修士論文要約

モデルの発展に着目した数学的モデル化のプロセスに関する研究

—現実世界の事象を考察する力の育成の視点から—

野島　淳司

要　約

本研究の目的は，現実世界の事象を考察する力の育成という視点から数学的モデル化のプロセスの重要となる局面を明らかにした上で，提起した局面でどのような活動がなされるのかについての示唆を得ることである．現実世界の事象を考察する力の育成にあたっては，学習者自身が問題場面から自然と想起するアイデアからモデルをつくり，モデルの発展を通して現実場面の理解を深めることが不可欠であることを同定した。その上で，開発した教材の解決プロセスを省察することにより，モデル自体の検証を行うことの有効性，およびモデルの発展の様相に関する示唆を得た。

本論文の構成

序．研究の目的と方法

日本の多くの生徒にとって，学んだ数学の内容と現実世界とが乖離してしまっているという現状があることは否めない。しかしながら，小平(1975)が「数学は森羅万象の根底をなしている」(p.2)と述べているように，数学は非明示的であれ現実世界のいたるところに内在しているのである。そして，学校で学ぶ数学はその根底をなしているといえる。

社会を能動的に生きるためには，現実世界に存在する様々な出来事を分析したり，人生で出会う種々の問題に自らの力で立ち向かったりすることは不可欠であるから，学んだ数学を数学の世界の中の事象に用いるのみならず，現実世界の事象に対して用いる経験を積み，現実世界の事象を考察する力を育むことが必要であると考える。

現実世界の問題を解決する際には「数学的モデル化」(例えば，三輪，1982，p.286)と呼ばれる一連の活動が行われる。これまでの研究により，現実世界の問題が数学的モデル化によってどのように解決されていくかが徐々に解明されてきたが，現実世界の事象を考察する力の育成という視点から，改めてそのプロセスの中でどのような局面が重要であり，そこでどのような活動が行われるべきかを明らかにする必要があると考える。以上を踏まえ，本研究の目的を，現実世界の事象を考察する力を育成することが現在の日本の数学教育の課題の１つであるという前提のもと，その視点から数学的モデル化のプロセスの重要となる局面を明らかにした上で，提起した局面においてどのような活動がなされるのかについての示唆を得ることとする。

本研究の目的を達成するための課題は次の4つに整理できる。すなわち，(1) 現実世界の事象を考察する力の育成が現在の日本の数学教育の課題となることを示す (2) 現実世界の問題を解決するプロセスにおける重要な局面と，その局面における課題について，現実世界の事象を考察する力の育成という視点から明らかにする (3) (2)で示した数学的モデル化の重要な局面が豊かにあらわれるような教材の具体を示す (4) (2)で示した数学的モデル化の重要な局面に対する省察を行い，その局面で行われる活動の具体を明らかにする，である。

これらの課題を解決するために本研究では以下の方法をとる。(1)に対しては，現実世界の事象を考察することに対する日本の生徒の現状を主に国際調査の結果から分析する。また，日本学術会議の提言や現行の学習指導要領の記述などから，現実世界の事象を考察する力の育成が国内外で求められているということを明らかにする（第１章）。(2)に対しては，まず現実世界の事象を考察する力を育む現実世界の問題がもつ性格を先行研究から明らかにする。その上で，現実世界の問題を解決する活動である数学的モデル化について，先行研究からそのプロセスを整理し，現実世界の事象を考察する力を育むという視点から見直すことで，重要な局面と，検討すべき事項について整理する（第２章）。(3)に対しては，(2)で重要であることが述べられる「モデルの発展」が豊かにあらわれるような教材を開発した上で，その想定される解決プロセスをできるだけ詳細に記す（第３章）。(4)に対しては，(3)の解決過程を反省的に振り返り整理をすることで，(2)で提起した数学的モデル化の重要な局面でどのような活動がなされ

るのかについての示唆を得る（第４章)。

１．現実世界の事象を考察する力を育む必要性

近年行われた大規模調査によって，日本の生徒の数学の力は国際的に見て高い水準にあることが明らかにされている（国立教育政策研究所 2013a，国立教育政策研究所 2013b，日本学術会議 2014)。しかしながら，現実世界の事象を考察する力という視点で見ると状況は大きく異なる。PISA2012 の質問紙調査からは，現実世界の事象と関連した問題を解くことに対する自己効力感が極めて低いことが明らかとなっている(国立教育政策研究所，2013a)。また，国立教育政策研究所により行われた「特定の課題に関する調査（論理的思考)」では，自らが教える生徒が「社会や自然などについての事象の関係を考えようとしている」と考えている教師の割合が 20.6 パーセントとしかいないということが示されている(国立教育政策研究所，2013c)。さらに，TIMSS2011 の質問紙調査の結果からは，日本の生徒は，数学が数学以外の事柄に対して有用であると思っていない傾向があることが明らかになっている(国立教育政策研究所，2013b)。

