東京学芸大学附属高等学校紀要 55 pp.31～40，2017

数学的プロセス「目的に応じた式変形」の質を高めることを意図した単元計画

― 数列の漸化式を題材として―

Unit plan intended to improve the quality of mathmatical process “rearranging equation according to the purpose”
― On the subject of recurrence equation of progression ―

数学科　佐　藤　亮　太

＜要旨＞
数列の単元内の「漸化式で定められた数列の一般項を求める」場面では，既知の形に帰着するために，既知の形に意図的に変形していくことが問われる。つまり，数学的プロセスの一つ「目的に応じた式変形」の質が問われる。本稿において，数列の漸化式を題材として，数学的プロセス「目的に応じた式変形」の質を高めることを意図した単元計画を提案する。そのために，まず数学的プロセス「目的に応じた式変形」を整理し，次に本単元での数学的プロセスを推進する考えを特定するという方法をとった。

＜キーワード＞　数学的プロセス　目的に応じた式変形　数列　漸化式　単元計画

1．本稿の目的と方法

本校数学科で「“数学的に考える”とは，どのようなことをすればよいのか？」を本質的な問いとして設定し，その指導の意図を，「数学的な見方･考え方を働かせ，本質を明らかにするなどの数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成する。具体的には，“体系的な理解”“事象の数学化”“数学的な表現・処理”“論理的な考察”“統合的・発展的な考察”“簡潔・明瞭・的確な表現”“評価・改善する態度”などを考えさせる。」とした。本校が重点課題として設定している５つの資質・能力のうちの一つに，「科学的なプロセスで問題解決する力」がある。数学的に考える資質・能力を育成することは，科学的プロセスの一つである「数学的プロセス」の質を高めることであり，その重視は，近年示されている。例えば，数学的プロセスは，「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」において「算数･数学における問題発見･解決の過程と育成を目指す資質･能力」に，「算数・数学における問題発見・解決の過程」として示されている（図１）。しかし，数学的プロセスの重視を，授業においてどのように具現化するのかが課題となっている。

数学Ｂの数列の単元内の「漸化式で定められた数列

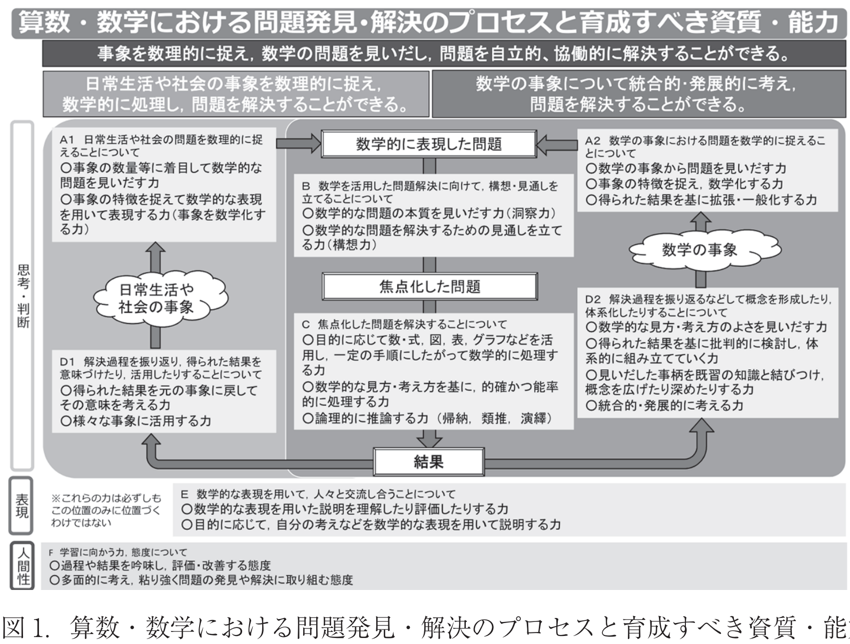

図１．算数・数学における問題発見・解決のプロセスと育成すべき資質・能力

の一般項を求める」場面では，既知の形に帰着するために，既知の形に意図的に変形していくことが問われる。つまり，数学的プロセスの一つ「目的に応じた式変形」の質が問われる。そこで，本単元では，特に「目的に応じた式変形」に着目することとした。

