

事象の探究を軸に据えた高等学校数学科の独自テキスト作成の試み ～「座標幾何」を例として～

Preparation of Original Textbooks for High School Mathematics Centred on the Exploration of Events — With a Focus on Coordinate Geometry —

数学科

新井健使 内野浩子 小林 廉 指田昭樹
高橋広明 成田慎之介 本田千春 東 龍平

1. はじめに

本校数学科は、数学的リテラシーの育成を主たる理念として、本校独自の6年一貫カリキュラムを定めている（例えば本校数学科，2012）。その特徴は、数学的モデル化の活動重視と、ICT利用を前提としていることにある。このカリキュラムを実施するためには、数学の内容理解と能力育成の両面のバランスをとりながら、数学的モデル化の活動を取り入れた授業を積極的に展開していく必要がある。そうした授業展開を保障するため、本校数学科では、現実事象の探究を軸に据えた独自テキスト『TGUISS 数学』シリーズを開発してきた。現在のところ、本校が準拠する国際バカロレア機構のMYPに対応して、第1学年用から第4学年用まで開発している。特徴的な点は、現実事象の探究を通して生徒たちにとって新たな数学を学習していく展開を紙面化していることである。本テキストを普段の授業で実際に用いながら、修正点などについて議論を重ね、内容の改善・充実を図ってきているところである。

さらに、2014年度からは第5学年・6学年用の独自テキストの開発を試みてきている。6学年は最終学年であるし、数学Ⅲを履修しない生徒にとっては5学年が新たな数学を学習する最終学年となる。本校のカリキュラムに基づく数学学習を終えようとする彼らにとってふさわしい数学授業のあり方は何か。そのあり方をある程度規定し、実施を保障する役割を担うテキストはどんなものであるべきか。こうしたテキストの追究は、本校だけでなく、改善が急務とされている高等学校数学科の授業全般に貢献できるはずである。

本稿の目的は、事象の探究を軸に据えた高等学校数学科の独自テキストの素案を作成することである。そのためにまず、『TGUISS 数学』の作成枠組み（西村ほか，2006）を基に、第5学年・6学年用の独自テキスト作成の枠組みを仮設する。次に、第5・6学年に位置づく単元「座標幾何」の一部に焦点をあて、その素案を作成する。実際のテキスト作成にあたっては、その素案を実証的に考察していく必要があるが、それは今後別稿にて報告する予定である。本稿の射程は素案の作成までである。

2. 独自テキスト作成枠組みの仮設

2. 1. 本校のカリキュラム

まず、独自テキストが基づくことになるカリキュラムについて確認しておく。

(1) カリキュラムの理念

本校数学科カリキュラムの理念は、「国際社会の一員として適切に判断し、行動できる人間を育成するために、数学的リテラシーを育成するとともに、数学に対する興味・関心を高め、豊かな感性を養う」ことである。「数学的リテラシー」については、「国際社会の一員として適切に判断し、行動できる人間を育成する」という目的に照らして、OECD/PISA2003の定義をもとに、次の4つの力で捉え、その育成を図ることを理念としている。

- ・ 確実な数学的根拠にもとづき判断する力
- ・ 数学的な記号や論理、適切なテクノロジーを用いて、数学的な操作を行う力
- ・ 数学を用いて、積極的に、豊かにコミュニケーションする力
- ・ 数学が世界で果たす役割を見つけ、理解する力

また、「数学に対する興味・関心」は、数学的リテラシーと相互に補完するものと捉えた。

なお、OECD/PISAにおける数学的リテラシーの定義は2012年調査から変更され、我が国においても数学的リテラシー論の研究が進んできている。これらを踏まえて本校のカリキュラム理念を再検討する必要も生じているが、それは今後の課題とする。

(2) 単元の学年配当

現行カリキュラムにおける単元の学年配当は以下のとおりである。このうち、5学年・6学年に該当する単元が、現在作成を試みている独自テキストの射程となる。

学年	領域		代数・関数	幾何・三角法	確率・統計	離散数学	時数
	科目名						
1年	数学1	数の見方	図形の見方	データの分析			4
		事象の見方					
2年	数学2	一次関数と方程式	平行と相似	相関と回帰			4
			図形の論証				
3年	数学3	いろいろな関数とグラフ	三平方の定理と三角比			数え上げ	4
4年	数学I	指数関数と対数関数		統計基礎			3
		方程式と不等式					
	数学A	整数の性質		確率		数列	2
5年	数学II	三角関数	図形と方程式				4
		微分・積分の考え					
	数学B		ベクトル				2
			2次曲線				
6年	数学III	関数と極限 微分法 積分法	複素数平面				5
	国際教養			統計		グラフ理論	1

図1 単元の学年配当

独自テキストにおいては、学習指導要領の内容をカバーするようにするが、一方ではその枠に縛られず、未来を生きる生徒たちにとって必要であると考えられる内容についてはテキスト化することを視野に入れておきたい。また、『TGUISS 数学』のように必ずしも学年ごとにテキストを用意すると決めるのではなく、異学年であっても単元間の接続を図るなど、柔軟な形に対応できるようにしておく。

(3) 第5・6学年における目標と評価の観点

本校は、第4学年までが国際バカロレア機構のMYP（ミドルイヤーズプログラム）¹に準拠している。MYP 数学では目標・評価の観点と評価規準が明確に定められている。これらの観点は2015年度から変更されている。それは次の4観点である。

規準 A	知識と理解
規準 B	パターンの探究
規準 C	数学的コミュニケーション
規準 D	数学の実生活における応用

図2 MYP 数学における目標・評価の観点

一方、本校では2016年度からDP（ディプロマプログラム）²が開始するが、DP 履修者は少数であるとともに、DP 数学には観点が用意されていない。そのため、本校数学科では第5・6学年の目標・評価の観点を作成した。先にその中身を示す。

