盈不足術を用いて種々の問題の解法をつくりだす過程とその考察

野島　淳司・小川　功介・高濱　良匡・山田　剛史

要　約

本稿は，盈不足術によって種々の問題の解法がつくりだされる過程を記述し，その考察を行ったものである。九章算術の巻七「盈不足」の問題の解決過程を整理することにより，現代で言う過不足算，一次方程式，連立二元一次方程式の解法がつくりだされる様相を示した。さらに，巻八「方程」の連立三元一次方程式の問題に対しても，盈不足術を応用して解決することを試みた。既習の方法を適用しようと工夫することが，数学をつくる際の重要な姿勢であることが改めて示唆された。また解法が成立する背後に比例関係があることを見出した。

1．はじめに

子どもが数学をつくることは数学教育の目標の１つである。ここでいう数学をつくるとは，和田(1997)が「適当な材料を見つけ，それらについて選択が行われ，削るなり何なりして苦労してつくることが『つくる』ということではないかと思います」(p.126)と述べているように，既に持っている知識や方法を活かして新しい数学（定理，性質，公式，解法など）を見出す活動であると捉える。

本稿では，和田(1997)が「つくっていく過程が，その書物に明瞭に示されております」(p.130)と紹介している，中国の古代数学である九章算術の巻七「盈不足」と巻八「方程」に登場する問題のうちのいくつかについて，その解決方法を整理して示し，数学がつくられる様相を記述する。

本稿で取り上げる九章算術の巻七「盈不足」，巻八「方程」の問題の大まかな流れは以下の通りである。まず，巻七の「盈不足」における「盈」とは「過剰」を意味しており，盈不足とはいわゆる過不足算である。したがって，巻七の第一番から第四番までは，現代で言う過不足算の問題である。これに続く第五番から第八番は，純粋な過不足算ではないが，それに順ずる問題が並ぶ。続く第九番からは，一次方程式の文章題が，さらに第十三番から第十八番には連立二元一次方程式の文章題が並ぶ。さらに巻八では第一番から連立三元一次連立方程式の文章題が登場する。

九章算術の問題の解法が記述された先行研究（和田，1997，2007；大山，2003）によると，巻七「盈不足」の問題の解決を通して，現代で言う過不足算，一次方程式，連立二元一次方程式の解法がつくりだされていることが伺える。これらの記述を参考にしながら，筆者ら自身でも問題を解き，その解決過程を整理して，解法がつくりだされる様相を記述する。

さらに，巻七でつくりだされた方法をもとにして，巻八「方程」の問題に取り組んだ。先行研究によれば，巻八の問題に対しては係数に着目した新たな解法が導入されているが，この問題についても巻七「盈不足」で見出し

た方法を使って解決することを試みた。これを通して，既知の方法を工夫して適用することにより，新たな問題に対する解法がつくりだされる様相を明らかにする。

2．前提となる知識

数学をつくるという視点で，巻七のいくつかの問題の解決過程を整理していくわけであるが，その際には，どのような知識が前提となっているかを捉えることが不可欠である。そこで,解決過程を記述することに先立って，九章算術のそれまでの章の中から，解決の前提となる知識を明らかにしておく。すなわち，巻七は巻一から巻六の続きであるから，巻六までにつくられた知識を前提と考える。本来ならば巻六までの問題を解き，数学がつくられていった過程を考察すべきではあるが，本稿では和田(2007)によって整理された巻一から巻六までの項目を参考にして前提を考える。その中でも，取り上げた問題の解決と関連が深いものとして，以下の2つがあげられる。

1つ目は分数計算で，巻一で通分，約分，最大公約数の求め方などが挙げられていることから，計算を扱える数の範囲は有理数まで拡張されているとする。ただし，巻六までで負の数に関する事柄は登場していないため，正の有理数の範囲で考察していく。2つ目としては，巻二で比例式の解法について，巻三で比例配分についての扱いがあることから，比例を用いた計算ができるという前提を置く。また，当時，現代と同じような式表現がなされていたかは定かではないが，便宜上，数式や数式の計算については現代と同じ書き方で記す。ただし,従来中学校で学習するような，文字式の計算や等式の変形といった操作は前提としない。

