東京学芸大学附属高等学校紀要　55　pp.41～52，2017

課題を発見する力を育む授業
― 2次関数を題材として―

Lessons that nurture the ability to discover tasks
― On the subject of Quadratic function―

数学科　菅　原　幹　雄

＜要旨＞
本校では「本物教育」という看板を掲げ教育活動を行ってきた。その解釈は様々だが，数学科においては，一方的に問題の解き方を教えるような授業を「本物教育」とは捉えていない。「なぜそのように考えるのか」という点を疎かにしてしまうと，数学という教科は次第に面白味に欠けた，とても形式的なものになってしまう，と考えているからだ。

本稿は平成29年6月公開研究大会で実施した研究授業の報告である。その研究授業においては，2次方程式の解の配置に関する問題を取り扱うことにした。教科書に載っている基本的な例題だが，それまでの学習した平方完成や判別式，そして，数学Ⅲで学習する中間値の定理に関する要素が盛り込まれた題材であると捉えている。問題の解き方を教えてその通りに解くことだけで授業が終わってしまうことなく，「なぜそのようなことを考えるのか」と問いかけながら授業を進めることで，生徒の課題を発見する力を育てていくことを狙いとした。

1．はじめに

1.1．本単元で育てたい「資質・能力」

数学Ⅰの2次関数は，数学Ⅱ，数学Ⅲでも継続的に学習する関数の概念の基礎を養う単元である。関数の概念は高校数学の大きな柱の一つと考えられ，非常に重要だと考える。本研究授業においてテーマとしているのは，「課題を発見する力」である。これは，本校が重点課題として設定している5つの資質・能力のうちの一つとして掲げているものである。「課題を発見する力」を本研究授業のテーマとして設定した理由は，具体的には様々な状況の中に含まれる関数の関係に気づくことができるような能力，つまりは「課題を発見する力」を伸ばしたい，と考えたからである。

2次関数の単元の指導に当たっては，可能な限りGeoGebraを併用することにした。ノート上などの式による表現とGeoGebra上のグラフによる表現を関係づけながら学習を進めることができると考えたからだ。これにより，式だけからでは発見しづらいような課題も，式とグラフを関連させやすくなることで発見しやすくなるのではないかと考えている。

1.2．育てたい「資質・能力」を評価する方法

後述するが，GeoGebraの使用を前提として取り組む課題を用いて評価する予定である。この課題に対しては，個人での自力解決の時間と，その後のグループでの解決の時間をとって，その変容を見て取り評価に加える予定である。また，グループでの取り組みの際にはMacBookAirを配布して，インストールされたGeoGebraを使用させる予定である。これにより，授業の内容を理解しているかどうかだけでなく，協同して取り組む姿勢や，ICTの活用能力なども評価したいと考えている。

2．研究授業について

2.1．対象

高校1年生（男子19名，女子19名，計38名。ただし，女子1名は休学中）

2.2．単元名

数学Ⅰ　二次関数

2.3．単元の目標

二次関数とそのグラフについて理解し，二次関数を用いて数量の関係や変化を表現することの有用性を認識するとともに，それらを事象の考察に活用できるようにする。

ア　二次関数とそのグラフ

事象から二次関数で表される関係を見いだすこと。また，二次関数のグラフの特徴について理解すること。

イ　二次関数の値の変化

(ア)　二次関数の最大・最小

二次関数の値の変化について，グラフを用いて考察したり最大値や最小値を求めたりすること。

(イ)　二次方程式・二次不等式

二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解するとともに，数量の関係を二次不等式で表し二次関数のグラフを利用してその解を求めること

3.　単元設定の理由

3.1.　生徒たちの実態，および本単元に至るまでの学習

Geogebra を活用して，式の表現とグラフの表現との関連を強調した形で指導を行う。

特に，GeoGebra のスライダー機能を活用して，係数の変化の様子とグラフの変化の様子の関係を，視覚的に理解してから式変形による理解を深める，という順序を心掛けた。

3.2.　教材の特性と授業者の手立て

２次関数の単元では，式の表現とグラフの表現を関連づけることが重要だと考える。本研究授業に至る学習においては，GeoGebra を用いること，特にスライダー機能によって，係数の変化の様子とグラフの変化の様子を関連づけることに重点を置いて指導を行うことで，研究授業の題材に取り組むための十分な準備を行うことを第一の手立てと考えている。具体的に，授業を行う順に挙げていくと，以下のようになる。

① GeoGebra のスライダー機能を用いることで，係数の変化とグラフの変化の相関

② $y=a(x-p)^2+q$ の形の２次関数の式から，頂点の座標 (p,q) と，軸の方程式 $x=p$
特に特に，p か q を変化させると，グラフが左右か上下に平行移動すること