漸化式で定義された数列の一般項を求めることを学習指導する際，「この場合はこうする」と形式的になっていないだろうか。形式的に指導するのではなく，生徒が一般項の求め方を発見的に学習できればよいと考える。そこで，生徒の予想を端とする２つの方法 1 と 2（後述）を軸に，３項間漸化式で定義された数列の一般項を求めることを目標とし，計画した単元を提案する。２つの方法を軸にすることは，数列の一般項を求めるプロセスをある程度一定にすることを意味し，生徒が発見的に学習することに寄与する。そこで焦点を当てる数学的プロセスが「目的に応じた式変形」であり，漸化式で定義された数列の一般項を求めることを発見的に学習しながら，本単元を通して，「目的に応じた式変形」の質を高めることを意図する。

本稿の目的を，数列の漸化式を題材として，数学的プロセス「目的に応じた式変形」の質を高めることを意図した単元計画を提案することとする。本稿の目的のために以下の方法をとる。まず数学的プロセス「目的に応じた式変形」を整理し，次に本単元での数学的プロセスを推進する考えを特定する。

２．「目的に応じた式変形」の整理

数学的プロセス「目的に応じた式変形」は，「証明をするとき」，「グラフをかくとき」，「漸化式が与えられた数列から一般項を求めるとき」等，数学ではよく必要とされるプロセスである。「目的に応じた式変形」は，今までに，小学校段階，中学校段階においても経験しており，高等学校段階においては「二次関数のグラフをかくために，どれだけの平行移動かを読み取るために，平方完成をする」や「２次方程式，３次方程式を解くために，因数分解する」などを経験している。目的に応じた式変形をした後，その式の読み取りが行われる。例えば，二次関数のグラフをかく場合で，平方完成した形からどれだけの平行移動か（頂点の座標は何か）を読み取る。しかし，この読み取りができなければ，平方完成しようとは思わず，目的に応じた式変形ができない。

本単元で焦点を当てる「目的に応じた式変形」は，「漸化式が与えられた数列の一般項を求めるために，与えられた漸化式を変形する」である。一般項を求めるために与えられた漸化式を等比数列の形などに変形する。しかし，上記の例と同様，変形した漸化式から等比数列と読み取れなければ，目的に応じた式変形ができない。「目的に応じた式変形」は，小学校，中学校，高等学校でも学んでいるが，学校段階が進むにつれ，読み取る難易度が高くなっているという面があると考える。以下に，目的に応じた式変形の例を挙げる。

<u>目的に応じた式変形の例</u>

1 因数分解（中３）

「一の位の数が５の２桁の数の２乗は，下２桁が 25，３桁目以上が十の位の数とそれに1を足した数の積になる」

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

2 二次関数のグラフ（数Ⅰ）

$y = x^2 - 4x + 3$ のグラフをかく場合，平方完成し，$y = x^2 - 4x + 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを，x 軸方向に$+2$だけ，y 軸方向に-1だけ平行移動したグラフであることを読み取る

$$y = x^2 - 4x + 3 = \left(x-2\right)^2 - 1$$

3 三角関数のグラフ（数Ⅱ，本校では高校１年で学習）

$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかく場合，以下のように変形し，$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを y 軸中心に $\frac{1}{2}$ に縮小し，θ軸方向に$+\frac{\pi}{6}$だけ平行移動したグラフであることを読み取る

$$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

4 不等式の証明（数Ⅱ）

相加平均と相乗平均の関係の証明の場合，差を平方完成し，差が０以上であること読み取る。

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{ab} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

5 方程式（数Ⅱ）

方程式を解くために，因数分解をし，因数が０となれば方程式が成り立つことを読み取る。

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0$$
$$\left(x-1\right)\left(x^2 + 2x + 3\right) = 0$$

⑥ 二項間漸化式（数 B）

漸化式で与えられた数列の一般項を求めるために，等比数列の形に変形し，数列$\{a_n+1\}$が等比数列であることを読み取る。

$$a_{n+1}=2a_n+1 \qquad a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

⑦ 三項間漸化式（数 B）

漸化式で与えられた数列の一般項を求めるために，等比数列の形に変形し，数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$が等比数列であることを読み取る。

$$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \qquad a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