昨今の社会の要請を見ても，数学を使って現実世界の事象について考察する力を育成することは重要であるという認識が以前にも増して広まってきているといえる。OECD は PISA 調査を実施するにあたり，文脈の中で数学を使う「数学的リテラシー」を身につけることを重視している。また，日本学術会議(2013)は，従来の「数学」に「統計学」と「応用数理」を加えた「数理科学」という学問分野を定義し，その必要性を述べている。さらに現行の中学校，高等学校の学習指導要領を見ても「事象を数理的に考察し表現する能力」が目標の１つとしてあげられるなど，カリキュラムのレベルでも現実世界の事象を考察する力の育成が重視されていることがわかる。

２．現実世界の問題を解決するプロセスと重要な局面

現実世界の事象を数学的に考察する力は，純粋な数学を学ぶことによっては自然に育成されないということがこれまでの調査研究から明らかになっている(Treilibs et al 1980, Ikeda & Stephens 2001，長崎 2001，柳沢・西村 2013)。だからこそ，数学の授業において現実世界の問題について考察する機会を積極的につくっていくべきだと考える。

しかし，現実世界に関連したどのような種類の問題でも，現実世界の事象を考察する力の育成に寄与するわけではない。現実世界と関わりがあるように見えるが，解決に際してはその部分に目を向ける必要がなく，数学的な処理のみで解決できる問題では，そのような力の育成は期待できない。島田(1942)や Muller & Burkhardt(2007)が指摘するように，学習者にとってどのように解決するかが明白でなく，解決に用いる数学を選択すること自体が課題となるような現実の問題が必要である。そのような問題を扱ってこそ，現実世界の事象と対峙する必然性が生まれ，それを数学的に考察する力を育成することにつながると考えられる。

現実世界の問題を数学を用いて解決を志向する活動は一般に「数学的モデル化」と呼ばれており，現在まで国内外で理論面でも実践面でも多くの研究がなされている。種々の研究により，数学的モデル化のプロセスの言語

化および図式化がなされている。その中でも現実世界との関わりを重視していると考えられるBurkhardt(1979)は，現実の問題を解決するプロセスとして図１を提示している。

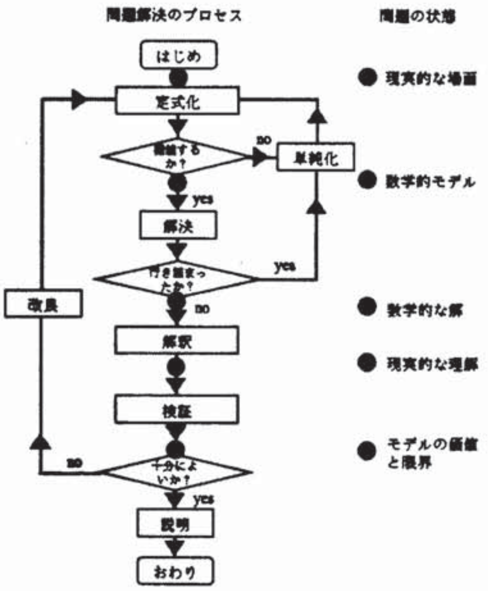

図１　現実の問題を解決するプロセス

(Burkhardt,　1979, p.239)

この図には，現実場面に戻って「定式化」を行う段階として，「改良」および「単純化」が示されており，これによって現実の問題が現実場面とどのように関わって解決されるかがある程度明らかにされている。さらに，Burkhardt(1981)は，次の「トチの実の問題」に対する解決プロセスを示し，図１のフローチャートに沿って問題の解決がどのように進行するかの例を示している。

トチの実の問題

男の子の何人かの集団，４人としておこう，がトチの実を集めに出かけた。しばらくして彼らはトチの実を持って戻ってくる―バッグの中にことによると 12 個入っているかもしれない。彼らは彼らの間でどのようにそれを分けるであろうか。(p.11)

氏は，この問題に対する解決プロセスを示した上で，それを表１にまとめている。

表１　トチの実の問題の解決プロセス

(Burkhardt, 1981, p.12)

トチの実			
状況の局面	個数	配分	「公正な順番」
モデル	T=bn	順番に選ぶ	一番大きい または一番拾った またはランダム
答え	n=T/b=12/4	(1,5,9), (2,6,10) (3,7,11), (4,8,12)	
理解	トチの実3つ	3つのものの 集まりが4つ	
価値と限界	どのトチの実？	どの男の子が？	OK?

