国際中等教育研究　第10号　p.21 ～ 52
東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

数学を使い，創る活動の水準を高める手立て

― 公開研究会の報告を兼ねて ―

How to Raise the Level of Activities for "Using and Creating Mathematics"

A Report on the Lesson Study

数学科
新井健使　内野浩子　小林　廉　祖慶良謙
高橋広明　成田慎之介　二宮　脩　本田千春

1．公開研究会における数学科の提案

1．1　はじめに

本校数学科は，数学的リテラシーの育成を主たる理念として，本校独自の6年一貫カリキュラムを定めている（例えば本校数学科，2012)。その特徴は，数学的モデル化の活動重視と，ICT 利用を前提としていることにある。このカリキュラムを実施するためには，数学の内容理解と能力育成の両面のバランスをとりながら，事象の探究を軸に据えた授業を積極的に展開していく必要がある。この前提の下，以下ではまず本校数学科が目指す資質・能力とその育成について概説し，次に数学科の研究課題について述べる。

1．2　数学科の目指す資質・能力とその育成

(1) 育成すべき資質・能力

先に示した通り，本校数学科では「数学的リテラシー」を育成することを目指している。「数学的リテラシー」については，「国際社会の一員として適切に判断し，行動できる人間を育成する」という目的に照らして，OECD/PISA2003 の定義をもとに，次の 4 つの力で捉え，その育成を図ることを理念としている。

- 確実な数学的根拠にもとづき判断する力
- 数学的な記号や論理，適切なテクノロジーを用いて，数学的な操作を行う力
- 数学を用いて，積極的に，豊かにコミュニケーションする力
- 数学が世界で果たす役割を見つけ，理解する力

また，「数学に対する興味・関心」は，数学的リテラシーと相互に補完するものと捉えた。なお，OECD/PISA における数学的リテラシーの定義は 2012 年調査から変更され，我が国においても数学的リテラシー論の研究が進んできている。これらを踏まえて本校のカリキュラム理念を再検討しているところである。

さらに本校数学科では，本校卒業時に有しておいてほしい資質・能力として，上記のカリキュラムの理念と MYP 数学との接続を踏まえ，次の 3 つの観点に立つ目標を生徒たちに示している（図 1-1)。すなわち，より具体的には，これら 3 つの観点に立つ目標が本校数学科で育成したい資質・能力である。

特徴的な点は観点 B「プロセスと振り返り」である。数学に限らず内容とプロセスは決して切り離せるものではないが（国立教育政策研究所，2016)，プロセスの側面を強調し，評価するために観点として明確に位置づけた。さらに，反省的思考を促すために「振り返り」も明確に位置づけた。B1 は，本校カリキュラムが重視している数学的モデル化のプロセスを遂行す

る能力の育成に関わる観点である。一方で，B2 として，数学内での探究におけるプロセスを遂行する能力の育成に関わる観点を加えている。我々はこれまで，数学的活動における「現実の数学化」と「数学の数学化」（Freudenthal, 1968）の両面のバランスが保たれるべきであるが，我が国の数学授業ではとりわけ「現実の数学化」が欠けているため，数学的モデル化の重視を訴えてきた。しかしながら，数学科の指導内容には，本来的に「数学の数学化」を通して創り出されてきたものや，「数学の数学化」を実現してこそ教育的価値が生まれる単元がある。高等学校数学科ともなると，本来的な探究対象が数学自身である単元が多くなる。そうした単元において無理に現実事象の探究を取り入れることは適切ではない。そこで，数学自身を対象として例えば「発展的に考える」ことや「拡張・一般化する」といった「数学の数学化」，数学の世界における活動を観点 B2 として明確に位置付けることにしたのである。ただし，こうした単元において現実事象を取り入れないということではない。また，B1，B2 と分けて記述しているが，それが一体となった（理想的な）数学的活動を想定していないわけではない。

観点 A. 知識・技能	
［目標］	数学的概念を理解し，計算などの数学的操作を行うことができる。
観点 B. プロセスと振り返り	
［目標］	B1：現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを踏むことができる。 B2：数学の事象からパターンや性質などを見いだし，確かめ，発展させることができる。
観点 C. 数学的コミュニケーション	
［目標］	数学的表現を用いて，積極的に，豊かに他者とコミュニケーションすることができる。

図 1-1　本校数学科が育成を目指す資質・能力

(2) 資質・能力の育成

(1) で示した資質・能力を育成するためには，大前提として，事象の探究を軸に据えた授業を実施することが欠かせない。そうでないと，そもそも資質・能力が発揮される場がなくなってしまう。現実の事象や数学の事象に対して，生徒自身が既習の数学的知識・技能や見方考え方を使い，問題を解決したり，新たな数学を創り出したりしていくプロセスを経ることが必要不可欠であると考える。

そうした授業の機会を保障するため，本校数学科では，オリジナルのテキスト『TGUISS 数学』シリーズを開発してきているところである。現在のところ，MYP に対応して第 1 学年用から第 4 学年用まで開発している。特徴的な点は，現実事象の探究を通して生徒たちにとって新たな数学を学習させていく展開を紙面化していることである。ここに数学の内容理解と能力育成の両面のバランスをとる鍵がある。本テキストを普段の授業で実際に用いながら，修正点などについて議論を重ね，内容の改善・充実を図ってきているところである。さらに，現在は 5・6 年（高 2・高 3）の内容に焦点をあてたテキストの開発を試みている。高等学校数学科における数学的活動の実現に課題がある昨今（例えば国立教育政策研究所, 2007），この試みは，高等学校における数学教育の改善に貢献できるはずである。

なお，一昨年度からスーパーサイエンスハイスクール(SSH)指定校となり，6 カ年一貫して「国際バカロレアの趣旨に基づく理数探究教育プログラムの開発および実践」を研究課題とし

て研究開発に取り組んでいる。5・6 年用の独自テキストや評価規準の作成は，この SSH 事業の一環として行っているものである。

一方で，こうしたテキストによって図 1-1 に示したような資質・能力が発揮される場，すなわち数学を使い，創る場を設定できたとして，次に求められるのは，その資質・能力の質を高めることである。そしてこの点こそが，本校数学科の研究課題である。この点については本稿 1．4 で詳しく述べる。

1．3　数学科の 6 年間の評価規準

上記の資質・能力を育成するために，本校数学科では，以下の評価規準を設定している。ただし，1〜4 年用は MYP として定められている規準であり，5・6 年用は本校独自に設定した。

	規準 A 知識と理解	規準 B パターンの探究	規準 C 数学的コミュニケーション	規準 D 数学の実生活における応用
1〜4年	i. 馴染みがあったりあるいはそうでなかったりする状況で問題解決する際に適切な数学を選択する。 ii. 問題解決する際に，選択した数学をうまく適用する。 iii. 様々な文脈において正しく問題解決する。	i. 複雑なパターンを発見するために数学的な問題解決の手法を選び，用いる。 ii. 見いだした事柄に基づき一般的な法則としてパターンを記述する。 iii. 一般的な法則を証明したり，検証したり，正当化したりする。	i. 口頭での説明および記述での説明の両方において，適切な数学的言語（表記法や記号，用語）を用いる。 ii. 適切な表現形式を用いて情報を伝える。 iii. 異なる数学的な表現形式間を行き来する。 iv. 数学的な推論の流れを，完全に理路整然と簡潔に伝えあう。 v. 論理的な構造に基づいて情報を整理する。	i. 真正の現実場面の状況において関連する要素を特定する。 ii. 真正の現実場面の状況で問題解決する際に適切な数学的方略を選択する。 iii. うまく解決に達するために選択した数学的方策を適用する。 iv. 解決の正確さの度合いを正当化する。 v. 真正の現実場面の文脈において解が整合的かどうか正当化する。

	規準 A	規準 B		規準 C
	知識・技能	プロセスと振り返り		数学的コミュニケーション
		B1	B2	
5・6年	数学的概念を理解し，計算などの数学的操作を行うことができる。	現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを踏むことができる。	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，確かめ，発展させることができる。	数学的表現を用いて，積極的に，豊かに他者とコミュニケーションすることができる。

図 1-2　数学科の 6 年間の評価規準

以上を評価規準として，1〜4 年では 5 段階，5・6 年では 4 段階のルーブリックを提示することによって評価を行っている。このようにして，まず目標を明確にし，当該の指導内容に応じた具体的な資質・能力が発揮される姿を想定した上で，それらの資質・能力を具体的に評価するための課題を先に考えておいてから，その資質・能力を育成するための指導（授業）を設計し始める。これが「目標・指導・評価一体型」の取組であり，それを可能にするためのシステムが，ユニットプランナーである。

1．4　研究課題

本校数学科では 2014 年度から「数学を使い，生み出す活動の水準を高める手立て」をテーマとして研究に取り組んできている。なお，東京学芸大学附属中高数学教育研究会においても同様の趣旨で研究を行ってきており，それに合わせる形で今回「数学を使い，創る活動の水準を高める手立て」を研究主題に設定している。

我々の元々の問題意識として，我が国の数学教育では元来「数学的な見方・考え方」や「数学的活動」，そして「数学的リテラシー」の育成が叫ばれ，大切にされてきたにも関わらず，それらを育成する（教材だけでなく）授業の姿があまり明確になっていないことがあった。「目標・指導・評価」一体型の取組を進めるにあたって，目標・評価は本稿 1．3 のようにその趣旨が明確になったものの，肝心の指導の在り方に課題があったのである。図 1-1 に示したような活動を実現できるようになるために，日常の授業において，「数学を使い，創る」という数学的活動の質をどのようにして高めていけばよいか。もちろん，その質は 1 時間の授業だけで目に見えて高まるような類のものではないであろう。しかし，単元や学年全体にわたって育成していくべきものであったとしても，「数学を使い，創る」活動の質を高めることを意図した授業を行う限り，1 時間の授業であっても何らかの気づきや変容といった，質の高まる瞬間瞬間があるはずである。それをいかにして引き出すのか。その「手立て」が学習指導案に明記されていないということが，東京学芸大学附属中高数学教育研究会で実施した最初の授業研究を通して明らかにされたことであった。それ以来，本校数学科においても「手立て」という言葉を用いることにしたのである。

改めて述べておくと，本校数学科の研究課題は，「数学を使い，創る活動の水準を高める手立てとはいかなるもので，どうあるべきか」である。これは指導内容とセットで議論してこそ具体的になり，手立てとしての有効性を議論できるようになる。そこでは，どのような活動からどのような活動へ，どのような手立てによってその水準を高めようとしているのかを具体化することが問われる。その点を明確に意識するために，図 1-3 のような図式を用いてきている。この図式は授業の全体像を記述しようとするものではなく，あくまで手立てを明確にするためのものである。また，先述したように，1 時間の授業だけで活動の水準が目に見えて高まるとも考えづらい。つまり，授業の最初の時点よりも水準の高まった活動が発揮されるのは一連の授業後かもしれない（その活動をレポート課題等で評価することになる）。しかし，授業者が手立てを講ずる場面，水準を上げようとする場面は必ず研究授業で見せられるようにし，その有効性を議論できるようにする。そのような授業研究を実施することによって本研究を進めてきているところである。

ここで，「手立て」の意味として，教材そのものや既習事項なども広い意味では「手立て」となりうるが，“何でもあり”では用語が威力をなくし，議論が焦点化しないことに留意しておきたい。そこで本研究においては，「手立て」の意味を，当該授業において教師がとった，水準を上げるための手段に限定する。

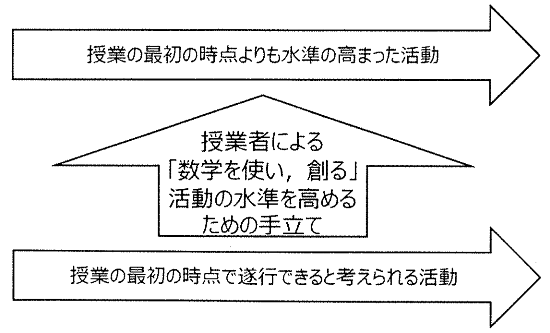


図 1-3　「手立て」の図式化

以下のページに続く数学科公開授業に関する報告では，指導内容に即して，どのような活動からどのような活動へ，どのような手立てによってその水準を高めようとし

ているのか，そして実際の授業はどうであったのかを示す。

【第１章引用参考文献】

OECD (2013), PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, *OECD Publishing*. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Freudenthal, H.(1968), Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, l,. 3-8.

