主体的に「数学する」児童・生徒を育む授業に関する研究

―　教材開発に焦点を当てて　―

永山　香織（代表者）※2

鈴木　　誠※3　矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田辰一朗※2　田原理恵子※5　守屋　友紀※6

傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6　青山久美子※4　井上　哲明※4　大谷　　晋※4

指田　昭樹※4　佐藤　亮太※4　菅原　幹雄※4　田中満城子※4　西川　史恵※4　野島　淳司※4　吉岡　雄一※4

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター

※２　東京学芸大学附属世田谷小学校

※３　東京学芸大学附属世田谷中学校

※４　東京学芸大学附属高等学校

※５　品川区立源氏前小学校

※６　港区立芝浦小学校

※７　文京区立第六中学校

※８　荒川区立尾久八幡中学校

目　　　　　次

東京学芸大学附属学校　研究紀要　第 44 集

主体的に「数学する」児童・生徒を育む授業に関する研究

― 教材開発に焦点を当てて ―

永山　香織（代表者）※2

鈴木　　誠※3　矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田辰一朗※2　田原理恵子※5　守屋　友紀※6

傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6　青山久美子※4　井上　哲明※4　大谷　　晋※4

指田　昭樹※4　佐藤　亮太※4　菅原　幹雄※4　田中満城子※4　西川　史恵※4　野島　淳司※4　吉岡　雄一※4

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター

※２　東京学芸大学附属世田谷小学校

※３　東京学芸大学附属世田谷中学校

※４　東京学芸大学附属高等学校

※５　品川区立源氏前小学校

※６　港区立芝浦小学校

※７　文京区立第六中学校

※８　荒川区立尾久八幡中学校

１．研究の背景・目的

世田谷地区算数・数学部は，平成22年度～平成24年度の三年間「算数・数学的活動を促す教材開発と指導法に関する研究」，平成25年度～平成27年度の三年間「数学を見いだす活動を促す指導に関する研究」をプロジェクト研究として取り組んできた。最初の研究においては，平成20年度改訂の学習指導要領で定義されている「児童・生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」である算数・数学的活動を促すような教材の開発を行い，それぞれの学校種における算数・数学授業改善のために，その課題や指導に内在する条件について実践授業を通じて具体的に示してきた。その後の三年間の研究においては，同じく平成20年度改訂の学習指導要領中学校数学科で整理された数学的活動のカテゴリーの一つである「数学を見いだす活動」に焦点を当て，授業づくりを行い，小・中・高における「数学を見いだす活動」の共通点と相違点について研究し，カリキュラムの検討をしてきた。

「数学を見いだす活動」に焦点を当てたのは，PISA や TIMSS などの近年の国際比較調査から，日本の子どもたちは数学の成績はよいが，数学が好きではなく，数学を公式の集まりとみており，解き方を覚えるものだと考えている学習観をもっているという傾向を日本の子どもたちの情意面の課題と考え，「数学は自分たちでつくることができる」という意識へと変化させる一助となるような授業改善について研究するためであった。過去六年間の研究については，研究の成果の一部を各学校で実施された現職研修で公開し，学会発表をし，さらに教員養成の指導にも生かしてきた。

日本の子どもたちが「数学は自分たちでつくることができる」という意識を育むことができるために，またそのような教員を養成していくために，これまでの研究に続く研究として本研究を位置づける。

現在，次期指導要領の改訂へ向けての議論が進んでいる。平成26年11月20日の中央教育審議会の「初等中等教育における教育課程の基準等のあり方について（諮問）」においては，「ある事柄に関する知識の伝達だけに偏らず，学ぶことと社会のつながりをより意識した教育を行い，子どもたちがそうした教育のプロセスを通じて，基礎的な知識・技能を習得するとともに，実社会や実生活の中でそれらを活用しながら，自ら課題を発見し，その

解決に向けて主体的・協働的に探求し，学びの成果などを表現し，更に実践に生かしていけるようにすることが重要である」という認識が示された。その際，「何を教えるか」という知識の質や量の改善はもちろんのこと，「どのように学ぶか」という，学びの質や深まりを重視することが必要であり，そのための指導の方法の具体例として「いわゆる『アクティブ・ラーニング』」（課題の発見と解決に向けて主体的・協働的に学ぶ学習）が取り上げられた。

この諮問を受けて，平成27年8月26日に発表された「教育課程企画特別部会の論点整理」の「算数，数学」においては，算数・数学の良さを認識し，学ぶ楽しさや意義を実感できるよう，小・中・高を通じて育成すべき資質・能力を，三つの柱に沿って明確化し，各学校段階を通じて，実社会との関わりを意識した算数的活動・数学的活動の充実等を図っていくことが求められている。さらに，平成28年8月26日教育課程部会の「算数・数学グループの審議の取りまとめ」においては，「『事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程』といった数学的に問題解決する過程を遂行すること」を数学的活動であるとこれまでの算数・数学的活動が再定義された。この「数学的に問題解決する過程」を重視した授業こそ，本研究の「数学する」児童・生徒を育成することを可能にすると考える。また，「自律的，協働的」で表されるように「自分で」行う活動や「みんなで」行う活動にどちらも主体的に自分事として取り組める児童・生徒を育成することをねらい，「主体的・対話的で深い学び」を実現することが求められている。

「深い学び」を実現するためにはその深さがどのようなものであるかを計らなくてはならない。先の「算数・数学グループの審議の取りまとめ」では，「深い学び」は「既習の数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，「数学的な見方・考え方」を働かせ，数学的活動を通して，新しい概念を形成したり，よりよい方法を見いだしたりするなど，新たな知識・技能を身に付け，知識の構造や思考，態度が変容する学び」であると定義している。個々の児童・生徒の深い学びが実現したのかどうかは，新たな知識・技能を身に付けたかどうかだけでなく，知識の構造や思考，態度が変容したのかどうかを看取り判断しなければならない。

そのためには，これまでも実践されてきた算数的活動・数学的活動を通した学習を振り返り教材研究をすることや，学びの質や深まりを児童・生徒の活動や記述や態度の変容を長・短期的に評価することを通して検証することが必要になる。そのような検証を通して最終的には教師主導ではなく，算数・数学の学習活動を主体的に進めていくことができるような児童・生徒を育成するための学習をどう展開していくのかを研究する必要がある。日本では，算数・数学の授業は，一般的に問題解決型で進んでいる。「アクティブ・ラーニング」の定義から，児童・生徒が主体的に問題を解決することとともに，問題の発見をしていく学習が重視されている。そのためには，問題解決だけでなく，問題設定することを児童・生徒に委ねることを計画に入れた学習を展開していく必要がある。「算数・数学的活動を促す教材開発と指導法に関する研究」，「数学を見いだす活動を促す指導に関する研究」の成果を生かし，児童・生徒がより主体的に数学の問題を設定し，解決し，実社会の問題に生かしていく姿を育成することを目指して，本プロジェクトは，「『主体的に数学する』児童・生徒を育む授業に関する研究」を進める。

児童・生徒が主体的に算数・数学を学び，学びの質を深めていくためには，長期的な指導が必要となる。本プロジェクトでは，各学校種において，単元を通して，年間を通して「主体的に数学する」児童・生徒を育成する授業について研究を進め，さらに小・中・高でそれぞれの研究について各学校段階を通じての研究が求められていると考える。

そこで本研究の目的は，以下の3点とした。

(1)「主体的に数学する」児童・生徒を育む授業をつくるための教材開発を行い，授業の実践と理論，児童・生徒の数学的活動の分析を通して，成果を蓄積すること。

(2) 実践された授業から「主体的に数学する」児童・生徒を育む授業における発問や教師の手立てを明らかにすること。
(3) 研究を通して得られた知見を，各附属学校で行っている現職研修セミナーや学会発表，教育実習の機会を通して，現職教員研修や教員養成に資すること。