③ $y=ax^2+bx+c$ の形の２次関数の式から，
放物線の形 a，y 切片の値 c

④ $ax^2+bx+c=0$ という２次関数の y の値を０とした２次方程式から，$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と変形できたときは $x=\alpha,\beta$，または解の公式より
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とすることで，グラフと x 軸との交点の x 座標の値

⑤ $ax^2+bx+c=0$ という２次方程式の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，判別式の式の値の正負から，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係

⑥ $ax^2+bx+c>0$ などの２次不等式の解が，GeoGebra 上でどのように表現されているか。

4. 指導計画

4.1.　単元計画：１学期中間考査後から，１学期期末考査までの計画

	計画	授業の概要
1	中間考査の返却	
2	二項定理	パスカルの三角形と道順の総数の関連 二項定理の導入
3	二項定理	多項定理へ発展 二項定理を用いた証明など
4	関数とグラフ	GeoGebra の導入 絶対値の含む１次関数のグラフ
5	２次関数のグラフ	GeoGebra で $y=x^2+q$ と式を入力し，q の値をスライダーで変化させる GeoGebra で $y=(x+p)^2$ と式を入力し，p の値をスライダーで変化させる スライダーにおける値の変化とグラフの変化の関連を強調した。
6	２次関数のグラフの平行移動	平行移動と方程式の関連 $y=ax^2+bx+c$ において，x を $x-p$，y を $y-q$ に置き換えた式 $y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$ は $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に $+p$，y軸方向に $+q$ だけ平行したグラフの方程式になっていること GeoGebra を用いて，スライダーの値の変化の様子と，平行移動の様子を確認する

7	平方完成の計算	$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ より 軸は$x = -\frac{b}{2a}$，頂点は$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$を最終的に GeoGebra で確認する
8	2次関数の最大と最小	定義域と値域の関係を GeoGebra を利用して視覚的に確認させたりする
9	グラフと２次方程式	解の公式の確認 放物線のグラフと２次方程式の解の関連を導く 判別式の導入
10	グラフと２次不等式	１次不等式，２次不等式の解を GeoGebra で確認したりする。
11	グラフと２次不等式	２次不等式の演習，および連立不等式などの演習
☆ 12	公開研究大会	連立不等式の利用 ２次方程式の解の符号 ２次方程式が，異なる ２つの正の解を持つような場合について考察する
13	公開研究大会の振り返り 対称移動	対称移動 x 軸，y 軸，原点のそれぞれについて対称移動したグラフを図示
14	２次関数の決定	２次関数の方程式が決定される条件とはどのようなものか？ $y = a(x-p)^2 + q$ と$y = ax^2 + bx + c$ の式の形からも考えさせる。
15	2 次関数の種々の問題	絶対値を含む２次関数のグラフ，放物線と直線の共有点，など
16	パフォーマンス課題	パフォーマンス課題バスケットボールのフリースローを題材にした課題
	期末考査	期末考査

4.2. 本時の学習（11／16時間目）

4.2.1. 本時の狙い

例えば，本校で使用している教科書（第一学習社数学Ⅰ）には次のような例題が記載されている。

『探求例題 20』

２次方程式 $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ が異なる２つの正の解をもつように，定数mの値の範囲を定めよ。

《解答》

$f(x) = x^2 - 2mx - m + 6$ とおくと

$f(x) = (x-m)^2 - m^2 - m + 6$

であるから，$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x = m$ である。

与えられた２方程式が異なる２つの正の解をもつための条件は，次の(ⅰ)～(ⅲ)が同時に成り立つことである。

（ⅰ）$y = f(x)$ のグラフが x 軸と２点で交わる与えられた２次方程式の判別式を D とすると

$D = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 6)$

$= 4m^2 + 4m - 24 > 0$

よって$m < -3$，　$2 < m$…①

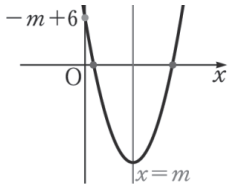
（ⅱ）$y = f(x)$ のグラフの軸が y 軸の右側にある

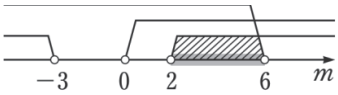
$m > 0$ …②

（ⅲ）$f(0) > 0$ である $-m + 6 > 0$

よって $m < 6$ …③

①，②，③の共通範囲を求めて $2 < m < 6$





この例題の要点は波線部である。つまり，

(ⅰ) 判別式 D> 0 を満たすこと

(ⅱ) 軸の位置が，解の存在範囲に含まれること

(ⅲ) 解の存在範囲の端点での関数の値が正であること

の３つの条件が，同時に満たされることが，問題の条件と同値であることである。しかし，この事柄の理解は決して容易ではないようだ。実際，大学受験を控えた高校３年生を指導しているとき，この３つの条件を挙げられない生徒が少なからずいる。例えば，３つではなく(ⅰ)と(ⅲ)だけの２つしか挙げない生徒がいる。なぜだろうか？これは，(ⅰ)～(ⅲ)の３つの条件の必要性の理解が十分でないからだと，容易に想像できる。そこで本研究授業においては，この点に注目して取り組むことにした。つ