国立教育政策研究所（監訳）(2004),『PISA2003 年調査　評価の枠組み』，ぎょうせい.

国立教育政策研究所,「平成 17 年度教育課程実施状況調査」 http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/index.htm

島田茂ほか（1977),『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，みずうみ書房.

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科（2012),「数学的リテラシーを育む授業の創造～公開研究会の報告を兼ねて～」,『国際中等教育研究』，6.

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科（2016),「事象の探究を軸に据えた高等学校数学科オリジナル教科書作成の試み —座標幾何を例に—」,『国際中等教育研究』，9.

長崎栄三ほか（2008)「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」,『日本数学教育学会誌』，90(4)，11-21.

2．無作為抽出のよさと必要性を生み出す授業

2．1　本単元の概要

(1) 本研究授業の提案と単元のねらい

統計において，探究や分析の視点・手法は，目的に依存する。このことは，統計の授業を実施することを考えると，当たり前のことと言えるだろうか。数学科の授業では，分析方法の議論に焦点が当たることが多いが，そこに目的があるのかどうかは非常に曖昧である。目的を明らかにしておかなければ，分析方法の議論はできないし，統計のよさも十分実感できないのではないか。

目的を意識し，統計の重要性・有用性を生徒が実感できる授業を実現させるには，解決したい問題に取り組む中で統計を使い，統計が生かされていく授業を実施する必要があると考える。これは，杉山（2009）が述べる，「解決したい問題があって，その問題場面の特徴を調べ，その特徴を利用して問題を解決するために統計をとる（pp.305-306)」という統計授業のあり方についての主張にも整合する。氏の述べるこの姿勢は，本研究授業の当該単元でもある「標本調査」の指導においても当然持たねばならぬものである。

しかし，とりわけ推測統計の学習ともなると，少し事情が変わってくるように感じられる。たとえば，標本調査の重要性や有用性を生徒が実感するのは，やはり標本から母集団の情報を見出すことができることを目の当たりにしたときであろう。無作為抽出した標本の傾向が母集団の傾向とほぼ一致しているということを生徒に理解させるためには，母集団の傾向を把握しておく必要がある。しかし，母集団の傾向が分かっているのであれば，標本調査の必要性はそもそもない。逆に母集団の傾向が分からず，標本調査を実施する必要性が感じられる場面においては，得られた傾向が本当に母集団の傾向を表し得るものであるかの判断や妥当性の議論が難しくなってしまう。そこの関係性が，単元「標本調査」の最大の課題であると考えられる。

以上を踏まえ，本研究授業での提案は，この「『標本調査』の単元構成」である。本単元の構成は，標本調査を実施する文脈での大きな問題解決の流れの中で，その手法や妥当性を議論するために文脈から少し切り離した課題を扱い，元の問題解決に生かすという構成とする。

(2) 単元の目標と評価

本単元の目標は，母集団についての情報を得るために，母集団の一部から情報を推測するアイデアとその手法を生み出すことができることである。この目標を達成するために，単元を通して「知識と理解」「コミュニケーション」「実生活への応用」の３つの観点を，本単元での達成目標兼評価規準とする。この３つの観点は，MYP の数学で示されているものである。

本単元を終えた後で実施する評価課題として，以下の課題を用いることにする。

10 円硬貨の中には，縁がギザギザに彫られているものがある。これは，昭和 26 年から昭和 33 年に製造されたもので「ギザ十」と呼ばれていて，収集している人もいる。「ギザ十」はどれくらい珍しいのだろうか。 (1) 現在の 10 円硬貨の流通枚数を調べ，「ギザ十」の流通枚数を推定しなさい。 (2) 実際には，変形したり変色したりしたものは製造元の造幣局に戻され，再び貨幣の材料となる。したがって，発行した枚数が現在流通している枚数と一致しているわけではない。自分たちができる範囲で，どのようなことをすれば「ギザ十」の流通枚数を推定できるのか，調査の計画を立て，実施し，流通枚数を推定しなさい。 (3) 活動を振り返り，調査の反省点・難しかった点などを考察しなさい。

この課題は，本校数学科独自テキスト『TGUISS 数学』第 4 学年「統計基礎」に掲載されて

いる問題を，本単元の評価課題用にアレンジしたものである。本単元の授業を通して，生徒には，この課題に十分取り組めるようになってもらいたいと考える。この評価課題に関しては，「実生活への応用」の力についてその程度を把握し，後の学びへとつなげたいと考えている。具体的なルーブリックは図 2-1 の通りである。

	Level descriptor	Specific Indicator
0	以下の説明に記載されるどの水準にも達していない	以下の説明に記載されるどの水準にも達していない
1-2	i. 本当の実生活場面の要素の**一部**を特定する ii. **うまくいかないながらも**，数学的方略を，本当の実生活場面の**解決策を見出す**ことに適用する	• 流通枚数の推定に必要な要素を一部特定する • 自分たちの可能な範囲で推定するために，試行錯誤に統計的手法を用いて，流通枚数を推定する
3-4	i. 本当の実生活場面に**関連のある**要素を特定する ii. **いくらかうまくいきながら**，本当の実生活場面をモデル化するために，**十分な**数学的方略を選択する iii. 数学的方略を，本当の実生活場面の**解決策に至る**ために適用する iv. その解決策が本当の実生活場面の文脈で意味を成すかどうかを**議論する**	• 流通枚数の推定に必要な要素を概ね特定する • 自分たちの可能な範囲で推定するために，試行錯誤の中で，十分実現可能な統計的手法を選択する • 選択した統計的手法を，ある程度筋の通った推定結果を導くために適用する • (1)と(2)で推定した結果を比較して，気付いたことを述べる
5-6	i. 本当の実生活場面に**関連のある**要素を特定する ii. 本当の実生活場面をモデル化するために，**十分な**数学的方略を選択する iii. 選択した数学的方略を，本当の実生活場面の**妥当な解決策に至る**ために適用する iv. 解決策の正確さの度合いを**説明する** v. その解決策が本当の実生活場面の文脈で意味を成すかどうかを**説明する**	• 流通枚数の推定に必要な要素を概ね特定する • 自分たちの可能な範囲で推定するために，十分実現可能な統計的手法を選択する • 選択した統計的手法を，概ね妥当な推定結果を導くために適用する • 推定方法が妥当であることを説明する • (1)と(2)で推定した結果を比較することを通して，自身の推定のための活動を説明する
7-8	i. 本当の実生活場面に**関連のある**要素を特定する ii. 本当の実生活場面をモデル化するために，**十分な**数学的方略を選択する iii. 選択した数学的方略を，本当の実生活場面の**正しい解決策に至る**ために適用する iv. 解決策の正確さの度合いを**正当化する** v. その解決策が本当の実生活場面の文脈で意味を成すかどうかを**正当化する**	• 流通枚数の推定に必要な要素を特定する • 自分たちの可能な範囲で推定するために，十分実現可能な統計的手法を選択する • 選択した統計的手法を，妥当な推定結果を導くために適用する • 推定方法が妥当であることを正当化する • (1)と(2)で推定した結果を比較することを通して，自身の推定のための活動を振り返り考察する

図 2-1　評価課題用ルーブリック

(3) 単元の指導とその計画

標本調査の考え方は，今後推測統計を学習する上で，非常に重要なアイデアになる。推測するということは，限られた情報・データをもとに，未知の事象や将来について予測するということである。標本調査は，標本という限られた情報・データをもとに，未知の母集団の傾向や特徴を予測する統計的手法である。したがって，推測統計の素地指導を行うという面もあるため，無作為性・ランダム性の概念が生徒たちの中に開発（形成）できるよう丁寧に指導していく必要がある。

また本校は，国際バカロレアの MYP・DP 認定校であり，一昨年度より SSH，昨年度より SGH の認定校にもなっている。それらプログラムの中では，「課題研究」が推奨されている。当該学年の生徒も，後期課程（高校生）に向けて，「課題研究」に必要なスキルの素地を養う活動を実施している。その取り組みの中で，アンケート調査や実験などを通じて，自身が立てた仮説を検証していく方針をとる生徒が多いことがわかった。しかし，サンプル数が限られていたり，母集団の傾向を反映しているとは考え難い標本を対象としたりそれを採取する手法を用いていたりすることが多いのも事実である。したがって，当該学年の生徒が今後課題研究を進めていく中で，よりよい研究活動を行えるよう標本調査の概念をつくり上げることも本単元のねらいとしてある。すなわち，数学に限らず調査を実施する際に，ここで学んだことが生かされるよう指導をする必要がある。

なお，当該学年の生徒は，すでに集合を学習している。そこで学習した全体集合に対する部分集合というアイデアは，標本調査のアイデアに通じるものでもあるため，生徒の理解という面でも無理のない単元設定であると考える。また，小学校算数科からの積み重ねで，割合も本単元で学習を進める上で必要な概念である。

以上を踏まえ，本単元は以下のような流れで展開していくこととする。単元は，全５時間の予定である。

データの分析Ⅲ（5 時間扱い）

1) 標本調査と全数調査…………………………………………………………………… 1時間

- 標本調査の必要性と意味
- 全数調査と標本調査の特長・相違点

2) 無作為抽出と標本平均………………………………… 2.5時間【本時２時／2.5時間】

- 無作為抽出の必要性とその方法
- 標本平均と母平均
- 標本の大きさ

3) まとめ……………………………………………………………………………………… 1.5時間

- 元の問題の文脈に照らし合わせた標本調査とその方法
- 標本調査のよさと限界
- レポート課題

（4）本単元の教材

りえこさんは，毎日課題に追われている状況にうんざりしている。ISS 生だから課題に追われて忙しいのではないかと思ったりえこさんは，「ISS 生は，東京都の中学生に比べて忙しい」という仮説を立て，これを検証してみたくなった。「忙しさ」を睡眠時間で捉えようと方針を決めて，ISS 生と一般の東京都の中学生に睡眠時間のアンケート調査をすることにした。調査の方法を先生にチェックしてもらおうと，計画を提出したところ，これではきちんとした調査にならないと突き返されてしまった。この計画書のどこがいけないのだろうか？　また，どのように実施すればきちんとした調査になり得るのだろうか？

実施要項

調査①

ISS の３年生 120 名全員に SNS で睡眠時間を聞く

調査②

同じ塾の友達で、東京の中学校に通っている人何人かに睡眠時間を聞く

……

本単元で扱う題材は，「東京都の中学生の睡眠時間を標本調査する」ものである。本校は，先に述べたように IB・SSH・SGH の認定校であることもあり，生徒たちはレポート課題や宿題が多いと不満を漏らすことがある。そのような，生徒が日頃感じている問題点を探究課題とし，その調査方法に焦点を当て，探究していく。

