国際中等教育研究　第8号　p.15～59
東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

「数学を使い，生み出す」活動の水準を高める手立て

～公開研究会の報告を兼ねて～

How to Raise the Level of Activities for "Using and Creating Mathematics"
— A Report on the Open Seminar —

新井健使　内野浩子　小林廉　指田昭樹　高橋広明　成田慎之介　福井正之

１．公開研究会における数学科の提案

１．１．本校数学科の理念

本校数学科では下記の理念のもと，独自の中等学校（中高一貫6カ年）数学科カリキュラムを開発してきた（例えば東京学芸大学附属大泉中学校数学科・附属高校大泉校舎数学科，2007）。

カリキュラムの理念
国際社会の一員として適切に判断し，行動できる人間を育成するために，数学的リテラシーを育成するとともに，数学に対する興味・関心を高め，豊かな感性を養う。

この理念を構築する上で参考としたのが OECD による「生徒の学習到達度国際調査」（以下 OECD/PISA と略記）である。OECD/PISA の 2003 年調査ではその評価の枠組みにおいて「数学的リテラシー」を次のように定義している　（国立教育政策研究所，2004)。

「数学が世界で果たす役割を見つけ，理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族や親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い，数学に携わる能力」(p.16)

本校では，OECD/PISA2003 の定義をもとに，「国際社会の一員として適切に判断し，行動できる人間を育成する」という目的に照らして，「数学的リテラシー」を次の４つの力で捉え，その育成を図ることを理念とした。

・確実な数学的根拠にもとづき判断する力
・数学的な記号や論理，適切なテクノロジーを用いて，数学的な操作を行う力
・数学を用いて，積極的に，豊かにコミュニケーションする力
・数学が世界で果たす役割を見つけ，理解する力

OECD/PISA の数学的リテラシーの定義については，DeSeCo プロジェクトによる「キーコンピテンシー」が背景にあり，この概念は世界的に大きな影響を与えている。

"EU では，キー・コンピテンシーを独自に定義して，域内の教育政策を推進する枠組みとした。同じ頃，北米を中心として，「21 世紀型スキル」を定義し，評価のあり方を検討するプロジェクトが進められた（The Partnership for 21st Century Skills）。また，「21 世紀型スキルのための教育と評価プロジェクト」（ATC21S）は，PISA2012 の問題にも取り込まれた。このような動きを受けて，キースキル（イギリス），汎用的能力（オーストラリア），キー・コンピテンシー（ニュージーランド）など，呼称は異なるが，21 世紀に求められる資質・能力を定義し，それを基礎にしたナショナルカリキュラムを開発する取り組みが潮流となっている。"

（国立教育政策研究所，2004，p.13）

したがって本校数学科のカリキュラムはグローバルスタンダードに立脚したものであると捉えている。

さらに本校は国際バカロレアのプログラムに基づいている。その中で例えば MYP 数学の目的は下記のとおりである（IBO，2014）。

MYP 数学では生徒が次のことができるようになることを目的としている

・数学を楽しみ，好奇心をかきたて，数学の美しさや力を認識し始める
・数学の原理や本性への理解を高める
・いろいろな文脈において明確かつ自信をもってコミュニケートする
・論理的思考力，批判的思考力，創造的思考力を育む
・数学的考え方や問題解決における自信や忍耐力や主体性を育む
・一般化する力や抽象化する力を育む
・幅広い現実場面や他の知の領域，あるいは将来の情勢に技能を適用したり転用したりする
・テクノロジーと数学の発展がどのように互いに影響を与えてきたかを認識する
・数学者の営みや数学の応用から生じた道徳的意義，社会的意義，倫理的意義を認識する
・数学の普遍性とともに多文化的視点や歴史的視点への着目を通して数学の国際的な様相を認識する
・他の知の領域への数学の貢献を認識する
・数学のさらに研究する上で必要な知識や技能，態度を育む
・自らの取り組みや他人の取り組みを批判的に振り返る能力を育む