3. 「目的に応じた式変形」を推進する考えの特定

本単元の目標を，上の ⑦ に例示した三項間の漸化式で与えられた数列の一般項を求めることと設定した。つまり，本単元の目標は，以下のような問いを解くことができることとである。

> $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，$a_1=1$，$a_2=5$ で定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ

この問いを解くためには，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ と変形することが肝要である。こう変形できれば，２項間漸化式となり，一般項を求めることができるからである。しかし，この変形は，自然とできるものではない。$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ と変形する要素とそれに関する既習事項をまとめると，次の表１となる。

式を変形することは，表１中のアとイを行うことである。しかし，ウ～カという目的をもっていないと，アとイを行うことができない。ウ～カという目的に応じて，アとイのように式を変形することが，本課題の「目的に応じた式変形」である。本課題の「目的に応じた式変形」に必要な力は，アとイの「式変形の技術」，ウとエの「変形した式を読み取る力」，オとカの「見通す力」に大別されると考える。「これまで学習した漸化式（等差数列や等比数列の形）に帰着できないか」という考えが重要であり，最終的に「等比数列」に帰着させるためには，どのように式変形すればよいか，という逆向きの「解析的思考」が重要である。

目的ウ～カをもつために，考えたことをまとめる。

表1. $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ と変形する要素

	要素	既習事項
ア	$3a_{n+1}$ を移項すること	移項（中学１年より）
イ	２でくくること	因数分解（中学３年より）。 分配法則
ウ	$a_{n+1}-3a_n$ を b_n とみること	$y=(x-2)^2-1$ を $y=X^2-1$ とみること $x^4+2x^2+1=0$ を $X^2+2X+1=0$ （$X=x^2$）とみること $a_{n+1}-a_n$，$a_n-\alpha$，$\dfrac{a_n}{r^n}$ を b_n とみること
エ	$a_{n+2}-3a_{n+1}$ を b_{n+1} とみること	※これは，この単元で新出。 一般項 a_n から a_{n+1} を求めること 数列の和 S_n から S_{n+1} を求めること $a_{n+2}-a_{n+1}$，$a_{n+1}-\alpha$，$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}}$ を b_{n+1} とみること
オ	$b_{n+1}=2b_n$ から $\{b_n\}$ が等比数列であることを読み取ること	等比数列の定義。２項間漸化式 $\{b_n\}$ の表を書く
カ	$\{b_n\}$ の一般項がわかれば，$\{a_n\}$ の２項間漸化式がわかり，$\{a_n\}$ の一般項がわかること	２項間漸化式

<u>目的ウをもつために</u>

$x-2$ を A とみることは，因数分解や展開，方程式・不等式を解く場面で学び，習得している者は多い。しかし，A を x の値によって変わるとは，あまり見ていないように思う。目的ウは，$a_{n+1}-3a_n$ をひとまとまりの B とみるだけでなく，n の値によって変わる b_n とみる（$=b_1=a_2-3a_1$，$b_2=a_3-3a_2$，…）ところが，難しい部分だろう。こうみることができなければ，目的エにつながらない。

<u>目的エをもつために</u>

目的ウ～カの中でもつことが最も難しいと思われる。

$a_{n+1}-3a_n$ を n の値によって変わる b_n とみた（= $b_1=a_2-3a_1$， $b_2=a_3-3a_2$， …）上で， $a_{n+2}-3a_{n+1}$ を b_{n+1} とみるのである。こうみるためには， $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ の際， $c_n=a_n+\alpha n+\beta$ を考える方法を扱っておくことが有効と考えた。（以下に提案する単元計画の第 17 時の 2 問目）。

目的オをもつために
等比数列の定義の際，等比数列の定義を式で表す活動を行う（第 4 時）。また，2 項間漸化式の際もよく扱っておく（第 14 時～第 18 時）。

目的カをもつために
２項間漸化式から一般項がわかることを知っていなければならない。そのために，この授業の前に，2項間漸化式の課題をいくつか解決している必要がある（第 14 時～第 18 時，特に第 18 時）。