本探究課題を解決するにあたって，まずは標本調査の意義を感じさせる必要がある。標本調査をする意義については，「全数調査を行うとどのような問題が起こるか生徒に考えさせせること（裕元，2013，p.39）」で実感させたいと考える。生徒にとっては，東京都の中学校と聞けば，全数調査を実施しても問題ないように感じられるだろう。しかし実際は，中等教育学校や義務教育学校なども含めて，計 815 の中学校が都内に設置されているという。さらにそれぞれの学校に生徒がおるため，約 31 万人の生徒を対象とした睡眠時間のアンケート調査を実施することになる。この事実から，アンケートの実査および分析を想定すると，おそらく生徒たちは，少ないデータから全体の睡眠時間を予測する方法がないかどうかを考えるだろう。そこで標本調査を実施する意義を見出し，母集団を縮小した新たな集合（標本）をどのようにしてつくるのかが彼らの中で課題になると考えられる。

次に標本をどのように設計していくかであるが，以下の２つの点が論点となると考えられる。

１つは，抽出方法である。現行学習指導要領や教科書においては，抽出方法として，乱数を用いた単純無作為抽出法が示されていることが多い。この単純無作為抽出法は，母集団の全調査対象から無作為に標本を抽出するため，非常に構造が分かりやすいという面がある。一方で，そのためには母集団全体のリストが必要であったり母集団に関する各種情報を活用できなかったりするため，欠点も多く，実際に用いられることは少ない（福井，2013）。そこで実際には，集落抽出法，２段抽出法，層化抽出法などが用いられたりする。本教材においては，それらのアイデアが創られやすいと考える。東京都の中学生を対象としているため，全体で無作為抽出をするのではなく，たとえば区部・市部・西多摩郡の３層に分けたり，あるいは学年の層に分けたりした上での無作為抽出を考えることになるだろう。したがって，現実場面に適用することが比較的可能な手法を生み出すことが意図できる場面であると考えられる。

２つめは，標本の大きさである。どれだけのデータがあれば母集団と類似のモデルとして標本が認められるのか，という疑問は生徒の中に自然と湧くであろう。一般に標本の大きさは，母分散により決定する。しかし，母分散は通常分からないため，過去や類似の調査から推定して用い

ることになる。ただし，この母分散および標本の大きさの決定の実際については，あくまで調査を実施する集団内での合意形成により決定するといってもよいだろう（福井，2013）。したがって，この合意形成を授業内でどのように導いていくのかが重要になる。そのときに，「目的」に立ち戻って考えさせたい。生徒たちにとっては，自分たちの睡眠時間が東京都の中学生の睡眠時間よりも少ないことを主張したい。その主張を通すことに対して，許容できる誤差の範囲はどこまでかを議論する展開にしていきたいと考える。そうすることで，標本の大きさの議論の論点が焦点化されるとともに，統計的分析が目的に依存することを学ぶ機会になると考える。

2．2　本時の教材とそれまでの指導

（1）本時の教材

> 右の図（図 2-2）の中に，円が 115 個あり，それらの面積の平均値を調べたい。しかし，そのためにすべての円の面積を求めることは大変である。すべての円の面積を求めることなく，円の面積の平均値を調べることはできないだろうか。

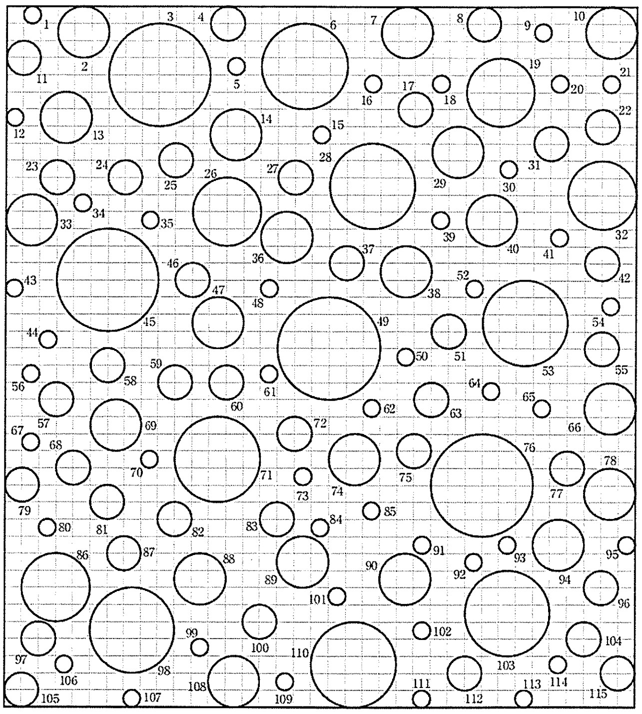


図 2-2　115 個の円

本時の教材は，本校独自テキスト『TGUISS 数学 4』「第 3 章　統計基礎」における「探究 2　標本調査は信頼できる？」というものである[1]。本時までで標本調査と無作為抽出を学習しておくが，本当に無作為抽出が有効であるのかどうかを，本教材を通じて実感することを意図して扱うことにする。

図の中の円は，直径の長さが 1 から 6 までの全部で 6 種類ある。それぞれの個数は，1 から順に，37，32，18，4，5，4 個ずつある。母平均は，約 1.63π である。直径が 5，6 の円を 1 つでも選んでしまうと，標本平均の値が 1.63π よりもやや大きく計算される傾向がある。したがって，無作為抽出だとしてもやや大きめの値が出る可能性がある。しかし，その点は有意抽出も同様である。母平均に近い標本平均になるように有意抽出しようとすると，どうもバランスをとって様々な大きさの円を選びたくなるだろう。そうすると，ほぼ必然的に大きな円を 1 つ以上選ぶため，無作為抽出よりもかなり大きな値に有意抽出の標本平均が集中する傾向がある。図 2-3 が筆者による有意抽出，図 2-4 が筆者による無作為抽出である。

最初に図だけ見せた状態で，円の面積の平均値を予測させる。その後，作為抽出と無作為抽出で円をいくつか選び，母平均により近い平均値を多く出す方はどちらの方法であるのかを確認する。このとき，標本の大きさは 5 とする。5 を超えると，もちろん無作為抽出の精度も上がるが，一方で有意抽出の精度も上がってしまう。4 以下であると，逆に無作為抽出のよさが実感し難くなってしまうため，5 に設定した。

[1] この題材は，『Contemporary Mathematics in Context course3 unit2（2003）』の題材を基にしている。

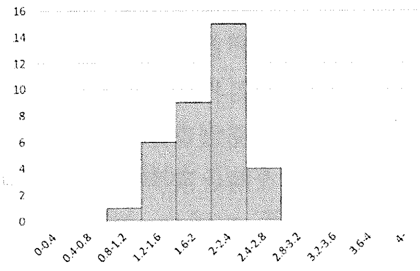


図 2-3　筆者による有意抽出

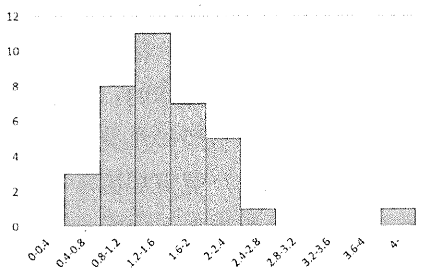


図 2-4　筆者による無作為抽出

(2) 本時の目標と手立て

本時の目標は，大きく 2 つある。

1 つは，無作為抽出の特徴について実感を伴って理解し，自身の課題研究などに生かそうとする姿勢を身に付けることである。その目標を達成するための手立てとしては，有意抽出と無作為抽出の比較が可能な場面を設けることである。特に，標本平均の分布に着目させる。分布全体を見て，有意抽出と無作為抽出のそれぞれの特徴について見出す。見出した特徴から，標本調査として適切であるもの，あるいはどう生かせば適切になるかの議論へつなげたい。そうすることにより，自身が調査をする場面に出会ったとき，本時で学んだことを生かすことにつながると考える。

2 つめは，統計を使ったコミュニケーション力の向上である。「グローバルコミュニケーションのツールとしての統計教育の必要性は大きくなっている（渡辺，2014，p.35）」現代において，“コミュニケーション”というものは数学科の授業においても非常に大切な視点である。実際，MYP 数学には「コミュニケーション」という評価規準も含まれているし，本校数学科としても「数学を用いて，積極的に，豊かにコミュニケーションする力」の育成を目標としている。これは，統計についても同様である。本時は，抽出の実験によるデータを媒介にして，根拠にして，標本調査の信頼性について議論し合意形成を図る場を意図的に設定する。本時の授業を通して，統計でのコミュニケーションがより当たり前のこととなり，また不確実性の考え方が加わることでより質の高い議論ができるようになってもらいたいと考えている。

以上をまとめると，次の図のようになる。

授業を通して遂行できるようになると考えられる水準

- 無作為抽出の特徴について実感を伴って理解し，自身の課題研究などに生かそうとする
- 統計を使ったより豊かなコミュニケーションができる

授業者による水準を高めるための手立て

【手立て】

- **標本平均の分布に着目させ，有意抽出と無作為抽出の比較が可能な場面を設ける**
- **抽出実験のデータから，標本調査の信頼性について議論し合意形成を図る場を意図的に設定する**

授業の最初の時点で遂行できると考えられる水準

- 無作為抽出が標本調査に有効であることを，頭では理解している
- 統計を使ったコミュニケーションが概ねできる

(3) 生徒観

当該クラスの生徒は，かなり活発な議論ができるクラスである。探究課題に対して，自力で解決することもできるが，基本的には他者との対話の中で解決を目指す姿勢がある。探究課題にとことん取り組む姿勢を持つ生徒も多く，授業外でもさらなる発展を志向した質問に来ることもしばしばある。また，現実場面の問題については，数学的な解と現実の文脈を照らし合わせて考察することも十分できる力を持っている。

生徒の既習事項を確認する。当該学年の生徒は，分散・標準偏差・相関係数を除く基本的な記述統計の知識・手法は既習である。なお，確率は未習であるが，生徒が「確率」という言葉を用いることが想定される。しかしその「確率」は日常用語としての場合も含まれるため，安易に取り上げたり深入りしたりせず，「起こりやすさ」として扱うことにする。

(4) 本時までの指導

第1時（2016年6月15日）

「『ISS生が忙しい』ことを根拠を持って主張しよう！」という問い，導入した。その後，養護教諭からの声として「課題が多すぎて，睡眠時間が少なくなると言う生徒が多い」ことを紹介し，「睡眠時間」に着目することを確認した。そこで，仮説として「ISS生は一般的な中学生より睡眠時間が短い」を立て，それを検証するためのアンケート調査を実施する方法をとることにしようと合意を形成した。