これらはいずれも数学的リテラシーの重要な側面であると考える。

１．２．授業設計の方法とルーブリック

MYP では授業を設計する際に逆向き設計することが求められている。逆向き設計とは G.ウィギンズらによって提唱されたもので，以下の 3 つの段階からなる（G.ウィギンズ，J. マクタイ，(2012)）。

1. 求められている結果を明確にする。

2. 承認できる証拠を決定する。

3. 学習経験と指導を計画する。

この第 1 段階はすなわち，目標を明確にすることに他ならない。この数学の目標（objective）を MYP 数学では以下の A から D の 4 つの規準を設定している（IBO，2014）。

規準 A.知識と理解（Knowing and understanding）

知識と理解は数学を学ぶ基本となるものであり，概念を探ったり技能を育んだりする際の基盤となる。この目標は，馴染みがあったりあるいはそうでなかったりする様々な文脈の中での問題解決において，数学を選択したり適用したりする範囲を評価することである。

この目標では，4 つの領域（数，代数，幾何と三角法，統計と確率）の概念や技能についての知識や理解を生徒が示すようにしなければならない。

数学の目的に到達するために，生徒は以下のことができなければならない。

ⅰ．馴染みがあったりあるいはそうでなかったりする状況で問題解決する際に適切な数学を選択する。

ⅱ．問題解決する際に，選択した数学をうまく適用する。

ⅲ．様々な文脈において正しく問題解決する。

規準 B. パターンの探究（Investigating patterns）

パターンを探究することによって，生徒は数学的発見の興奮と満足感を得ることができる。探究する活動を通して，生徒が挑戦する人，探究する人，そして批判的に考える人となることが促される。探究する力は MYP において計り知れない価値を有しており，生涯学習にも寄与するものである。生徒が問題解決の技法をあまり用いる余地のないような課題は誘導的であり，結果的に Year1 または Year2 では高々レベル 6，Year3 では高々レベル 4 になる。しかし，すべての生徒が探究し始めることができるように，教師は十分な方向性を示すべきである。Year3 以上では，生徒が誤った発見に基づいて一般的な法則を記述していても，複雑さのレベルが同等であれば最高レベル 6 までで評価すべきである。数学の目的に到達するために，生徒は以下のことができなければならない。

ⅰ．複雑なパターンを発見するために数学的な問題解決の手法を選び，用いる。

ⅱ．見いだした事柄に基づき一般的な法則としてパターンを記述する。

ⅲ．一般的な法則を証明したり，検証したり，正当化したりする。

規準 C. コミュニケーション（Communicating）

数学は強力で普遍的な言語である。数学的なアイデアや推論，発見を伝え合う際に，生徒には口頭および記述の両方で適切な数学言語や異なる表現形式を用いることが求められる。数学の目的に到達するために，生徒は以下のことができなければならない。

ⅰ．口頭での説明および記述での説明の両方において，適切な数学的言語（表記法や記号，用語）を用いる。

ⅱ．適切な表現形式を用いて情報を伝える。

ⅲ．異なる数学的な表現形式間を行き来する。

ⅳ．数学的な推論の流れを，完全に理路整然と簡潔に伝えあう。

ⅴ．論理的な構造に基づいて情報を整理する。

規準D. 現実世界の文脈における数学の応用（Applying mathematics in real-life contexts）

MYP数学では，生徒が真正の現実場面での文脈における問題解決のためのツールとして数学を捉えることを奨励している。生徒は理論的な数学的知識を現実世界の状況に置き換え，適切な問題解決の方略を用いて有効な結論を導き出し，その結果を振り返ることが求められる。数学の目的に到達するために，生徒は以下のことができなければならない。