数学的プロセスに焦点を当てたまとめ
数学的プロセスに焦点を当てたまとめを行う。プロセスの遂行を促した考え方を視点に振り返りを行う。上記の目的ウ～カが，本課題の数学的プロセス「目的に応じた式変形」の遂行を促した考え方にあたろう。この考え方を強調してまとめる。

4．提案する単元計画

⑴　単元計画

数	内容
1	数列とは
2	一般項
3	等差数列とその和
4	等比数列とその和⑴
5	等比数列とその和⑵
6	記号Σとその性質
7	Σk^2
8	Σk^3
9	階差数列
10	中間考査
11	中間考査返却
12	うまい差をつくり，和を求める
13	等差数列と等比数列のかけ算の数列の和
14	ハノイの塔⑴　漸化式に表す $a_{n+1}=2a_n+1$
15	ハノイの塔⑵　漸化式を解く $a_{n+1}=2a_n+1$
16	二項間漸化式を解く⑴ $a_{n+1}=pa_n+q$
17	二項間漸化式を解く⑵ $a_{n+1}=pa_n+n+r$， $a_{n+1}=pa_n+qn+r$
18	二項間漸化式を解く⑶ $a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$
19	三項間漸化式を解く $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$
20	フィボナッチ数列 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$
21	数学的帰納法⑴
22	数学的帰納法⑵
23	期末考査
24	期末考査返却

漸化式以降の授業（第 14 時以降）の概要

第 14 時　ハノイの塔⑴漸化式に表す
ゲーム「ハノイの塔」を紹介し，実際ゲームをしながら各自， n 枚のときの最小の手数を a_n とし表にする。

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	3	7	15	31	…

「a_4 は本当に 15 なのか説明せよ」という問いをきっかけに，「$a_{n+1}=2a_n+1$， $a_1=1$ であること」，予想「階差数列が初項 2，公比 2 の等比数列かも」，予想「$a_n=2^n-1$ かも」を確認した。

第 15 時　ハノイの塔⑵漸化式を解く
前時にでた 2 つの予想が正しいことを示すことを課題とした。1 つ目の予想は「$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列か」である。2 つの予想「$a_n=2^n-1$ かも」を「$a_n+1=2^n$ かも」と読み替え，「$c_n=a_n+1$ とおくと， $\{c_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列か」と読み替えた。これら予想が正しいことを示せれば，それぞれ中間考査以前の知識で $\{a_n\}$ の一般項がわかることを確認し，「$a_{n+1}=2a_n+1$， $a_1=1$ であること」を用いて 2 つの予想が正しいことを示すことを課題とした。

1「$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$は初項 2, 公比 2 の等比数列か」

各々様々な方法（a_n のみで表したり，a_n と a_{n+1} で表したり，図で表したり）で $b_{n+1}=2b_n$ か $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$ を示した。その後は，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項がわかれば，$\{a_n\}$の一般項がわかる（中間考査までの内容）ことを確認した。

2「$c_n=a_n+1$ とおくと，$\{c_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列か」

各々，$c_{n+1}=2c_n$ か $\frac{c_{n+1}}{c_n}=2$ を示した。$\{c_n\}$の一般項がわかれば，$\{a_n\}$の一般項がわかることを確認した。

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	3	7	15	31	…
$b_n=a_{n+1}-a_n$	2	4	8	16	32	…
$c_n=a_n+1$	2	4	8	16	32	…

第 16 時　二項間漸化式を解く(1)　$a_{n+1}=3a_n-1$

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	2	5	14	41	…

1「$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$の漸化式をつくる」

様々な方法で，$\{b_n\}$ が公比 3 の等比数列であることを示し，$\{a_n\}$ の一般項を求めた。$\{b_n\}$ が等比数列であることを示し方はいくつかあるが,「与えられた漸化式の n を一つずらした $a_{n+2}=3a_{n+1}-1$ から，与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n-1$ を縦に引き $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$ を得るので，$b_{n+1}=3b_n$ となるので，$\{b_n\}$ が公比 3 の等比数列であることがわかる」が分かりやすいことを確認した。つまり，「$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$の漸化式をつくる」方法の一つとして,「nを一つずらして縦に引く」があるとまとめた。