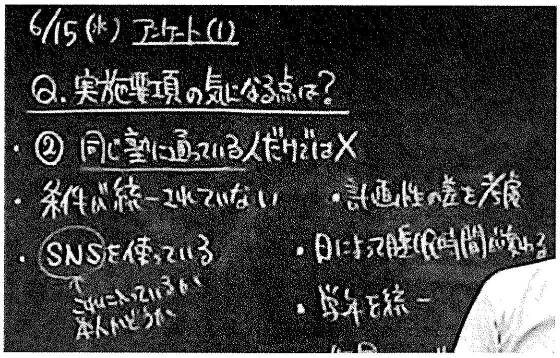


図2-5　第1時板書

ここで，実施計画を提示した。実施計画のおかしな点や吟味すべき点，その他気付いたことを挙げてもらうことにした（図 2-5）。すると，「同じ塾に通っている人だけではダメ」，「学年を統一する」など調査対象に関することや，「SNSで聞くのはよくない」など調査方法に関すること，それから「日によって睡眠時間が変わるからその扱い方を考慮する」など調査事項の定義についてなどの意見が挙げられた。最後の睡眠時間に関しては，平日の平均睡眠時間ということを全体で共有した。

その後，実際にこれらを考慮して東京都の中学生対象の調査を実施する場面を想定させた。すると，自分たちが実施する分には無理であることと，全国学力学習調査など国レベルのものであれば全員に聞くことができるなどの意見が出された。そこで，全数調査と標本調査があることを確認し，第1時を終えた。

第2時（2016年6月16日）

第2時は，全数調査，標本調査，母集団，標本などの用語の確認を行なった。その後，品質管理や内閣支持率の調査など，身近な標本調査の例を併せて確認し，どのような場面で標本調査ができるのかあるいはせざるを得ないのかを問うた。全部が調べられない（調べにくい）場面ということが挙げられ，共有した。

また，標本調査の目的を確認した。すなわち標本調査は，限られたデータをもとに，母集団の傾向や特徴を推測する統計的手法であることを確認した。その目的を達成するためには，抽出方法が大切になってくることを共有した。そこで生徒から「ランダムにとる」という発言が出たので，その言葉の意図を問うた。すると，「とったデータに偏りが出ないように選ばなけれ

ばいけないから」という意味で「ランダム」と発言したことが説明された。そのような抽出方法を，一般に無作為抽出と呼ぶことを確認した。

無作為抽出の仕方に慣れてもらう意味も込めて，乱数さい・乱数表・表計算ソフトによるシミュレーションのやり方をレクチャーした。5人一組になり，「1から500までの数字から50個の数字を無作為抽出する」というActivityに取り組んだ。

ある程度時間が経った後で，再び標本調査の目的を確認し，実際に標本調査を別の文脈の課題（円の面積）でやってみることにした。この時間は，円を無作為と有意で抽出させるまでで終えた。

2．3　本時の実際と考察

(1) 本時の実際の概要

本時の課題は，「標本調査をする上で有意抽出と無作為抽出のどちらが信頼できる調査なのかを説明する」というものであった。

まず前時までの取り組みから得られた円の面積のデータ（有意・無作為ともに）を全員分提示した。その後，グループごとにコンピュータ等を用いながら，課題に取り組んだ。各グループ，データを散布図（図2-6）やヒストグラムに表して，傾向をよみとろうとしていた。散布図で傾向をよみとろうとしていたグループの会話は，次の通りである。なお，他グループでも，同様の会話を聞き取ることができた。

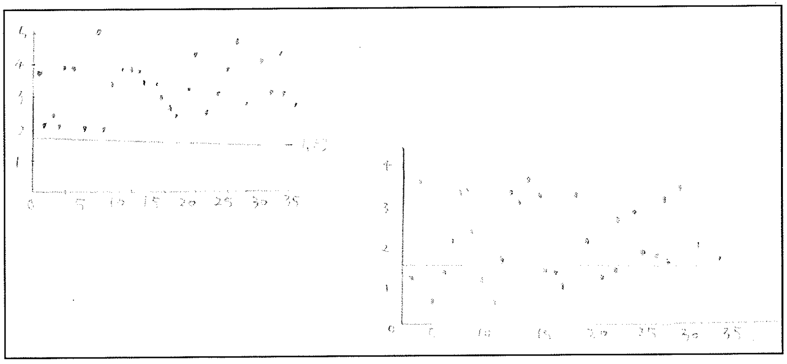


図2-6　生徒のグループワークシートより

T42：「おっ，なになにこれ?」
S35：「散布図。」
T43：「お～散布図ね。」
S36：「なんかちょうど赤いやつが無作為で無作為の方が下の方で，有意抽出の方が上にある。青が上にあって赤が下にある。もとの平均値が1.63だから線引きたいよね。1と2のちょうど真ん中に。」
（略）
T46：「最終的にはどうなれば判断はできるの？どっちが適切かって。」
S41：「見てないから分かんない。」(S39と同じ生徒)
S42：「近いほう。」
T47：「近いほう？」

全体共有の場面では，データを散布図に表しているグループとヒストグラムに表しているグループを取り上げた。説明の中で，真の値（1.63）に近い値が多い方が信頼ができる，というような発言がなされた。また，ヒストグラムのグループは，1.63を含む階級の度数が多いことを根拠に，無作為抽出の方が信頼性が高いことを述べた（図 2-7)。具体的には，次の発言である（ともに同じ生徒)。

S203 :「(略) ヒストグラムで表わした時に階級の幅と度数って書いてあるところ見れば分かって、全部の平均が 1.63 なわけでそれは1から2の間? 何て言えばいいんだろ? その 1 の部分の列と 1.5 から 2 の部分の列のやつを合わせた時に無作為は 13 人の人が 1 から 2 の間にあって有意は 1 から 2 の間に 1 人しかいないから無作為の方が正確なんじゃないかなと思いました。」

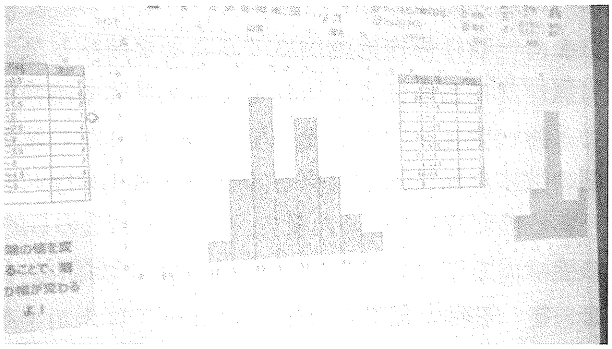


図 2-7　生徒が作成したヒストグラム

S205 :「それで左側のやつは 1 人しか 1 から 2 の間にいないけど無作為の方は 13 人の人が 1 から 2 の間にいるってことは無作為の方が正確なんじゃないかなって。」

それらの説明を受け，全体では無作為抽出の方が，信頼性が高いということを共有した。

最後に，あるグループから，場合によっては有意抽出の方が正確になるという発言がなされた。具体的には，次の発言である。

S217 :「場合によっては有意抽出の方がいい時もあるというか，可能性としては，たとえば町の中で道に迷って誰に聞こうかと考えた時にこういう人がいいって自分が考えた上で決めた方がランダムにすれ違った人に聞くよりもちゃんと教えてくれる確率が高くなる，っていうことです。」

これについては，多くの生徒が納得したようであるが，一部の生徒は納得できていない様子であった。その議論については次回実施するということで，本時を終えた。

(2) 考察

本時の目標の一つは，無作為抽出の特徴について実感を伴って理解し，自身の課題研究などに生かそうとする姿勢を身に付けることであった。その目標を達成するための手立てとしては，有意抽出と無作為抽出の比較が可能な場面を設けることであった。

この手立てについて，比較可能な場面を設けることで，無作為抽出の特徴について理解するという目標は，概ね達成できたと感じられる。つまり，標本平均の分布を調べることを通して，それぞれの特徴が視覚化され，比較が可能な場面をつくり出すことで，無作為抽出の特徴について理解できたのではないかと考える。

二つめの目標は，統計を使ったコミュニケーション力の向上であった。その目標を達成するための手立てとしては，抽出の実験によるデータを媒介にして，根拠にして，標本調査の信頼性について議論し合意形成を図る場を意図的に設定することであった。

これについて，全体の傾向を探ること（全体に目を向けること）と個別のデータを見ることを行き来した活動が盛んに行われていたことから，生徒たちは，統計を使ったコミュニケーション力を十分発揮できたのではないかと考える。つまり，抽出の実験によるデータをもとにした議論の場を意図的に設定したことが，個と全体を行き来する契機をつくることになり，それに伴って統計を使ったコミュニケーションの場をつくることになったのだと解釈できる。また，

最後の S217 の発言で，場面や文脈に応じてデータを解釈したり活用したりする姿勢が垣間見えたことからも，統計をコミュニケーションツールとして利用しているということがわかる。

（3）議論：第２節の結びに

本時でどのような数学を使い，創ることを意図していたのかを確認する。生徒たちが使う（使える）数学は，ヒストグラムなどの統計グラフ，代表値である。それらを使っていく中で，本時では無作為抽出のよさを，実感を伴って理解をさせることを意図した構成にした。すなわち，実感を伴った無作為抽出のよさが創られる数学であると言える。果たして，本時の活動を通して，実感を伴った無作為抽出のよさは，生徒たちの中に創られたのだろうか。

本時で使用したグループワークシートには，「無作為抽出がより正確な結果を求められる可能性が高い」や「データで見ると（平均値が）無作為抽出の方が答えに近い」というコメントが書かれているのが見受けられる。しかし，その中でも「今回は無作為抽出の方がいい」と書かれているものもあった。自分たちで採取したデータで分析した結果，無作為抽出の方がよさそうではあるが，今回に限るかもしれない，という考え方である。これは，実感を伴った無作為抽出のよさの創出という視点では達成できていないかもしれない。しかし，それよりも高水準にある発言であると考えている。換言すれば，データは文脈や目的に依存するということを理解した（あるいは実感した）発言であると考えられる。その意味で，この円の面積の教材は，あえて文脈から切り離したことにより，無作為抽出のよさとさらには文脈や目的に依存して抽出方法を考えなければいけないという考え方まで創出できる可能性があると言える。

それを踏まえると，生徒全員がその水準まで高めるための手立てはどうあるべきだったかというのが論点になる。今回，その水準まで高まった生徒がいたが，全員ではなかった。全員が「データは文脈や目的に依存する」ということを理解する水準まで高めるための手立てとしては，どのようなことが考えられるのだろうか。また，その水準まで高めることを意図したときに，本教材が適していたのかも論点になる。これらについては，本校数学科として議論を重ねるべきであるし，実証を重ね検討すべき課題である。

謝辞

静岡大学大学院教育学研究科（修士課程）内田大貴氏にプロトコール作成等ご協力いただきました。ここに記して謝意を表します。

【第２章引用参考文献】

福井武弘（2013），『標本調査の理論と実際』，日本統計協会.
柗元新一郎（2013），『中学校数学科 統計指導を極める』，明治図書.
杉山吉茂（2009），「第 27 章 関数の考え」，『中等科数学科教育学序説 杉山吉茂教授講義筆記』，東洋館出版社，pp.305-319.
東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2014），『TGUISS 数学 4』，正進社.
渡辺美智子（2014），「不確実性の数理と統計的問題解決力の育成 —次期学習指導要領の改訂に向けて—」，日本数学教育学会誌，第 96 巻第 1 号，pp.33-37.