T:トチの実の総数
b:男の子の数
n:それぞれの男の子のトチの実の数

表１に示されているように，現実世界の問題を解決する際には，モデルを通して現実場面を見直すことで，現実場面への理解が深化し，新たな観点が見出され，その観点から新たに「定式化」，「解決」，「解釈」，「検証」という４つの活動からなるモデル化が行われるということが想定される。

現実世界の事象を数学の世界に翻訳してモデルをつくる活動である「定式化」は，このプロセスの中で最も困難であると考えられる。Burkhardt(1979)は，ここで行われる活動をさらに詳細に特徴づけた図２で示されるフローチャートを提示している。

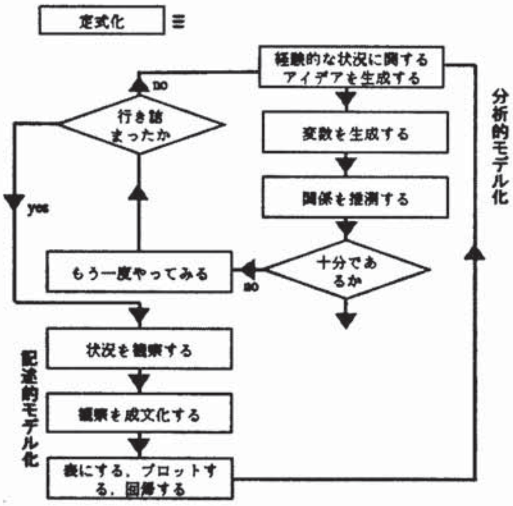

図２　定式化のプロセス

(Burkhardt,　1979, p.106)

現実世界の事象を数学的に考察する力を育成

しようとする目的のもとでは，はじめのモデルがつくられる際の「定式化」を，学習者自身が行うことが肝要であると考えられる。さらにこれは図2で示されるように，問題場面から解決のためのアイデアを生成することから始まるから，学習者が問題場面から自然と想起されるアイデアからはじめのモデルがつくられるようでなければならない。

これに関して，Lesh & Doerr(2003)は，複雑な現実世界の状況を考察するときには，単一のモデル化サイクルは十分でないことを述べている。また，Lesh & Zawojewski(2007)は，生徒によるはじめの状況の解釈は，最終的な解決の根底にある解釈に比べて，不十分であることを述べている。これらのことから，解決者が問題場面から自然と想起されるアイデアからつくられるモデルを通して現実を見直し，新たなモデルをつくっていく活動が極めて重要であることがわかる。あるモデルをもとにして，新たにモデルを作り直す活動は三輪(1983)の言葉を借りれば「よりソフィスティケートされたモデル」(p.120)を求める活動である。氏の指摘するように，新たなモデルをつくる際には，より現実場面を詳細に捉えた洗練されたモデルをつくる活動が行われることが想定される。

しかしながら，つくったモデルを通して現実場面を見直し，新たなモデルをつくる活動は，「よりよいモデル化」だけではないと考えられる。表1で整理された Burkhardt(1981)によるトチの実の問題解決プロセスを見れば，はじめに個数だけに着目したモデルを通して現実を見直すことで，「分配」という観点が生じ，誰がどの実を取るかを規定する，より洗練されたモデルがつくられている。その後，さらにそのモデルを通して現実場面を見直し，「公正な順番」を規定するためのモデルをつくっている。これは「最初に選択する人」という新たな観点だけに着目してつくられたモデルであるといえ，このモデル自身は「分配」に着目したモデルを改良したものとはなっていない。しかし，「分配」のモデルと「公正な順番」のモデルを合わせることで，現実場面をより詳細にとらえた解が導かれるのであるから，新たな観点に着目してそこに焦点を当てたモデルをつくることも重要な活動であるといえる。このように，一度モデルがつくられた後に現実場面を捉える新たな観点が見出され，よりよいモデル化がなされることもあるし，観点の異なる別のモデルがつくられ，もとのモデルと合わせて現実場面をより詳しく捉えられることもある。これらを合わせて，本研究では「モデルの発展」と呼ぶことにする。以上をまとめると，現実事象を考察する力を育む上では，学習者自身が現実場面から自然に想起されるアイデアからモデルをつくり，モデルの発展を通して現実場面への理解を深めていくことが不可欠であるといえる。筆者の管見の限り，このようなプロセスを実現するための教材は十分にあるとは言い難く，適切な教材を開発してそのプロセスを示すことが1つの課題となる。またモデルが発展する様相についてもさらなる研究の余地がある。以下，モデルの発展についての課題をあげる。

