東京学芸大学附属高等学校紀要　54　pp. 7～14，2016

課題を見いだす力を育成する授業

―ＩＣＴを活用した授業実践―

Lessons to Nurture the Ability to Find Tasks

― Teaching Practice using ICT ―

数学科　菅　原　幹　雄

＜要旨＞

平成28年６月に行った「課題を見出す力を育成する授業」というテーマの公開授業についての報告である。数学Ⅱの図形と方程式の単元において根軸を題材としてＩＣＴ機器を活用した授業を行い，生徒が課題を発見する力を育成することを目指した。

＜キーワード＞　コンピテンシー　図形と方程式　根軸　ＩＣＴ　GeoGebra

1.　はじめに

1.1　研究について

本校では平成28年６月に公開教育研究大会を開催した。研究主題は，コンピテンシー・ベースのカリキュラム開発－「教科の本質」に根ざした授業実践とその評価－である。具体的に５つの資質・能力（コンピテンシー）「課題を発見する力」「科学的なプロセスで問題解決する力」「発信する力」「展望・計画をもつ力」「関係を構築する力，協働する力」を重点項目として設定し，それらの能力を高める授業・カリキュラムを構築すること，資質・能力の育成を評価するためのパフォーマンス課題とルーブリックを作成することが目標である。数学科では特に「課題を発見する力」に焦点を当てて，２つの単元で授業を行った。そのうち，私が行った授業について報告をする。

1.2 研究のねらい

数学Ⅱの図形と方程式の内容においては，多くの教科書で２つの円の交点を通る図形の方程式を扱っている。その具体的な取扱い方は教科書によって差はあるが，２つの円

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

$$x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$$

の交点を通る図形の方程式は，定数 k を用いて

$$x^2+y^2+lx+my+n$$
$$+k(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$$

で表現され，$k=-1$ のときは２つの円の交点を通る円を表している，とされている。実際には，２つの円の交点がない場合でも直線の方程式が得られ，その直線は根軸と呼ばれている。

本研究では，交点を持たないような２つの円の方程式の差から得られる直線の方程式が何を表しているのかを考察することを，GeoGebra を活用して行い，その過程を通じて生徒に「課題を発見する力」が育成されるかを考察することを目的とする。

2.　公開授業について

2.1　本授業の単元について

本授業は，数学Ⅲ（５単位）のうち，演習の時間として割り当てている２単位分の授業である。これは，数学ⅠⅡＡＢの問題集（数研出版 2016 スタンダード数学演習ⅠⅡＡＢ）を使用して，既習内容を復習することを授業内容としている。具体的には，指定問題（毎回２題ずつ）を取り組ませ，その問題の解説や別解の紹介を行っている。さらに，その問題を発展させたり，その問題の背景を紹介したりするなど，深く探究することも視野にいれている。そして，このような取り組みを通じて，数学の理解を深めるとともに，問題へのアプローチの仕方を学ぶことを目的としている。

今回の研究授業では，その内の１題をさらに深く掘り下げていく様子を紹介する。その問題は，数学Ⅱ「図形と方程式」の単元の問題なので，本公開授業の教科名は「数学Ⅱ」とした。以下，単元は数学Ⅱ「図形と方程式」だとして，記述する。

2.2　単元の目標

座標や式を用いて，直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し，その有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

(ア)直線と円

①点と直線

座標を用いて，平面上の線分を内分する点，外分する点の位置や二点間の距離を表すこと。また，座標平面上の直線を方程式で表し，それを二直線の位置関係などの考察に活用すること。

②円の方程式

座標平面上の円を方程式で表し，それを円と直線の位置関係などの考察に活用すること。

(イ)軌跡と領域

軌跡について理解し，簡単な場合について軌跡を求めること。また，簡単な場合について，不等式の表す領域を求めたり領域を不等式で表したりすること。

2.3　単元観

本校で使用している数学Ⅱの教科書（実教出版数学Ⅱ）では，2円の交点を通る図形の方程式について次のように記述されている。

> 2つの円
>
> $$x^2+y^2-8x+4y+10=0 \quad \cdots ①$$
> $$x^2+y^2=10 \quad \cdots ②$$
>
> は異なる2点$\mathrm{P}(3,1)$, $\mathrm{Q}(1,-3)$で交わっている。点P, Qは①，②を満たすから，定数kがどのような値でも，つねに方程式
>
> $$x^2+y^2-8x+4y+10+k(x^2+y^2-10)=0 \cdots ③$$
>
> を満たす。③を変形すると，
>
> $$(k+1)x^2+(k+1)y^2-8x+4y-10k+10=0$$
>
> よって，③は2円①，②の交点を通るような次の図形を表す。
>
> $k=-1$のとき直線，$k\neq-1$のとき円