３．式の上での操作とグラフ上の操作とを対応させる微分法の授業

３．１　本授業の趣旨

現代の高校数学における微分積分の学習指導は，微分積分の概念や思想よりも運用面に重点が置かれていることが指摘されている(公田，1994)。この指摘は，20 年以上経った現在においてもそのまま当てはまるものであると考える。実際に，現行の数学Ⅱや数学Ⅲの教科書を見ても，微分積分の計算，処理の方法に多くのページ数が割かれ，微分積分の概念については軽く触れられている程度である。また，学習指導要領上では，数学Ⅱについては，「微分・積分の考えを理解し」(文部科学省，2009，p.34)とあるように，微分積分の「考え」が重視されている。高校数学において扱うべき微分積分の「考え」とはどのようなものであろうか。

微分積分は，歴史的には接線問題と求積問題に端を発している。それを代数的に表現し，アルゴリズム化することによって，微分積分学の基本定理が発見された(佐々木，2005)。従って，微分積分の演算の根底には，幾何学上での考え方があるはずである。微分係数や導関数，定積分や不定積分の演算の幾何学的側面を明らかにし，代数的側面との対応を関係づけることによって，はじめてそれらの意味や微分積分の「考え」が明らかになるのではないだろうか。すなわち，微分積分の根底にある考え方こそ，高校数学で扱うべき「微分積分の考え」であると考える。しかし，現行の教科書では，微分積分の代数的側面が強調され，その幾何学的側面の扱いは軽薄であると考える。

例えば，関数 $f(x)$ の導関数は，(微分可能性を前提として)式の上では $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ で定義されるが，グラフ上では，曲線 $y=f(x)$ の各点における接線の傾きを表す関数のグラフである。数学Ⅱの多くの教科書では，グラフの接線の傾きという側面は扱っていることが多いものの，傾きの関数であるという側面については扱っていないのが現状である。一方で，戦時中に使用されていた『数学　第一類』という中学校用の数学の教科書では，グラフ上の各点の接線の傾きを求めさせ，それをプロットしていくことによって導関数のグラフを作成させている(成田，2014)。導関数の関数という側面を扱っているのである。

また，数学Ⅱの積分については，微分の逆演算によって求められる関数を原始関数として定義し，不定積分と定積分の計算を一通り扱った後に，定積分と面積の関係を明らかにし，面積の計算を行うという展開がほぼ全ての教科書の実態である。不定積分と定積分の幾何学的側面を扱わないまま代数的側面が先行し，後半になってやっと定積分と面積が関係付けられる。しかし，不定積分と面積の関係や導関数と不定積分の幾何学的関係は扱われていない。代数的側面のみで，幾何学的側面との関係を明らかにしなければ，これらの演算の形式的な理解はできたとしても，本質的な理解には到達しないのではないだろうか。

代数的側面と幾何学的側面を対応づけることは，中学校の関数指導では多くなされていることであるにも関わらず，高校の特に数学Ⅲの微分積分になるとその傾向は極端に少なくなる。ほとんど無いといっても過言ではないかもしれない。確かに，意味を含ませることなく形式的に処理できるようになることが数学の良さの一つではある。しかし，教育的な面から考えれば，それは概念に熟達した後のことである。数学Ⅱで多項式関数の微分と積分しか学習していない状態で，微分積分の概念が熟達されているとは言い難いであろう。むしろ，それまで学習した様々な関数についても，同様に微分と積分の幾何学的な側面と代数的な側面を対応させていくことが，数学を創るプロセスとして必要なことであると考える。

このような問題意識の下，昨年度数学Ⅱの極限と微分積分に関して単元を構成し，実践を行っ

た。それに続く単元として，数学Ⅲの極限と微分積分を事象の探究を通して生徒が創ることを志向した単元構成を提案する。そして，本研究授業では微分積分の概念を創っていくプロセスにおいて，式の操作の幾何学的意味を明らかにする授業を提案する。すなわち，式の操作とグラフ上の操作とを対応させることを重視した授業の提案である。

３．２　数学Ⅱで実施した極限と微分積分の単元

極限概念は，微分積分の根幹をなす概念である。それを抜きにして，事象の探究を通して微分積分を創りあげることはできないと考える。そこで，微分積分を扱う前に，極限を扱うこととした。現行の学習指導要領では,「極限については,直観的に理解させるよう扱うものとする。」(文部科学省，2009，p.34)とされているが，本単元構成では，「達し得ない」という極限概念の側面についても扱うこととした。昨年度実施した数学Ⅱの極限と微分積分の単元構成を以下に示す。

No.	探究課題	学習内容
		極限
1	島の面積	長方形近似の方法の創出
		近似の精度を上げることに限界がある
2	放物線の下の面積	区分求積法
		長方形近似による「誤差の限界」と分割数との関数関係
		数列の極限
3	図形に潜む数列の極限	数列の極限(無限等比級数)
4	放物線の下の面積は 1/3？	「限りなく近づく」ことの意味
		微分積分
1	高層マンションから物が落下する速さ	瞬間の速さ
		割線から接線への極限
		接線の傾き
		接線の傾きを表す関数
2	あるグラフとその接線の傾きを表すグラフとの対応	接線の傾きを表す関数のグラフ
		導関数の定義
3	飛行機が離陸する際の移動距離	変位
		曲線下の面積を表す関数
		原始関数と導関数の幾何学的関係
		原始関数の定義
		微分積分学の基本定理(Ⅰ)※1
4	導関数を求める	x^n の導関数
		微分の線形性
5	原始関数を求める	x^n の原始関数
		原始関数は無数に存在する(微分の逆演算からの解釈，幾何学的解釈)
		定積分の定義(和の極限) 定積分による原始関数の再解釈
		原始関数と導関数の代数的関係※2
		微分積分学の基本定理(Ⅱ)※3
		不定積分
6	極大値，極小値を求める	極大値，極小値

※1　$F'(x) = f(x)$　　※2　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　　※3　$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

図 3-1　数学Ⅱの極限および微分積分の単元構成（全 34 時間）

本研究授業では，数学Ⅲの微分法に焦点を当てる。そこで，数学Ⅱの微分について，どのような活動を行ったのかについて，ここにその概要を示しておく。

まず，高層マンションから物を落とす事件が発生したことを挙げ，自由落下の式を提示し，高さ 30m のところから物を落としたとき，地面付近ではどのくらいの速さになるのかということを課題とした。その際，極限を用いることによって，平均の速さと瞬間の速さは，グラフ上ではそれぞれ割線の傾きと接線の傾きとして現れることを式の操作と対応させながら明らかにした。また，各時間における瞬間の速さを求めさせ，時間と速度のグラフを作成させた。そうすることによって，そのグラフは図形的には接線の傾きを表す関数のグラフであることを明らかにした。さらに，バンジージャンプの時間と高さのグラフ(図 3-2)を提示し，このグラフから時間と速度を表すグラフの概形を作成させ，そのグラフの正負や x 軸との交点が元のグラフのどこに対応するのかを明らかにした。そして，導関数を定義した。その後，時間と速さのグラフから時間と距離を表すグラフを式と図から作成させ，導関数と原始関数の関係を幾何学的に対応させた。そして，x^n の導関数を求めさせ，「微分する」を定義した。

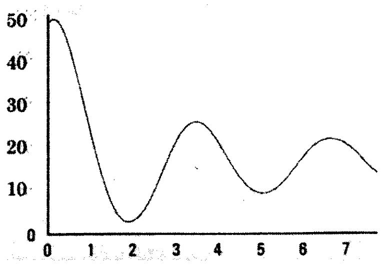


図 3-2　バンジージャンプのグラフ

3．3　数学Ⅲの極限と微分法の単元構成

(1) 単元の目標と評価

3．2 で示した数学Ⅱに続くものとして，数学Ⅲの極限と微分積分の単元を構成した。数学Ⅱと数学Ⅲの極限と微分積分の違いの一つは，前提事項を振り返りある程度厳密化するという点にあると考える。数学Ⅱでは，連続で微分可能な関数が前提となっている。一方で，数学Ⅲではそのこと自体に焦点をあて，より微分法の理論の厳密化を図る。

また，数学Ⅱの微分積分で扱っている関数は多項式関数のみであるが，既習の関数は他にも多く存在する。それらの関数の導関数や原始関数がわかれば，事象の考察を行う際の道具が格段に増えることになる。合成関数や逆関数，媒介変数で表された関数の導関数については，その代数的側面だけでなく幾何学的側面も扱い，微分積分の考えをより深める必要があると考える。

これらのことから，本単元の目標を次のように設定する。

現実事象や数学的事象の探究を通して，既習の極限と微分積分の理論を使いながら，必要に応じて理論を振り返り厳密化し，代数的側面と幾何学的側面を対応づけ，新たな微分積分の理論を創る能力を養うとともに，それらを事象の考察に活用することができるようにする。

この目標を達成するために，「A：知識・理解」，「B：プロセスと振り返り」，「C：数学的コミュニケーション」の 3 つの観点から評価を行う。以下にこの 3 つの評価規準とルーブリックの詳細を示す。

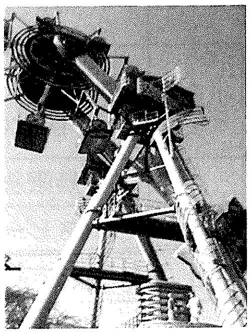
観点	A　知識・技能	B　プロセスと振り返り		C数学的コミュニケーション
		B1	B2	
目的	数学的概念を理解し，計算などの数学的操作を行うことができる	現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを踏むことができる．	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，確かめ，発展させることができる	数学的表現を用いて，積極的に，豊かに他者とコミュニケーションすることができる
満点	6	6		6
5-6	数学的概念を十分に理解し，計算などの数学的操作を十分に行うことができる．	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し， 適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ 解決過程および結論について振り返り，評価することができる	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，それが成り立つことを証明し，発展させることができる	正確な数学的表現や記号を効果的に用いることができる 適切な推論を行い，自分の考えをわかりやすく説明することができる． 他者の考えに対して，適切な根拠に基づき，自分の意見を述べることが出来る．
3-4	数学的概念を概ね理解し，計算などの数学的操作を概ね行うことができる	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し， 適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，それが成り立つことを証明することができる	正確な数学的表現や記号を用いることができる 適切な推論を行い，自分の考えを説明している． 他者の考えに対して，自分なりの根拠に基づき，自分の意見を述べることが出来る．
1-2	数学的概念をある程度理解しており，計算などの数学的操作を行うことができる	現実の問題を数学の問題に直している．	数学の事象からパターンや性質などを見いだすことができる	数学的表現や記号を用いている． 推論を行い，自分の考えを説明している． 他者の考えに対して，自分の意見を述べる．
0	上記以外	上記以外	上記以外	上記以外

図 3-3　評価規準とルーブリック

以下に，評価課題の一例を示す。規準 B の現実事象に対する評価課題である。

よみうりランドには，かつてロックンローラーという乗り物があった。アームの先についた 9 つのゴンドラに乗り，アームが回転し始めると同時に，ゴンドラもアームの先端を中心として回転し始める。アームが 3 回転して終了となる。

ゴンドラの 1 つに乗った場合，どのような軌跡を描くのだろうか。また，どの地点で最高速度となるのだろうか。



【データ】

アームの長さ：10m　　アームの先端からゴンドラまでの長さ：7m

アーム：1 回転で平均 30 秒　　ゴンドラ：3.5 回転で平均 30 秒

図 3-4　評価課題

0	以下のいずれにも達していない。	以下のいずれにも達していない。
1-2	現実の問題を数学の問題に直している。	仮定や条件を設定することによって，数学の問題に直している。
3-4	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる。	仮定や条件を設定することによって，ロックンローラーの動きについての数学的モデルを作成し，数学の問題に定式化している。 適切な数学的処理に基づいて，ゴンドラの軌跡と最高速度を求めることができる。
5-6	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ解決過程および結論について振り返り，評価することができる。	ゴンドラの位置を変えたとき，はじめに作成した数学的モデルを修正し，再度結論を導くことができる。