1つ目の課題は解の検証に関してである。図1に従えば，あるモデルから次のモデルへ移行するときには，導かれた解が「検証」によって「十分によいか」検討され，「改良」のループを辿って「定式化」から始まるサイクルに戻ることになる。つまりモデルから導か

れた解を現実場面で確かめることによって検証を行うことがモデルの発展の原動力となっていると考えられる。しかし，問題によって，またモデルから得られる解によって，このような検証がいつでも可能というわけではない。現実場面または擬似的な現実場面を用いてモデルから導いた解の検証を行うことができないときに，解の有効性がどのように判断されて，モデルの発展のための原動力となり得るかということは検討を要する事項であるといえる。

２つ目の課題はモデルの発展の様相に関してである。モデルの発展は，モデルから導かれる解を現実場面において検証し，満足いかなかったときにだけ生ずる活動ではない。池田(1999，2004)や清野(2005)によって，モデルから導かれる解を検証して満足いかなかったとき以外にもモデルの発展が行われることが明らかにされている。これらの先行研究を踏まえつつ，解の検証以外の局面において，現実場面から自然に生じるアイデアからつくられるモデルが発展していく様相を，事例を通して特徴づけることが課題となる。

３つ目の課題はモデルの他の場面への応用に関してである。ある現実場面で開発したモデルを別の現実場面に適用することは，ある特定の現実場面の理解を深めるためのモデルの発展に対して，モデル自体の適用範囲を広げるという意味でのモデルの発展にあたる活動であると捉えられる。Lesh et al(2003)は，一度つくられたモデルを他の場面に適用することは容易ではないことを述べ，現実の状況からモデルをつくり出す「モデル創出活動」，それを表現するための有効なシステムを見出す「モデル探求活動」の後に，導いたツールを他の場面で使えるようにする「モデル適応活動」を位置づけている。しかし，ある現実世界の問題を解決するためにつくられたモデルが他の場面においても有効に働くような教材は十分に開発されているとは言い難いから，その具体を示すことも課題の１つとなる。

３．モデルの発展を意図した数学的モデル化の教材の具体

モデルの発展を通して現実場面への理解を深化させることを意図した教材の具体として，富士山の可視についての教材と，太陽と方角についての教材の２つについて，その想定される解決プロセスを示す。

(1) 富士山の可視についての教材

富士山の可視についての教材で用いる問題の概要は以下の通りである。

問題

富士山はどれほど北から観測できるのであろうか。富士山を観測できる北限の地点を予測しよう。

日常の経験や裕元(2009)の先行研究から，この問題に対する自然なアイデアとして「途中にある障害物によって可視が決まる」というものが想定される。図４はこのアイデアをもとにした，Google Earth を用いた富士山を観測できるかを判断するためのモデルである。

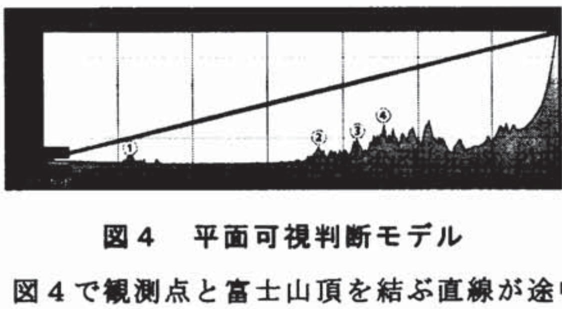

図４　平面可視判断モデル

図４で観測点と富士山頂を結ぶ直線が途中の地点に遮られていなければ，富士山を観測できることになる。しかし，このモデルは富士山と観測地との距離を問題にしていないから，極