まり，教科書に記載された波線部の理解がより促されるような授業展開を目的として，本研究授業を構成することにした。

まず，これまでの指導の経験から，教科書に記載された３つの条件を天下り的に教えてもその必要性が十分に実感できないからか，その理解や定着が不十分であると感じている。そこで本研究授業では，３つの条件を発見的に学習できるような展開を目指すことにする。そして，その過程において生徒の課題を発見する力が育成できるのではないかと考えている。

３つの条件を見いだす過程においては，グラフ上での考察が不可欠となるので，生徒二人に対して一台の MacBookAir を配布し，そこにインストールされた GeoGebra5 を使って考察することにした。

４.２.２　本時の教材について

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる２つの正の解をもつための条件について考察するとき，

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

とおいて，

条件(ⅰ)：$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わること，つまり，与えられた２次方程式の判別式を D とすると

$D=b^2-4ac>0$ ……①

条件(ⅱ)：$y=f(x)$ のグラフの軸が y 軸の右側にあること，つまり，$-\frac{b}{2a}>0$ ……②

条件(ⅲ)：$f(0)=c>0$……③

の３つの条件がスラスラと出てくることはないだろう。GeoGebra を考察の手立てとして利用していても，グラフ上の様子から速やかに条件式を導くことも難しいのではないかと想定している。

そこで，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる２つの解

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のうち，値の小さいほうの解に着目して，

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0$$

であればよいことを考察の手がかりとしようと考えている。

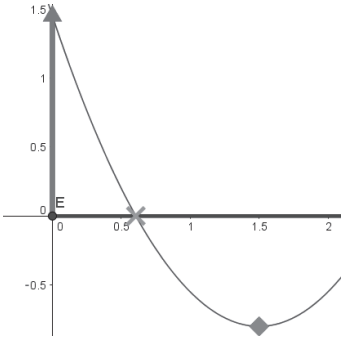
数学Ⅰの範囲においては上記の不等式から

$$-\frac{b}{2a}>\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \ldots\ldots(*)$$

とすることはできても，これ以上の計算を進めることはできない。しかし，（＊）の左辺が放物線の軸を表していることに気づけば，条件(ⅱ)が見えてくるのではないだろうか。具体的には，（＊）の右辺の式が存在するためには $\sqrt{b^2-4ac}$ が実数でなければならない。本研究授業の問題設定では「異なる二つの正の解」を持つときを考えるので，条件(ⅰ)の $b^2-4ac>0$ が必要である。このとき（＊）の右辺の式の値は正なので，条件(ⅱ)が得られるだろう。

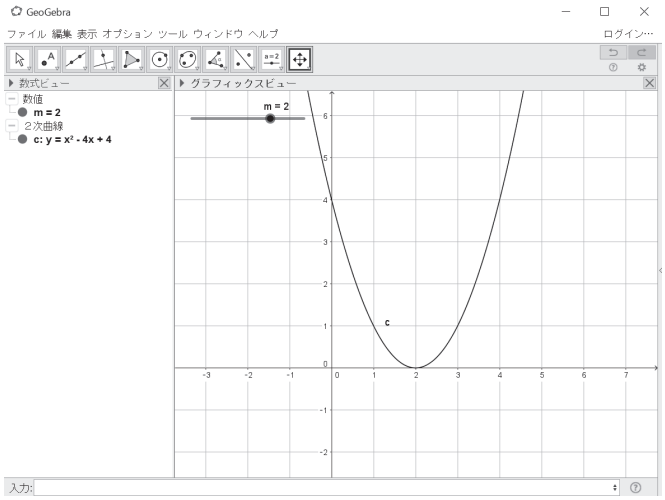
残るのは条件(ⅲ)となるが，この条件は中間値の定理の理解にもつながる，非常に重要な条件だと捉えている。

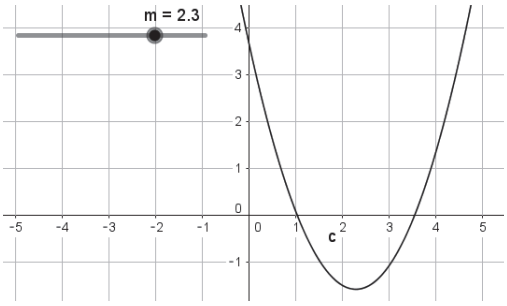
> 中間値の定理
> $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，$f(c)=0$（$a<c<b$）となる c が少なくとも１つある。