2「$c_n=a_n-\alpha$ とおき，$\{c_n\}$ の漸化式をつくる」

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	2	5	14	41	…
$b_n=a_{n+1}-a_n$	1	3	9	27	…	…
$c_n=a_n-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{81}{2}$	…

「$c_{n+1}=r\cdot c_n$ となる定数r，αはあるか？」を課題とした。αに 1 や 2 や 3 を代入して表にして調べている生徒がいた。課題を「$a_{n+1}-\alpha=r(a_n-\alpha)$ となる定数r，αはあるか？」→「$(3-r)a_n+(r\alpha-1-\alpha)=0$ となる定数r，αはあるか？」→「$3-r=0$，$r\alpha-1-\alpha=0$ となる定数r，αはあるか？」と読み替え，$r=3$，$\alpha=\frac{1}{2}$があることを示し，$\{c_n\}$の一般項求め，$\{a_n\}$の一般項を求めた。ここで，$\{b_n\}$と$\{c_n\}$がどちらも等比数列であることを生徒が実感するために，表を示す。

第 17 時　二項間漸化式を解く(2)

$a_{n+1}=a_n+2n+3$　$a_{n+1}=3a_n+4n-1$

$a_1=a$，$a_{n+1}=pa_n+q$　（a，p，q ：定数）で定まる$\{a_n\}$の一般項を求める方法1，2の 2 つを，第 16 時の内容からまとめた。

1「$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$の漸化式をつくる（つくり方は「 nを一つずらして縦に引く」)」

2「$c_n=a_n-\alpha$ とおき，$\{c_n\}$の漸化式をつくる（つくり方は「a_n も a_{n+1} もαとした方程式を縦に引く（$p\neq1$ のとき)」)。$p=1$ のときは，$a_{n+1}=a_n+q$ から$\{a_n\}$が公差q の等差数列と読み取る」

難しいポイントとして，以下をまとめた。

- 一つずらした漸化式をつくること
- $b_n=a_{n+1}-a_n$，$c_n=a_n-\alpha$　とみること
- 上記のようにみると，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$，$c_{n+1}=a_{n+1}-\alpha$ となること
- $b_{n+1}=pb_n$，$c_{n+1}=pc_n$　から$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が公比 p の等比数列と読み取ること

本時では，上記の $a_{n+1}=pa_n+q$ の q が定数でなかったらどうかという問題意識から，$p=1$ の場合の $a_{n+1}=a_n+2n+3$，$a_1=1$ と，$p\neq1$ の場合の $a_{n+1}=3a_n+4n-1$，$a_1=0$ とから定まる$\{a_n\}$の一般項を求めることを課題とし，それぞれ1，2にあたる

方法の２通りずつで求めた。２問目の際の $\boxed{2}$ で，$a_{n+1}=3a_n+4n-1$ から，a_n も a_{n+1} も α とした方程式 $\alpha=3\alpha+4n-1$ を縦に引くと，$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)+4$ を得られ $\alpha=-2n+\frac{1}{2}$ なので $a_{n+1}+2n-\frac{1}{2}=3\left(a_n+2n-\frac{1}{2}\right)+4$ を得る。ここで，$c_n=a_n+2n-\frac{1}{2}$ とおいても，$c_{n+1}\neq a_{n+1}+2n-\frac{1}{2}$ なので，$c_{n+1}\neq 3c_n+4$ となる。$c_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)-\frac{1}{2}$ であることを確認し，左辺をこの形にするために，両辺に２を足すと，$c_{n+1}=3c_n+6$ となり，$\{c_n\}$ の一般項がわかり，$\{a_n\}$ の一般項がわかることを確認した。

$c_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)-\frac{1}{2}$ であり，$c_{n+1}\neq a_{n+1}+2n-\frac{1}{2}$ であることを確認しておくことが，上記の目的エに関わってくると考える。

第 18 時　二項間漸化式を解く(3)

$$a_{n+1}=3a_n-2^n \cdots ①,\quad a_1=3$$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	3	7	17	43	113	$\cdots$
$b_n=a_{n+1}-a_n$	1	3	9	27	$\cdots$	$\cdots$
$c_n=a_n-2^n$	1	3	9	27	81	$\cdots$