<p>観点 A. 知識・技能</p> <p>〔目標〕 数学的概念を理解し、計算などの数学的操作を行うことができる。</p> <p>観点 B. プロセスと振り返り</p> <p>〔目標〕 B1：現実の問題を解決するために、定式化、処理、解釈・評価のプロセスを踏むことができる。</p> <p>B2：数学の事象からパターンや性質などを見だし、確かめ、発展させることができる。</p> <p>観点 C. 数学的コミュニケーション</p> <p>〔目標〕 数学的表現を用いて、積極的に、豊かに他者とコミュニケーションすることができる。</p>

図3 第5・6学年における目標と評価の観点

これらの観点は、本校カリキュラムの理念、MYP 数学との接続、学習指導要領が例示する評価の観点や、数学教育における評価の観点に関する研究などを勘案して設定された。

特徴的な点は観点 B「プロセスと振り返り」である。数学の内容とプロセスは決して切り離せるものではないが、プロセスの側面を強調し、評価するために観点として明確に位置づけた。さらに、反省的思考を促すために「振り返り」も明確に位置づけた。B1は、本校カリキュラム

が重視している数学的モデル化のプロセスを遂行する能力の育成に関わる観点であり、5・6学年においても引き続きその能力を育成していくことを示している。一方で、B2として、数学内での探究におけるプロセスを遂行する能力の育成に関わる観点を加えている。B2を設定した理由を以下に述べる。

数学はそもそも、数学外あるいは数学それ自身にて生ずる何らかの事象（問題）を探究する必然性や要求の下、その問題を解決するために先人たちの努力によって生みだされ、発展し、創り上げられてきたという側面を持つ（例えば吉田・赤，2013）。本校数学科は、数学とは創り上げられた「結果」であるという立場よりむしろ、数学を使い、創る「活動」そのものであるという立場に立っている。それゆえ、「数学的活動」を重視しているし、数学的活動におけるプロセスを重視しているのである。

島田（1977）による「数学的活動」（図4）を見るとわかるように、数学的活動には本来的に、現実の世界と数学の世界の両方に関わる活動と、数学の世界における活動の両面がある。このことを教育の文脈でより明確に述べたのが H.Freudenthal である。氏は、「人間が学ばねばならないのは、閉じた体系としての数学ではなく、むしろ活動としての数学であり、現実を数学化することの過程、さらには数学を数学化することの過程である」（Freudenthal, 1968, p.7）と述べた。現実および数学自身を対象とした数学化の実現を訴えたのである。

我々はこれまで、数学的活動における両面のバランスが保たれるべきであるが、我が国の数学授業ではとりわけ「現実の数学

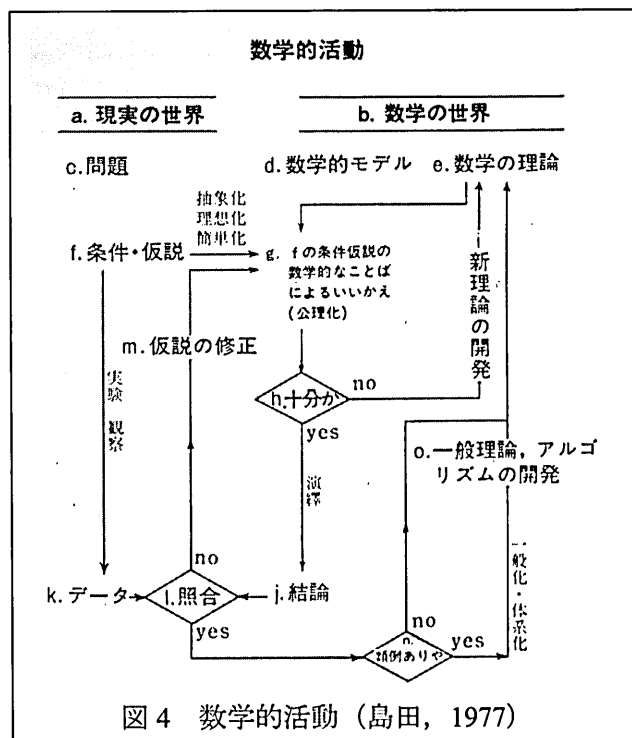


図4 数学的活動（島田，1977）

化」が欠けているため、数学的モデル化の重視を訴えてきた。しかしながら、数学科の指導内容には、本来的に「数学の数学化」を通して創り出されてきたものや、「数学の数学化」を実現してこそ教育的価値が生まれる単元がある。初等幾何はその最たる例であろう。高等学校数学科ともなると、本来的な探究対象が数学自身である単元が多くなる。そうした単元において無理に現実事象の探究を取り入れることは適切ではない。そこで、数学自身を対象として例えば「発展的に考える」ことや「拡張・一般化する」といった「数学の数学化」、数学の世界における活動を観点 B2 として明確に位置付けることにしたのである。ただし、こうした単元において現実事象を決して取り入れないということではない。数学はその歴史上、純粋に数学内で発展したにも関わらず、その結果が他分野に使われていくという興味深いことが起きているからである。

2. 2. 『TGUISS 数学』の作成枠組みの再検討

『TGUISS 数学』の作成枠組みは次の4つの要素から成っている（西村ほか，2006）。

- i) 探究過程で生徒にとっての新たな数学的概念や知識を学ばせることを意図した展開にする。
- ii) 数学的モデル化に関わる力を総合的に育成することを意図して探究課題や問いを工夫する。
- iii) 数学的にコミュニケーションする力を育成することを意図して、グループで協力して実験をしたり、問題を解決したりする機会を設ける。
- iv) 探究を通して得た数学的概念の理解を深め、数学的モデル化過程に関わる力を伸ばすことを意図して、節や章の最後に、練習問題やレポート課題を設ける。