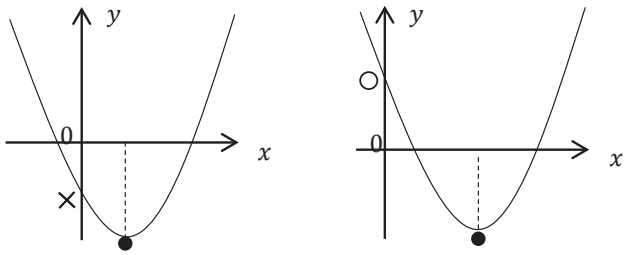


したがって中間値の定理を参考に，条件(ⅰ)により頂点の y 座標の値が負であることから，放物線のグラフが x 軸の正の部分と交点を持つとき，その領域の端でどこを通過すればよいのか，ということを考えることにより，条件(ⅲ)を見いだすことができるだろう。特に，領域の端点に着目させることが非常に重要など考えている。

4.2.3. 本時の授業展開（指導案）

時間	学習の流れと生徒の活動教員の指導	教員の指導と手立て
導入	課題提示 探究例題 20 ２次方程式$x^2-2mx-m+6=0$が異なる２つの正の解をもつように定数mの値の範囲を定めよ。	MacBookAir は事前に配布
	GeoGebra を用いて，自力解決を試みる。 ＜予想される生徒の活動＞ $y=x^2-2mx-m+6$と入力し，mの値を動かしたときの，x軸との交わり方を調べる。  	MacBookAir を用いて， 二人一組で取り組む ２次方程式の解を，２次関数のグラフとx軸との交点として考えることは既習事項
10 分	mの値の範囲は，GeoGebra のスライダーを用いると， $2<m<6$ ではないかと調べることができる。しかし，GeoGebra のスライダーを用いても，限られたmの範囲において調べたに過ぎない。	机間巡視 生徒に発表してもらう
展開 1	発問 mの値の範囲は本当に$2<m<6$ で良いのだろうか？ ＜予想される生徒の活動＞ 活動 1「異なる２つの解」であることに着目し， ２次方程式$x^2-2mx-m+6=0$の判別式を利用する $(-2m)^2-4\cdot1\cdot(-m+6)>0$ $4m^2+4m-24>0$ $m^2+m-6>0$ $(m+3)(m-2)>0$ よって，$\boldsymbol{m<-3}$ ，　$\boldsymbol{2<m}$……①	この発問に対する取り組み方は，生徒一人ひとりの自由にさせるが，授業全体としては指導案のような流れが作れるようにしたいと考えている。 机間巡視 生徒に発表してもらう ここで手の止まる生徒には，２つの解そのものについて考察するよう促す。 つまり，活動 2 へ促す。
15 分	※上記だけで手が止まる生徒が多いと予想される。	

展開 2 20 分	活動 2 2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ の解 $x=m\pm\sqrt{m^2+m-6}$ がともに正の値であればよい。 つまり，異なる 2 つの解のうちの小さいほうが正の値であればよい。したがって $m-\sqrt{m^2+m-6}>0$……（＊） という不等式を得る。しかし，この不等式は数学Ⅰの段階では解くことができない。 　つまり，代数的に処理することはできないので，グラフ的（幾何的に？）に考察することを試みる。 ［参考］（＊）を解く $m>\sqrt{m^2+m-6}$ において，$\sqrt{m^2+m-6}$ が正の実数であるために $\boldsymbol{m^2+m-6>0}$……① また $\sqrt{m^2+m-6}>0$ なので， $\boldsymbol{m>0}$ ……② となる。上記の二つの条件が満たされるとき， （＊）の両辺を 2 乗して $m^2>m^2+m-6$ できるので，これを解いて $\boldsymbol{0>m-6}$ ……③	机間巡視 生徒に発表してもらう 既習事項× この不等式を解くことは数学Ⅱで学習することなので，この段階では処理しにくい。 そこで，活動 3 へ促す。 このやり方は，最後に発表してもらう ①，②の条件を確認せずに（＊）の両辺を 2 乗することが多いと予想される
展開 3	活動 3　GeoGebra において $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフが，x 軸の正の部分と異なる 2 つの点で交わるようにして，そのグラフが満たす条件を考える。  $f(x)=x^2-2mx-m+6$ とおいて平方完成する $f(x)=x^2-2mx-m+6=(x-m)^2-m^2-m+6$ (i)「頂点の y 座標の値が負の値である」ことより， $-m^2-m+6<0$ $m^2+m-6>0$ $(m+3)(m-2)>0$ $\boldsymbol{m<-3\ ,\quad 2<m}$……① この条件は，活動 2 からは 2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ が異なる 2 つの解をもつ条件を考えることより得られる。	既習事項○ 式から読み取れる 2 次関数の特徴は， ⓪放物線の形 ①頂点の座標 ②軸の方程式 ③ y 切片の値 机間巡視 生徒に発表してもらう 活動 2 との関連は，生徒に質問する
25 分		