端な例をあげれば北海道や外国からでも富士山が見えることとなってしまう。そこで，地球の丸みによる影響を考えなければならないことがわかるが，図4の地面を表す直線を円弧にしたモデルをつくることは容易ではない。そこで，単純化により考慮する変数を減らして，地球の丸みをどのようにしてモデルに反映させられるかを考える。途中点の影響，観測地の標高という要素を一旦考慮から外して考えることで，図5のように，富士山が見える最遠の地点は図で表現できる。このとき，地球の半径をR，富士山の高さをhとすれば

$$PS^2 = OS^2 - OP^2 \fallingdotseq \sqrt{2Rh}$$

によって，最遠の地点までの距離を求めることができるのである。

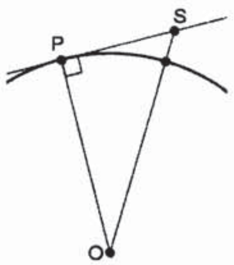

図5　単純化したときの最遠の地点

さらにこのとき，図6の線分PS，弧PQ，線分PQのどれを距離としてもよいかという新たな問題が生じうるが，$\angle POQ = 2\theta$とすれば

$$PQ = \frac{\sin\theta}{\theta} \times \widehat{PQ},\ PS = \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \times \widehat{PQ}$$

となり，θの値が十分小さければ，どれを距離と考えてもよいことが確認できる。

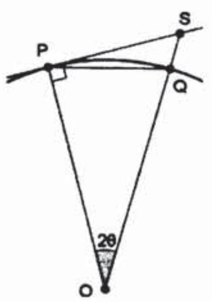

図6　3つの距離

図5のモデルに観測地の高度を考慮すると，図7のモデルができる。このモデルを用いれば，途中の障害物を考慮しないときに，観測地から富士山が見えるかを判断することができる。つまり，観測地の高度をh'としたとき，富士山を観測できる点までの最大距離は，

$$PS = PT + TS = \sqrt{2Rh} + \sqrt{2Rh'} = 263 + 121\sqrt{h'}$$

となるから，これを用いて富士山が見えるかを判断することができるのである。

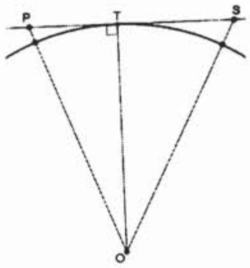

図7　観測地の高度を考慮

これを地図上で解釈すれば，富士山を中心とする半径263 kmの円と，観測地を中心とする半径$121\sqrt{h'}$kmの円が交わっているかによって富士山が見えるかを判断することになる。

さらに，途中点の影響を考慮すると，図8で表されるモデルができる。観測地と，障害となりうる途中点が特定できれば，△POUおよび△POSそれぞれにおいて，全ての辺の大きさが定まるので，余弦定理を用いて∠OPUと∠OPSを導出することができ，その大小により可視が判断されるのである。

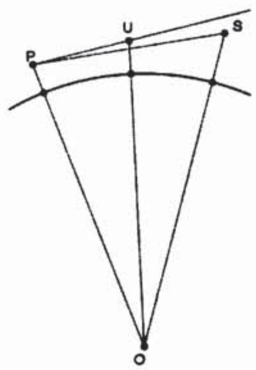

図8　途中点の影響を考慮

地図上で候補となる山を絞っていきながら図

8のモデルを用いることで，富士山が観測できる北限の地点は福島県の花塚山であるという予測がなされる。

この予測は，新聞記事や専門家の分析によって正しいことが確かめられるが，答えのわかっていない現実世界の事象を考察する力の育成を目標とすれば，このような検証の仕方は望ましくない。そこで，現実場面で収集可能なデータを使ってモデルの検証を行うことを試みる。筆者の住んでいた小金井市のアパートからは冬の天気のよい日には富士山が見えるので，それを撮影した写真を使ってモデルの検証を行う。富士山の火口の直径はおよそ 800 m であるから，この大きさを用いて，図9のように写真の富士山は火口の両端から下に向かってどれだけの大きさが見えているのかを計算することができる。

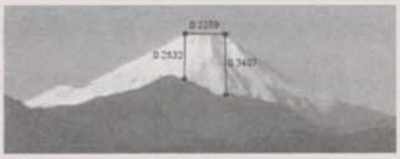

図9　火口の両端から下の距離を求める

これと，導いたモデルから求まる火口の左端と右端から下に向かって見える部分の大きさを比較して，おおよその一致を確かめることによりモデルへの信頼度を高めることができるのである。なお，このとき，富士山までの距離と見えている部分の角度から，見えている部分の大きさを求めるための新たなモデルがつくられる。