図5 『TGUISS 数学』開発の枠組み（西村ほか，2006）

要素 i は、検定教科書と際立って異なる『TGUISS 数学』の特色を示している。これは、現実事象の探究に数学を使いながら新たな数学を生み出していくという数学的活動の紙面化を試みているとも言えるものである。数学的活動やプロセスの重視が叫ばれる昨今、より一層重要視される要素である。また、ここに数学の内容とプロセスのバランスをとる鍵がある。生徒たちにとって新たな数学の内容は、何らかの現実事象に対して数学を使い、生み出すプロセスが発揮されることにより生み出されていくことを想定しているからである。

要素 ii は、数学的モデル化に関わる力という、数学科で育成すべき力の育成を規定している。単に現実事象を授業に取り込んで数学の有用性を実感させることに留まらず、数学的モデル化のプロセスを遂行する力の育成を意図しているのである。これは先の目標・評価の観点 B1 に対応する。なお、数学的モデル化に関わる力の中身は、「算数・数学と社会をつなげる力」（長崎ほか，2001）を参考にしている。

要素 iii は、協働的な問題解決能力の育成が叫ばれる昨今において、より一層の意味を持ってきている。要素 iv は、数学の内容理解の伸長のための練習問題だけでなく、数学的モデル化過程に関わる力を育成するための練習問題の必要性を指摘している。

以下、これらの視点に加えて考慮すべきものを検討することにより、独自テキスト作成の枠組みを発展させていく。

第一に、テキストを通して、数学的モデル化に関わる力を含めた「数学の力」を育成することである。これは、目標・評価の観点として B2「数学の事象からパターンや性質などを見いだし、確かめ、発展させることができる」を掲げたことに対応する。例えば長崎ら（2008）は、算数・数学の力を大きく「算数・数学を生み出す力」、「算数・数学を使う力」、「算数・数学で表す力」、「算数・数学で考え合う力」の4つで構成し、その中身を詳細に検討している。本校第4学年までは主として「数学を使う力」を重視してきたと言えるが、今後は「数学を生み出す力」の育成についても改めて検討していく必要がある。その際、長崎ら（2008）が挙げている力の中身を参考にできる。ただし、数学の内容（諸性質や定義、定理とその証明、計算方法など）とプロセスを切り離して検討すべきでないことは重ねて強調しておきたい。現実の事象であれ数学の事象であれ、それに対して数学を使い、生み出すプロセスが発揮されることによ

り、新たな数学の内容が生み出されていく。そしてまたその内容が使われていく。そうした活動を通して、数学のプロセスを遂行する力、すなわち「数学の力」を育成することを目指すのである。と同時に、数学の内容の確かな理解を目指すのである。

第二に、数学の方法（これもまたプロセスである）や意義をテキストに明示することである。この点は、『TGUISS 数学』でも一部実現されている。例えば以下の記述は、『TGUISS 数学 1』の単元「事象の見方」にある記述である。

文字式を用いることには、数学的なしくみを明らかにすることができたり、そのしくみを説明したりできるよさがある。

図6 『TGUISS 数学』における数学の意義の明示の例

長崎ら（2010）は、数学科教科書の国際比較を通して得られた教科書改善の視点の一つとして、数学の方法や意義を明示することを挙げている。もちろん、特に数学の意義は生徒自身に実感されるべきものであるし、その実感も生徒によって異なりうるから、意義を明示してそれが見えてしまう形にすることの危険性もある。しかし我が国の、とりわけ高等学校数学科の検定教科書となると、数学の内容は洗練された形で記述されているが方法や意義についてはあまりに記述が少なすぎる。記述の程度については検討する必要があるが、テキストに、数学の内容だけでなく方法や意義をある程度明示することを考えてもよいのではないだろうか。少なくとも、方法や意義の実感を促す問いを入れる必要があるだろう。このことは探究の「振り返り」を促すことと密接に関連する。すでに『TGUISS 数学』においても一部実現されていることではあるが、この点を枠組みの要素として明確に位置付ける。

第三に、理想的な授業展開を意識した構成にすることである。授業をイメージして紙面化を試みることは『TGUISS 数学』の作成において既に行っていることである。その視点を表面化させ、我々作成者がより意識できるようにしておく。長崎ら（2015）は、英国や米国のデジタル教科書が授業デザインまで踏み込んでおり、しかも我が国の算数授業の特徴である問題解決型の授業展開を想定していることを指摘している。事象の探究を軸とする数学授業は必然的に問題解決型の授業となるはずであり、それは数学を活動とみなす我々の数学観にも合致する。その授業展開を想定してテキストの紙面化を試みるのである。ただし、このことには、生徒自ら気付いてほしい問いや、教師が次に問うべき問いが見えてしまうという課題が残される。だからこそデジタル教科書が生きてくるのであるが、その点は今後の課題となる。

2. 3. 高等学校数学科の独自テキスト作成の枠組み

本稿 2.1 や 2.2 で述べてきたことを、指導目標・内容・方法の3観点から整理し、独自テキストの作成枠組みとして仮設する（図7）。「仮設する」という言葉には、この枠組みで独自テキストの作成に取り組みつつ、枠組み自体を適宜改善していくという意味を込めている。