以下の３つの方法で，一般項を求めた。

$\boxed{1}$「$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおき，$\{b_n\}$ の漸化式をつくる」

①の n を一つずらした $a_{n+2}=3a_{n+1}-2^{n+1}$ から $a_{n+1}=3a_n-2^n$ を縦に引いても $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2^n$ となり，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ とすると，$b_{n+1}=3b_n-2^n$ となり，$\{a_n\}$ の漸化式と同じ形となり，うまくいかない。そこで，「今までを振り返ると，2^n の部分が定数となればよい。どうすればよいか？」と問うと「定数となればよいので，①を２倍して引く。」と答える生徒がクラスで数人いる。$a_{n+2}=3a_{n+1}-2^{n+1}$ から $2a_{n+1}=2\cdot 3a_n-2^{n+1}$ を縦に引いて，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ を得，$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$ となり，$\{b_n\}$ は公比 3，初項 $b_1=a_2-2a_1=7-6=1$ の等比数列なので，$b_n=3^{n-1}$ とわかるので，$a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}\cdots$②。①と②を連立させて，$a_n=3^{n-1}+2^n$ を得る。

$\boxed{2}$「$c_n=a_n-2^n$ とおき，$\{c_n\}$ の漸化式をつくる」

①の a_n と a_{n+1} を α としてつくった方程式 $\alpha=3\alpha-2^n$ の解は，$\alpha=2^{n-1}$ であるので，①から $2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2^n$ を縦に引くと，$a_{n+1}-2^{n-1}=3\left(a_n-2^{n-1}\right)$ を得るが，$c_n=a_n-2^{n-1}$ とおいても，$c_{n+1}\neq a_{n+1}-2^{n-1}$ であるので，$c_{n+1}\neq 3c_n$ となってしまう。そこで，左辺の指数が１つ増えて欲しいので，方程式 $2\alpha=3\alpha-2^n$ を考え，その解は $\alpha=2^n$ であるので，①から $2\cdot 2^n=3\cdot 2^n-2^n$ を縦に引くと，$a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$ を得る。ここで，$c_n=a_n-2^n$ とおくと，$c_{n+1}=a_{n+1}-2^{n+1}$ であるので，$c_{n+1}=3c_n$ となり，$\{c_n\}$ は公比 3，初項 $c_1=a_1-2^1=1$ の等比数列なので，$a_n-2^n=c_n=3^{n-1}$ とわかる。よって，$a_n=3^{n-1}+2^n$ を得る。

$\boxed{3}$「$d_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおき，$\{d_n\}$ の漸化式をつくる」（教科書の方法）

①の両辺を 2^{n+1} で割り，$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}-\frac{1}{2}$ を得，$d_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと，$d_{n+1}=\frac{3}{2}d_n-\frac{1}{2}$ となる。第 16 時のことを用いれば $\{d_n\}$ の一般項が求まり，$\frac{a_n}{2^n}=d_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$ とわかる。よって，$a_n=3^{n-1}+2^n$ を得る。

第 19 時

①第 19 時のねらい

第 19 時のねらいは，数学的プロセス「目的に応じた式変形」の質を高めることを意図したカリキュラム内の一つの授業である。数学の内容としては，３項間漸化式で定義された数列の一般項を求めることができることが目標である。

②第 19 時の授業展開

<table>
<tr><th>時間</th><th>学習の流れと生徒の活動</th><th>教員の指導と手立て</th></tr>
<tr><td>0</td><td>【導入】
$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を３項間漸化式という。
前の二つの項から，次の項がわかる。
初項だけでは，数列が決まらない。
最初の２項が決まれば，数列が決まる。
$a_1 = 1$， $a_2 = 5$
決まっていく様子をつかむために，まず，第５項までを表にしましょう。
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td></tr>
<tr><td>a_n</td><td>1</td><td>5</td><td>19</td><td>65</td><td>211</td><td>…</td></tr>
</table></td><td>言葉の確認「３項間漸化式」