30 分	(ii)「**放物線の軸が y 軸の右側にある**」ことより， $\boldsymbol{0 < m}$……② この条件は，活動 2 からは（＊）の不等式の $m - \sqrt{m^2 + m - 6} > 0$ ○印の部分が放物線の軸を表していることと，（＊）が $m > \sqrt{m^2 + m - 6}$ とできることより，①のとき $\sqrt{m^2 + m - 6} > 0$ なので $m > 0$ と得られる。	机間巡視 生徒に発表してもらう 活動 2 との関連は，生徒に質問する
展開 4 35 分	(iii) $f(0) > 0$ より，$-m + 6 > 0$ $\boldsymbol{m < 6}$ ……③ この条件を見いだせない場合は， 条件(i)と条件(ii)をグラフ上で解釈すると， (i)「頂点の y 座標の値が負の値である」……①´ (ii)「放物線の軸は y 軸の右側にある」……②´ であることから，以下のような発問を行う。	条件(iii)は出にくいと予想 同じ意味を持つ別の表現がある。
40 分	発問（$f(0) > 0$ を見出すことを目的とする） ①´と②´をともに満たす放物線のグラフが，x 軸の正の部分と異なる 2 つの点で交わるために満たす条件は何か？  頂点が x 軸の下側にあるので， **放物線のグラフのうち，頂点の左側半分のグラフがどこを通過していれば，x 軸の正の部分と交わるか？** を考えればよい。	中間値の定理に通じる考えを必要とする箇所なので，強調したい。
結論	①，②，③の共通範囲は，$2 < m < 6$	
まとめ	下に凸な 2 次関数のグラフについて， **(グラフが x 軸の正の部分と異なる 2 点で交点を持つ)** という条件は， **(1)頂点の y 座標が負，つまり判別式 $\boldsymbol{D > 0}$** **(2)軸が x 軸の正の部分にある** **(3) y 切片が正の値，つまり解の存在範囲の端点** **の 3 つの条件を共に満たすこと** を考えればよい。	（＊）の不等式の代数的な処理を，時間があれば発表してもらう。その時間がなければ次回の授業で発表してもらう。

4.3. 評価について

4.3.1　評価問題

問題１［授業内容に直結した問題］

２次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ の異なる２つの解がともに $-2<x<4$ の範囲にあるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

問題２［GeoGebra の使用を前提とした課題］

一般に，ボール等を投げたとき，その軌跡は放物線を描くことが知られている。

さて，バスケットボールにおいてフースローラインからシュートを放った時，ゴールするようなボールの軌跡は，どのような２次関数のグラフとなるだろうか？

ただし，実際のゴールの直径は 0.45 ㎜，ゴールの高さは 3.05 ㎜，フリースローラインからゴールまでの距離は 4(m) だが，図のように，ゴールの直径は 0.5 ㎜，ゴールの高さは３㎜としてよい。また，シュートを放つ瞬間の手元の高さは２㎜としてよい。またバスケットボールの直径は，中学生以上の男子が使用する７号球が 24.5（㎝），中学生以上の女子が使用する６号球は 23.2（㎝）だが，その大きさは無視してよい。つまり，点として扱ってよい。（図１）

4.3.2.　実施方法

問題１は個人で取り組む課題とする。時間は 10 分間。ただし，問題１の問題文の下に，授業で扱った「探求例題 20」の問題と解答を載せて，それを参考にするように伝えた。

問題２は，個人で取り組んだのちに，グループで取り組む課題とする。個人で取り組む時間は 10 分，その後グループで取り組む時間は 20 分とする。MacBookAir を配布し GeoGebra を活用するのは，グループ活動開始時とする。個人で取り組む時間が終わったところで用紙を回収しスキャンしておくことで，その段階での記述内容を保存する予定。