2．研究の方法・計画

本研究は，3年間で次のような方法で実施する計画である。各年次の計画は以下の通りである。本研究は一年次にあたる。

<u>平成28年度（一年次）教材開発に焦点を当てて</u>

主に「目的（1）」を焦点に当てて研究を進める。まずは，「主体的に数学する」児童・生徒を育むために，これまでにどのような研究がされてきたのか，国内外の先行研究を整理し，教材開発や授業の展開計画に生かす。次に，開発された教材は，各学校の授業研究会などの機会を生かし，授業実践をし，検討する。さらに授業を振り返り，分析する。その際，児童・生徒が行った学習活動，発言，記述（ノート・レポート等）を収集し，児童・生徒の主体性を評価し，その成果を蓄積するようにする。
各学校で実践された授業実践の振り返りを，毎月の附属研究会で議論し，「主体的に数学する」児童・生徒を育む授業における教材のあり方や指導計画の立て方，重要な発問など，教師の手立てについての仮説を立て，次年度の研究につなげる。

<u>平成29年度（二年次）「主体的に数学する」児童・生徒を育む授業における発問や教師の手立ての検証</u>

主に「目的（2）」を焦点に当て，一年次に開発した教材の実践から得られた「主体的に数学する」児童・生徒を育む授業における発問や教師の手立てについての仮説を，授業実践を通して検証する。検証の仕方は一年次と同様であるが，授業実践は，本学附属だけでなく，公立校での研究協力を求めるようにする。

<u>平成30年度（三年次）現職教員研修や教員養成への貢献</u>

主に「目的（3）」を焦点に当て，一年次，二年次の研究を通して得られた知見を，各附属学校で行っている現職研修セミナーでの現職教員研修や学会にて発表する。また，教育実践センターの教育実習部門と連携を取り，本研究で得られた知見をどのような形で生かしていくかを検討し，各校で行われる教育実習での指導で実践する。

（永山　香織）

3．研究の実際

3．1．小学校における主体的に「数学する」児童を育む授業の実践

3．1．1　図をつくり，活用する子どもを育む授業

(1) 第2学年「どんな式になるかな」たし算・ひき算の授業実践

日時：平成28年8月24日（水）　児童：第2学年1組33人　授業者：稲垣悦子

(2) 単元の目標

加法と減法の逆思考の文章題を解決することを通して，場面を図や式に表したり，図や式から場面を読み取ったりして，加法は全体を求め，減法は部分を求めるという加法と減法の相互関係を理解する。

(3) 本単元で大切にしたいこと

子どもにとって，図で説明されるとわかりやすいという図のよさはわかるが，かいたり有効に使ったりするものに必ずしもなっていない。では，正しい図のかきかたを教えればいいのだろうか。それは違う。子どもは，公式やきまりを学習するとき，自分たちで見つけ，導き出し，一般化していく。だからこそ，意味もわかり，活用もできるのである。もちろん，図も同じだと考える。図を自分たちでよりよいものへとつくる活動から，数学を

自分たちでつくることができるという意識が育ち，「数学する」ことにつながると考える。

そこで，第2学年の逆思考の場面で，子ども達の素朴な絵や図から，クラス全体で数量関係を共有し，立式につながる授業を考えた。第2学年の子どもにとって使える図は，絵かブロックである。新しいものを教えるのではなく，素朴な子どもの絵や図から始める。子どもが立式の根拠を説明しようとするとき，友達の素朴な絵や図から，わかりやすい図になるように話し合って付け足したり変えたりしながら，数量関係を表すよりよい図へとつくりあげていきたいのである。数量関係を表すよりよい図というのは，数値，意味を表す言葉が入っていることがポイントとなる。図をつくっていく過程で，子ども達は場面が把握でき，数量関係を表す図のよさに気付き，つくった図が自分でも使える図，他の時にも生きて働く図になるのだと考える。

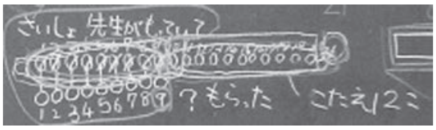
（4）本時の目標

加法逆減法の場面を図に表し，数量の関係をとらえることができる。

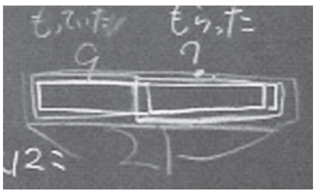
（5）授業の概要

第1時間目は，問題文『えつこさんはチョコを9こもっています。たかひこさんからチョコをもらったので，ぜんぶで21こになりました。もらったチョコはなんこでしょうか』（引き算の問題）を提示した。そのときは，足し算が17人，引き算が16人，どちらでもないしどちらでもあるが1人だった。自力解決後には，足し算が3人，引き算が30人となった。そこで，話し合いを始めた。足し算と主張している子どもは，問題文を根拠に，ブロックをくっつけるから，もらったから，と話した。それに対し，引き算と主張している子どもは，問題文の『もらったチョコはなんこでしょうか』を根拠に，きかれていることはもらったチョコだからと話した。また，仮に足し算だとしてとして答えを求めたら答えが大きくなってしまうからという意見もあった。つまり，9＋？＝21となるから，21＋と足し算になるのは答えが大きくなってしまうというものである。それを具体的に数値を入れて説明する意見もでた。それをもとに，「9＋□＝21　こたえ12個」というように，答えを求めるためには引き算を行うが，場面としては足し算ということを表す意見がでた。

ここまで，図で説明する子どもはいなかった。自力解決の時でも，絵で数量の関係を表している子が1人だった。第1学年の時の足し算や引き算の学習の時にブロックを動かす経験はあったと思うが，教師が意識的にブロック図や絵をかく経験を設定しておかないと，子どもは自然とかくことはないようである。



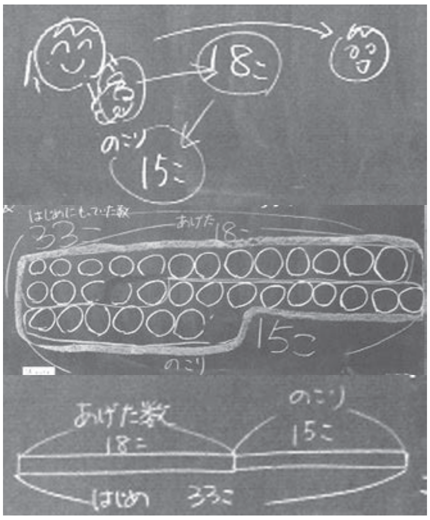
そして，ある子が「おかあさんが21こもっていて，9こたべて，のこりが12こと言う問題と同じ」と，式から場面を作り出した。その意見から，初めて，「1年生の時のおあいてさんのこと」と言って既習を生かした図を書いて説明を始めた。そして，その図をさらにわかりやすくしようと，数字をいれたり，図を説明している言葉を書き入れたりした。すると，10のかたまりの学習の時の図を思い出したようで，右の図もでてきた。子どもが説明しながら，図に言葉を書き加えたりその場所を丸で囲ったりした。本時は，テープ図につながる図を引き出し，図には問題文中の数字や言葉を書き入れてわかりやすくすることを理解できるようにした。



第2時間目は，場面は引き算だが，足し算で求める問題（減法逆加法）場面をもってきた。問題文は，『えつこ先生がどんぐりをもっています。たかひこ先生に18こあげたので，のこりは15こになりました。えつこ先生は，はじめにいくつもっていたのでしょうか』である。

始めに足し算は20人，引き算は8人，わからないと言ったのはは5人だった。自力解決後は，全員が足し算と答えた。その根拠として，逆の立場に立って答えを求めてみること，問題文から式をつくること，絵で関係をあらわすこと，丸図（○）で関係を表すことがあげられた。そして，前時の学習を活かして，丸図に問題文や数字を書くということを行った。すると，丸図と前時のテープのような図を合体させて，本時の場面を右のテープ図に変えた。テープ図に初めて触れた事に対して，子どもは，○を書く手間が省けて簡単という子と，絵の方がわ