図 3-5　評価規準：B1 プロセスと振り返り

(2) 単元構成

以上に示したように，単元の目標と評価を設定した。それに基づいて，極限と微分法の単元を以下のように構成した。

No.	探究	学習内容
1	数列の極限	数列の極限の再定義(ε-N 論法) 数列の極限の性質 無限等比数列，無限等比級数，無限級数
2	これまで学習した種々の関数の微分	積・商の微分，関数の極限(ε-δ 論法)，関数の連続性 $\sin x$ の微分，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，　$\sin x \approx x$　($x \ll 1$) $\cos x$，$\tan x$　の微分 $\sin(ax+b)$，$\sin x^2$，合成関数　の微分 $\log_a x$，a^x　の微分，自然対数 $x^{\frac{1}{n}}$，$x^{\frac{m}{n}}$　の微分，逆関数の微分 $\lvert x \rvert$　の微分，微分可能性
3	媒介変数で表された関数の微分	媒介変数で表された関数の微分
4	無限級数展開	無限級数展開，近似
5	スピード違反	平均値の定理
6	表面積最小の缶	関数の増減

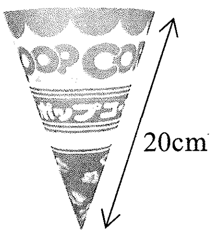
図 3-6　数学Ⅲの極限と微分法の単元構成

3．4　本教材について

(1) 探究課題

右の図のような容器に盛り付けられてポップコーンが売られていることがある。しかし，このような容器に入れられたポップコーンを食べていると，中身が少ないと感じたことはないだろうか。

右の図のポップコーンの容器の容積が最大となるのは，どのような場合だろうか。



ポップコーンの容器を作る扇形の中心角を x [rad] としたとき，容積 V は，

$$V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{10x}{\pi}\right)^2\sqrt{20^2-\left(\frac{10x}{\pi}\right)^2}=\frac{1000}{3\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

となる。従って，数学的には，$0<x<2\pi$ における V の最大値を求める問題に翻訳される。

そこで，V を積の微分と合成関数の微分を用いて，x で微分すると，

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1000(8\pi^2-3x^2)x}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}$$

となる。従って，$0<x<2\pi$ において $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ で V は最大値をとる。度数法に直せば，約 294°である。

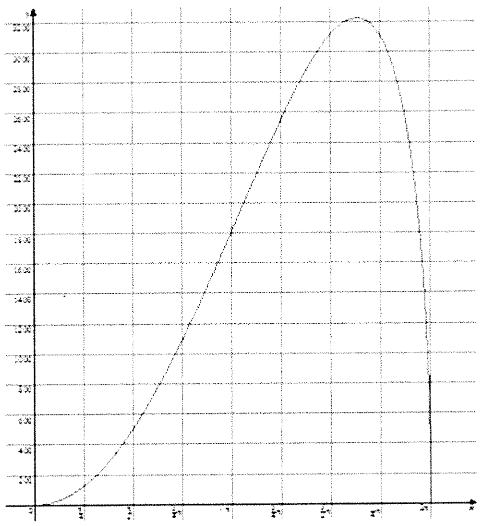


図 3-7　容器の容積

本探究課題を解決するにあたり，生徒たちは $\sqrt{x}$ の導関数が未習事項である。そのため，容積 V を微分するには $\sqrt{x}$ の導関数が問題となる。そこで，本研究授業では，$\sqrt{x}$ の導関数を導くプロセスに焦点をあてる。

(2) 式の上での操作とグラフ上の操作の対応

$\sqrt{x}$ の導関数を導く方法として，主に次の 3 つが考えられる。

(ⅰ) 導関数の定義式から求める

導関数の定義式から $\sqrt{x}$ の導関数を求めると，分子を有理化することによって，次のようになる。

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(ⅱ) $x=y^2$ を考え，両辺を x で微分する

$y=\sqrt{x}$ を x について解くと，$x=y^2$ となる。この両辺を x で微分すると，

$$\frac{dx}{dx}=\frac{dy^2}{dx}$$

となり，合成関数の微分を用いて，

$$1=\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

となる。従って，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる。

(iii)　$x=y^2$を考え，両辺をyで微分する

(ii)と同様に，$x=y^2$とし，両辺をyで微分すると，

$$\frac{dx}{dy}=2y$$

となる。従って，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる。これは，$y=\sqrt{x}$ の逆関数$x=y^2$の微分を用いる解決である。

どれも，式のみによって$\sqrt{x}$の導関数を求めることができるが，本時では，(iii)に焦点を当てる。

一般に微分可能な関数$y=f(x)$をxで微分することは，グラフ上では，各点におけるx軸方向からみた接線の傾きを求めることを意味する。一方で，$x=f^{-1}(y)$をyで微分することは，$y=f(x)$のグラフの各点において，y軸方向からみた接線の傾きを求めることを意味する。すなわち，逆関数の微分である。関数$y=f(x)$の導関数がわからなくても，その逆関数の微分を求めることができる場合には，「x=」の形に変形して両辺をyで微分することによって，元の関数の導関数を求めることができる。そのプロセスについて，式とグラフを対応させると次のようになる。

まず，導関数の定義から，$y=f(x)$をxで微分すると，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

である。これは，グラフ上では，図3-8の割線PQの傾きから点Pにおける接線の傾きを求めることに対応する。ここで，$x=f^{-1}(y)$はy軸方向からみた曲線$y=f(x)$のグラフとなる。従って，これをyで微分した

$$\frac{dx}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

は，グラフ上ではy軸方向から見たときの割線PQの傾きから点Pにおける接線の傾きを求めることに対応する。すなわち，y軸方向からの正接である。

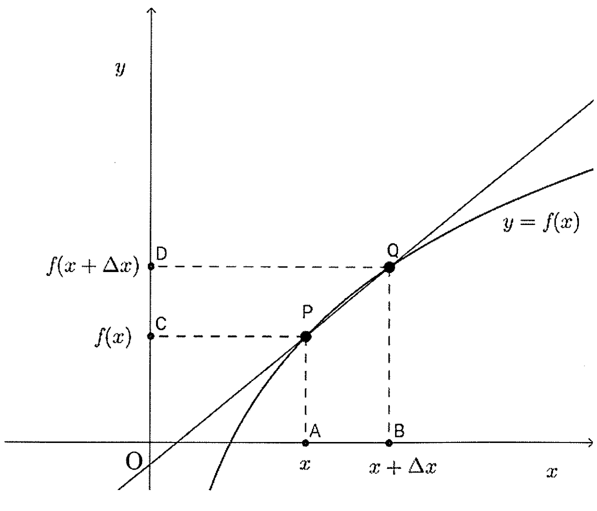


図3-8　導関数を求めるグラフ上の操作

この$\dfrac{dy}{dx}$と$\dfrac{dx}{dy}$は，グラフから明らかに逆数の関係にある。また，$x=f^{-1}(y)$，

$x+\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y)$， $y = f(x)$， $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{y+\Delta y - y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

となる。これは，関数 $y = f(x)$ の導関数を求めるために，その逆関数の導関数を求めることに帰着させていることになる。$y=\sqrt{x}$ を具体としてこのプロセスを踏むことが本時である。

(3) 教材観

ここでは，本探究課題そのものについてと，本研究授業で扱う逆関数の導関数の 2 つについて，それらの教材観を述べる。

①本探究課題について

本探究課題は，題材は異なるが『数学　第一類』にみられる。扇形から漏斗を作成する際に，その容積が最大になる時の中心角は何度かという問題である。

この問題は，『数学　第一類』の 1 年，3 年，4 年[2]に配列されており，各学年においてその時点で持ち得る限りの数学を用いて解決するものである。1 年次は，高さを実測し，グラフに表すことによって，グラフから近似的に容積が最大となる中心角を求める。3 年次は，三平方の定理と多項式展開[3]を用いて近似的に求める。そして，4 年次では微分法を用いて求めるという展開である。田中(2008)は，1 年から 4 年までのこの問題について，それぞれの数学的活動を島田(1977)の「数学的活動」の模式図(図 3-10)に照らし合わせて詳細に分析している。その結果，共通の問題場面の教材を複数の学年に配列することによって，学年が上がるにつれて数学的手法が洗練されていき，数学の有用性を実感することができ，長期的な「数学的活動」を展開することができることを指摘している。

また，田中・西村(2004，2006)は，この問題を中学 1 年生を対象に実践し，事象の調べ方としてグラフが有用であることを実感させる教材であることを明らかにしている。しかし，この問題を微分を用いて解決する場合の実践は報告されていない。

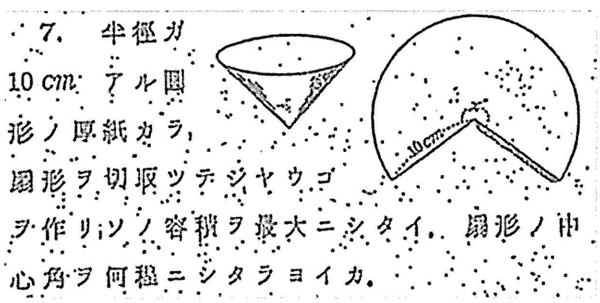


図 3-9　じょうごの問題（『数学　第一類』3 年 p.61）

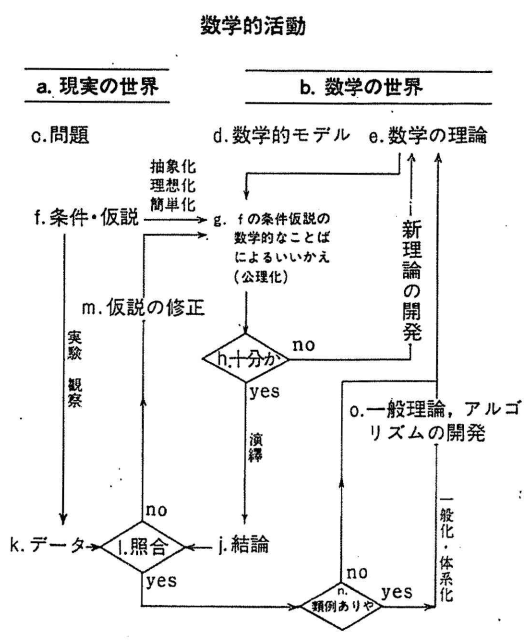


図 3-10　「数学的活動」　島田（1977，p.15）

2 当時の中学校は 4 年制であった。
3 当時は，多項式の多項式展開を 3 年次に扱っていた。

また，本校の独自テキストである『TGUISS 数学』にも，その思想を反映させ，1 年用と 3 年用のテキストにおいて，本探究課題のポップコーンの文脈で配列している。1 年次では，図形の単元で，円錐の体積を求める場面において，田中・西村(2004,2006)と同様に，事象を考察する方法について考える探究課題として配置している。3 年次では，三平方の定理の活用場面として配置している。5・6 年用のテキストを作成している現在，この探究課題を 6 年を対象に実践することによって，その可能性を検討することも，本研究授業の目的の一つでもある。

ただし，本研究授業の対象となる生徒は，残念ながら過去にこの課題を解決していない。しかし，複数の学年に本探究課題を配置することによる教育的価値の他に，数学Ⅲにおいて扱うという点だけに限定してもその価値を見出すことができる。