ⅰ．真正の現実場面の状況において関連する要素を特定する。

ⅱ．真正の現実場面の状況で問題解決する際に適切な数学的方略を選択する。

ⅲ．うまく解決に達するために選択した数学的方策を適用する。

ⅳ．解決の正確さの度合いを正当化する。

ⅴ．真正の現実場面の文脈において解が整合的かどうか正当化する。

さらにMYP数学ではこれらの規準に対し，Year1,3,5の3つの学年についてそれぞれルーブリックを示している。

本校数学科では，5,6年生についても，数学科カリキュラム策定の理念に基づき，目標とともに以下の観点を設定した。何らかの事象について数学を用いて問題解決を図るとき，「数学化」する活動が不可欠となる。H.Freudenthalは数学的活動の本質は「数学化（mathematizing）」にあると主張し，その数学化も“現実の数学化”と“数学の数学化”とが見出せると主張している（Freudenthal，1968）。また，A.Treffersは数学的な問題に変換する“水平的数学化（horizontal mathematizing）”と数学的に処理する“垂直的数学化（vertical mathematizing）”との2種類の数学化を基底として数学教育論を比較・検討している（Treffers，1987）。2012年度の公開研究会では，数学的活動について「現実的事象」からのアプローチと「数学的事象」からのアプローチを指向した授業を提案したが，その中で以下の点が課題として浮かび上がった。すなわち，“数学の数学化”および“現実の数学化”のプロセスを身に付けることを重視してきたが，そのことをどの程度生徒に意識させることができていたのか，またそういった力や態度が経年変化としてどの程度養われているのかということについての評価はあまり行ってこなかったことである。それに基づき，今後の課題として，そのようなシステムを構築していくとともに，授業設計という面においても，再度考究していく必要があることを掲げた（東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科，2012）。そこで，観点B.「プロセスと振り返り」については，現実的事象での問題解決場面と，数学的事象での問題解決場面とを想定し，それぞれについてB1およびB2として目標を設定した。

観点A. 知識・技能

[目標]　数学的概念を理解し，計算などの数学的操作を行うことができる。

観点B. プロセスと振り返り

[目標]　B1:　現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを踏むことができる。

B2:　数学の事象からパターンや性質などを見いだし，確かめ，発展させることができる。

観点C. 数学的コミュニケーション

[目標]　数学的表現を用いて，積極的に，豊かに他者とコミュニケーションすることができる。

さらに，それぞれの観点に対し，次のようにルーブリックを定めた。

観点A. 知識・技能

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	数学的概念をある程度理解しており，計算などの数学的操作を行うことができる。
3-4	数学的概念を概ね理解し，計算などの数学的操作を概ね行うことができる。
5-6	数学的概念を十分に理解し，計算などの数学的操作を十分に行うことができる。

観点B. プロセスと振り返り（B1）

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	現実の問題を数学の問題に直している。
3-4	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる。
5-6	現実の問題を数学的に解決可能な問題に直し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ解決過程および結論について振り返り，評価することができる。

観点B. プロセスと振り返り（B2）

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	数学の事象からパターンや性質などを見いだすことができる。
3-4	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，それが成り立つことを証明することができる。
5-6	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，それが成り立つことを証明し，発展させることができる。

観点 C. 数学的コミュニケーション

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	数学的表現や記号を用いている。 推論を行い，自分の考えを説明している。 他者の考えに対して，自分の意見を述べる。
3-4	正確な数学的表現や記号を用いることができる。 適切な推論を行い，自分の考えを説明している。 他者の考えに対して，自分なりの根拠に基づき，自分の意見を述べることが出来る。
5-6	正確な数学的表現や記号を効果的に用いることができる。 適切な推論を行い，自分の考えをわかりやすく説明することができる。 他者の考えに対して，適切な根拠に基づき，自分の意見を述べることが出来る。

１．３．本公開研究会におけるテーマ設定の理由

我々が授業を行うとき，その授業で達成したい目標を設定し，その目標に照らして実際の授業が行われる。この活動をより分析的に捉えると，授業を行う前にすでに生徒が遂行できると考えられる数学的活動の水準があり，授業後には何らかの高まりがあることを期待して授業は行われるはずである。高まりがなければ，そもそも授業を行う必要はないからである。この高まりを期待して本時の目標が設定されるべきである。すなわち，毎回の授業はその水準を高めることが目的となるはずである。しかし，想定した高まりまで到達しがたいことも考えられる。そのときには，教師は何らかの手立てをうち，目標とする高まりまで到達させようとするはずである。これを図式化したものが図 1-1 である。一般に問題解決における“問題”とは，現状とあるべき姿とのギャップとして定義される（例えば，細谷，1989）。すなわち問題解決とは，このギャップを埋めることである。