(2) 太陽と方角についての教材

太陽と方角についての教材で用いる問題の概要は以下の通りである。

問題

山登りで山頂から下山する際，南に下ればよいことはわかっているのだが，方角がわからない。太陽の位置と現在時刻からできるだけ正確に南の方向を求める方法を考えよう。

まず，小学校，中学校の理科で学習する知識から，太陽は見かけ上 1 時間あたり 15 度回転し，12 時に南中するといえるから，現在の時刻を x 時とすれば，「現在の太陽の位置を $15\times(12-x)$度だけ時計まわりに回転させた位置の地平面への正射影の方向が南である」というモデルをつくることができる。さらにこのモデルを現実に適用することを考えれば，角度を測らずにすむように，「現在の太陽の方向に短針を向け，時計の 12 時の方向と短針の方向のちょうど真ん中が南である」というより現実に適用しやすいモデルをつくることができる。さらに，太陽を直接見るかわりに垂直に立てた棒の影を用いるといった改良もなされる。

しかし，この方法では太陽の軌道面と時計の文字盤がつくる面のずれができてしまう。このずれを図で表現すると，次の図 10 の SS' のようになる。

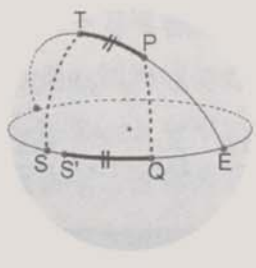

図 10　天球上でずれを表現

まずは太陽の軌道面が自分を中心とした大円となる春分，秋分時を想定して，球面三角法を駆使して SS'の大きさを求めると，

$$\mathrm{SS'} = \mathrm{SE} - \mathrm{S'Q} - \mathrm{QE} = x - \tan^{-1}(\cos\alpha\cdot\tan x)$$

となる。ただし，$x = \mathrm{PE}$，$\alpha = \angle\mathrm{PEQ}$である。このモデルをもとにして，さらに春分，秋分の日以外の場合，すなわち季節を考慮したと

きのずれの大きさSS'を表現したものが図11である。

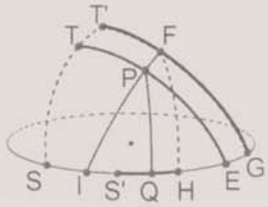

図11　夏至のときのずれの大きさ

このときのSS'の大きさも，やや複雑にはなるが，球面三角法を用いて計算することができる。この結果を用いると，夏至の14時半には，モデルから求める南と本来の南では45度ものずれが生じてしまうことがわかる。

モデルをつくる過程で複雑な計算が行われるため，モデルから導かれた解が現実的に妥当なものであるのかは検証されるべきであるが，例えば夏至の日に45度のずれが生じているということを直ちに検証することは困難を極める。図11のSS'のデータをとることは容易ではないが，SS'を求める一つ前の式であるSHは，影の観察によって連続的にデータをとることができる。そこで，図12のようにして収集した影の回転角と，モデルから導かれる影の回転角を比較して，それらがおおよそ一致することを確かめることによりモデルに対する信頼度を高めることができるのである。

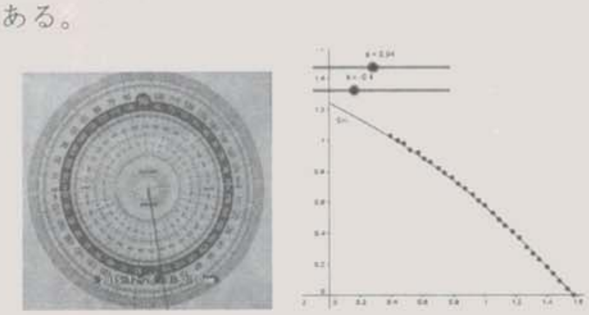

図12　実際のデータとモデルとの対比

なお，このプロセスの中で，「南中時刻が12時である」という仮定を修正している。

4．数学的モデル化の重要な局面に対する省察

2章の解決プロセスを省察することにより，モデルの発展に対する次の示唆が得られる。

解の検証については，モデルから得られた解を現実場面で実践して確かめることが困難な場合でも，現実世界で収集可能なデータと，モデルから導かれる現象を対比させることによってモデル自体への信頼度を高めることができうるということである。さらにこの活動によって，モデルと現実場面との関連がより深く理解されることになるし，検証で不整合な点が見つかれば，その原因を見出してモデルの改良が行われる可能性もある。

