明らかになり，前提を見直すことで合理的な改善の方向性が明らかになるのである。

また，同じ公理を認めることで平面と球面で同じように証明することができる。これらを踏まえて教材の展開を以下のように想定する。

(1)問題の提示

教師が直線を 2 点間の最短経路を延長した図形，円を 1 点から等距離の集合と定義して，平面における直線と円，球面における直線と円を提示する。さらに，線分の長さと角の大きさを定める。作図に用いる道具は図をかきこめる球体と球体の大円をなすカップの形をした半球と球体に刺して描けるコンパスがあれば十分である。線分の長さの相等関係はコンパスで十分であるが，角の相等関係を示すには工夫が必要である。コンパスに制限するならば角の大きさを円弧に表して長さを調べることはできる。そして，作図の公理群をおいて，「球面上に正方形を作図できるか」と問う。作図させる前に，正方形の定義は「4 つの辺が等しく 4 つの角が等しい四角形」であり，四角形の定義を「4 つの直線で囲まれた図形」と定義して，定義に基づけば球面上に四角形があることを確認する。それを踏まえて，自力解決をさせる。

(2)数学的事実の整理

生徒が作図した方法と図形を取り上げ，それらが正方形かどうかその判断の根拠について整理する。数学的事実として対角線方法による作図を取り上げるかどうかで授業の様子は異なる。対角線方法による作図をする生徒がいなければ，2 直角方法 1 つに向き合いなぜ失敗したか正面から考え，前提を見直して合理的な改善するのに役立つことを感得させられるかもしれない。対角線方法による作図する生徒がいれば，それを取り上げ，なぜ正方形になったりならなかったりするのか

考えさせる。当然，生徒によるのであるが，方法によって得られる正方形になったりならなかったりすること，共通な合同な三角形があること，大きさによって角が変わること，大きさによっても変わらない角の関係があること，は数学的事実として認めておけば，理論を構成したとき整理される様子がよくわかるのではないだろうか。

(3)数学的事実や数学的知識から公理を求める

次に，数学的事実の根拠を問うて，証明によって効いている前提の見直しを図る。平面において三角形の内角の和が 180° で一定であり，球面において三角形の内角の和が図形の大きさに依拠し 180° より大きいことを前提として認めさせる。一方，「対称性理論」や三角形の合同条件と合同の性質が，共通の公理としておければ十分であろう。これによって，基本の作図や対称性が成り立つことを捉えさせる。

(4)公理に基づく理論の構成

見出した公理のみに基づいていくつかの定理を証明し，理論全体を整理し，問題の解決過程に表れた数学的事実の整合性を図る。

3. 開発した教材に基づく授業の分析

開発した教材に基づいた授業を分析し，それに基づいて開発した教材の価値について論じる。まず，実践した授業の基礎的なデータを示す。基礎的なデータは以下の通りである。

実施学校：都内国立大学附属中等教育学校
授業の対象：高校 1 年生で 31 名のクラス（以下 A クラスと呼ぶ）と 33 名のクラス（以下 B クラスと呼ぶ）
授業の日時：2014 年 9 月 2 日　50 分授業
2014 年 9 月 3 日　45 分授業
2014 年 9 月 8 日　50 分授業
2014 年 9 月 9 日　50 分授業
授業時数：各クラス 4 時間
授業者：佐々木陽平（筆者）

また，分析できるデータは以下の通りである。

・後方から教師を撮影した映像
・前方から生徒を撮影した映像
・各授業で生徒が使用したワークシート（学習感想も含む）の PDF（ただし B クラスの第 3 時を除く）
・生徒が使用した球体

前方と後方から撮影した映像を基にして作成した発話記録を資料とする。本研究では前提の見直しに着目して授業を分析する。

先にこの授業で使用した道具について補足しておく。使用した作図道具は，直径 9cm の発砲スチロール球，直径 9cm の塩ビ性の透明半球，ペンを挟むことができるコンパス，黒ペン，赤ペンである。直径 9cm の発砲スチロール球に図形をかきこむことができる。透明半球のふちは大円になっているので，球面上に大円をかきこむことができる。透明半球で図形をかくときは黒ペンで書く。また，鉛筆では発砲スチロールにかきこむことができないので，ペンを挟むことのができるコンパスを用いる。このコンパスで図形をかくときは赤ペンでかく。道具は基本的には 1 人 1 つであるが，球体のみ必要な生徒に追加して配っている。

また，生徒にワークシート（名前の欄と枠線のみ）を配布しており，ワークシートに記入するように約束している。球体の様子を教室で把握するために，実物投影機を用いている。ただし，記録が出来ないので，記録する場合は黒板上にはその様子を表す図を板書している。

本稿では紙面の都合上 A クラスのみについて論じる。

第 1 時の中心課題は「平面上の正方形を作図し

て，その方法で球面上に正方形を作図しよう」である。この際，球面上の直線と円と角度については教師が定義を示し，正方形の定義は生徒とやりとりしながら 4 つの辺が等しく 4 つの角が 90° である四角形と定義される。その定義に基づいて 2 直角方法で作図された図形は正方形ではないという結論が示される。