かりやすいという子がいた。また，子どもは，確かめ算やお話の式は□－18＝15と引き算になって，答えを求める式は18＋15＝33と足し算になることに気付いた。



第3時間目では，他の場面の問題に対して，問題文を根拠にしても友達を説得しにくいという今までの経験等から，問題文を根拠にして説明する子どもはいなかった。自力解決中，子ども達が根拠として説明する方法は，絵が2人，ドングリの図が3人，○図が13人，10のかたまりの図が1人，ブロック図が6人，テープ図が17人だった（複数回答）。3時間目になると，教師が図をかこうといわなくても，図のよさがわかり，子どもが自然と図をかいたり，図で説明したりするようになった。

子どもがテープ図にした理由として「時間がないときもさっとかける」「まとまりがやりやすい」「かきやすい」「わかりやすい」「すぐかけてすっきりする」「しきをかいぞうしている」「ほかがぐちゃぐちゃ」を挙げていた。自力解決でテープ図を書いている子が半数以上いたことやテープ図にした理由がすらすらとでてくることを考えると，テープ図のよさを実感し，実際に図をかこうとしつつあることがわかる。

（6）考察

子どもは，立式の根拠として，問題文や，場面を表す式をよりどころにしていて，なかなか図や絵をかかないが，教師が意識的に，考えていることをブロック図や絵をかく経験を設定すれば，子どもは，問題解決するときの道具として，自分なりの絵や図をつくり，そのよさを感じることによって，これからも使おうと思えるようになるとわかった。絵やブロック図など子どもにとって既習の図から，新たなテープ図を出すときに，既習の図に数字やその数字の意味を書き込んで，その数字と数字の意味を表した文字はそのままにしながら○をテープにおきかえた。既習の図の表現を高めてから，テープにうつしたのである。テープ図を初めて見たときに，子どもが新しい図ととらえるのではなくて，知っている図の一部が変わったととらえられるようにすることが大切だと思った。図に関しても既習のものからつくりだしていきたいし，そのよさを子どもが実感できるものだとわかった。子どもの自分なりの分かりやすい方法とテープ図と往還しながら，図を高めていくことが大切なのである。

（稲垣　悦子）

３．１．２　きまりを活用する子どもを育む授業と単元計画

（1）第4学年「わり算のきまりを発見・活用しよう（2けたでわるわり算）」の授業実践

日時：平成28年8月24日（水）　児童：第4学年3組33人　授業者：越後佳宏

（2）単元の目標

除数のけた数が増えても，除法の計算ができることを理解し，除法に関して成り立つ性質などの既習事項を活用して，計算のしかたを考え，筆算のアルゴリズムを理解し，計算することができる。

（3）本単元で大切にしたいこと

高学年の授業をしていて，5年生の小数のわり算の計算方法を考える場面で，小数÷整数までは明解に説明できた子が，整数÷小数になると思考が止まってしまうという子に出会ったことがないだろうか。また，6年生の分数のわり算で分数÷整数までは明確に説明できた子が，分数÷分数になると思考が止まるということはなかっただろうか。この，一つの原因に「わり算の商一定のきまり」が，子どもにとって問題解決に活用できるものであると意識されていないこともあるのではないかと考えている。

学習指導要領では，「除法について成り立つ性質」として，　$a \div b = c$ の時，$(a \times m) \div (b \times m) = c$，(a

÷ m）÷（b ÷ m）＝ c，と商一定のきまりは4年生での指導となっている。

教科書でも，商一定のきまりは学習している。一般的には2けたでわるわり算のしかたを学習した後，商が等しいわり算を観察して「わり算のきまり」を発見する活動をしている。しかし，その後の学習でそのきまりを活用して問題解決に生かせるまでには至っていないのではないかと筆者は課題意識を持っている。

今回の実践では，2けたでわるわり算の学習の導入段階で，それまで学習してきたわり算をもとに商一定のわり算のきまりを発見し，それをもとにして未習の2けたでわるわり算を発見し，わり算のきまりを活用できることを実感して，学習を進めていくことで，わり算のきまりの有用性に気づき，その後も活用していこうとする態度が身につくのではないかと考え，実践を行った。

（4）単元の指導計画（全9時間）

第1次　わり算のきまり

・商が等しいわり算の式から，わり算のきまりを見つける。さらにそのきまりを活用してわり算の式を考える。（本時）

第2次　2けたでわるわり算（1）

・80÷20の商は，10を単位として考えたり，わり算のきまりで考えたりすると，8÷2で求められることを知る。

・84÷21で商の立て方を考え，（2位数）÷（2位数）の筆算の手順を考える。また，わり算のきまりを活用しても商を求める。

・96÷33で商の立て方を考え，仮商が大きすぎた場合の修正のしかたを考える。また，商一定のきまりを活用した場合のあまりについても考える。

・170÷34，326÷36で商の立て方を考え，（3位数）÷（2位数）の筆算の手順を考える。

第3次　2けたでわるわり算（2）

・322÷14で，（3位数）÷（2位数）の商の立つ位置を考え，筆算の手順を考える。

・607÷56，859÷21で，商の一の位が空位になる場合の筆算の手順を考える。

第4次　まとめと練習

（5）本時の目標

・商が等しいわり算の式から，わり算のきまりを発見し，活用する。

（6）授業の概要

①既習事項を確認する

本時はわり算のことについて学習することを伝え，これまでどんなわり算を学習したのかを全員でふり返り，2けた÷1けたのひっ算，3けた÷1けたのわり算のひっ算について学習したことを確認する。

②課題をつかむ

次に，「3」と黒板に板書し，商が3になるわり算をつくるという問題を把握する。準備しておいた，6，12，18，24のカードから1枚ずつ引き，これらが割られる数になり商が3になるわり算をつくる。24÷8＝3，12÷4＝3，6÷2＝3，18÷6＝3，の4つの式を順に導き出し，「これを見て何か見つけられるかな」と教師が問う。「割られる数とわる数は2でも割れる」「わられる数とわる数はすべて2の倍数。わられる数はすべて6の倍数」「割られる数とわる数と商をたすとすべて奇数になる」等の子どもの様々な気づきがあった。

24÷8=3

12÷4=3

6 ÷2=3

18÷6=3

図1

③数学する子どもの姿Ⅰ（課題解決のための見通しをもつ）

その中で「この4つだけではよくわからないから，もうちょっといろいろな数で試してみないと証拠にならない」という発言があり，今後の学びを進める重要な視点であると判断し，それを赤で板書した。

さらに，「小さい方から並び替えてみるとわかりやすいのではないか」という発言から，並び替えをした（図1から図2へ）。

④数学する子どもの姿Ⅱ（きまりを発見し，活用する）

すると，「わられる数が6飛びになっていて，わる数が2飛びになっている。だから，次はたぶん30÷10になる。」という気づきが発表される。「6飛びということは6ずつたしていること，2飛びというのは2ずつたすこと」と確認し「これは，たし算でみたんだよね」という教師が問い返しをすることで，関係をかけ算でみる見方「12は6に2をかけた数」「18は6に3をかけた数」「24は6に4をかけた数」「30は6に5をかけた数」という気づきが生まれた。さらに「こっち（わる数）は？」と教師が問うことで，「4は2に2をかけた数」「6は2に3をかけた数」「8は2に4をかけた数」「10は2に5をかけた数」という，わられる数とわる数の関係に気づく子どもの姿が見られた。「これを繰り返していけば何個でもできちゃう」「60÷20もできる」というきまりを活用する子どもの姿があり，「これも3になるの？」という教師の問いに対して「60÷20は，6に10をかけたもの，20は2に10をかけたものだから，3になる」「わられる数に10をかけたらわる数にも10をかけなければ，商が3にならない」「10だけではなく，わられ数を2倍，3倍したら，わる数も2倍，3倍でも同じだから，わられる数とわる数に同じ数をかけた時，商はかわらない」と子どもの言葉をもとにまとめていった。