当然ながら，巻八の問題を解決するにあたっては，これらに加えて巻七でつくられた知識も前提とする。

3．巻七の解決過程の整理

3.1．過不足算

巻七「盈不足」は20題の問題からなるが，その第一番から第八番までは，盈不足つまり過不足算の問題が並ぶ。盈不足といっても，盈と不足の両方が示されているものは第一番から第四番であり，第五番からは両盈，両不足，盈と適足（過不足がない状態），不足と適足と続いている。

これらの問題を九章算術ではどのようにして解決したのか，次の第一番の問題を例にして記述する。

> 物を協同で買うのに，1人が8出すと3余り，7出すと4不足する。人数と物価を求めよ。（和田，2007，p.169）

この問題は以下のように解決されている。1人が出す金額が$8-7$だけ増えると，合計金額は$3+4$増える。よって，求める人数は

$$\frac{3+4}{8-7}=7\ （人）$$

である。人数が求まれば，与えられた条件のうちの片方を使って物価も求められる。例えば最初の条件を使えば，求める物価は，

$$8\times7-3=53$$

である。

または，人数を求めることを介さずに物価を求めようとすれば，次のようにも考えられる。初めの条件に着目すれば，7個の物を買うとすると，1人が8×7出し，合計で3×7余る。また，2つ目の条件に着目すれば，8

個の物を買うとすると，1人が7×8出し，合計で4×8不足する。物の個数の差$8-7$に対する金額が，$3\times 7+4\times 8$だけである。したがって，1個あたりの物価は

$$\frac{3\times 7+4\times 8}{8-7}$$

と求まる。

この解法を一般化する。求める人数を「法」，物価を「実」，1人が出す金額を「所出率」と書く。現代風に文字を使って，法をx，実をy，所出率がpのときの盈をα，所出率がqのときの不足をβと書くと，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{p-q},\quad y=\frac{\alpha q+\beta p}{p-q}\quad \dots\dots(*)$$

となり，これを盈不足術という。

(*)が正しいことは，現代の知識を使えば連立方程式により説明できる。問題の状況を方程式で表すと，

$$px=y+\alpha,\quad qx=y-\beta$$

となるから，これを解けば(*)が導けるのである。(*)を用いれば，盈不足の様々な問題を簡単に解くことができる。例えば次の第四番，

> 牛を何軒かで共同で買うことにした。7軒当り190出すことにすると，330不足する。また，9軒あたり270出すと30余る。軒数と牛の価格とを求めよ。（和田，2007，p.170）

に対しては，所出率が$190/7$と$270/9=30$で，それぞれに対応する不足が330，盈が30であるから，法すなわち求める軒数は

$$\frac{30+330}{30-\frac{190}{7}}=126\ （軒）$$

であり，実すなわち牛の価格は

$$\frac{30\times\frac{190}{7}+330\times 30}{30-\frac{190}{7}}=3750$$

と求められる。

第五番から第八番は，厳密には盈不足の問題ではなく，それぞれ両盈，両不足，適足と盈，適足と不足の問題である。扱える数の範囲を0と負まで広げれば，不足を「負の盈」，適足を「盈が 0」と見ることで解法を統一できる。しかし，扱う数の範囲を正とすると，(*)と異なる公式を作りだす必要がある。例えば，両盈の場合は(*)と同様の記号を使えば，

$$x=\frac{\alpha-\beta}{p-q},\quad y=\frac{\alpha q-\beta p}{p-q}$$

と書ける。他の場合も同様にして公式を導けるが，ここでは省略する。

このように，過不足算の問題を(*)のような式で表されるアルゴリズムによって解く方法がつくりだされている。

3.2. 一次方程式

第九番は，これまでとは明らかに質の異なる以下の問題である。

> 米が 10 斗入る桶の中に入っているが，その量はわからない。この桶に粟を入れて一杯にし，これを米にしたら 7 斗になった。初めにあった米の量はどれだけか。（和田，2007，p.37）