それは，一つの探究課題の解決を通して，現実事象の探究と数学的事象の探究を実現することができるということである。ポップコーンの容器の最大値を求めるプロセスは，現実事象の探究，すなわち「現実の数学化」のプロセスである。その解決過程において $\sqrt{x}$ の導関数を求めることになる。図 3-10 でいえば，「i.新理論の開発」にあたる。そして，容積 V の最大値を求めた後，「n.類例ありや」を考えると，$x^{\frac{1}{n}}$ や $x^{\frac{m}{n}}$，一般の逆関数の導関数を求めることが考えらえる。すなわち，「数学の数学化」である。このように，現実と数学の両方の「数学化」を実現することができることが，本教材の価値の一つである。

②逆関数の導関数について

冒頭でも指摘した通り，本研究授業における問題意識は微分積分の形式偏重にある。先に示した通り，$\sqrt{x}$ の導関数は式変形のみによって求めることができる。従って，(iii)のような式変形について，その意味を考えずに，式の上から導関数を求めることができたため，それでよしとすることが往々にしてあるのではないかと考える。しかしそれでは，$\dfrac{dx}{dy}$ が何を意味しているのかを考えることなく学習が進んでしまうことになる。そこで，逆関数の導関数を求める際に，式の上の操作とグラフ上の操作を対応させる必要があると考える。そうすることによって，その意味を捉えさせることが期待できる。

逆関数の微分は，例えば媒介変数表示された関数の導関数を求める際に必要となる。すなわち，

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されているとき，$t = f^{-1}(x)$ より，合成関数の微分から

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f^{-1}(x+\Delta x)) - g(f^{-1}(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f^{-1}(x+\Delta x)) - g(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x+\Delta x) - f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x+\Delta x) - f^{-1}(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

となり，逆関数の微分を用いる必要がある。逆関数の微分を用いれば，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

となる。このように，学習指導要領上の数学Ⅲの内容に限定しても，逆関数の微分を必要とす

る場面は，存在する。さらに，発展的な内容として，逆三角関数などを扱えば，その導関数を求める際にも逆関数の微分が必要不可欠となる。

３．５　本教材を用いた一連の授業の構成

時数	生徒の主な活動
第１時	中心角を独立変数，容積を従属変数とする数学的モデル(式)をつくる
第２時(本時)	$\sqrt{x}$ の導関数を逆関数を用いて求める
第３・４時	容積が最小となる中心角を求める $x^{\frac{1}{n}}$，$x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を合成関数の微分を用いて求める 一般の関数の逆関数の導関数を求める

３．６　活動の水準を高める手立て

まず，本時の最初の時点で生徒が遂行できると考えられる活動は，$\sqrt{x}$ の導関数を式から求めるということである。具体的には，3．4(2)で示した通り，次の３点である。

（ⅰ）　導関数の定義式から求める

（ⅱ）　$x=y^2$ を考え，両辺を x で微分する

（ⅲ）　$x=y^2$ を考え，両辺を y で微分する

そして，これらの活動の中で，特に(ⅲ)に着目し検討することによって，授業を通して $\sqrt{x}$ の導関数を求める操作の過程について，式の上の操作とグラフ上の操作とを対応させることができるようになることが本時の目指すところである。そのための手立てとして，次の２点を設定する。

①$x=y^2$ の両辺を y で微分している生徒をとりあげ，y で微分することの図形的意味を問う

②$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{dx}{dy}$ が逆数の関係にあることを，導関数の定義式から説明させる

まず，式のみで解決することができるため，グラフ上で考える必然性が必要となる。そのための手立てが①である。先述の通り，導関数はグラフ上の各点における接線の傾きの関数であることは，既に数学Ⅱで扱っている。従って，$x=y^2$ の両辺を y で微分した $\dfrac{dx}{dy}$ の意味を問うことによって，y 軸方向から見た時の接線の傾きであるという考えを引き出す。そして，y 軸方向から見た時の接線の傾きが x 軸方向から見た時の接線の傾きの逆数になっていることを確認した上で，手立て②を打つ。このことを説明するためには，x 軸方向から見た時と y 軸方向から見た時のグラフ上の点の座標をそれぞれ表現し，それを用いて式変形していく必要がある。すなわち，必然的にグラフ上の操作と式の操作とを対応づけることが期待される。

授業を通して遂行できるようになると考えられる水準 ― $\sqrt{x}$ の導関数を求める操作の過程について，式の上の操作とグラフ上の操作とを対応させる

授業者による水準を高めるための手立て

①$x=y^2$ の両辺を y で微分している生徒をとりあげ，y で微分することの図形的意味を問う

②$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{dx}{dy}$ が逆数の関係にあることを，導関数の定義式から説明させる

授業の最初の時点で遂行できると考えられる水準 ― $\sqrt{x}$ の導関数を式から求める

図 3-11　活動の水準を高める手立て

３．７　本時の目標

$\sqrt{x}$ の導関数を求める操作の過程について，式の上の操作とグラフ上の操作とを対応させることができる。

３．８　本時の実際と考察

本時の実際について，大きく 2 つの場面に分けることができる。以下では，それぞれの場面に分けて考察していく。

（1）微分可能性

まず，授業の冒頭で本時では $y=\sqrt{x}$ の導関数を求めることが課題であることが確認され，自力解決となった。まずはほとんどの生徒が本稿 3．4(2)の(ⅰ)の方法，すなわち導関数の定義式に基づいて求めた。その後，本稿 3．4(2)の(ⅱ)(ⅲ)の方法や，対数微分法による方法など多様な解決が行われた。そして，(ⅱ)(ⅲ)の方法が生徒によって板書，説明された。

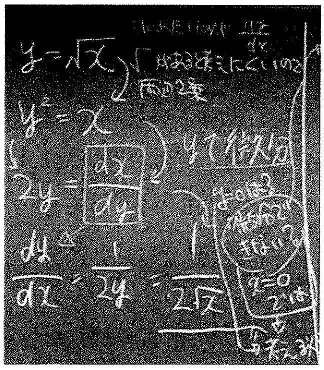


図 3-12　(ⅲ)の考え

その後，(ⅲ)の説明(図 3-12)に対して「S149：3 行目から 4 行目で，y が 0 だったら割れないじゃん。」という指摘が出される。その意見に対して，「S155：微分できないからいいじゃん。」という発言があった。微分可能性は未習であったため，授業者が「T158：x=0 になる？ そこは微分できない？ですか？ え？ 微分できないっていうのはどういう意味？」と問うた。すると，$y=\sqrt{x}$ の原点において，「S177：接線を、その点だけ接するみたいな線として考えると、こう、いっぱいかけちゃう。」という説明がなされた(図 3-13)。5 学年の際に，接線を割線の極限として定義しているが，その定義が身についていなかったようである。そこで，再度定義をし，それに基づくと接線が一つに定まらないとはどういうことかを問うた。それに対して，x が負の方向からの接線が引けないことが指摘された。さらに，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に関して $h\to+0$ ならば値が存在

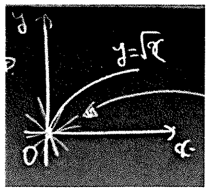


図 3-13　S177 の説明

するが，$h \to -0$ では存在しないことが指摘された。

ここまでの微分可能性の議論では，「両側からの極限値が存在する」という条件を拠り所として，x が正の方向からの接線は引けるが，負の方向からの接線が引けないこと，

$\lim_{h \to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は存在するが，

$\lim_{h \to -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在しないことから，接線は存在しないという結論となった。授業者が手立てを打たずとも，幾何学的，代数的の両面から説明がなされた。

しかし，そもそも $h \to +0$ の際も極限値が存在しないということを指摘する生徒が表れた(図 3-14)。$h \to 0$ のとき，微分係数が∞になることから，直線の傾きの値として考えられないという説明をしている。それまでの議論では，接線が引けるということと，微分係数が存在することは同値であるということが，クラス全体で暗黙裡に認められていたものと考える。それに対して，S 391 の生徒は，微分係数が∞になることを根拠に，「それを傾きとして考えられない」と発言しているのである。そして，x=0 は除いて考えることが提案された。結局は，∞を数として認めるか否かの問題であるため，授業では x=0 を除くものとして考えることとした。

S391：てか、値取ら無くない？それだって $\frac{\sqrt{h}}{h}$ でしょ？

(中略)

S 397：ってことは、ずっと h、0 に近づけてったら、∞になるから、だから、それは、考えられない。

T398：考えられない。

S 399：それ、その式を傾きとして考えられないから。

図 3-14　$h \to +0$ でも極限値が存在しない説明

以上の微分可能性に関する一連の議論に対する手立ては，事前に想定していなかった。しかし，生徒たちは「y=0 で割れるのか」ということを発端に，x=0 での微分可能性を考察の対象としたのである。そして，グラフ上の接線の傾きと導関数，微分係数の式とを対比させながら議論が進行していった。授業者が手立てを打たずとも，生徒自らそれらの活動を行ったのである。

(2)　$\frac{dx}{dy}$ の幾何学的解釈

原点での微分可能性の議論のあと，授業者がその他に(ⅲ)の説明に関して何か質問や補足はあるかを問うたが，生徒からは何も出されなかった。そこで，授業者が「T406：さらっとやってくれたんだけど，これ $\frac{dx}{dy}$ ってなに？」と問うた。すると，既にそのことを考えていた生徒たちがいたことが明らかとなり，その生徒が説明を行った。まず，$\frac{dy}{dx}$ と $\frac{dx}{dy}$ が逆数であることに着目し，それをグラフ上で考えることによって解決をしていた(図 3-15)。

S 419：いや、もともと疑問に思ってたのは、なんか、$\dfrac{dx}{dy}$は、xをyで微分したもので、
T 420：$\dfrac{dx}{dy}$はxをyで微分。はい。
S 421：そのあと、Kは逆数取ってたけど、
T 422：お、ここ？
S 423：yをxで微分したものは、$\dfrac{dy}{dx}$はyをxで微分したもので、それは逆数になるのかどうかっていうことを考えてたけど、
T 424：はい。
S 425：結果的に、傾きを考えれば解決した。
(中略)
S 453：割線かー、割線、割線割線。
T 454：割線で考えると？ちょっとでかすぎたけど。
S 455：dx分のdyは傾きになって、
(中略)
T 460：これがdx？(図 3-16 左のグラフを参照)
S 461：うん。dx。x軸とy軸じゃん。
T 462：これx軸とy軸。(図 3-16 左のグラフを参照)
S 463：Δxにした方がいいんじゃない？
T 464：Δx。まあ、まだ極限取ってないのでΔx。で？
S 465：Δy。
T 466：で？
S 467：で、上っかわにもとって。
T 468：上っかわってなに？
S 469：上、違ったっけ？ぐるっと回したから上っかわ。
S 470：で、それは、こうやって見て(顔を横向きにして)
T 471：こうやって見てんの？(顔を横向きにして)
S 472：それの極限が$\dfrac{dx}{dy}$。あ、違う、$\dfrac{dy}{dx}$。
(中略)
S 482：で、なんか、鏡みたいにめっちゃ反転させて、
S 483：$y=x$に関して。
T 484：ど、どうやっ
S 485：裏から見る感じ。90°回転させたのを鏡にする。
T 486：90°回転したのを鏡にするってことは、こうか。こっちがy軸？(図 3-16 右のグラフを参照)
S 487：うん。
S 488：逆関数か。
T 489：で？こっちが？(図 3-16 右のグラフを参照)
S 490：逆関数を考えればいいんだよ。考えるときみたいな考え方。
T 491：x軸？で？こうなる？こうなる？
S 492：割線引いて、
T 493：割線引いて。
S 494：そこの傾きを調べてあげると
(中略)
S 501：dyのd、dyとdxでしょ。
T 502：dyの
S 503：あ、デルタデルタ。$\dfrac{\Delta}{\Delta y}$で、それを、その傾きを微分したのが、
S 504：で、それを、それの limit 取ったのがdy分のdx。
S 505：$=\dfrac{dy}{dx}$。
T 506：それで？これなにをどう近づけたの？(図 3-16 右のグラフを参照)
S 507：Δy。
S 508：Δyを0に。
T 509：で？だからなに？
S 510：逆だなって。
T 511：だから逆？
S 512：逆関数。
S 513：逆じゃん。
T 514：ど、ど、どう、逆関数？
S 515：だから、Δy、それ(図 3-16 左のグラフを参照)のΔyはそっち(図 3-16 右のグラフを参照)のΔyと対応して、そっち(図 3-16 左のグラフを参照)のΔxはそっち(図 3-16 右のグラフを参照)のΔxと対応しているから、そのまま逆になっただけだなって。