要素Ⅰ・Ⅱ・Ⅳ・Ⅴは『TGUISS 数学』の要素ⅰ～ⅳを引き継ぐものである。要素Ⅰでは、探

究する事象は現実の事象や数学の事象の両方を想定しているため、単に「事象の」という文言を付け加えた。要素Ⅱは、「数学的モデル化に関わる力」に限られない、「数学を使う力」と「数学を生み出す力」の両方を育成することへと変更し、そのためのプロセスの側面を強調した。要素Ⅴでは、「数学の力」の構造化（長崎ほか，2008）に対応して、数学的コミュニケーション力を「数学で表す力」と「数学で考え合う力」の2点に具体化した。

これらの要素に加えて、本稿2.1や2.2で検討したことから、要素Ⅲと要素Ⅵ、Ⅶを入れ込んだ。また、本校カリキュラムが前提としているICTの活用は、数学の事象に対しても当然ながら有効である。それゆえ、この点を枠組みとして明確に位置づけることにした。それが要素Ⅷである。

		枠組みの要素
目標	視点 A	I. 事象の探究過程で生徒にとっての新たな数学を生み出すことを通して、数学的概念を理解できる展開にする。
	視点 B	II. 数学を使う力や数学を生み出す力を育成することを意図して、数学のプロセスを遂行するための探究課題や問いを工夫する。 III. 数学の方法や意義を明示したり、その実感を促すための問いを設けたりする。 IV. 事象の探究を通して得た数学の内容理解を深め、数学を使う力や数学を生み出す力の伸長を意図して、節や章の最後に練習問題やレポート課題を設ける。
	視点 C	V. 数学で表す力や数学で考え合う力を育成することを意図して、他者と協働的に問題解決を図るための探究課題や問いを設ける。
内容	VI. 学習指導要領の範囲は全てカバーするが、必要に応じてそれ以上の内容を取り入れたり、異学年に位置づく単元間の接続を図ったりする。	
方法	VII. 問題解決型の授業を想定した展開にする。 VIII. ICTの活用を前提とする。	

図7 独自テキスト作成の枠組み（仮）

まずはカリキュラムに基づいて要素Ⅵがある程度確定している必要があるが、とりわけ重要であるのは、要素Ⅰ～Ⅲである。これらの要素が具体化されれば、他の要素も自ずと定まってくる。すなわち、まずは次のような問いに答えていく教材研究が不可欠である。

- 当該単元で生み出されるべき内容は何か
- 当該単元で遂行されるべきプロセスは何か
- 当該単元の意義は何か
- 以上の点の実現されるための事象（探究課題）とはどんなものであるか

次章では、以上の枠組みに基づいて、単元「座標幾何」のテキスト素案を作成する。

3. 単元「座標幾何」素案の作成

3. 1. 単元「座標幾何」の目標と節構成および内容

本稿では、第5・6学年に位置づく単元「座標幾何」に焦点をあてる。ここでいう「座標幾何」とは、現行学習指導要領でいえば数学Ⅱ「図形と方程式」と、数学Ⅲ「いろいろな曲線」における2次曲線にまたがるものである。本校においてもこれらの単元は別の科目に位置づいているが、これらの内容はともに解析幾何学（ただしベクトルはのぞく）である。そこで、単元としては一つにしておき、両方の科目で利用することを考えたのである（枠組みの要素Ⅵの適用）。以下に、「座標幾何」の目標と節構成および内容を示す。

[目標]

直線や曲線などの平面図形に関する条件を適切な座標系や式を用いて表現・処理し、それらの図形の性質や関係を見いだしたり確かめたりできるようにするとともに、その方法を事象の考察に活用できるようにする。

[内容]

第1節 図形と方程式・不等式

直線や円などの基本的な平面図形に関する条件を直交座標や方程式・不等式を用いて表現・処理し、それらの図形の性質や関係を見いだしたり確かめたりするとともに、その手法を事象の考察に活用する。

第2節 二次曲線

放物線、楕円、双曲線が二次式で表されること及びそれらの二次曲線の基本的な性質を見だし、理解すること。

第3節 曲線のいろいろな表し方

媒介変数の意味及び曲線が媒介変数を用いて表されること、また、極座標の意味及び曲線が極方程式で表されることを理解し、それらを事象の考察に活用すること。

[用語・記号] 焦点, 準線, 媒介変数, 極座標, 極方程式

図8 「座標幾何」の目標と節構成および内容

本稿では、第1節「図形と方程式・不等式」の一部の素案を作成する。

3. 2. 「座標幾何」の内容・プロセス・意義

「座標幾何」で生み出されるべき内容、遂行されるべきプロセスは何であるか（要素Ⅰ・Ⅱの適用）。そして、「座標幾何」の意義はどこにあるか（要素Ⅲの適用）。

先述したように、『TGUISS 数学』は数学的モデル化のプロセスを重視している。このプロセスは様々に図式化されているが、以下では三輪（1982）による図式を、島田（1977）のように現実の世界と数学の世界に分けた形で記す（ただしこれはあくまで便宜上の区分けである）。また、それに伴って、もともと三輪（1982）の図式で「現実の世界」となっていたプロセスの最初の文言を、「現実の問題」と記す。

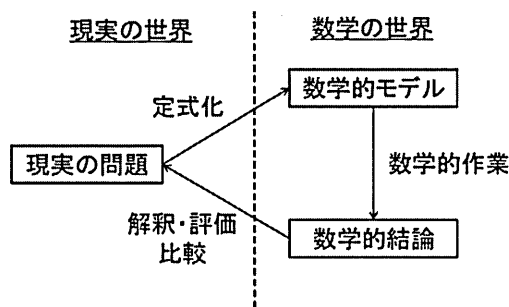


図9 三輪(1982)の数学的モデル化のプロセス(一部改変)