これまでの問題と異なる点は，所出率やその際の盈不足という情報が記されていないことである。

問題の状況はやや複雑に見えるが，整理すれば，もともとあった米の量をxとしたときに，

$$x+(10-x)\times 0.6=7$$

と表せる現代で言う一次方程式の文章題である。しかし，現代のように方程式を立てて形式的に処理をすることはできない。そこで，ここまでにつくりだした盈不足術を使った解決がなされている。所出率やそれに対応する盈不足の情報は問題文で与えられていないから，所出率，すなわちここでは米の分量を，解決者自身で仮に設定する。そしてそれに対応する盈不足を問題文の条件から求める。これを二度行うことで，盈と不足を意図的につくりだし，(*)が適用できるようにするのである。

例えば仮に，はじめの米の分量を 2 斗とすると，粟の分量は$10-2=8$斗となり，粟からできる米の量は$8\times 0.6=4.8$斗，したがって米の合計は$2+4.8=6.8$斗で 7 斗には 0.2 斗だけ不足する。これが所出率を 2 としたときの不足である。盈不足術では，2 組の所出率および盈不足が必要であったから，今度は仮にはじめの米の分量を 3 斗としてみる。すると同様にして，粟の分量が 7 斗，粟からできる米の量が 4.2 斗，米の合計は 7.2 斗となり今度は 0.2 斗だけ盈となる。これで，2 組の所出率とその際の盈不足が見出せたから，(*)を用いて法と実を計算すると，

$$\text{法}\ \frac{0.2+0.2}{3-2}=0.4,\quad \text{実}\ \frac{3\times 0.2+2\times 0.2}{3-2}=1$$

となる。ここで，盈不足術によると法は求める人数であったが，この問題では人数にあたるものは存在しない。そこで盈不足術における法の意味を解釈し直す。

つまり，適足となる所出率に対して，

（法）×（所出率）＝（実）

であるから，適足となるときの法と所出率と実を，「法と所出率をかけ合わせたものが実である」と解釈する。すると上の計算結果は，0.4 にいくらかの米の量をかけたものが 1 斗であると解釈できる。すると求めるもとの米の量，すなわち適足となる所出率は，$1\div 0.4=2.5$斗と求まるのである。つまり，実÷法によりもともとあった米の量を求めることができる。さらに振り返ってみれば，法も実も分母は共通であったから，分母ははじめから考えなくてもよかったことがわかる。すなわち(*)のときと同じ文字を使って書けば，

$$\frac{\alpha q+\beta p}{\alpha+\beta}\ \cdots\cdots(**)$$

により，求める米の量を求めることができるのである。これは方程式を用いれば次のように解釈できる。

もともとの文章題は，整理すれば一次方程式$ax=b$を解く問題であった。しかしこのように整理して式に表すことはできないから，$x=b/a$と形式的に解くことはできない。そこで，xに適当な値を入れて盈不足をつくり，

$$pa=b+\alpha,\ \ qa=b-\beta$$

として，(*)により実と法，つまりaとbを，

$$a=\frac{\alpha+\beta}{p-q},\ \ b=\frac{\alpha q+\beta p}{p-q}$$

と求めた。しかし，いま知りたいのは$ax=b$において，aでもbでもなくxであったから，

$$x=\frac{b}{a}=\frac{\alpha q+\beta p}{\alpha+\beta}$$

とすることでこれが求まるのである。

以上のように，現代で言う一次方程式の問題を，盈不足術の考え方を使って解く方法をつくりだしている。

3.3. 連立二元一次方程式

第十三番は，以下で表される現代で言う連

立二元一次方程式の文章題である。

> 醇酒と行酒との 1 斗の価格はそれぞれ 50 銭と 10 銭である。今 30 銭で酒 2 斗もらったとすると，各種の酒はどれだけか。（和田，2007，p.176）

この問題も，3.2 と同様にして所出率や盈不足についての情報がないから，解決者自らが仮に所出率，つまり醇酒（または行酒）の量を設定して，その際の盈不足を求めることを二度行って盈と不足をつくり，(**)が適用できるようにしている。