また，解の検証以外の場面でのモデルの発展の様相について，次の3つの特徴的な活動が同定される。1点目は，モデルから現実場面を想起することである。モデルや，モデルから導いた解を通して現実場面を想起することで，必ずしも解と対立するような事項を見出さなくても，モデルの発展のための新たな観点が導かれることがある。2点目は暫定的なモデルをつくって必要な要素を組み込むことである。現実場面から重要と考えられる要素を複数同定したときに，その一部を意識的に考慮から外して暫定的なモデルをつくり，考慮から外した要素をモデルの上に組み込むことでモデルが発展する可能性がある。3点目は問を生成してそれに答える新たなモデルをつくることである。モデル化のプロセスの中で生じる新たな問に答えるためのモデル化は，はじめの問題の解決とは異なる目的をもちうるが，この活動によっても現実場面への理解が深まる可能性がある。

さらに3章で導いたモデルを他の場面へ応用する教材の具体を示す。まず，富士山の可

視の問題で得られた「平面可視判断モデル」を応用して，映画館の適切な客席の傾斜を求める問題について考察する。適当な仮定を設定すれば，図 13 のように目の位置とスクリーンを結ぶ視線を表す直線が前の座席に座る人の頭によって遮られないような映画館の傾斜角を求めることができる。

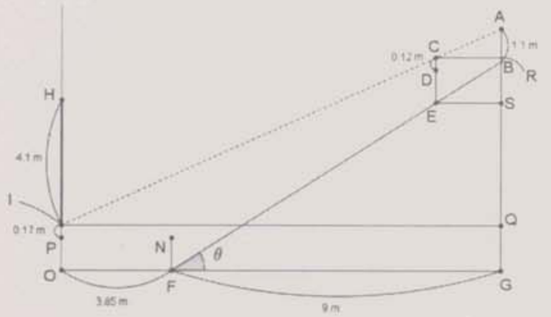

図 13 映画館の適切な座席の傾斜を考える

また，太陽と方角の問題から得られた，球面上の直角三角形の既知の辺や角の大きさをもとに他の辺や角の大きさを求めるモデルを応用して，地球上の 2 点間の距離を求める問題について考察する。球面上に直角三角形をつくりだすことによって同じモデルが適用でき，2 地点の緯度，経度からそれらの地点の間の距離を求めることができる。

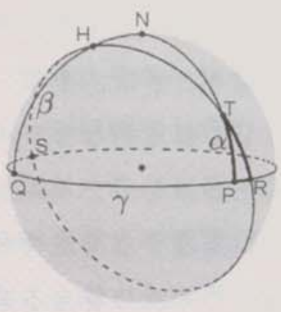

図 14 地球上の 2 点間の距離を求める

5．今後の課題

今後の課題は次の 4 点である。1 点目はモデルの発展を意図したさらなる教材を開発すること，2 点目はモデルの発展を意図した教材を用いた授業実践から，生徒によるモデルの発展の様相を調査すると，3 点目はある場面から導かれたモデルを他の場面へ応用する一連の授業を設計して，場面が変わってもモデルを使うことができるのか，またモデルへの理解がどのように変わるのかを調査すること，4 点目はモデルの発展を意図した授業が，生徒の現実世界の事象を考察する力に変容をもたらすのかを検証することである。

主要引用・参考文献

国立教育政策研究所(2013a),『生きるための知識と技能 5』，明石書店.

田代博(2011),『「富士見」の謎 一番遠くから富士山が見えるのはどこか？』，祥伝社.

穂刈四三二(1955),『基礎数学講座 3 巻 平面球面三角法』，共立出版.

三輪辰郎(1983),「数学教育におけるモデル化についての一考察」，筑波数学教育研究(2), pp.117-125.

Burkhardt, H. (1979), Learning to Use Mathematics, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Application*, 15 (10), pp.238-243.

Burkhardt, H. (1981), *Real World and Mathematics*, Blackie.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. & Zawojewski, J. S. (2003), Model Development Sequences, In Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds.) *Beyond Constructivism*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., pp.35-58.

(のじま じゅんじ
東京学芸大学附属高等学校
〒154-0002 東京都世田谷区下馬 4-1-5)