上記の事実は利用頻度が低いものではない。例えば2円の共有点の座標を求めるときは，2円の方程式の差から共有点を通る直線の方程式を求め，それをどちらか一方の円の方程式に代入することで，2円の共有点のx座標を求められるからだ。しかし，形式的には2円が共有点を持たない場合や，接するような場合であっても，上記の事実は成り立つ。ただし，$k\neq-1$の場合は，定数kの値によっては半径が虚数となり，表す図形がなくなる。このように利用する場面が少なくはないのだが，教科書での扱いは発展的なものになっており，生徒の理解も十分なものとは言えないだろう。

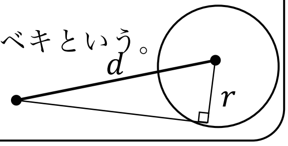
2.4　教材について

一般に，中心が(a_1, b_1)，半径r_1の円C_1と，中心が(a_2, b_2)，半径r_2の円C_2に対して，

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2+k\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2\}=0\cdots(*)$$

が表す図形について考察することは，現行の数学Ⅱの教科書の配列からは難しいことだろう。上式を，2つの円の方程式から得られるものだ，と考えることが普通だからだ。

（*）の説明のため，まず「ベキ」の定義を紹介する。

> **円に関する点のベキ**
>
> 半径rの円の中心からの距離がdである任意の点Pに対して，
>
> $$d^2-r^2$$
>
> を，その円に関する点Pのベキという。
>
> 
>

また，「根軸」とは，

> **根軸**
>
> 中心の異なる2つの円について，ベキが等しい点の軌跡を根軸という。

である。よって，中心の異なる2つの円の根軸の方程式が次のように定められる。

中心が(a_1, b_1)，半径r_1の円C_1と，中心が(a_2, b_2)半径r_2の円C_2に対して，ベキが等しい点Pの座標を(x, y)とおく。このとき，円C_1に関する点Pのベキは，

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2$$

であり，円C_2に関する点Pのベキは，

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2$$

であるから，

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2$$

より，

$$-2a_1x-2b_1y-r_1{}^2=-2a_2x-2b_2y-r_2{}^2$$

よって，

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+{r_1}^2-{r_2}^2=0$$

である。したがって，点Ｐの軌跡は(a_1, b_1)と(a_2, b_2)が異なる点であるとき直線となり，それを根軸と呼ぶ。また，円 C_1 と円C_2に対してベキの比が$k':1$ であるような点(x,y)の軌跡を考えると，

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2=k':1$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2=k'\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2\}$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2-k'\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2\}=0$$

となる。 $k'=-k$ とおくと，

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-{r_1}^2+k\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2\}=0$$

となり，（∗）式を得られる。上式は，

$$(k+1)x^2-2(a_1+ka_2)x+(k+1)y^2-2(b_1+kb_2)y+{a_1}^2+{b_1}^2-{r_1}^2+k\left({a_2}^2+{b_2}^2-{r_2}^2\right)=0$$

となり，定数 k の値によっては半径が虚数となるので，表す図形がなくなる。

2.5　使用するＩＣＴ機器について

使用機器：MacBook（おおよそ一人1台）
　　　　　AppleTV（プロジェクターに接続）
　　　　　無線ＬＡＮ
使用アプリケーション：GeoGebra

教室は，プロジェクターに AppleTV 接続し，WiFi ルーターを設置する。WiFi を用いて全ての MacBooK を AppleTV に接続できる。これにより AirPlay の機能を用いて，スクリーンに生徒の操作する画面を投影可能な状態にした。ただし，投影できるのは一台の画面のみである。生徒が使用する MacBook には GeoGebra5 がインストールされている。