例えば醇酒を 0.5 斗とすると，合わせて 2 斗であることから，行酒は 1.5 斗となる。このときの値段は，$50\times0.5+10\times1.5=40$ 銭となり，10 銭だけ盈である。同様に醇酒を 0.2 斗とすると，行酒は 1.8 斗であり，このときの値段は $50\times0.2+10\times1.8=28$ 銭となり，2 銭の不足である。これより，(**)を用いて醇酒の量を求めると，

$$\frac{10\times0.2+2\times0.5}{10+2}=\frac{3}{12}=0.25 \quad (升)$$

となり，行酒の量は $2-0.25=1.75$ 升である。このように所出率を自ら適当に設定し，それに対応する盈不足を求めて(**)を使うことで，問題を解くことができる。

この問題は，現代的に言えば以下の連立二元一次方程式を解く問題に帰着できる。

$$x+y=2,\ 50x+10y=30$$

盈不足術を用いた解法では，上記の第一式と第二式の役割が明らかに異なる。すなわち，第一式は所出率 x を仮に定めたとき，もう一方の未知数 y の値を決めるために用い，第二式はこれらの値を代入して盈不足をつくりだすために用いているのである。

これに続く第十四番は，問題文で与えられた 2 つの条件が同列であり，1 つの未知数の値を決めたときにもう 1 つの未知数の値を定めることが第十三番ほど容易ではない。しかし，この問題も同様の方法により解決される。問題は以下の通りである。

> 大器 5 個と小器 1 個との容量は合わせて 3 斛であり，大器 1 個と小器 5 個との容量は合わせて 2 斛である。大小各々容器の容量はそれぞれどれだけか。（和田，2007，p.176）

この問題も所出率や盈不足についての情報はないから，大器 1 個の容量を解決者が仮に定める。例えば，大器 1 個の容量を 0.5 斛とする。すると，初めの条件から，小器 1 個の容量は $3-0.5\times5=0.5$ 斛と求められる。次に 2 つ目の条件から $0.5\times1+0.5\times5=3$ 斛で 1 斛だけ盈となる。また大器 1 個の容量を仮に 0.55 斛とすると，初めの条件より小器 1 個の容量は 0.25 斛となり，2 つめの条件から $0.55\times1+0.25\times5=1.8$ 斛で 0.2 斛だけ不足となる。このことから，(**)を用いれば，大器 1 個の容量は

$$\frac{1\times0.55+0.2\times0.5}{1+0.2}=\frac{0.65}{1.2}=\frac{13}{24} \quad (斛)$$

となる。これにより，小器 1 個の容量は，

$$3-\frac{13}{24}\times5=\frac{7}{24} \quad (斛)$$

と求められる。

このようにして，いわゆる現代で言う連立二元一次方程式の問題についても，片方の条件を 1 つの未知数を決めたときにもう 1 つの未知数の値を求めるための式，もう一方の条件を盈不足を求める式と考えて，盈不足をつくりだすことにより，(**)を用いて解を求める方法がつくりだされている。

3.4. ここまでの解法が成立する背景

3.1〜3.3では盈不足術によって，現代で言う過不足算，一次方程式，連立二元一次方程式を解く方法がつくりだされる様相を示した。ここでは，これまでの解法を現代的にグラフを用いて振り返り，解法の妥当性と，この解法が成立する背後にある性質を明らかにする。

ここまで示したいずれの問題の解法においても，根底にあるのは盈不足術(*)である。これは，現代的に言い換えれば，連立方程式

$$\begin{cases} y = px - \alpha \\ y = qx + \beta \end{cases} \quad (p > q,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$$

の解が

$$x = \frac{\alpha + \beta}{p - q},\ \ y = \frac{\alpha q + \beta p}{p - q}$$

と求められることといえる。これが成り立つことは，代数的には連立方程式を解くことによって確認できるが，ここではグラフを用いて考察し，これを成り立たせる背後にある性質を明らかにする。