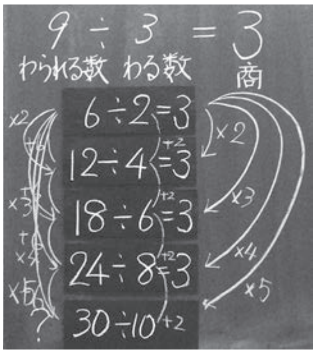


図2

⑤数学する子どもの姿Ⅲ（他の場合も発見したきまりが成り立つか調べ，新たな課題をつかむ）

「他の数でも試してみないと正しいかどうかわからない」ということから，商は7の場合も調べてみた。実際に調べてみて，不安だという子どもの発言から取り上げた。「84÷12が出たけれど，これは7になるのかわからない」という不安であった。「どうしてこれが出てきたのかな？」という教師の問いに対して「21÷3＝7で，42÷6＝7」「21と3の，両方とも2をかけた」「それでどんどんかける2をしていくと84÷12が出てくるから，これも7になると思うけれどわからない」という不安が表出された。さらに詳しく調べていくという次の課題をもって，本時は終了した。

（7）考察

式や図などを観察するときに「きまりを見つけようとする目」「見つけたきまりを活用しようとする目」は主体的に「数学する」児童・生徒を育む授業を目指す上ではとても大切であると考えている。今回の実践から既習のわり算を見直し，教師が適切な問いかけをすることにより，わり算の商一定のきまりを子どもが主体的に発見する姿をみることができた。

また，発見したきまりが本当に正しいのかどうか不安を持っている子どもの姿も見ることができた。このことは，「本当に正しいのか？」という次の課題につながり，主体的に「数学する」児童・生徒を育む授業づくりの一つの示唆となると考える。

今回は担任をしている学級ではなく本時のみの指導であったので，その後の単元の学習をすすめる中で，子どもが発見したきまりをどのように活用していったのかは検証することができていない。その検証していくことが今後の課題として残っている。

（越後　佳宏）

３．２　中学校における「主体的に数学する」生徒を育む授業

３．２．１　「主体的に数学する」とは

（1）目指すべき生徒像

主体的に数学する生徒を育成していくことを目指したとき，実際「主体的に数学する生徒」とは具体的にどの

ような姿の生徒を指すのだろうか。それを素朴に考えたとき，やはり自分への，数学への質の高い「問いかけ」ができる生徒ではないかと考える。生徒自らが自らに問いかけ，自分の内的世界にある数学を拡げていけるような状態が，主体的に数学する生徒の姿であろう。中学校における事例から考えると，例えば以下のような姿が想定される。

（2）数に関する話題から

45+9=54，23+9=32，78+9=87 この3つの計算からどのようなことがいえるだろう。

例えば「ある2桁の数に9を加えると，その2桁の数の一の位と十の位を逆にした数になる」といった命題が見えてくる。しかしこの命題は真ではない。なぜなら反例として35+9=44が挙げられるためである。そこで命題を見直してみる。はじめの3つの計算で扱われている数はすべて十の位と一の位が連続している数である。他の数を考えてみると，56+9=65，67+9=76，12+9=21，文字による証明を入れなくてもすべて提示できる量だが，文字を置いてみると，aを1 ～ 8までの自然数とすると，$10a+(a+1)+9=10a+10+a=10(a+1)+a$ よってもとの2桁の数の一の位と十の位を逆にした数になることがわかる。

では連続しない場合には何か規則性は見えてこないだろうか。先の35+9=44だが，もう一度9を加えてみると，35+9+9=53，よってもとの2桁の数の一の位と十の位を逆にした数になることがわかる。このように2回加えると他に一の位と十の位を逆にした数になる数はないか。例えば57+9+9=75，24+9+9=42である。そう，（十の位）－（一の位）が2である数ならば，9を2回加えれば一の位と十の位を逆にした数になる，といえる。するともっと大きいことが見えてくる。2つの数の差が，9を加える数に影響を与える，ということである。連続する2数は差が1であるから1回だけ加えればよいと読みかえられる。ではもう少し一般の場合を考えて差をnとおくと，$10a+(a+n)+9n=10a+10n+a=10(a+n)+a$ となることがわかる（ただし，ここでのaのとりうる値の範囲はnの値に依存する)。

（3）対になる数学的な思考

上記の話題は，対になる二つ（計4つ）の数学的な思考が有効に働いた考察であるように思える。一つは「帰納による直観と演繹による反省」，もう一つは「（統合・発展を意図した）特殊と一般」である。前者については，先の話題では素朴な算数の計算から帰納的に命題を見出し，しかしその命題が真でないことから命題に修正を加え，それが真であるか演繹的な証明を与えている。命題が真であるかどうかわからないから，演繹的な証明をしたくなるわけである。ここに主体的に数学する鍵があるように思える。特に問題設定の場面では，帰納的に事実を見出させるからこそ，演繹的に考えようとする思考が引き出せる，と考える。帰納的に見出す，という形でなくとも，例えば量感を揺さぶり予想をさせるなど，直感的・直観的に事実の真偽を考えるような場面をつくっていくことが，後の数学的に考えていく生徒をつくっていくことになる，と考える。後者については，先の話題では連続しない場合を考えることで発展的に命題を考察していったわけだが，ではなぜこのことを考えようと思ったか，を考えたときに，先の考察のふり返りが重要な鍵を握っているように思える。ここでは「はじめに立てた命題が，偽であったこと」が一つの動機になっていた。偽であり，命題の条件を狭めることになったことが，次に立てた命題が「特殊である」ことを意識させ，「一般の場合」を考えるに至っている，といえる。統合的・発展的に考えていくためには，発展的に考えてみよう，と思ったからといって考えられるわけではなく，どこかそれが特殊な場合であることを自覚する瞬間があることが重要ではないか。それが結果として主体的に発展的に考えていく契機になっていくように思える。

以上のように，演繹的な説明や発展的に考えることは数学的に考えていく際に非常に重要なことであるが，そ

の契機となる，対となる数学的な思考（帰納・特殊）の経験をさせることが，「主体的に」数学するために重要である，と考える。

３．２．２．実践事例

上記のことを実現しようとした実践事例を以下に挙げる。

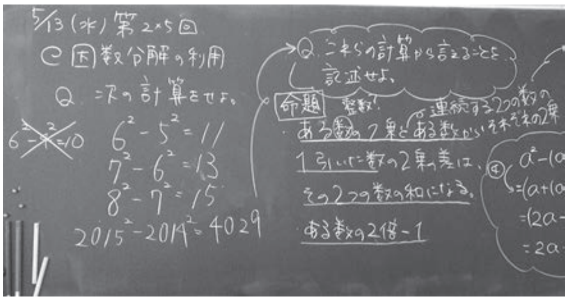
(1)「連続する2つの整数の2乗の差（大から小）は，その2数の和に等しい」という命題の証明

①ねらい

教科書等では中学校3年「因数分解」の利用場面で，計算の工夫の1つとして取り上げられるものであるが，その工夫の方法に気づかせるための1つの手立てとして，帰納的に命題をつくらせ，ふり返る活動から工夫の方法を見出す展開を構想した。