4.3.3　評価基準

問題１は，方程式の解の配置を２次関数の配置の問題に捉えなおし，さらに３つの条件を適切に設定できるかどうかを評価した。

問題２の評価は，以下のようなルーブリック（表１）を用いて評価を行うことにした。

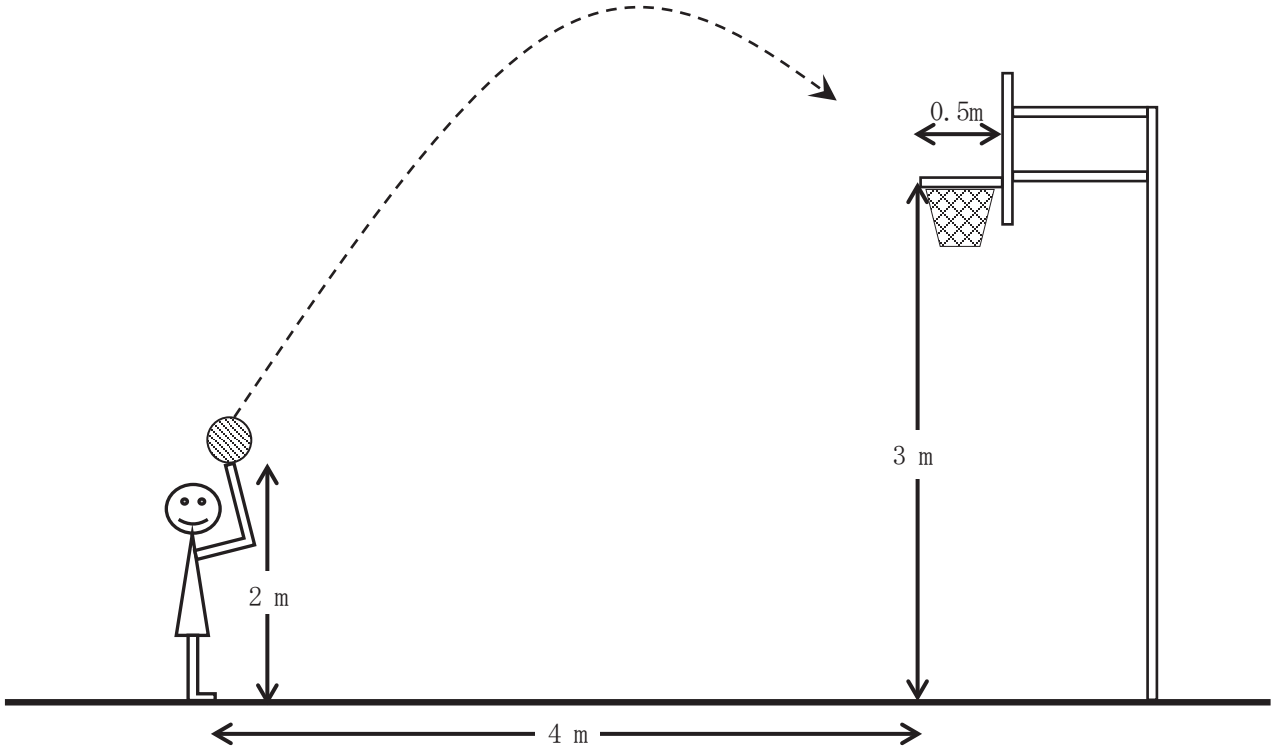


図１

	4	3	2	1
A **課題を発見する力** 及び B **科学的なプロセスで問題解決する力**	２次方程式がある範囲内の解を１つもつとき，と解釈し，条件を数式で表せる。かつ，最小限の条件で済むように条件を精査している。	２次方程式がある範囲内の解を１つもつとき，と解釈し，条件を数式で表せる。ただし，その条件が過剰である。	２次方程式の解の配置問題，と考え，2次方程式がある範囲内の解を１つもつとき，と解釈できている。	白紙 ２次方程式を利用しようとしない。
	２次関数が満たす条件を求め，どのような２次関数であるかを表現できている。	２次関数が満たす条件を求められている。	定点を通る２次関数と，定線分が一点で共有点を持つとき，と解釈している。	白紙 ２次関数を利用しようとしない
C **発信する力** として，ICT を活用する力	GeoGebra を活用し，問題の状況を表現して，解決できる。もしくは，解決された状況を表現できる。	GeoGebra を活用し，問題の状況を表現できる。	GeoGebra を活用しようとする。	GeoGebra を活用しようとしない。
E **関係を構築する力，協働する力**	他者の考えを聞いて理解し，それに対して自分の考えを伝えることで，さらに発展させている。	他者の考えを聞いて理解し，自分の考えをも伝えられる。	他者の考えを聞いて，理解できる。 もしくは，理解しようとしている。	他者の考えを聞けない。もしくは，聞いても理解しようとしない。