上記の連立方程式をxy平面上に図示すると，図1のようになる。

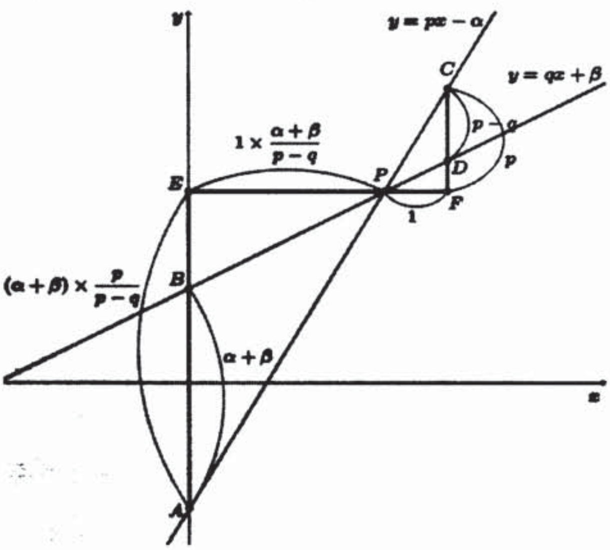

図1 盈不足術のグラフ的解釈

図1において傾きの差$p-q$は線分CDの大きさに表れる。

ここで，

$$\mathrm{EP} = \mathrm{FP} \times \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = 1 \times \frac{\alpha + \beta}{p - q} = \frac{\alpha + \beta}{p - q}$$

であるから交点Pのx座標は$\frac{\alpha+\beta}{p-q}$であり，

$$\mathrm{AE} = \mathrm{CF} \times \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = p \times \frac{\alpha + \beta}{p - q}$$

であるから，交点Pのy座標は，

$$p \times \frac{\alpha + \beta}{p - q} - \alpha = \frac{\alpha p + \beta q}{p - q}$$

となる。したがって，(*)が成立することがわかる。また，線分の長さを求める際に$\frac{\alpha+\beta}{p-q}$倍していることを鑑みれば，(*)が成立する背後には，$p-q$と$\alpha+\beta$の比例関係があることがわかる。さらに，これが成り立つのは，もとの2つのグラフが直線であることに起因する。この比例関係をもとに，つくりだした種々の解法が成り立つことがわかるのである。

2で確認した通り，巻七より前の巻で比例に関する記述があることから，この巻の問題を解く際には比例を前提としてよい。しかるに，当時の文脈においても$p-q$と$\alpha+\beta$，つまり所出率の差と盈不足の差が比例しているという前提を置くことができると考えられる。

4．巻八の解決過程の記述

4.1. 解法をつくりだす過程

巻七「盈不足」に続くのは巻八「方程」である。この巻は，九章算術においては係数に着目して未知数を求める方法について記されており，巻七までの「盈不足」とは異なる解法が導入されている。すなわち，九章算術においては，巻七でつくりだした盈不足術による方法が通用しなくなったため，巻八で新たに係数に着目した方法を生み出しているという文脈であると解釈できる。しかし，筆者ら

は，この問題に対しても，ここまでつくりだしてきた解決方法を工夫して適用できると考え，盈不足術をもとにした解法を試みた。

巻八の第一番の要旨は次の通りである。

> 上禾，中禾，下禾の１乗ごとのとれ高をそれぞれx斗，y斗，z斗とすると，次の連立方程式ができる。x，y，zの値を求めよ。
>
> $$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 2x+3y+z=34 & (2) \\ x+2y+3z=26 & (3) \end{cases}$$
>
> （和田，2007，p.184）

九章算術においては，これらの式の係数に着目して，係数を次々に０にする操作を行って問題を解いている。この方法は現代の行列式の操作につながるものであり興味深いものではあるが，ここでは，さきに述べたように，巻七でつくりだした盈不足術をもとに，この問題を解くことを試みる。

まず，所出率や盈不足についての情報がないため，ここでも解決者自らが仮に所出率を設定し，それに対応する盈不足を求める。この際には，3.3 の連立二元一次方程式を盈不足術を使って解決した際の方法を参考にする。そこでの盈不足をつくるまでの方法を整理すると，以下の①～③に集約できる。

① １つの未知数に適当な値を代入する

② ①と片方の式からもう一方の未知数の値が決まる

③ もう一方の式に①，②で決めた未知数の値を代入して盈不足を見る

いま，解決をしたい問題は未知数が３つであるが，上の①～③で述べた解法を真似て盈不足をつくる。

(i) $z=2$とすれば，連立方程式は

$$\begin{cases} 3x+2y=37 & (1)' \\ 2x+3y=32 & (2)' \\ x+2y=20 & (3)' \end{cases}$$