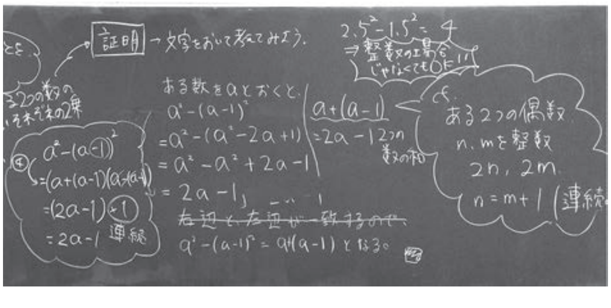
②実践の実際

導入場面では，連続する2つの整数の減法を，暗算で計算できる程度のもので提示した。生徒は6^2-$5^2=11$, 7^2-$6^2=13$あたりは暗算ですらすらと答えを言っていくが，「何か気づいた人？」と聞いてみると，勘のいい生徒はこの時点で数の関係に気づいてくる上，何気なく計算していた生徒も「何かあるのかな？」といった視点で問題を見るようになる。従ってここでは核心には迫らせず，他の数についても提示し，計算させていった。特に2015^2-2014^2あたりになると暗算ではまともに計算することができないが，性質に気づいている生徒は「4029だ！」といとも簡単に答える。気づいていない生徒は今まで挙げられた計算を吟味する必要が生じる。そこで「これらの計算から，どのようなことがいえるでしょうか？」という発問のもと，命題を立てる活動へと移行した。



生徒が構想していた命題は大きく分けて2通りあり，1つは上記のような連続する2数の和として考えるもの，もう一方ははじめの数を2倍して1引くものであった（どちらも同値である）。生徒はそれぞれの仮説命題をもとに，生徒それぞれの命題を証明する活動へと移行していった。

実際の証明を板書で共有した後，証明を振り返り，「読む」活動をさせた。その後，「命題よりもっと言えることはないかな？」と発問をした。



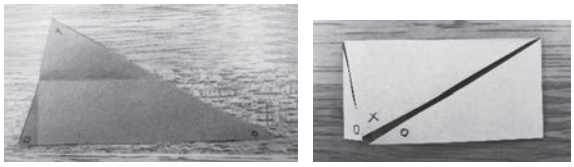
まず差が1であれば整数でなくても同様の計算法則が成り立つ，ということが見出された。例えば2数が小数であったとしても，2.5^2-$1.5^2=6.25$-$2.25=4=2.5+1.5$といったように，その和で求めることができる。また，展開をしてからまとめるのではなく，平方の差の因数分解の式で考えていくと，和と差の部分が1になることがわかる。これは2数の差が1だからであり，2数の差がnであれば，2数の和をn倍すればよいため，例えば2015^2-$1985^2=4000\times30$といったように，容易に計算することができる。この計算は因数分解の利用で「工夫した計算」としてよく扱われるものであるが，そういった方法について考える機会が証明の文脈の中で自然に創出できるところによさを見いだすことができる。

（峰野　宏祐）

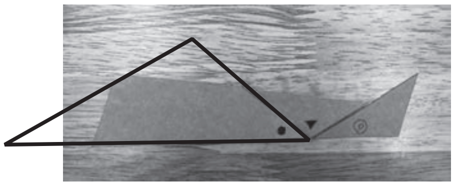
（2） 三角形の内角の和が180°になることの証明

① ねらい

三角形の内角の和が180°になることについては，小学校でも学習してきている。小学校での学習は作業や操作を根拠とし，帰納的に内角の和が180°となることを扱っている。中学校では，その学習を受け，三角形の内角の和が180°になることを，平行線の性質などを用いて演繹的に導くことがねらいとなる。しかし，ただ証明しましょうといっても，小学校での既習事項であるため，生徒たちにとって証明することの必要感は薄い。そこで，小学校の学習をふり返り，本当に180°と言ってもよいかを検討する場面を設定する。このような場面を設けることが証明することの必要感につながるものと考えた。



（図1：3つの角を折って角を集める）



（図2：もとの三角形を書き入れる）

② 実践の実際

小学校で三角形の内角の和が180°となることについて，どのように学習したのかをふり返る。三角形の3つの角を切って集める，折って集める（図1），分度器で測るというような方法が出てくる。そこで，その方法を実際に行ってみる。その後，この方法で本当に180°といってもよいだろうかと問いかける。はじめのうちは，良いという生徒が多いが，3つの角を切って集めているので，誤差があるのではないかということや，すべての三角形について180°といえるのかを問うと，次第に180°といつでもいってよいかということが揺らいでくる。そこで，切ったり折ったりすることなく，角を集める方法はないかを考えることを問題として，証明の学習へとつなげていく。

3つの角を切ったり，折ったりしないで集める方法がないかを考える際，難しいようならば，図2のような切る前の三角形をかき加え，角が集まっている部分を観察させる。どのような補助線を引けばよいかに気づく生徒もいるが，気づかない生徒も多くいる。そのような場合には，直線を書き入れることで，角を集めることができないかを考えさせる。気づいた生徒にヒントをもらったり，教えてもらったりするような場面をつくってもよい。平行線の引き方に気づき，解決できた生徒には，他の平行線の引き方ができないかを考えさせる。

証明の学習は，中学校の学習内容の中でつまずく生徒が多い内容のひとつである。その原因のひとつには，証明の意味や必要性ということが生徒たちに上手く伝わっていないことがある。小学校で取り組んだ作業や体験をふり返り，そこを手がかりとして，命題の全称性について問うことや，小学校での作業的な扱いの限界に気づかせることが，生徒たちが主体的に取り組む契機となる。

（鈴木 誠）

（3）「円」と「相似」の両方の内容にまたがった問題の解決

①ねらい

中学校3年の「円」と「相似」の統合的に利用する問題解決の授業例である。

問題解決の為の課題として，ここでは，

1）解決に必要な条件だが利用のし方が解り難い条件がある

2）解決の為の補助線を発見する際に多少の困難性を有する

3）補助線不要の明快な解法を持つ

の3つの特徴を持つ問題を与える。一方で，この問題は，巧みにその利用法不明な条件を使うことによる補助線不要の明快な解法が存在する。したがって解決に苦労するだけでなく，「明快な解法」を自ら発見すること，或いはそれを周囲から学ぶこと，自分とは異なる解法或いは更に美しい数学に触れることもできる。

解決する中で生徒が自然に条件の利用方法について自問自答し，また，そのために必要な補助線のありかたに

ついても自問自答できる，そしてこの問いをきっかけに既習事項を検索し，問題を解決しようとする。

②授業の実際

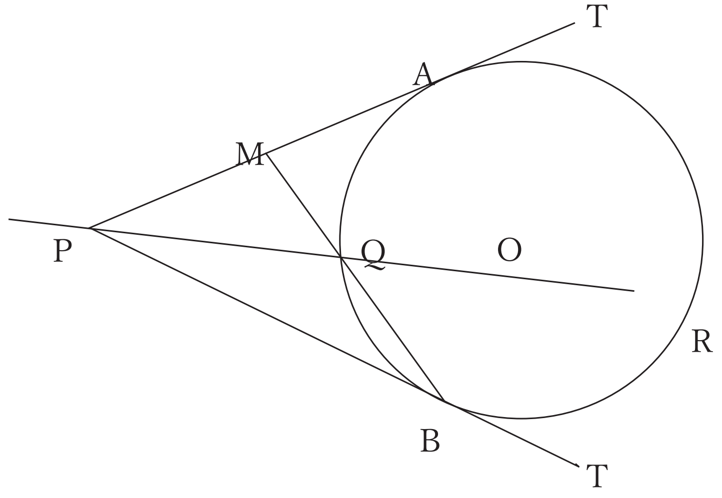
課題は，次の通りである。

図のように、円O外の1点Pから円周上の2点A、Bを接点とする接線PA、PBを引く。PAの中点Mから接点Bへ引いた線分と円周との交点をQとする。

直線PQと円周とのもう一つの交点をRとするとき、

PA // BR

を証明せよ。



この課題は，「平行線の条件」「平面図形」，「四角形」，「円」，「相似」，「接弦定理」「方べきの定理」など，3年の内容だけでなく2年の内容も関わる多くの既習事項を利用する，大変面白い問題である。扱う時期は，3年の図形の内容が一通り終わった後がよい。