例えば，GeoGebra5 に以下のような方程式を入力させる。

$$a_1=1, b_1=1, r_1=1, a_2=3, b_2=1, r_2=2$$

$$\mathrm{C}_1：(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2$$

$$\mathrm{C}_2：(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2$$

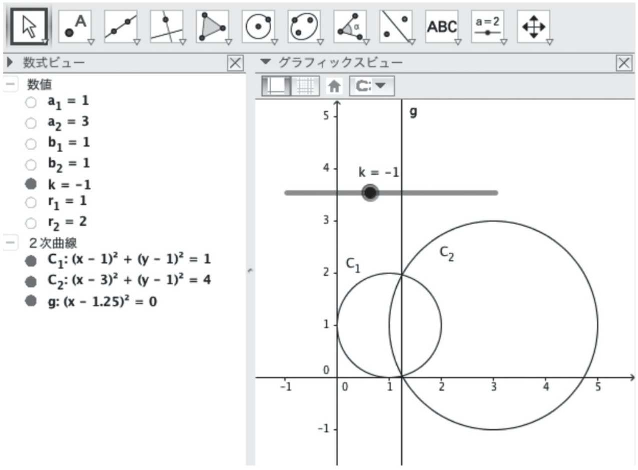
このとき， C_1 とC_2は２つの交点を持つ。

さらに，

$$k=-1$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2+k\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-{r_2}^2\}=0$$

と入力すると，下の図のように２つの円の交点を通る直線が作図される。



GeoGebra の機能を用いれば，様々な定数の値を変化させたときの様子を観察できる。そこから，２つの円が交点を持たない場合でも直線や円を表す場合があることを発見させ，それを考察する対象とする。

合計で７つの変数を同時に対象として考察を進めると課題を見出すことが困難になることが予想される。そこで，$k=-1$ のときは直線（根軸）が得られることを確認させ，まずはこの場合から考察することにする。

根軸の性質を GeoGebra 上で考察するとき，GeoGebra の接線を描く機能と２点間の距離を測る機能を用いることを誘導またはヒントして与える予定である。そして GeoGebra 上の操作から，根軸の性質について仮説を立てさせ，その検証のために代数的な式操作や平面幾何的な証明を行わせようと考えている。

2.6　評価について

本研究授業の実施にあたっては，以下のようなルーブリックを設定し，その評価に用いることにした。

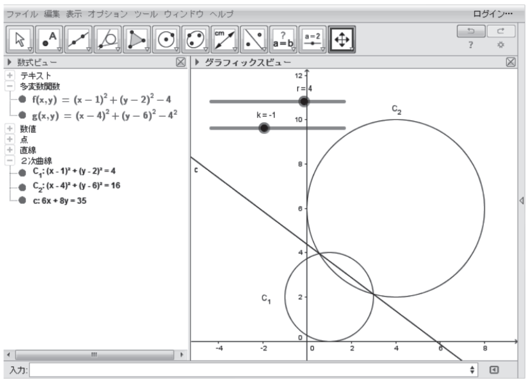
	課題を発見する力
1	GeoGebra 上の操作により，ある特徴に気がついた。
2	GeoGebra 上の操作により，ある特徴に気がつき，それをワークシートに文章や数式で表現できた。
3	ワークシートに文章や数式で表現できた特徴について，数学的に探究することができるように表現できた。
4	気がついた特徴について探究し得た結論から，さらに課題をみいだした。

2.7　本時の指導案

<table>
<tr><th></th><th></th><th>留意点</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>課題提示

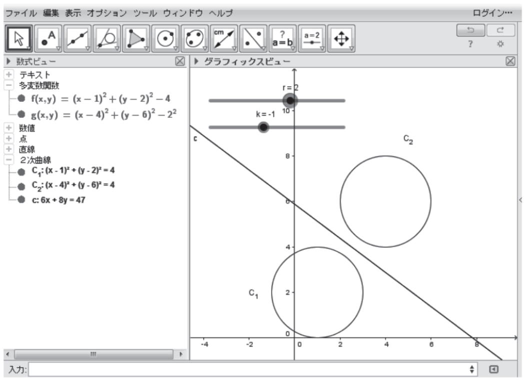
スタンダード数学演習ＩⅡＡＢ（数研出版）　P46 A180
　２つの円 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，$(x-4)^2+(y-6)^2=r^2$ について考える
ただし，rは正の定数とする。
(1) ２つの円が共有点を持たないための r の必要十分条件を求めよ。
(2) $r=4$のとき，２つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ。
(3) $r=6$のとき，２つの円の交点，および原点を通る円の方程式を求めよ。