となる。ここで二元の連立方程式であれば，もう１つの未知数の値が決まるが，三元の場合はまだ２つの文字が残っており，それぞれ単独の式からは他の未知数の値を求めることができない。そこで，これら３式から適当に組み合わせて２元の連立方程式を２つつくり，それを解いて$z=2$のときのxの値を２つ求める。

例えば(1)'と(3)'を連立させたものを盈不足で解く。$x=7$とすると(1)'より$y=8$となるから（(3)'の左辺）＝23 となり３だけ盈，$x=9$とすると(1)'より$y=5$となるから，（(3)'の左辺）＝19 となり１だけ不足となる。よって，(1)'，(3)'をみたすxの値（これをx_1とする）は盈不足術により，

$$x_1=\frac{9\times3+7\times1}{3+1}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$$

と求まる。

今度は(2)'と(3)'を連立させたものを全く同様に盈不足で解くと，$x_2=4$と求まる。以上により，$z=2$と固定したとき，(1)'と(3)'からxを求めると，$x_1=17/2$となるが，(2)'と(3)'からxを求めると，$x_2=4$となることがわかる。仮に$z=2$が正しいとすると，x_1とx_2は一致するはずである。したがって，本来は０になるべきこの差分（$\Delta x_{|z=2}$と書く）を盈不足と考えることにするのである。いま，x_1からx_2を引いた差を考えることにすれば，

$$\Delta x_{|z=2}=x_1-x_2=\frac{17}{2}-4=\frac{9}{2}$$

となる。すなわち，盈不足の言葉を用いて言えば，$z=2$のときΔxは 9/2 だけ盈であるといえる。

(ii) $z=3$ とすれば，連立方程式は

$$\begin{cases} 3x+2y=36 & (1)'' \\ 2x+3y=31 & (2)'' \\ x+2y=17 & (3)'' \end{cases}$$

となる。(i)と同じようにして$\Delta x_{|z=3}$を求めるのだが，二元一次方程式を解く際の盈不足術を用いた計算の詳細は繰り返しになるので省略する。(1)"，(3)"を満たすxをx_3とすれば，盈不足術により$x_3=19/2$となり，(2)"，(3)"を満たすxをx_4とすれば，盈不足術により$x_4=11$となる。したがって，

$$\Delta x_{|z=3}=x_3-x_4=\frac{19}{2}-11=-\frac{3}{2}$$

盈不足の言葉を用いれば，$z=3$のときΔxは3/2 不足であるといえる。

(i)，(ii)をまとめると，

$z=2$のとき，Δxは 9/2 盈

$z=3$のとき，Δxは 3/2 不足

であることがわかる。したがって，3.2 の(**)を用いれば，

$$z=\frac{2\times 3/2+3\times 9/2}{9/2+3/2}=\frac{33}{2}\div 6=\frac{11}{4}$$

と求まる。ここからx，yの値を求めることは2元1次の連立方程式を解くことであり，これは3.3 の繰り返しとなるので省略する。

このようにして，現代でいう連立三元一次方程式の問題についても，これまでの盈不足術を用いた方法を応用することにより解決することができた。この解法を振り返ってみると，3.3 の着想である，未知数の値を1つ仮に設定して，問題の1つの条件から他の未知数の値を求め，他の条件から盈不足を算出するという考えを用いている。しかし未知数が3つあるので，1つの未知数の値を仮に定めてもその他の未知数の値をすぐに求めることはできない。そこで，条件が3つあることを活かして，3つのうちの2つを組み合わせて他の未知数の値を1つ求める作業を二度行い，この値の差を盈不足と見たのである。

ここに，既知の解決方法を別の問題に適用しようと工夫し，新たな解法を生み出すという，数学をつくる様相が見られる。

4.2. 4.1の解決の図的解釈

4.1 では，盈不足術によって連立三元一次方程式を解く方法を示したが，これまでのものと比べると煩雑でわかりにくい。そこで，この解法の各段階で何が行われているのかをグラフを使って整理し，その妥当性を示す。