隣近所で値を確認
３項間漸化式の意味がわかっているか。</td></tr>
<tr><td>5</td><td>【課題提示】
$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$， $a_1 = 1$， $a_2 = 5$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ
【自力解決】</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>【今までの方法でうまくいかない例を共有する】
$\boxed{表}$ $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td></tr>
<tr><td>a_n</td><td>1</td><td>5</td><td>19</td><td>65</td><td>211</td><td>…</td></tr>
<tr><td>b_n</td><td>4</td><td>14</td><td>46</td><td>146</td><td>…</td><td></td></tr>
</table>
$\boxed{1}$ $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の漸化式をつくる
（一つずらして縦に引く）
$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 6a_{n+1}$
$-)\quad \underline{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n}$</td><td>$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ …※　とする。</td></tr>
</table>

	$a_{n+3}-a_{n+2}=5\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)-6\left(a_{n+1}-a_n\right)$ $b_{n+2}=5b_{n+1}-6b_n$ しかし，※と同じ形 $\boxed{2}$ $c_n=a_n-\alpha$ とおき，$\left\{c_n\right\}$ の漸化式をつくる （特性方程式を縦に引く） $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $-)\quad \alpha=5\alpha-6\alpha$ $a_{n+2}-\alpha=5\left(a_{n+1}-\alpha\right)-6\left(a_n-\alpha\right)$ $c_{n+2}=5c_{n+1}-6c_n$ しかし，※と同じ形，かつ，$\alpha=5\alpha-6\alpha$ をみたす α は０のみ	
15	【見通しを持たせる】 $\left\{a_n\right\}$ の３項間漸化式だが，$\left\{a_n\right\}$ の２項間漸化式にできないか。 ※から $\left\{a_n\right\}$ の２項間漸化式をつくる！ 【自力解決】	見通しを持たせる。 ３項間漸化式を２項間漸化式にする。（手立て）
20	$\left\{a_n\right\}$ の３項間漸化式から $\left\{a_n\right\}$ の２項間漸化式をつくることは，今までに皆さんも実はやってきています。ノートを振り返ってみてください。今までの $\boxed{1}$ の方法で，特に前回の $\boxed{1}$ です。振り返ってみてください。 【自力解決】	既習の内容を振り返る。（手立て）
25	隣近所で意見交換してください。	
27	【目的に応じた式変形を全体で共有する】 $a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ に変形した生徒を紹介 ○○くんはどうして $a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ と変形したのでしょうか？考えてください。 【自力解決】	$a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ に変形した生徒を紹介する。 こう変形する生徒がいなければ，以下の生徒を紹介 (1)　$a_{n+2}-2a_{n+1}=3\left(a_{n+1}-2a_n\right)$ に変形した生徒 (2)　$a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ に変形した他組の生徒
35	【答えの確認】	
	目的に応じた式変形 ※を $a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ と変形する。 $a_{n+1}-3a_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=2b_n$ となり， $\left\{b_n\right\}$ は公比２の等比数列であり， 初項は $b_1=a_2-3a_1=5-3\cdot 1=2$ よって，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ $a_{n+1}-3a_n=2^n$　…① （この先は前時に扱った３つの方法（$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$））	２項間漸化式から一般項を求める方法は３つあるが，今回は，与えられた漸化式を，以下のように変形することも紹介するために，$\boxed{1}$ は扱う。 $a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$ $\boxed{1}$「$b'_n=a_{n+1}-2a_n$ とおき，$\left\{b'_n\right\}$ の漸化式をつくる」 $a_{n+1}=3a_n+2^n$ より， $a_{n+2}=3a_{n+1}+2^{n+1}$ $-)\quad 2a_{n+1}=2\cdot 3a_n+2^{n+1}$ $a_{n+2}-2a_{n+1}=3\left(a_{n+1}-2a_n\right)$ $b'_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと $b'_{n+1}=3b'_n$ となり，