これに対して、「座標幾何」で扱う主たる事象(問題)は、幾何(図形)そのものである。ただし初等幾何と異なり、対象の図形に対して代数的手法を持ち込むのである。幾何の問題を方程式や不等式に表現することにより、計算規則に従って形式的に変形を進めることができる。この形式的処理によって思考の節約が可能となる。そして代数的結論をもとに、当初の幾何の問題を解釈・評価するわけである。初等幾何学には美しく興味深い定理や性質があり、その教育的価値も高いが、一方で幾何の問題解決には何らかの「閃き」を必要とする難所を持つものもある。解析幾何学は、その難所を代数の形式的処理で押し切る手法を提供するのである。これこそが、解析幾何学が歴史上で創出された要因であり、その意義である³。代数であれば形式的に変形できるからこそ、幾何に代数を持ち込むのである。この解析幾何学的手法のプロセスを、図9の図式を援用して次のように記す。

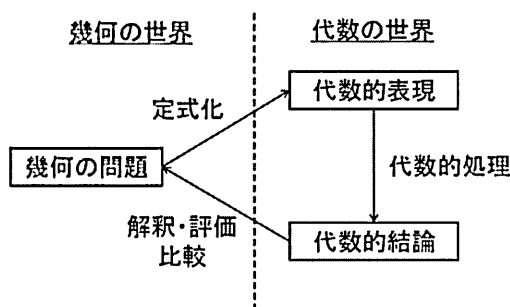


図10 「座標幾何」における解析幾何学的手法のプロセス

このプロセスこそが、「座標幾何」でまず身に付けるべきプロセスである。同時に、このプロセスが遂行されていく中で、図形に対して座標を持ち込む(座標平面上に図形をのせる)というアイデアや、点・直線・曲線に対応する代数的表現が生み出されていく必要がある。

また、幾何と代数の対応がついてくると、今度は代数的表現を幾何学的に解釈することが可能になる。これは中学校数学科においても素朴になされていることである。すなわち、図10における幾何の世界と代数の世界を逆にしたプロセスもまた、身に付けるべきプロセスである。

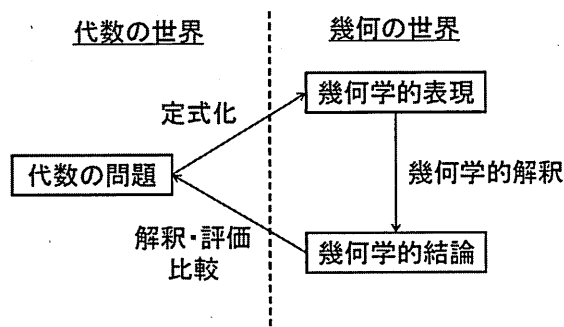


図 11 代数の問題を幾何学的に解釈するプロセス

さらに、「座標幾何」で扱う主たる事象（問題）は、幾何（図形）そのものであると先に述べたが、現実の問題が事象になりえないのかという点を決してそういうわけではない。図 10 と図 11 のプロセスは、図 9 のプロセスにおける「数学の世界」でのプロセスに入り込む。前者は、現実の問題を図形化した上で、解析幾何学的手法を用いることに該当する。後者の典型例は線形計画法である。

3. 3. 探究すべき事象

では、どんな事象を探究させるべきか。ここでは大きく 2 つの事象について述べる。

第一に、「三角形の五心」である。これは第 1 節「図形と方程式・不等式」で中心課題に据えた。これらは、そもそも必ず一点で交わること自体不思議なことであるし、それぞれが興味深い性質を有するだけでなく、オイラー線や九点円のような、人々を魅了させる性質を有している。また、点・直線・円という基本図形を含むだけでなく、辺の比や距離、何より軌跡に関する性質を有しており、それらを代数的に表現しようとすれば、現行学習指導要領における「図形と方程式」で学習することのほとんどを学習できてしまう。

では、三角形の五心をどのように探究させるか。ここでまず着目したのが垂心の証明である。垂心の証明は、数学 A の教科書⁴において、次のように初等幾何的に証明されている。

証明 右の図のように、 $\triangle ABC$ の各頂点 A, B, C を通り、それぞれの対辺に平行な直線で作られる $\triangle LMN$ を考える。頂点 A, B, C から対辺またはその延長に下ろした垂線の足をそれぞれ、 D, E, F とする。このとき、 $AD \perp BC, BC \parallel NM$ であるから、 $AD \perp NM$

また、2 つの四角形 $ABCM, NBCA$ はともに平行四辺形であるから、 $NA = BC = AM$

したがって、 AD は線分 NM の垂直二等分線である。

同様にして、 $\triangle LMN$ において、 BE, CF は、それぞれ辺 NL, LM の垂直二等分線となり、定理 7 から 3 辺の垂直二等分線 AD, BE, CF は 1 点で交わる。

よって、三角形の 3 頂点から対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる。

図 12 垂心の証明（啓林館『詳説 数学 A』）

ここでの定理7とは、外心すなわち「三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる」である。 $\triangle ABC$ の外側に、それぞれの対辺に平行な直線で作られる $\triangle LMN$ を用意することにより、 $\triangle ABC$ の3頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線の交点は、 $\triangle LMN$ の外心に帰着される。よくできた証明であるが、一方で、生徒が自力で証明できるかという点、 $\triangle LMN$ を用意するという発想が難しいであろう。ここを乗り越えるには、まさに閃きが必要であるように感じられる。これに対して解析幾何学的手法であれば、3頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線を方程式で表してしまえば、あとはそれらの連立方程式の解が一つに定まることを示せばよいだけになる。外心の証明を用意しておく必要もない。垂心の証明は、初等幾何学的証明と対比することによって、解析幾何学的手法の意義を実感させられる教材となりうるのではないだろうか⁵。垂心の証明を通して、図10のプロセスを遂行させ、その意義を実感させることを試みるのである。同時に、直線の方程式やそれらの直交条件を生み出すことができるであろう。