(1)，(2)，(3)の各式は図的には3次元上の平面を表しており，これらを連立した方程式を解くことは，図2の(1)，(2)，(3)で表される3つの平面のなすそれぞれの交線の交点の座標を求めることである。

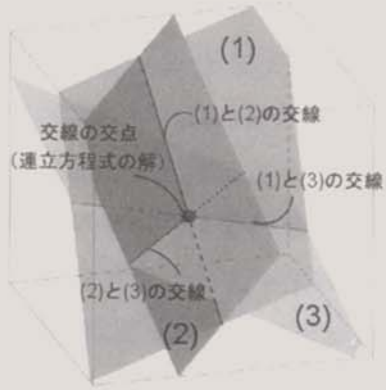

図2 連立三元一次方程式の解

4.1 ではまずzの値を$z=2$と固定して考えた。このとき，図3における(1)'，(2)'，(3)'は，それぞれ(1)，(2)，(3)がつくる面と，平面$z=2$との交線を表している。その上で(1)'と(3)'を連立させてx_1を，(2)'，(3)'を連立させてx_2を求めたから，これは図3における交点Jと交点Kのそれぞれのx座標を求めたことにほかならない。$\Delta x_{|z=2}$はこれらの交点のx

座標の差をとったものである。次に$z=3$と固定したときも同様に考えて$\Delta x_{|z=3}$を求めている。

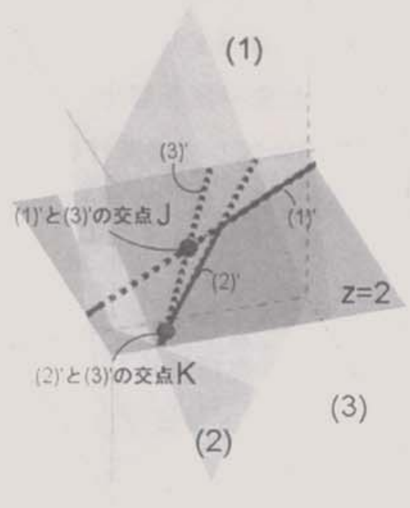

図３　z=2 と固定したとき

図２を見てもわかる通り，固定したzが解として正しい値であれば，Δxは０となるはずである。そこで，この$z=2$および$z=3$のときのΔxの値を盈または不足と考え，盈不足術により$\Delta x=0$となるzの値を求めたのである。

この解法によって$\Delta x=0$となるzの値が求まることの背後には，zの差（Δz）とΔxの差との比例関係がある。このことは次のようにして説明される。

$z=2$のときに(1)'と(3)'を連立して求めたxの値x_1は，(1)と(3)からyを消去した式

$$x=z+\frac{13}{2} \qquad (4)$$

のzに２を代入したものである。同様に，(2)と(3)からyを消去した式

$$x=7z-10 \qquad (5)$$

のzに２を代入したものがx_2である。そしてこれらの差x_1-x_2が$\Delta x_{|z=2}$である。全く同様にして，(4), (5)に$z=3$を代入したものがx_3, x_4であり，その差x_3-x_4が$\Delta x_{|z=3}$である。これをzx平面上に表すと次の図４のようになる。

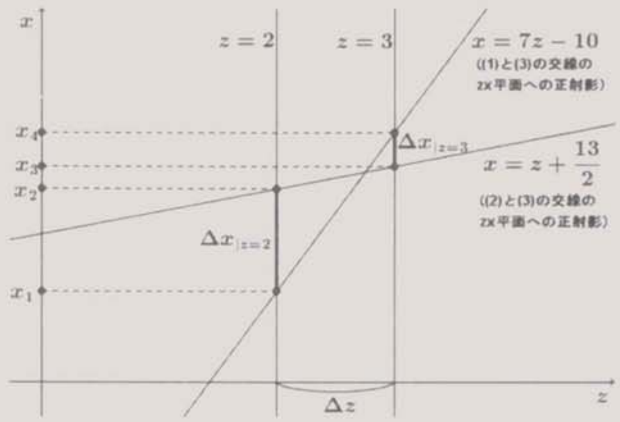

図４　zx 平面上での盈不足の図的解釈

これより，zとxが比例しているから，zとΔxも比例しており，その差同士もまた比例していることがわかる。これが成り立つのは，元の式が表す面のうち，どの２つの面の交線もそのzx平面への正射影が直線となっていること，さらにもとをたどれば，元の式が表す面がすべて平面であることに起因する。4.1 の解決方法においても，背後には比例が潜んでいることが明らかになった。