第 2 時の中心課題は「NS 法の球面上の四角形 ABCD は正方形かどうか考えよう」である。NS 法は生徒が示した作図の方法であり対角線方法である。対角線が等しく直交しているから正方形であるという主張と内角が 90° より大きいから正方形ではないという主張が生徒からあがる。

第 3 時の中心課題は第 2 時と同じである。生徒 TY2 は「えっと，ここの，実際測ってみたら，ここ【∠DAB】が 90°じゃなきゃいけないんですけど，ここが，ここが 90°じゃないきゃいけないんですけど。まぁ，実際 120°くらい，だいたい。なんですけど，球面上のまあ，膨らみを考えないこととするので，対角線によって作られる，あの三角形，二等辺三角形になります，ここも。まあ，あの，辺が一緒なんで【OA と OB】。で，ここの角度が 90°【∠AOB】って決まってるので，よって，ここの角度は 45°と 45°になるので【∠OAB と∠OBA】，実際 120°【∠DAB】で見えても，球面上では 90°と定義できるので，よって，これは正方形であるっていうのが，まあ考えです」(第 3 時，12：55)という。

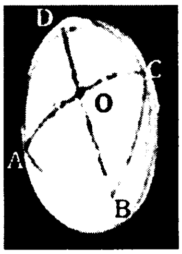


図 3：生徒 TY2 の図

つまり，二等辺三角形の底角が等しいことと三角形の内角の和が 180°であることを前提にして，四角形の内角が 90°になること，さらには正方形になることを説明している。

教師がこれについて賛成か反対かクラス全体で挙手をさせ，反対の生徒 TT を指名すると，教師と生徒 TT らは以下のやりとりをする。

表 2：教師と生徒 TT らのやりとり

TT	19：46	いや，なんだろう。あの二等辺三角形，それを，そういう風に考えると，平面上の定義が球面上で使えないっていう風に考えると，その三角形，二等辺さん，直角二等辺三角形の，において，あの一，2 つの角が 45°だっていう風に，あの，考えられなくなる。だから。膨らみを考えないとして。
教師	20：18	2 つの角が 45°ってのは考えられない。なくなる。
TY2	20：20	膨らみを考えないとしてって言ってるよね，今。
NA	20：23	三角形の内角の和は 180°じゃない。
TT	20：26	そうそう，そういうこと。
TY2	20：28	あ一。
TT	20：29	球面上だと三角形の内角の和が 180°にならない。
		(中略)
TT	20：47	だから，それに直接，TY2 さんの考えに直接反論するとすると，あの一，その三，その三角形の内角の和が 180°っだっていう風に考えられないとしたら，あの一，まあ，そもそも正方形は書けないんじゃないかっていう。

つまり，生徒 TT は生徒 NA の発言を受けて，球面において三角形の内角の和が 180°であることを前提として 2 つの角が 45°とすることに反対しているととらえられる。

第 4 時の中心課題は球面上の三角形の内角の和が 180° より大きいことを証明しようである。教師は平面上の三角形の内角の和が 180° であることの証明を活かせないか提案する。教師は球面上

で平行線をひけるかクラス全体で問うと，生徒は平行線をひけることを主張する。それに対して教師は球面上の直線が一番大きい円である限り２直線は平行にならないことをクラス全体に説明し，三角形の内角の和が 180° より大きいことの証明を示し，全体を振り返り授業を終える。

一連の授業を通して第３時では生徒 TT が自ら前提を見直していると捉えることができる。三角形の内角の和が 180° であるという定理は生徒によって既に証明された定理である。このことから，生徒は自分の数学的知識と関連させて前提を見直しているとみることができる。ここに公理を求めることの芽生えをみることができ，これが本教材の一つの価値であると考える。

また，前提に対する見方の変容が伺える学習感想もある。例えば，「三角形の内角の和はどんなときでも 180° であると思っていた。決めきっていたけれど，球面上では成り立たないと知って，三角形の定義は何なのか根本から考えさせられた。算数で習ったこと，経験によって先入観を抱いてしまっていたので間違った証明をしていた。証明をする際は，定義が成り立つのか考えなければならないと感じた」とある。この生徒にとっては前提はいつでも成り立つ絶対的なものからいつでも成立つとは限らない相対的なものへと変容したことがよみとれる。

4. 今後の課題

開発した教材の課題は多く残る。前提を見直して合理的に改善すること，定義に基づいて考えること，数学的事実を整理すること，公理に基づいて理論を構成すること，これらは実践した授業で実現されなかったように思う。これらの原因を特定し，授業でこれらを実現し，教材の価値をさらに深めなければならない。

主要参考文献

文部省(1968)『高等学校　新しい数学教育－数学教育現代化講座指導資料－』 東洋館出版社.

文部省(1971)『高等学校　新しい数学教育－数学教育現代化講座指導資料－(昭和 46 年度改訂版)』 東洋館出版社.

文部省(1972)『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』大阪書籍株式会社.

IstvanLenart (1993), ALTERNATIVE MODELS ON THE DRAWING BALL, Educational Studies in Masthematics24, pp.277-312.

IstvanLenart (2013), Non-Euclidean Adventures on the LENART SPHERE, Lenart Bt.

（ささき　ようへい
学校法人秀明学園　秀明高等学校
〒350-1175　埼玉県川越市笠幡 4792）