次に、外心、重心の証明を扱う。前者の垂直二等分線は、垂心のときと似た考え方で方程式に表すことができるとともに、「軌跡」の意味を確認するよい機会である。また、垂直二等分線を表す際に中点座標を扱っておけば、重心において中線の方程式を表すことができるようになる。さらに、外心を題材としたところで外接円を方程式に表すことが考えられる。ここで軌跡を解析幾何学的に求める手法を明確に扱うのである。現行の検定教科書では軌跡よりも円の方程式が先に位置付けられているが、円の方程式は結局のところ軌跡を求める手法で導出されている。であるならば、外接円を方程式で表す際にその手法を明確に扱い、今後積極的に活かしていくことを意図するのである。同時に、ここで円の方程式を生み出す。

ここまでくれば同様に内心と傍心を解析幾何学的手法で追究したいところであるが、その証明を行おうとすると複雑になり、初等幾何学的証明の方が簡潔である。ただし、角の二等分線を方程式に表すことは、軌跡を求める手法を活かして行うことができる。そこでは直線と点の距離が問題になることから、「点と直線の距離」の公式を生み出すよい機会となる。

また、垂心・外心・重心を題材として扱っていれば、今度はオイラー線を題材とすることができる。ここでは図形描画ソフトを活用する(枠組みの要素Ⅶの適用)。自由に三角形を動かすことによって、垂心・外心・重心が一直線上に並ぶこと(正三角形の場合は一致すること)に気づき、その命題を解析幾何学的手法で証明するのである。これは、ここまで用いてきた解析幾何学的手法のプロセスを評価する課題になりうるだろう(枠組みの要素Ⅳの適用)。

第二に、現実事象としての、「東京タワーとスカイツリーが同じ高さに見える位置は？」である⁶。これは、2011年に東京新聞に掲載された記事(後掲)を題材としたものである。この事象の探究は、図9の数学的モデル化に図10の解析幾何学的手法が組み込まれたプロセスの遂行を意図する。その数学的モデル化のプロセスに生徒の実際の活動を位置づけると図14のようになる。

東京タワー(以下、Tとする)と東京スカイツリー(以下、Sとする)と見ている人をそれぞれ三角形で幾何学化すると、見ている人の位置がいろいろありうることがわかり、現実の問題は「 $PS:PT=2:1$ を満たす点Pの軌跡」という数学的モデルに定式化される。この軌跡はアポロニウスの円に他ならない。実際の軌跡は、地図上に直交座標を設定することによって、解析

幾何学的手法を用いて求めることができる。その円を地図上に描くことによって、東京タワーとスカイツリーが同じ高さに見える場所を特定するのである。

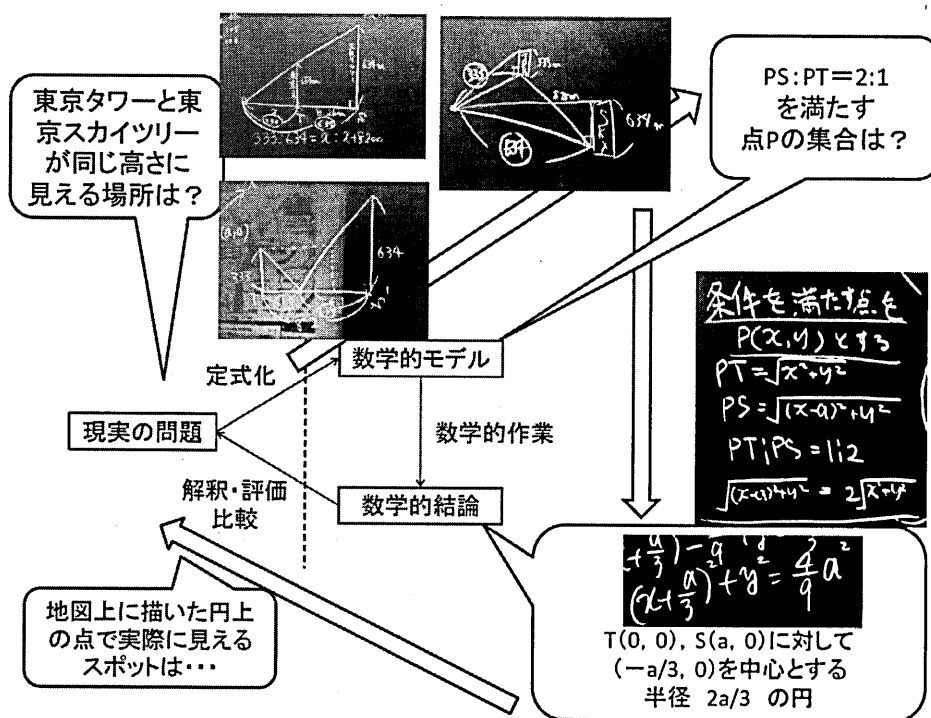


図 14 「東京タワーとスカイツリーが同じ高さに見える位置は？」の解決プロセス⁷

図 9 の数学的モデル化に図 10 の解析幾何学的手法が組み込まれたプロセスを実現できることがわかる。三角形の五心についての探究を終えた後の事象として、本校独自テキストにとっても適したものであると言えるだろう。

なお、数学的モデル化のプロセスに図 11 の「代数の問題を幾何学的に解釈するプロセス」が組み込まれたプロセスを遂行させるための問題としては、先述したように線形計画法が考えられるが、本稿では割愛する。