表１

５．実際の授業について

「mの値の範囲は本当に$2 < m < 6$で良いのだろうか？」という発問に対して，判別式$D > 0$の条件は多くの生徒が気づくが，そこで停滞してしまった。つまり，$m < -3$，$2 < m$から進めなくなっていた。机間巡視をすると，異なる２つの解 $x = m \pm \sqrt{m^2 + m - 6}$ の小さい方に着目した生徒がいたので，それを取り上げると，

$$m - \sqrt{m^2 + m - 6} > 0$$

より $m > \sqrt{m^2 + m - 6}$

と変形し，両辺を２乗して

$$m^2 > m^2 + m - 6$$

よって，$6 > m$

とする生徒が数多くでた。両辺を二乗することに対する抵抗感を感じる生徒は少なく，数学Ⅱの不等式の証明の指導の際に気を付けて指導を行う必要性を感じることとなった。

さて，上記のような変形により「$6 > m$」という条件を導けたので，判別式より導いた条件との共通部分を考えて，「$m < -3,\ 2 < m < 6$」と導けたところで，再度停滞してしまった。指導案で計画していたように，この「$6 > m$」という条件が「軸の位置が軸の正の部分にある」ことと同値であることに結びつけることが難しく，そのために「y切片が正の値」という条件を考察するための十分な時間をとれなくなってしまった。そのため「y切片が正の値」という条件は，こちらが紹介するような形で授業を終えることになってしまった。

同じ授業計画で進めていたクラスがもう一つあり，そのクラスではこの公開授業の結果と，その後の協議会での検討を踏まえた授業を行った。まず，判別式の条件までは同じように授業を行い，そこまでは非常にスムーズに進んだ。判別式の条件が得られたあと，改めてGeoGebra の画面に注目させ，mの値を変化させたときの２次関数のグラフの位置に着目させた。すると「軸の位置が右側にある」ということに気づく生徒がでた。さらに GeoGebra 上でmの値を変化させると，「y切片が正」という条件に気が付いた生徒が出てきた。

公開授業においてはmの値を変化させて考察することを，生徒の手元の PC で行わせたが，その後の授業に

おいては，軸の条件やy切片の条件を引き出したいときは，教師側がスクリーン上でmの値を「ゆっくり」と変化させたことが効果的だったように感じた。

6．評価問題の結果

6.1．評価問題１について

２クラス72名に対して実施した。完全な解答は17名（24%）であった。以下に，その結果を表２にまとめる。なお，

白紙：答案が完全な白紙
頂点：平方完成して頂点を求めようとするだけ
ⅰ：判別式が正の場合を考えているだけ
ⅱ：軸の位置について考えているだけ
ⅲ：解の存在範囲の端点について考えているだけ

と判断した解答を記述している生徒の数と割合をまとめたものである。また，公開授業を実施したクラスをαとし，公開授業の実施を踏まえて授業を行ったクラスをβとして集計を行った。

	白紙	頂点	ⅰ	ⅱ	ⅲ	ⅰⅱ	ⅰⅲ	ⅱⅲ	ⅰⅱⅲ
α	1	5	7	0	2	2	6	1	12
%	3	14	19	0	6	6	17	3	33
β	0	1	10	0	1	0	8	0	15
%	0	3	28	0	3	6	22	0	42
計	1	6	17	0	3	4	14	1	27
%	1	8	24	0	4	6	19	1	38

表２

思っていたほど２つのクラスの結果に差はなかった。特に，βのクラスのほうが軸の条件について記述するのではないか，と考えていたが，そうでもなかった。αのクラスが平方完成するだけで解答が終わってしまった生徒がβのクラスに比べて多く，βのクラスは判別式を考える生徒と，３つの条件を考えている生徒がαのクラスよりも若干多い。しかし，明らかに差がある，というほどの差は出ていないようである。したがって，全体で考えても差し支えないと考える。

全体で考えると，判別式による条件だけしか考えない生徒が24%，判別式と解の存在範囲の端点だけを考える生徒が19%いて，この合計が43%であることから，軸の条件がわかっていない生徒が半数近くいると考えらえる。軸の条件がもっとも理解が難しいことである，と推測することができるのではないだろうか。なお７名（10%）の生徒が，参考のために載せておいた探究例題20の解答を真似てして，「y切片が正」という条件をそのまま用いていた。このような，解答に対して単純に数値を当てはめるだけ，という取り組みかたをする生徒は一定の割合でいるように感じる。

6.2．評価問題２について

前半10分間の個人作業の段階においては，ほとんど解答が進められない生徒がほとんどであった。その後のグループ作業の段階になって，ようやく手が動くようになってきた。GeoGebraに２次関数を入力し，スライダー機能を利用してその形を変えてみる，という作業はどのグループも行っていた。そして，ゴールするようなシュートの軌跡を描くような関数の式を，具体的にいくつか求めることはできていた。具体的な場合のみで，変数の値の範囲を求めてみたり，さらにはそれほGeoGebra上に表現したりすることはできていなかった。