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$\left\{b'_n\right\}$ は公比 3 の等比数列であり，
初項は $b_1 = a_2 - 2a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$
よって， $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$
$a_{n+1} - 2a_n = 3^n$ …②
②−①より， $a_n = 3^n - 2^n$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\boxed{\text{表}}$ $\left\{a_n\right\}$ の階差数列を $\left\{b_n\right\}$ とする
<table><tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td></tr><tr><td>a_n</td><td>1</td><td>5</td><td>19</td><td>65</td><td>211</td><td>…</td></tr><tr><td>b_n</td><td>4</td><td>14</td><td>46</td><td>146</td><td>…</td><td></td></tr><tr><td>$a_{n+1} - 2a_n$</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td><td>…</td><td></td></tr><tr><td>$a_{n+1} - 3a_n$</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>…</td><td></td></tr></table></td><td>$\left\{b_n\right\}$ や $\left\{b'_n\right\}$ が等比数列であることを実感するために，表で値を確認する。</td></tr>
<tr><td></td><td>【プロセスに焦点を当てたまとめ】</td><td></td></tr>
<tr><td>40</td><td>同じような形の漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ （$a_1 = 1$，$a_2 = 5$）の場合に，どのように式変形を行えばよいか。なぜそのように変形すればよいか。各自まとめよ。</td><td></td></tr>
<tr><td>45</td><td>隣近所で，まとめたことを意見交換してください。</td><td></td></tr>
<tr><td>48</td><td>【まとめたことを全体で共有】
$a_{n+2} - \bigcirc\, a_{n+1} = \square\left(a_{n+1} - \bigcirc\, a_n\right)$ の形に変形する
$a_{n+1} - 3a_n$ を b_n とみる（目的ウ）
$a_{n+2} - 3a_{n+1}$ を b_{n+1} とみる（目的エ）
$b_{n+1} = 2b_n$ から $\left\{b_n\right\}$ が等比数列であることを読み取る（目的オ）
$\left\{b_n\right\}$ の一般項がわかれば， $\left\{a_n\right\}$ の 2 項間漸化式がわかり一般項がわかる（目的カ）
等比数列の形に変形する。
等差数列の形に変形する。
見通しをもって，式変形する。</td><td>$a_{n+2} - \bigcirc\, a_{n+1} = \square\left(a_{n+1} - \bigcirc\, a_n\right)$ の形に変形することだけでなく，なぜそう変形するかにあたる目的ウ〜カを強調したまとめを行う。</td></tr>
</table>

③評価基準（ルーブリック）単元で習得してほしい最低限のレベルを 2 とする。

（1）育てたい「資質・能力」を評価する方法

「パフォーマンス評価」により評価する。具体的には，３項間漸化式で定められた数列の一般項を求める場面で，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - 3a_n\right)$ と変形することを通して，$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を $a_{n+2} - \bigcirc\, a_{n+1} = \square\left(a_{n+1} - \bigcirc\, a_n\right)$ の形に変形すればよいことに気づき，○や□が整数でなく，無理数でも見つけることができ変形することができるかを評価する。具体的な課題は以下である。

（2）パフォーマンス評価（第 20 時で実施）

課題

次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ をフィボナッチ数列という。フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = a_2 = 1$， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

本課題の評価基準（ルーブリック）

4	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を $a_{n+2} - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} a_{n+1} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} a_n\right)$ と変形し，$\{a_n\}$ の一般項を求めることができる
3	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$ と変形しようとして，$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$ の連立方程式を立てている。
2	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$ と変形しようとして，α や β にいろいろ代入している。
1	n と a_n の表をかいている。

本単元の評価基準（ルーブリック）

	4	3	2	1
A 課題を発見する力	n と a_n の表をかく等で，予想したものをさらに発展・修正している。	n と a_n の表をかく等で，予想したものが正しいか正しくないか証明している。	n と a_n の表をかく等で，予想できる。	n と a_n の表をかいている。
B 科学的なプロセスで問題解決する力として，目的に応じた式変形をする力	既知のものに変形し，問題解決できる。	既知のものに変形するために，方程式を立てている。	既知のものに変形するために，具体的に変形をためしている。	既知のものに変形しようとしない。
D 展望・計画をもつ力	終始，見通しもって行動できている。	一部，見通しもって行動できている。	少なくとも一回，見通しもって行動できている。	見通しもって行動できない。
E 関係を構築する力，協働する力	他者の考えを聞いて理解し，それに対して自分の考えを伝えることで，さらに発展させている。	他者の考えを聞いて理解し，対して自分の考えをも伝えられる。	他者の考えを聞いて理解しようとしている。	他者の考えを聞けない。もしくは，聞いても理解しようとしない。