導入は特に配慮する必要なく，課題を与えてしばらく考えさせる。しばらくすると，どの生徒も筆が止まっている。適当な生徒を指名して「まずは何を考えた？」と質問すると，ほぼ例外なく「円周角と接弦定理の利用を考えています。」という返事が返ってくる。AB，AQ を引き，更に AR を引いて，等しい角に印を入れている。例えば，∠ QAB = ∠ QRB = ∠ PBQ に○印を入れる，というようにである。このような行為の背景には，平行線の条件によって，なんとか ∠ PMQ = ∠ TBR を示したいという生徒の考えがある。「錯角が等しいから平行」である。

この後，多くの生徒はいよいよ M の使い道について考え始める。ところが，ここで筆が止まる。「AP の中点 M」の使い道が思いつかない。「AP の中点 M」の使い道が思いつかないということは，既習事項を検索しても，「3点が P，M，A の順に一直線上に並んでいて，PM = MA」という図的状況を含む何らかのイメージが頭の中に浮かんでこない，ということであろう。例えば，∠ QAB = ∠ QRB を見出したということは，頭の中に，与えられた図の中に下の図1が見出せたからであると考える。

（中点 M はどうやって使おうか？）というのが，自分に課した問いである。しばらくすると，中点 M の使い道を見出した生徒が現れる（図2）。平行四辺形の対角線とみなしたのである。このことから

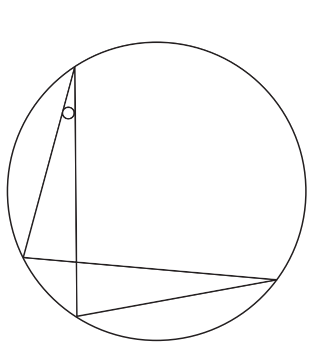


図1

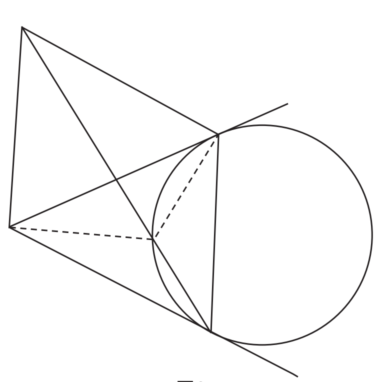


図2

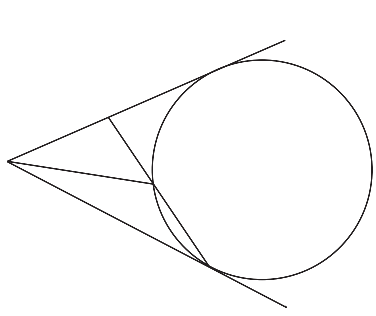


図3

平行四辺形を作り，従って4点N，P，Q，Aが同一円周上にあることが解り，よって円周角の定理と接弦定理から錯角が等しいことがいえる，という流れである。更に，別の考えが出る。補助線は一切不要である（図3)。方べきの定理により，から，AM^2（= PM^2） = MQ・MB　である。この式は，PM：MQ = MB：PM　と書き直せる。よって，∠Mが共通だから　△PMQ∽△BMP　である。このあとは，接弦定理から錯角が等しいことがいえる。

授業の流れは以上である。この問題は，「数学のどの性質を何をどう使えばよいのかが判らない」とか「（単に）解き方が解らない」という類のものではない。解く段階で生じるであろう自分に対する新たな「問い」が，明確でほとんどの生徒にとって共通のものとなるので，問いを持たせようとする授業で扱うのに適している。このような問題は，生徒にとっても，解決の短期的な目標が設定し易いであろう。

「主体的に学ぶ」ことを，「更に質の高い新たな問いを持つ」ことと考えると，このような教材はうってつけでは無かろうか。

（傍士　輝彦）

３．３．高等学校における「主体的に数学する」生徒を育む授業の実践

本校数学科では「主体的に数学する」生徒がもつべき力の一つとして，「課題を発見する力」に焦点をあて，その育成を目指した授業実践を行ってきた。その具体として，平成28年6月に開催した公開教育研究大会における2つの授業実践についてその概要と振り返りを報告する。また，現実世界の事象と数学のつながりについて授業で扱うことが生徒の「主体的に数学する」態度を育む方策の一つになると考え，平成28年10月に開催した情報教育公開研究会ではICTの活用を前提に現実世界の事象について考察する授業を行った。それについても授業の概要と振り返りを報告する。

３．３．１．授業実践Ⅰ

（1）単元名　数学Ⅱ「図形と方程式」

（2）単元の目標

座標や式を用いて，直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し，その有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

（3）教材について

中心が (a_1, b_1)，半径がr_1の円C_1と，中心が (a_2, b_2)，半径がr_2の円C_2に対して

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2+k\left\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2\right\}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が表す図形について考える。ここで，半径rの円の中心からの距離がdである任意の点Pに対してd^2-r^2を，その円に関する点Pのベキという。また，中心の異なる2つの円について，ベキが等しい点の集合を根軸という。

中心が(a_1, b_1)，半径がr_1の円C_1に関する点$P(x, y)$のベキは$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2$であり，

中心が(a_2, b_2)，半径がr_2の円C_2に関する点$P(x, y)$のベキは$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2$であるから，2円$C_1$，$C_2$に対してベキの値が等しくなる点の軌跡は

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2$$

となり，①において$k=-1$として得られる直線の方程式と一致する。①の式は「2円の交点を通る図形の方程式」として登場するが，ベキの比が一定，すなわち

$$\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2\right\}:\left\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2\right\}=(-k):1$$

である点の軌跡とも考えることができる。この軌跡は$k=-1$のとき直線（根軸），$k\neq-1$のとき円となる。このように，点の軌跡として考えれば，2円の交点の存在の有無に関わらず①の式は意味をもつ。GeoGebraを用いてkの値や半径を動かすことにより，ベキの比が等しくなる点の軌跡について考察し，主体的に課題を見出だし

解決させることを目標とする。

（4）本時の課題

本校が用いている問題集に掲載されている次の問題について，GeoGebra を使って考察をさせた。

2つの円$(x-1)^2+(y-2)^2=4,\ x(x-4)^2+(y-6)^2=r^2$について考える。ただし，$r$は正の定数とする。

① 2つの円が共有点をもたないためのrの必要十分条件を求めよ。

② $r=4$のとき，2つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

③ $r=6$のとき，2つの円の交点，および原点を通る円の方程式を求めよ。

その上で，

課題1 GeoGebra を用いた考察により気づいたことをワークシートに記述する。

課題2 $k=-1$のときに現れる直線が，2つの円に対してどのような性質を満たすか調べる。

という2つの課題を順に提示した。

（5）授業後の振り返り

・GeoGebra では円の中心が作図されないのが難点だった。課題をみいだすとしたら，共有点を持たない場合でも図形を表すことであろう。パラメータをkとrだけにしぼり考察させようと思ったが，難しかった。課題を一方的に与えるだけになってしまったのではないか。

・2円が交わるという問題設定がほとんどなので，交わらない場合について考察するきっかけがない。話し合いながらやったほうが，課題がみつかりやすい。3，4人のグループでやらせたらもっといろいろな意見が出るのではないか。

・式を見ずにスライダーを動かしていたのではないか。もっと式と図形を往復すべきである。

・2円を離した場合に言及しないのが気になった。離れた場合は自分の対象外としている生徒がいた。条件をゆるめても同じ答えが出たら，考察したい，解釈したいという気持ちがないと意味がない。みいだしてほしいものがあったはず，そこに持っていくには何が必要だったのか。

・根軸を方程式で考察するのが今回の目標だったが，パラメータを変化させて得られる直線が平行になっているなどの発見もあった。

・途中で生徒が動かなくなったとき，円の中心が大事だとか，直線をかいてみるとか，離したらどうなるかとか，特殊な点を具体的に代入してみるとか，接線の長さに着目するとか言えば良い。