を GeoGebra を用いて考察する。２つの円の交点を通る図形の方程式は，
$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-4$$
$$g(x,y)=(x-4)^2+(y-6)^2-r^2$$
とし，k を用いて
$$f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0\cdots(1)$$
と表せた。このように GeoGebra に入力し，(1)と(2)の解を調べよう。</td><td>既に演習した問題だが，(1)のように入力させ，一般性を強調したい。</td></tr>
<tr><td>展開1</td><td>右図は，(2)の GeoGebara を用いた解の入力例



課題１
　GeoGebra を用いた考察により，
　何か気づいたことはないか？
　ワークシートに書きましょう。

予想される生徒の回答
A1「円と円が交点を持たない場合も
　　直線がある。円がある。」
A2 直線について「２つの円の中心を結ぶ直線に垂直」「傾きが一定」
A3 円について「kの値によっては，図形が消失する場合がある」　など
※ GeoGebraを用いることで，円と円が交点を持たない場合，という状況に気づきやすいだろうと想定している。


</td><td>A1 の予想がでることを期待している。</td></tr>
<tr><td>展開2</td><td>課題2
　$k=-1$ のときに表れる直線が，２つの円に対してどのような性質を満たすかを調べよう。
作業の過程を，可能な限りワークシートに記録しましょう。
予想される生徒の反応</td><td>本時では，$k=-1$ の場合に焦点を当てて，探究させる。</td></tr>
</table>

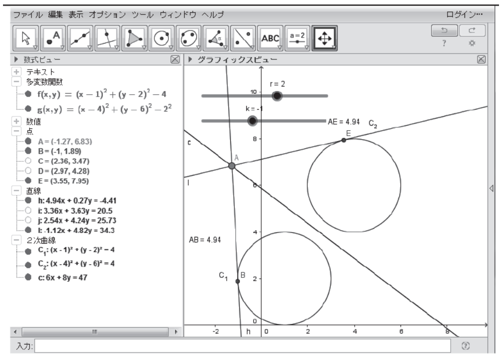
「2つの円の中心を結ぶ直線に垂直」

「傾きは一定」

「2つの円の中心を結んだ線分を，何らかの比（半径に関係した）に分ける点を通る」

期待している生徒の反応

「直線上の点から2つの円へ引いた接線の長さが等しい」



考察に向けたヒント

①円と円が共有点を持たない場合を考えよう。

② $r=0$ としたときの図を考えてみよう。

③直線上に点をとり，その点との関係を考えてみよう

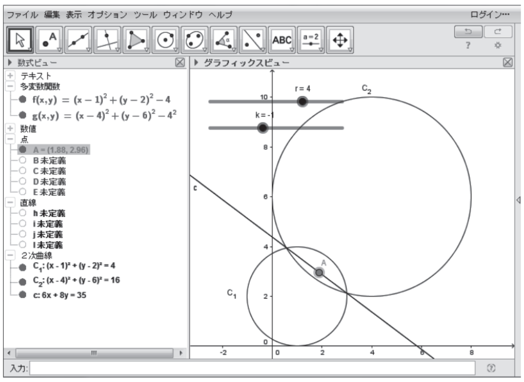
④ GeoGebra の機能を使い，直線上の点と2つの円との関係を調べてみよう。