3. 3. テキスト紙面の素案

以上を踏まえ、単元「座標幾何」の 1 節「図形と方程式・不等式」のテキスト素案を示す。ただし紙幅の都合上、「三角形の五心」の一部と、「東京タワーとスカイツリーが同じ高さに見える位置は？」に焦点化して示す。

紙面を見るとわかるように、枠組みの要素Ⅶ「問題解決型の授業を想定した展開にする」を適用している。また、事象の探究を通して数学の内容を生み出すためには、事象の探究にて行った活動自体を対象化すること (H.Freudenthal, 1973) が不可欠である。そのため、『TGUSS』同様、テキスト素案は探究課題 (探究) と、探究で生じたアイデアや概念や操作自体を対象化するための問い (Q) とで構成した。

§ 1 図形と方程式・不等式

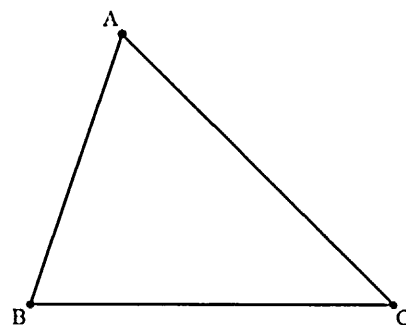
『TGUISS 数学 2』では、2元1次方程式 $ax+by=c$ のグラフは直線であることを学んだ。これは、逆に言えば、直線という「図形」を、 $ax+by=c$ という「方程式」で表すことができるということである。このようにして、「図形」の問題を「方程式」で表し、計算や式変形を活かして解決しようとする方法が17世紀に生み出された。本節では、その方法を獲得しよう。

探究 1 三角形の3頂点から対辺に下ろした垂線が1点で交わることを証明しよう

三角形の3頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は、1点で交わる。この命題が真であることを、方程式を用いる方法で証明してみよう。

■問1 三角形の3頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線が1点で交わることを、作図をすることによって確かめなさい。

■問2 図形についてこれまでに学習してきたことを活かして、上記の命題が真であることを証明しなさい。



■問3 図形を方程式で表すには何が必要になるだろうか。

■問4 右の図のような一般の三角形に対して座標軸を設定し、3頂点 A, B, C の座標を表しなさい。

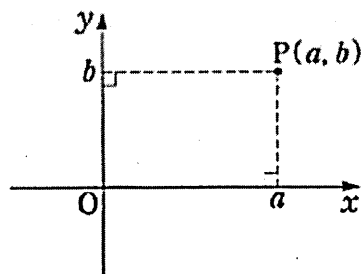
■問5 直線 AB と、頂点 C から線分 AB におろした垂線の方程式を求めなさい。

■問6 上記の命題が真であることを証明しなさい。

このように、図形に座標平面を導入し、図形を方程式で表して、図形の性質を証明する方法がある。

座標平面上の点 P の位置は、右の図のような実数の組 (a, b) で決まる。

この (a, b) を点 P の座標といい、座標が (a, b) である点 P を $P(a, b)$ と表す。



傾きが m で、 y 軸と点 $(0, n)$ で交わる直線は、1 次方程式 $y = mx + n$ で表される。この直線を、直線 $y = mx + n$ といい、 $y = mx + n$ を、この直線の方程式という。

一般に、 x, y についての方程式を満たす点 (x, y) の集合を方程式の表す図形という。また、その方程式を図形の方程式という。

Q 2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が平行となる条件、また垂直となる条件を求めよう。

Q 次の直線の方程式を求めよう。

- (1) 点 $P(x_1, y_1)$ を通り、傾き m である直線
- (2) 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ を通る直線

○2 直線の平行と垂直○

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が平行 $\Leftrightarrow m = m'$

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が垂直 $\Leftrightarrow mm' = -1$

○1 点と傾きの与えられた直線の方程式○

点 $P(x_1, y_1)$ を通り、傾き m である直線の方程式は、 $y - y_1 = m(x - x_1)$

○2 点を通る直線の方程式○

異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は、

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{のとき} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

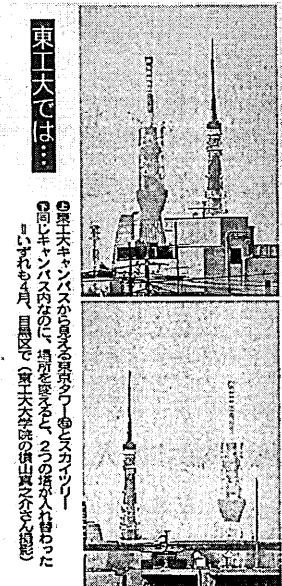
$$x_1 = x_2 \quad \text{のとき} \quad x = x_1$$

一般に、 x, y についての 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形は直線である。この方程式で表される直線を、直線 $ax + by + c = 0$ という。

確認 一般に「直線の方程式」といったときの方程式は、 $y = mx + n$ の形ではなく $ax + by + c = 0$ の形を用いる。それはなぜだろうか。



■問4 東京工業大学からは、2つのタワーが同じ高さに見えつつも、左右が逆の位置になって見える場所が存在する。なぜそのようなことが起こるのだろうか。



2011・8・11 東京新聞

一般に $m \neq n$ のとき、2 定点 A, B に対し、 $AP : BP = m : n$ を満たす点 P の軌跡は、線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円を **アポロニウスの円** という。