（菅原　幹雄）

３．３．２．授業実践Ⅱ

（1）単元名　　数学 A「図形の性質」

（2）単元の目標　　図形という具体的な対象を通して，数学での思考方法を学ぶこと。

（3）教材について

円Oと点Pが与えられたとき，Pを通り円Oと共有点をもつ直線に対して「方べきの値」が決まる。方べきの定理により，この値は直線のとり方によらず，円Oと点Pのみによって定まる。そこで平面上の点Pに対し，円Oでの方べきの値を対応させる関数を$F_{\mathrm{O}}(\mathrm{P})$とおく。つまり$F_{\mathrm{O}}(\mathrm{P})=$（円OとP点で定まる方べきの値）。実数$a$に対し$C_{\mathrm{O}}(a)=\{\mathrm{P}\mid F_{\mathrm{O}}(\mathrm{P})=a\}$とおく。$F_{\mathrm{O}}(\mathrm{P})$が一定の値$a$となるようなPの集合，すなわち$C_{\mathrm{O}}(a)$はOを中心とする円となることがわかる。例えば，$C_{\mathrm{O}}(0)$は円Oそのものである。

（4）本時の課題

事前に半径1の円O_1を印刷したワークシートを配布し，“等方べき点”とでも名付けられる$C_{O_1}(1), C_{O_1}(2), C_{O_1}(3), C_{O_1}(4)$を作図し色を塗らせる。また，OHP シートに，半径$\frac{1}{2}$の円O_2と$C_{O_2}(1), C_{O_2}(2), C_{O_2}(3), C_{O_2}(4)$ $C_{O_2}(1), C_{O_2}(2), C_{O_2}(3), C_{O_2}(4)$を印刷したものを配布する。ワークシートにある$\mathrm{O}_1$を中心とした同心円たちと，

OHP シートにあるO_2を中心とした同心円たちの交点たちから，何か読み取れるだろうか。読み取れた予想はどのように定式化できるであろうか。定式化された予想は検証できるだろうか。いずれの段階も数学的な課題と言いうるものである。これらをなるべく主体的にみいだし，可能ならば生徒たちが解決するのが本時の目標である。

（5）授業後の振り返り

・数学はやり方を覚えているから解けるという生徒が多い。ほとんどの生徒が考えたことがないであろう課題をほぼ丸投げでやってみた。教師がみえていないだけで生徒は課題をみいだしているのではないか。

・生徒が方べきの値を理解していたか。条件が明確であれば証明できたのではないか。

・直線のようにみえるが，ではこの直線上にある点はどのような条件を満たすのかということを生徒は理解していたか。

・最初からグループにすると責任があいまいになったり，意見を持っている人に引っ張られる。はじめは一人で考えて，それからグループにしたほうが活性化する。

・個人がいろんな観点を持っていた。内接を考えている生徒と外接を考えている生徒ではかみあわない。グループごとに観点をしぼらなかったのはなぜか。

・一人で考える時間，グループで考える時間，発表の時間を分けたらどうか。そのほうが発表を躊躇なくできる。また，観点ごとにグループで話し合ったあと，グループを解体し，新しいグループで以前のグループで話し合ったことを発表するという方法もある。

・2円が離れたときが発見の動機となるはず。発見できた生徒とできなかった生徒がいるので，それをふりかえることができたら面白い。

・手作業でみつけられるものは多い。公開授業Ⅰで2円が交わらない場合でも図形を表すことに違和感がないのは，グラフィックソフトが作り出しているからかもしれない。その点では，手を動かすのは意味があった。

（公開授業Ⅰ，公開授業Ⅱを通して）1年生の数学 A でやった根軸が2年生の数学Ⅱの図形と方程式で座標を用いて表現できるという感動を生徒に味わわせたい。

今回の協議会では評価について十分議論できなかった。今後，自己評価，相互評価でルーブリックを使用する方法や場面について理解を深め，授業実践につなげる必要がある。

（吉岡　雄一）

３．３．３．授業実践Ⅲ

（1）単元名　数学Ⅰ「三角比（一部数学Ⅱの三角関数を含む）」

（2）本時の課題

本授業の概要は，DTMF の信号音（電話のプッシュ音）の波形をコンピュータのソフトを使ってグラフで表した後，生徒が PC のグラフソフトを用いてそのグラフを表す関数を見いだす探究を行うというものである。授業の最後には見出した式から実際に電話をかけてみることによって検証を行う。DTMF 信号を用いた電話には 0 ～ 9，＊，# のボタンにそれぞれ異なる音が割り振られている。例えばプッシュホンの「1」は1209Hz と 697Hz の合成音であり，これは数式で表せば，

$$\sin 435.24\,x + \sin 250.92x$$

（ただし，sin は度数法による。xの単位は1000分の1秒）となる。実際にプッシュホンで「1」のボタンを押して鳴らし，その波形を表示すれば，図1のような波となる。この波から上式を見出すということが本授業の主課題である。

実際によく耳にする音の波を生徒が解析して式を見出し，見出だした音から電話をかけるということを扱うことで，三角関数と現実事象のつながりを実感させることを目標の一つとしている。

図1　プッシュホンの「1」の音波

(4) 授業後の振り返り

授業後に行ったアンケート（37名が回答）では，「現実事象と学んでいる数学のつながりを感じましたか」という設問に対し，「とても感じた」が19名，「感じた」が18名，「あまり感じなかった」「感じなかった」とした生徒は0名と，全員が肯定的な意見であった。さらに以下のような学習感想を見ても，数学と現実事象とのつながりということが生徒にとって印象的であったことがわかる。

・複雑な形の音波のグラフでも授業で習った sin + sin の式の数値を変えるだけで再現できたことで数学を身近に感じることができました。（中略）三角関数のグラフは一見日常の生活とは無縁に見えますが深い結びつきがあることがわかりました。また，パソコンを使うことで手計算では求められない複雑な式も求めることができるのでそれを使ってもっと身近に数学を感じられたらいいと思いました。私はあまり数学が好きではありませんが，数式を現実につなげることができ，数学の楽しさを感じることができました。
・最後に電話をかけることができたときは，感動を覚えたとともに，身近な所に数学を応用したものが溢れていることを知ることができた。
・sin は日常生活に出てこないだろうというイメージが強かったのでとても驚いた。見えるところには少ないだけで，音などの見えないところにはたくさん隠れているのかもしれない。
・身近なところにも数学の基本的な部分が深く関わっていることに強い感銘を受けた。授業だけでも満足できるかもしれないが，こういった授業があることで数学へのさらなる興味と理解が深まると思う。
・実際の生活と数学につながりがあることを実感できて，楽しみながら数学を学ぶことができた。

また，「今後もこういった授業（PC を使った探究）をやってみたいですか」の問に対しては，「すごくやってみたい」が10人，「やってみたい」が19人と，4分の3近くの生徒が肯定的な回答をした。以上のことから，本教材で現実と学ぶ数学とのつながりを実感させる可能性があることを示し，さらにこのような授業が数学への関心を高めることに寄与し得ることが示唆された。一方で，グラフの特徴から式を考察するなどの，生徒が主体的に学習した数学を用いて考察をする様子を十分に見取ることができなかったことが課題としてあげられる。授業後のアンケートで「グラフの特徴をよく考慮しながら式を入力した」が19人，「少し考慮しながら」が14人と大多数を占めていることからも，大部分の生徒は主体的な数学的考察をしていたと考えられる。それが授業の中で明らかになり，全体として共有できるよう，ワークシートを活用して生徒の思考を顕在化するといった工夫が必要となる。