※ GeoGebra を用いることで，直線上の点から2つの円に接線を引いたとき，その直線上の点から接点までの距離が等しいことに気づきやすいのではないか？

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-4$$

$$g(x,y)=(x-4)^2+(y-6)^2-r^2$$

はそれぞれが，三平方の定理から直線上の点から接点までの距離の2乗を表していることが確認できる。



今後の期待する展開

しかし，円と円が交わる場合，円の内側にある直線上の点からは，円に向けて接線が引けない。そこで，

$$f(x,y)-1\cdot g(x,y)=0$$

$$f(x,y)=g(x,y)$$

つまり，

$$(x-1)^2+(y-2)^2-4=(x-4)^2+(y-6)^2-r^2$$

の式の意味を，「接線の長さが等しい」という接線に関係した意味ではなく，別の解釈を与える必要が出てくる。そこで，

（直線上の点と円の中心との距離の2乗）-（円の半径の2乗）が等しい

と解釈すれば，円 $\mathrm{C_1}$ の中心を $\mathrm{O_1}$，半径を $\mathrm{r_1}$ とすれば，

$$\mathrm{AO_1}^2-\mathrm{r_1}^2=(\mathrm{AO_1}+\mathrm{r_1})(\mathrm{AO_1}-\mathrm{r_1})$$

とすることで，方べきの定理へと考察が進んでゆくのではないか？

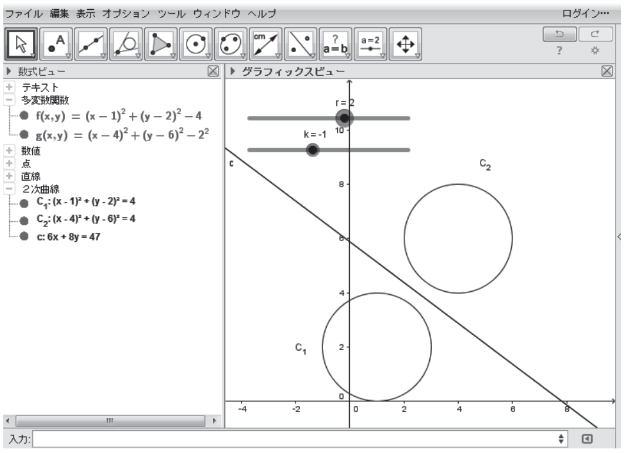
さらにそれを GeoGebra を用いることで，サポートできないか？と考えている。

3．実際の授業について

3.1　課題1に関して

まず，すでに演習済みであったが，問題集に載っている受験問題をGeoGebraに入力して取り組むことはスムーズに行うことができた。その結果，GeoGebraを用いることで，普段取り組んでいる受験問題のなかには，問題にすらならないものがあることも実感できたように思う。

続いて,本研究授業の本題に取り掛かった。r, kを色々と変化させ，その様子を観察させて何か気づいたことはないだろうか？と問いかけたが，多くの生徒は，$f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0$の方程式において，$f(x,y)=0$の表す図形と，$g(x,y)=0$の表す図形との交点がない場合について，疑問を抱かなかった。つまり，GeoGebraに下図のような図が表示されても，「あれ？」等と思うことがなかったのである。



これは，入力させた

$$f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0$$

の方程式とGeoGebraに表示された図形の関連が十分に理解できていかなかったことが原因の一つではないかと推測される。いずれにせよ，この段階で，指導案の想定とは大きく食い違ってしまったので，授業者から以下のように説明を行い，かつ課題2を与えて，授業内容を先に進めることを優先した。