$m = n$ のときはどうなるんだろう？

4. おわりに

本稿では、事象の探究を軸に据えた高等学校数学科の独自テキストの作成枠組みを仮設するとともに、単元「座標幾何」の一部に焦点をあて、その素案を作成した。

今後の課題を何点か述べる。第一に、本素案を単元を通して実証的に考察し、洗練していく必要がある。実証的考察はすでに進行しており、その結果はいずれ別稿にて報告する予定である。第二に、他の単元についても同様の作業を進めることである。こちらについても、すでにいくつかの単元の検討を行っているところである。第三に、これらの作業を通してテキスト作成の枠組み自体も発展させていくことである。我が国の数学教育研究では、教科書に関する研究が少ないと言われている（長崎ほか，2015）。本校数学科の研究はその点で貢献できるものになるだろう。そして最後に、デジタル教科書の可能性について検討することである。現在、国を挙げてデジタル教科書のあり方について検討が進んでいる。一方で、紙面をデジタル化しただけであるような教科書も散見される。数学教育として価値のあるデジタル教科書を追究していく際にも本校の研究は貢献できると考えている。

註

¹国際バカロレアのMYP（ミドルイヤーズプログラム）は2015年度より“NEXT CHAPTER”として大幅な改訂が図られた。数学の目標・評価の観点も以前のものから変更されている。

²国際バカロレアのDP（ディプロマプログラム）数学のカリキュラムについては、内野・西村（2015）を参考。

³吉田・赤（2013）は、解析幾何学の発明者の一人であるデカルトが、幾何学は「ただ図形の観察にのみ限られるために、想像力をひどく疲れさせることなしには理解力を働かせることができない」こと、代数学は「若干の規則や若干の記号に盲従させられるために、人はこのものをもって精神を陶冶する学問とはせずして、それを悩ますばかりの混雑にしてわかりにくい技術としてしまった」と著書『方法序説』で述べていたことを読み取っている。また、氏は、解析幾何学の発明者であるデカルトとフェルマの違いについて、フェルマはあくまで幾何学本位であったが、デカルトは幾何学と代数学のそれぞれの欠点を補い合う新しい学問を樹立しようとしていたことを述べている。ただし、デカルトは実は「座標」という用語を明示的には用いていない。このことは中村（1980）に詳しい。

⁴数研出版『数学A』と第一学習社『高等学校 数学A』は垂心の証明を載せていない。

⁵本校数学科の研究会で三角形の垂心を探究課題とすることを議論した後知ったことであるが、大栗（2015）が、デカルト座標が有効に働く例として垂心の証明を挙げていた。氏は、初等幾何学的証明を「芸術的」と述べる一方、解析幾何学的証明には芸術性はないが「ひらめきを必要としないので方法を知っていれば誰にでも証明できる」（p.153）と述べている。

⁶この問題の素になった新聞記事（東京新聞，2011年8月11日付）は、東京学芸大学の西村圭一准教授が見つけたものである。

⁷この図に位置づけられている板書は、小林による2013年度の実践記録のものである。

引用参考文献

- OECD(2013).PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, *OECD Publishing*.
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- Freudenthal,H.(1968), Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1,3-8.
- Freudenthal,H.(1973), *Mathematics as an Educational Task*. D.Reidel Publishing Company.
- Freudenthal,H.(1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D.Reidel Publishing Company.
- デカルト (谷川多佳子・訳) (1997), 『方法序説』, 岩波書店.
- 内野浩子・西村圭一 (2015), 「国際バカロレア・ディプロマプログラムにおける数学の学習と評価」, 『日本数学教育学会誌』, 97(7), 23-32.
- 大栗博司 (2015), 『数学の言葉で世界を見たら』, 幻冬舎.
- 島田茂ほか (1977), 『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』, みずうみ書房.
- 東京学芸大学附属大泉中学校数学科・附属高校大泉校舎数学科 (2007), 「東京学芸大学附属国際中等教育学校 (仮称) 数学科カリキュラム案」, 『東京学芸大学附属大泉中学校研究集録』, 47.
- 東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科 (2012), 「数学的リテラシーを育む授業の創造～公開研究会の報告を兼ねて～」, 『国際中等教育研究』, 6.
- 東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会 (2011～), 『TGUISS 数学』, 正進社.
東京新聞, 2011年8月11日.
- 長崎栄三ほか (2001), 『算数・数学と社会・文化のつながり』, 明示図書.
- 長崎栄三ほか (2008), 「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」, 『日本数学教育学会誌』, 90(4), 11-21.
- 長崎栄三 (2010), 「未来を担う子どもたちのために算数・数学教科書の一層の充実を: 算数・数学教科書に関する国際比較調査のまとめ」, 『日本数学教育学会誌』, 92(9), 50-53.
- 長崎栄三・西村圭一・二宮裕之 (2015), 「国際的な視野から見た算数・数学教科書の研究・開発: 算数・数学教科書の研究と開発に関する国際会議 (ICMT2014) から」, 『日本数学教育学会誌』, 97(5), 11-20.
- 中村幸四郎 (1980), 『近世数学の歴史 微積分の形成をめぐる』, 日本評論社.
- 西村圭一ほか (2006), 「数学的モデル化を中心としたカリキュラムとその具体化」, 『日本科学教育学会年会論文集』, 30, 61-64.
- 三輪辰郎 (1982), 「モデル化」, 『現代教育学の基礎』, 286-289.
- 吉田洋一・赤攝也 (2013), 『数学序説』, ちくま学芸文庫. (原著は1954年に培風館より発刊)

Abstract

This article examines the preparation of a preliminary draft of original textbooks for high school mathematics centred on the exploration of events. We start with building a tentative framework for the preparation of original textbooks for Years 5 and 6 on the *TGUISS Mathematics* development framework (Nishimura et al., 2006). Then, we prepare a preliminary draft focusing on part of the “coordinate geometry” unit to be learned in Years 5 and 6. Actual preparation of the textbooks will entail empirical examination of the preliminary draft, which will be reported on another occasion; the present article only covers the process up to preliminary drafting.