３．３．４．実践を振り返って

高等学校における「主体的に数学する」生徒を育む授業実践として，3つの授業について教材の概要と授業後の振り返りを述べた。どの教材も，「主体的に数学する」生徒の育成に貢献しうるものであるが，1時間の授業でその主体性を飛躍的に向上させることは難しい。単元を通して，さらに単元をまたいで，長期的な目で生徒の主体性を育成していかなければならない。また，生徒の主体性の育成に焦点を当てると同時に，それを適切に評価することの重要性を改めて認識した。生徒が主体的に活動しているところを適切に評価し共有することが，生徒全体の主体性を高めることに寄与すると考えられる。

（野島　淳司）

４．研究の成果と課題

（１）公開授業研究会と学会発表

本研究の1年次に当たる今年度は，教材や題材の収集（4月～ 3月）および授業研究（6月，8月，11月，1月，2月）を通しての授業記録の収集。各月の附属学校研究会での研究討議を通して主体的に「数学する」児童・生徒を育成するための授業について研究してきた。

公開授業研究会は以下の通り行い，各校からそれぞれ授業を観察し，授業後の研究協議会や定例の附属研究会において主体的に「数学する」児童・生徒を育成するための授業のあり方や教材などについて議論した。

小学校

平成28年6月11日（土） 4年「わり算の筆算」（授業者　永山　香織）
平成28年8月24日（水） 2年「たし算・ひき算」（授業者　稲垣　悦子）
　　　　　　　　　　　4年「2桁でわるわり算」（授業者　越後　佳宏）
平成28年11月19日（土）2年「分数」（授業者　稲垣　悦子）
平成29年2月 3日（金）2年「かけ算」（授業者　稲垣　悦子）
　　　　　　　　　　　4年「変わり方調べ」（授業者　永山　香織）

中学校

平成28年6月18日（土） 1年 （授業者　峰野　宏祐）
　　　　　　　　　　　2年 （授業者　鈴木　誠）
　　　　　　　　　　　3年 （授業者　傍士　輝彦）

高等学校

平成28年6月25日（土） 数学Ⅱ「図形と方程式」（授業者　菅原幹雄）
　　　　　　　　　　　数学Ａ「図形の性質」（授業者　吉岡　雄一）
平成28年10月3日（土） 数学Ⅰ「三角比（一部数学Ⅱの三角関数を含む）」（授業者　野島　淳司）

また，日本数学教育学会春季大会では附属世田谷小学校の越後佳宏が，日本数学教育学会秋季大会では附属世田谷小学校の永山香織が日本数学教育学会全国大会では，小学校から2名（稲垣　悦子，永山　香織），中学校から1名（峰野宏祐），高等学校から1名（菅原　幹雄）が，全国附属連合大会では中学校から1名（峰野宏祐），「高等学校から2名（西川史恵，野島淳司）が成果の一部を発表した。

（2）教材について

本研究の1年次では，児童・生徒が主体的に「数学する」ための教材開発を焦点に当てて研究を進めた。児童・生徒が主体的に「数学する」ために，数学をつくる・見出す活動をこれまで通り重視して，教材の開発が行われた。また，見出すためには，振り返りや対話的な話し合いも欠かせなかった。

小学校の実践では，児童が図やきまりを活用できない原因は，図をつくる経験やつくったきまりを活用する経験が不足していることにあると考え，図をつくったり，きまりを発見して活用したりする学習の授業を実践した。

第2学年の「たし算・ひき算」の単元では逆思考の場面を扱い，場面を把握し，立式するためには数量関係を表すテープ図のような図が有効に働く。しかし，教師がテープ図を与えてしまうのではなく，子どもにとって使える図である素朴な絵やブロックを用いて立式の根拠を説明させることから始めた。公式やきまりを学習するとき，自分たちで見つけ，導き出し，一般化していく過程が大事にされている。そうすることで意味がわかり，活用できるようになる。図も同じようにつくっていく過程で，数量関係を表す図のよさに気付き，つくった図が使える図，他の時にも生きて働く図になるのだと考えた。そして素朴な絵や図から，話し合って変えたり付け足したりしながら，数量関係を表す図をつくりあげていく授業を構想した。実践では，児童が立式の根拠として，問

題文や，場面を表す式をよりどころにしていて，なかなか図や絵をかかない姿があった。教師が意識的に，考えていることをブロックで表したりや絵にかく経験を設定することが必要になった。また，絵やブロック図など子どもにとって既習の図からテープ図に移行するときに，既習の図に数やその数の意味を書き込んで，その数と数の意味を表した文字はそのままにする手立てをとった。テープ図を初めて見た児童が「新しい図」ととらえるのではなくて，知っている図の一部が変わったととらえられるようにするための手立てである。このように児童なりの分かりやすい図とテープ図と往還しながら，数量関係を表す図へしていくことが大切である。

第4学年の「2桁でわるわり算」の実践では，単元計画を工夫し，導入でわり算のきまりを学習する計画にした。一般的に，「わり算のきまり」を発見する活動は単元の最後にくることが多い。しかし，その後の小数や分数のわり算の学習でそのきまりを活用して問題解決に生かすまでには至っていない。そこで，2けたでわるわり算の学習の導入段階で，それまで学習してきたわり算をもとに商一定のわり算のきまりを発見し，それをもとにして未習の2けたでわるわり算を発見し，わり算のきまりを活用できることを実感して，学習を進めていくことでわり算のきまりの有用性に気づかせ，その後も活用していこうとする態度を身につけさせようと考えた。実践では，既習のわり算を振り返り，教師が適切な問いかけをすることにより，わり算の商一定のきまりを子どもが主体的に発見する姿をみることができた。また，発見したきまりが本当に正しいのかどうか不安を持っている子どもの姿も見ることができた。このことは，「本当に正しいのか？」という次の課題につながり，主体的に「数学する」児童・生徒を育む授業づくりの一つの示唆となる姿と考える。その後の単元の学習をすすめる中で，子どもが発見したきまりをどのように活用したかを検証していくことが今後の課題として残っている。

中学校では，振り返る活動を重視し，新たな発見をしたり，証明の必要性に気づいたり，既習事項を総括して問題解決を行う授業が実践された。1つ目の実践では，帰納的に命題をつくらせ，ふり返る活動から教科書等で中学校3年「因数分解」の利用場面で，計算の工夫の1つとして取り上げられる方法に見出す展開が構想された。2つ目の実践では，小学校での既習事項であり，生徒たちにとって証明する必要性が薄いと感じる問題がある「三角形の内角の和が180°になる」ことについて，小学校の学習をふり返り，本当に180°と言ってもよいかを検討する場面を設定した。3つ目の実践は，中学校3年の「円」と「相似」の統合的に利用する問題解決である。解決に苦労するだけでなく，「明快な解法」を自ら発見すること，或いはそれを周囲から学ぶこと，自分とは異なる解法或いは更に美しい数学に触れることを構想した教材である。

高等学校では「主体的に数学する」生徒がもつべき力の一つとして，「課題を発見する力」に焦点をあて，その育成を目指した授業実践を行った。実践Ⅰではグラフソフトを，実践ⅡではOHPシートやワークシートを用意し，生徒自身が試行錯誤を通して課題を発見できるように工夫をした。また，現実世界の事象と数学のつながりについて授業で扱うことが生徒の「主体的に数学する」態度を育む方策の一つになると考え，プッシュフォンの音を解析する実践を行った。高等学校では，コンピュータを問題解決の道具とすることで現実世界の事象を扱うことが可能になり，現実の事象に対しても主体的に数学する態度の育成がはかられた。

数学をつくることから始め，主体的に「数学する」児童・生徒を育成するには，1時間の授業を考えていては不十分である。単元を通して，さらに単元をまたいで，長期的な目で生徒の主体性を育成していかなければならない。また，生徒の主体性の育成に焦点を当てると同時に，それを適切に評価することの重要性を改めて認識した。児童・生徒が主体的に活動しているところを適切に評価し共有することが，個々の児童・生徒の主体性を高めることに寄与すると考えられる。

（永山　香織・峰野　宏祐・野島　淳司）