図 3-15 $\dfrac{dy}{dx}$と$\dfrac{dx}{dy}$が逆数であることの幾何学的解釈の議論

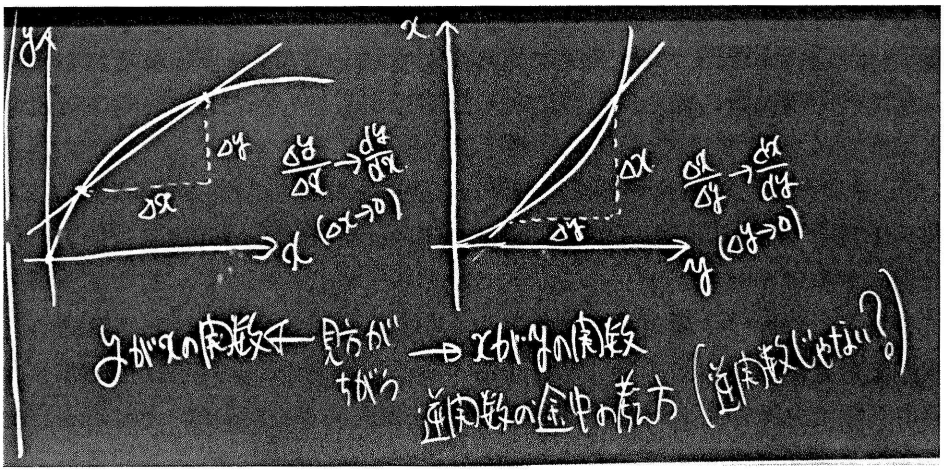


図 3-16　$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{dx}{dy}$ が逆数であることの幾何学的解釈の板書

さらにこの後，この 2 つのグラフが同じグラフでありつつも，見方を変えたグラフであるという説明が加えられ，「逆関数の途中の考え方」であるという意見で本時を終えた。

S 543 : 同じグラフじゃん。 T 544 : 同じグラフ？ S 545 : でも見方を変えてるから変わってる。 T 546 : どう、どう見てんの、こっちは？ (中略) S 551 : それは、y=、y が x の関数ですよ、って見てて、あっちは x が y の関数ですよって見てる。 (中略)	T 556 : だから、見方が違うと。 S 557 : 逆関数じゃん。 T 558 : なに？逆関数がなに？ S 559 : 逆関数じゃないよ。 S 560 : 逆関数をとってる途中。 S 561 : だよねだよね。 S 562 : 逆関数の途中の考え方で止まってるみたい。

図 3-17　「逆関数の途中の考え方」という議論

$\dfrac{dx}{dy}$ の幾何学的解釈に関するこの一連の議論は，授業者が「$\dfrac{dx}{dy}$ って何？」と問うたことをきっかけに起こっている。この発問は，手立て①として設定していたものである。その手立てが効果的に働いたと考えられる。5 学年の微分積分の際に，導関数や原始関数などの幾何学的側面と代数的側面を対応させながら議論してきたことが，この場面にも活かされたのであろう。「$\dfrac{dx}{dy}$ が幾何学的にどう解釈できるのか」というところまで問わずとも，「$\dfrac{dx}{dy}$ って何？」という発問だけで，幾何学的に考えようとする姿勢が身についていた。むしろ，既にそのことを考えていた生徒たちがいたということは，授業者が「$\dfrac{dx}{dy}$ って何？」と問うことなくして，生徒自らが $\dfrac{dx}{dy}$ の幾何学的解釈を自問自答することができていたということである。

さらに，生徒たちは図 3-16 の 2 つのグラフの見方にまで踏み込んで議論をしている。図 3-16 の 2 つのグラフは同じグラフを表している一方で，左のグラフは x の関数，右のグラフは y の関数としてみていることを明確に指摘することができている。本時では，逆関数の導関数とい

うところ議論までは行きつくことができなかった。従って，手立て②を打つには至らなかった。しかし，「逆関数の途中の考え方」をすることができたことは事実である。これらの数学的活動によって，逆関数の導関数の核心的な見方・考え方をすることができたと考えられる。

謝辞

東京学芸大学教育学研究科（修士課程）長世諒氏にプロトコール作成等ご協力いただきました。ここに記して謝意を表します。

【第３章引用参考文献】

公田蔵(1994)「微積分教育の半世紀」，立教大学研究報告書，自然科学，34，pp.1-18

佐々木力(2005)『数学史入門―微分積分学の成立』，ちくま学芸文庫

島田茂(1997)『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，みずうみ書房

田中義久(2008)「『数学　第一類』における問題場面が共通な教材に関する事象の数学化の視点からの分析」，日本数学教育学会誌，90(1)，pp.12-25

田中義久・西村圭一(2004)「「関数を用いた事象の調べ方」の学習指導に関する一考察：『漏斗の問題』を用いて」，学芸大数学教育研究，16，pp.51-60

田中義久・西村圭一(2006)「『数学　第一類』における関数の学習指導に関する考察：漏斗の問題のレポート分析」，日本数学教育学会誌，88(5)，pp.2-12

中等学校教科書株式会社(1943)『数学 中学校用 3 第一類』，中等学校教科書株式会社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会(2015)，『TGUISS 数学 1』，正進社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会(2016)，『TGUISS 数学 3』，正進社

成田慎之介(2014)「微分積分学の基本定理の創出過程に関する一考察 ―『数学 第一類』の分析を手がかりとして―」，日本数学教育学会誌　数学教育学論究　臨時増刊，96，pp.126-136

文部科学省(2009)「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」，実教出版

藤田宏ほか(2004)『グラフ電卓で育てよう，数学を活かす力 ―数学的探求とモデル化の授業―』，東京書籍

4．まとめと今後の課題

本公開研では，東京学芸大学から指導助言講師として中村光一先生をお招きして指導講評・指導助言を頂いた。中村先生からは，授業中の生徒の様子から，次の教材研究や授業のシステム構築にどうつなげていくかということについて，数学の方法(プロセス)という側面からご指導を頂いた。ここではそのご指導・ご助言を基に，２つの公開授業について考察する。

公開授業１について，中村先生は統計教育についての課題と要望を交えて説明して下さった。以下その説明を記す。

「統計」の授業では何を教え，何を考えさせるのかが非常に難しいと改めて感じた。中学校や高校の統計では手法を教えているが，日本の統計教育は諸外国に比べて非常に遅れている。日本の教育課程は学年が上がっていくほどにフォーマルな統計とインフォーマルな統計の比率がフォーマルな統計に多くなる。フォーマルとインフォーマルが同程度に扱っていかなければならない。日本の小学校では，全体の様子と一部の様子みる内容の教材として「ひとつの田や畑からとれる米の量を調べるにはどのような方法が考えられるか」がある。基本的な無作為抽出の方法はそこで教わる。中学校では何を教えるか。今回の教材においては現実の現象として文脈が，つまり円の面積を調べる根拠・動機が薄い。問題設定が難しい。具体的な場面に直面した時に抽出をどうするか等が検討されてインフォーマルとフォーマルが起こってくる。できればフォーマル・インフォーマルを同時に扱うカリキュラムを作って欲しい。その時には分散はもっとはやい時期にやってほしい。

今回の授業で子どもたちが扱っているデータは２次データである。面積を調べるようとしたのではなく，面積を調べるデータが一貫しているかどうかを調べている。教材になったそのものを調べていない。そのものを調べることと数値のデータとの関係を考えさせてどちらが適切かという問題設定をすべきだった。子どもたちはもともとのデータと自分たちが抽出したデータの関係を見て調べていた。有為抽出と無作為抽出の分布は調べていたが元のデータの分布との関係は調べていない。今回は何のデータを扱っていたがはっきりしていなかった。子どもたちは最初平均を見る。そのあとに自分のデータをみて考えていた。自分のデータを大切にしている。自分の考えを大切にしながら物事を考えことができている。全体の元のデータの分布と自分の作ったデータの分布の関係を議論する際，正常な議論が起こりつつある。そこを意図的にはっきりと取り上げて扱って行くことが今後の課題となる。

公開授業２では，数学的な問いを生み出す授業展開を今回の授業に沿ってお話下さった。以下，その助言を記す。

子どもがわからないところを教えるのでなく何度も質問して子どもの疑問を引き出し，その疑問をきちんと全体に理解させ全体で議論させる。定義ができることは基本がきちんと定着している。子どもは必ずノートの前を見て，既習事項と関係ないかと確認する。算数数学を学ぶ時に既習を使えば次ができることを知っている。そういう授業を作っている。記号にとらわれることなく疑問が持てる力を養っている。具体化と一般化の関係を常に意識した授業展開がなされていた。数学ができるかどうかは数学的な問いが発せられるかどうかであるから，指導者が数学的な問いをいろいろな場面で出していて，生徒はそれを真似する。問いが真似できるというのは，問いが生まれる問題状況をきちんと作られているということである。

今回の授業で気になった点は，自分たちで作り出した関数が正しいかどうかをどう思って見ているかが，はっきりしなかった。生徒は傾きの関数を正しく見ることができているか。創る

プロセスと創られたものを両方チェックする考え方をより深く養うことは大切なことである。

どちらの授業にも共通して言えることとして，問題が解ける，解けないということではなく，数学の方法を重視するときに，授業展開・運営として生徒のどのような活動に焦点を絞って洗練し議論を深めていくのか，そしてそのようなプロセスをどのようにつくっていくかということが課題となる。そこには手立てが必要になってくる。「数学を使い，創る水準を高める」ための手立てを考究しなければならない。また，その手立てが有効に機能したか，設定が適切であったか，深く考察していかなければならない。

Abstract

Department of mathematics of our school has defined indigenous and integrated six-year curriculum with the main idea of nurturing mathematical literacy (for example, department of mathematics of our school, 2012). Its salient features lie in the premise of use of ICT and focus on mathematical modeling activities. In order to implement this curriculum, it is necessary to aggressively develop lessons focused on the exploration of events while balancing both the aspects of understanding mathematics and capacity building. Under this premise, we will first outline the qualities and abilities set out by the department of mathematics of our school and nurturing these qualities and abilities. Next, we will touch upon the research subjects of department of mathematics.