５．まとめ

本稿では，数学がつくられる様相を記述することを目的に，九章算術の巻七「盈不足」のいくつかの問題の解決過程を整理し，そこでの解決方法をもとに，巻八「方程」の問題を解き，その考察を行った。

巻七の解決過程を振り返ってみると，以下のように，既知の方法を工夫して適用する様相が顕在化している。

・3.1 の過不足算で導いた盈不足術を 3.2 の一次方程式の問題に適用するため，盈不足の情報がない問題においても，解決者自身で所出率を設定し，意図的に盈や不足をつくりだしている。また，これまでの問題とは求める対象が変わっていることから，盈不足術における所出率，法，実をより広く

解釈し直している。

・3.3 の連立二元一次方程式の問題においても，3.2 と同様に解決者自身で所出率を設定している。その際，問題の条件に所出率をあてはめるだけでは対応する盈不足をつくりだせないことから，与えられた2つの条件の役割を変えている。すなわち，所出率を仮に定めたとき，一方の条件を残りの未知数を求めるために，もう一方の条件を盈不足を導出するために用いている。

次に巻七の解法を前提にして，巻八「方程」の連立三元一次方程式の問題を解決した。ここでは，連立二元一次方程式の解法で用いた，複数ある条件のうちの1つを，未知数を求めるために使い，他の条件を盈不足を求めるために使うという考えを活かした。その際，未知数が3つあることから，1つの値を仮に定めても他の未知数の値を直ちに導出することはできない。そこで，z の値を仮に定め，2元の方程式を3つつくり，第一式と第三式から y を消去して x の値を求める。これを第二式と第三式についても同様に行い，2つの x の値の差を盈不足として捉えた。これを異なる z の値に対して二度行うことで，盈と不足をつくり，盈不足術による解法に帰着させた。

以上のように，新しい問題に対処するとき，これまでにつくりだした方法を適用できるように工夫することが数学をつくる際の極めて重要な姿勢である，ということが実例を通して改めて示唆された。

また，本稿で示したすべての解法は盈不足術をもとにしているが，この解法が成り立つ背後には比例関係があることが明らかになった。これは，比例が一連の問題解決において重要な役割を担っていることを示している。

註

1) 盈不足術によって連立三元一次方程式を解く別の方法もある。例えば，z の値を仮に定めて2元の方程式を3つつくり，そのうちの2つから x および y の値を求め，残りの式から盈不足を導出する。これを異なる z の値に対して二度行い，盈不足術によって適足となる z の値を求めるというものである。この解法においても，二元の連立方程式の解法を三元の場合に適用しようとする姿勢が見られる。

2) 本稿は平成26年度東京学芸大学大学院教育学研究科（修士課程）の授業（担当：中村光一先生）における議論をもとに，野島が中心となってまとめたものである。議論には，著者らのほか，当時修士課程に在籍した東龍平氏，新井健使氏，石川弥氏，佐々木陽平氏，篠原崇宏氏，菅原恵美氏，さらに長期研修生として在籍した町田伸先生，松井浩司先生が参加した。

引用・参考文献

大山梅次(2003),『九章算術について：中国古算書』，自家版

和田義信(1997),『和田義信著作・講演集3 講演集(1)数学と数学教育』，東洋館

和田義信(2007),『日本数学教育史 奈良・平安，江戸』，東洋館

(のじま　じゅんじ，おがわ　こうすけ，
たかはま　よしまさ，やまだ　たけし
東京学芸大学大学院教育学研究科
修士課程　数学教育専攻
〒184-8501 小金井市貫井北町4-1-1）