当日の板書1

2曲線$f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$の共有点を通る図形の方程式は,

$$f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0$$

で表される。

課題2　$f(x,y)=0$と$g(x,y)=0$が共有点を持たないときでも通用する

$$f(x,y)+k\cdot g(x,y)=0$$

の説明を考えよう。

上記のような説明と課題を与えたあとも，何をどうして良いのかがわからずにいる生徒が少なく買ったので，さらに以下のような説明を与えた。

当日の板書2

考察の進め方

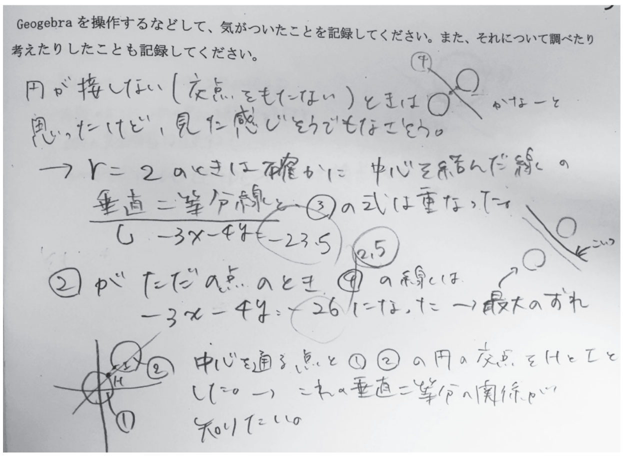
・ r, kの一方を固定して考える。

・$f(x,y)+k\times g(x,y)=0$上の点の満たす性質を予想してみる。

これにより，ようやく課題を見出した生徒が現れたので以下に紹介する。

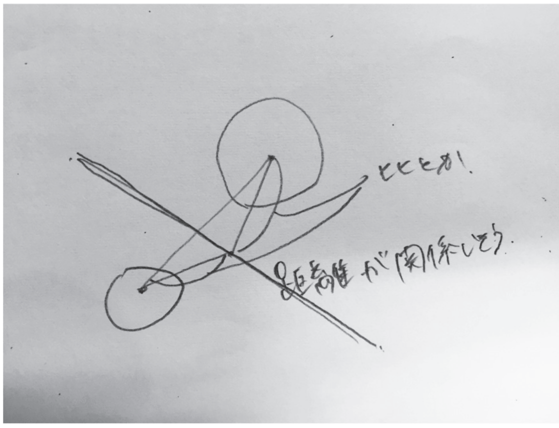
3.2　課題2より生徒の見出した課題

下の図は，生徒のワークシートの一部である。



ここの生徒は2円の共有点がない場合は，「直線がなくなってしまうのではないか」と予想していたことがうかがえる。そして$r=2$のときの直線が2円の中心を結んだ線分の垂直二等分線であることを確認し，一方の円の

半径を小さくすると，垂直二等分線とは平行だが位置がズレた直線が現われることに気づいている。



他の生徒は，上記のように２円の中心からの距離の比が関係していることを予想している。しかし，それを文字化・数式化することができず，これ以上の考察の進展はなかった。

３.３　授業を参観してくださった先生方の助言

・GeoGebra では円の中心が作図されないのが難点だった。課題をみいだすとしたら，共有点を持たない場合でも図形を表すことであろう。パラメータをｋとｒだけにしぼり考察させようと思ったが，難しかった。課題を一方的に与えるだけになってしまったのではないか。

・２円が交わるという問題設定がほとんどなので，交わらない場合について考察するきっかけがない。話し合いながらやったほうが，課題がみつかりやすい。３，４人のグループでやらせたらもっといろいろな意見が出るのではないか。

・式を見ずにスライダーを動かしていたのではないか。もっと式と図形を往復すべきである。

・２円を離した場合に言及しないのが気になった。離れた場合は自分の対象外としている生徒がいた。条件をゆるめても同じ答えが出たら，考察したい，解釈したいという気持ちがないと意味がない。みいだしてほしいものがあったはず，そこに持っていくには何が必要だったのか。

・根軸を方程式で考察するのが今回の目標だったが，パラメータを変化させて得られる直線が平行になっているなどの発見もあった。

・途中で生徒が動かなくなったとき，円の中心が大事だとか，直線をかいてみるとか，離したらどうなるかとか，特殊な点を具体的に代入してみるとか，接線の長さに着目するとか言えば良い。

４．まとめと今後の課題

本研究授業の結果を先にあげたルーブリックを元に評価するとしたら【１】の生徒がほとんどであり，数名の生徒が【２】であり，【３】以上の生徒はいないだろう。原因は「準備不足」という言葉でまとめられるだろう。生徒の知識不足や定着の不十分さは，その後の授業でも感じている。そのような現状を把握していなかったことが最大の原因だろう。また，今回のような GeoGebra を用いて探究的な活動を行う授業が初めてだった，ということもあるあろう。やはり，このような形式の授業を，カリキュラム全体に計画的に盛り込む必要性を肌で感じる結果となってしまった。

５．参考文献と引用文献

文部科学省（2009）『高等学校学習指導要領』

岡本和夫ほか（2014）『数学Ⅱ』実教出版

数研出版編集部（2016）『2016 スタンダード問題演習ⅠⅡＡＢ』数研出版

H. コークスター，S. グレイツァー著，寺阪英孝訳（1970）『SMSG 新数学双書幾何学再入門』河出書房