そのような取り組み状況だったのでルーブリックを用いた評価としては，大多数の生徒がＡとＢの項目が２，Ｃの項目が３，Ｅの項目が３という結果であった。ＡとＢの項目に関しては，生徒にやらせっ放しのままでは評価を３に押し上げることは難しいと感じた。生徒の作業の流れは，

①座標軸を設定する。
②２次関数の方程式を，変数を用いて設定
③変数を変化させて，ゴールを通過するような変数が実際に存在するか確かめる

であった。文字式の計算が得意な生徒が，さらに変数の範囲を求めようと計算を行っていたが，関数がうまく設定できてない場合は計算が煩雑になるので，大体の生徒が苦労している様子であった。

このようなオープンな場面設定の問題をこれまでおこなったことがなかったので，①の座標軸の設定の段階ですでに困惑している生徒が見られた。座標軸の設定の仕方によって，最終的に得られる変数の範囲は異なってくることが心配だったようだ。最終的な変数の範囲の数値が問題なのではなく，それを導いた条件が同じであればいい，ということを，それまでの指導でしっかりフォローできていれば，取り組みも違っていただろうと思うと，残念でならない。

生徒が考察に利用した２次関数の式には以下のような

ものがあった。

(a) 3つの変数を用いた一般的な形式

・$y = ax^2 + bx + c$

・$y = a(x-p)^2 + q$

(b)問題の状況に合わせて2変数だけを用いた形式

・$y = ax^2 + bx$

・$y = ax(x-b)$

・$y = ax^2 + bx + 2$

・$y = ax^2 + bx - 1$

・$y = -x^2 + bx + c$

・$y = -(x-p)^2 + q$

・$y = a(x-4)^2 + q$

(c)独自に条件を加えて，1変数を用いた形式

・$y = -x^2 + q$

・$y = -(x+a)^2 + 2$

・$y = ax^2 - 4ax + 2$

・$y = a(x-4)^2 + 3$

(a)の形式の場合，シュートが放たれる地点を設定することで(b)と同じ設定に持ち込むことができる。さらに条件を加えて(c)のように1変数で表すことで，GeoGebra上で取り扱いしやすいものになる。(b)や(c)のように関数を設定できている場合は，主題としている「課題を発見する力」が発揮されている場合だと考えられる。

7．まとめと今後の課題

探究例題20についての授業場面において，2次関数の解の配置問題における3つの条件を見出すことは，公開授業の反省を踏まえることで出来ることができた。しかし，評価問題1の結果からすると，クラス全体として納得し理解していかかというと，疑問が残る。また評価問題2において，具体的な問題場面に適するように座標軸を設定し，2次関数の方程式を変数を用いて表現すること，さらにはその変数の値の範囲をGeoGebraのスライダー機能を活用して調べることまでは，おおよそのグループが出来ていた。このことからも本研究の主題である「課題を発見する力」が最低限は身についたように考えられる。しかし評価問題2については，もっとじっくり時間を取りながら行うべきであったと感じた。同じようなオープンな場面設定の問題について，ルーブリックを用いながら進める授業を事前に行うことで，より深い考察を促すことができたのではないか，と感じた。

GeoGebraを活用して視覚的に考察することから条件を見出しやすくなることはわかった。しかし，公開授業で行った指導の流れのように，GeoGebraのスライダー機能を用いて問題の状況に適する数値を見つけることはできるようになったが，代数的な処理によって得られた結論を確認したり，検証したり，考察したり，といった活用ができるようにすることが出来なかった。これではGeoGebraを活用できている，とは言い難いように感じた。この点に関しては，単元計画全体の見直しが必要であるように感じる。今回の取り組みでは，GeoGebraはあくまでも補助的な役割を担っているに過ぎない。GeoGebraのようなICT機器の使用を前提とした単元計画を目指したが、まだ不十分であるように感じた。もう一歩踏み込んで単元計画を練り直していれば，結果は違っていたのではないだろうか。そのような取り組みを目指して，継続して研究を行いたい。

8．主な参考文献および資料

・第一学習社（2016）数学Ⅰ

・文部科学省（2009）．高等学校学習指導要領解説 数学編

・松下 佳代（2007）．
『日本標準ブックレット No.7 パフォーマンス評価』日本標準

・三藤 あさみ・西岡 加名恵（2010）．
『日本標準ブックレット No.11 パフォーマンス評価にどう取り組むか』日本標準

・田中 耕司（2010）．
『日本標準ブックレット No.12 新しい「評価のあり方」を拓く』日本標準.