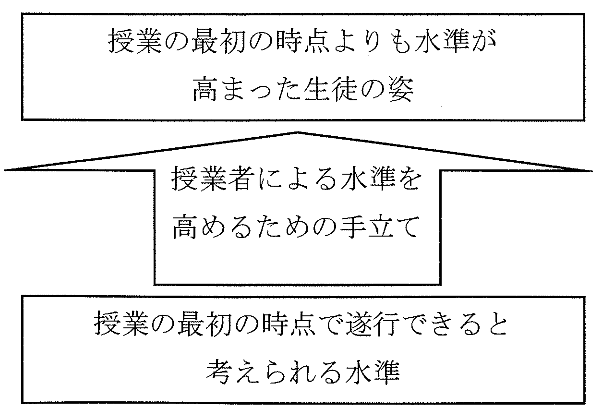


図 1-1：水準を高める授業の構造

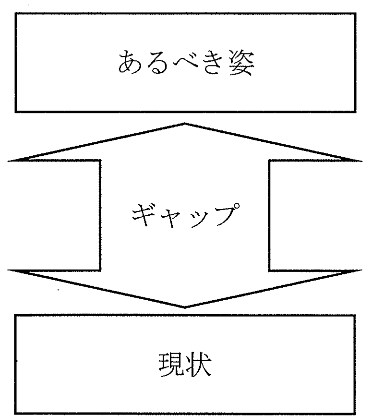


図 1-2：問題の定義

これらを対比すれば，授業における手立てとはギャップを埋めることにほかならず，つまり授業とは授業者の問題解決活動であると捉えることができる。したがって，このような授業を創

造するためには，現状を把握し，水準が高まった姿を明確にしながら，そのギャップを埋めるための手立てをあらかじめ考えておく必要がある。本公開研究会での 2 つの授業は，いずれもこのような授業の創造をねらったものである。なお，本研究会では数学的活動を「数学を使い，生み出す」活動と捉えることによって焦点化した。また，高める水準については，必ずしもルーブリックの Achievement level が上昇することのみを主張するものではない。Band の要素を分析的に捉えることにより，同じ Achievement level の band 内でも高まるべき水準はあるという立場である。また，授業を経て実際に高まりがあったかを評価しなければならない。すなわち，望むべき高まりをあらかじめ設定し，その高まりを客観的に評価することを考えたうえで授業を行うこととなる。まさしく逆向き設計の考え方である。これらの詳細について以下に示す。

【1 章参考引用文献】

Freudenthal,H. 1968.Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*.vol.1

IBO, (2014),『Mathematics guide』

A.Treffers.1987. Three Dimensions-A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-*The Wiskobas Project/D.Reidel.Pub.Com.*

国立教育政策研究所（監訳），(2004),『PISA2003 年調査　評価の枠組み』.ぎょうせい.

国立教育政策研究所，(2013),「社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理」，教育課程の編成に関する基礎的研究　報告書 5

東京学芸大学附属大泉中学校数学科・附属高校大泉校舎数学科，(2007),「東京学芸大学附属国際中等教育学校（仮称）数学科カリキュラム案」.東京学芸大学附属大泉中学校研究集録 47 集.

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科，(2012),「数学的リテラシーを育む授業の創造～公開研究会の報告を兼ねて～」，国際中等教育研究第 6 号，東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

細谷克也，(1989),『QC 的問題解決法』，日科技連

２．事象を数学的に表して考察する「数学を使う」活動
—ゲームを数学的に表現処理し，戦略を数学的に考察する—

２．１．本授業の趣旨

本校数学科のカリキュラムでは，現実事象を，数学を用いてより良くする，問題解決する，発展させることができる数学的リテラシーを育成することを教育目標にしている．それに沿って，本校オリジナルのテキストは，文脈の背景に数学の学習内容を含む現実事象を探究課題として設定し，それらを数学的に考え，問題解決をしていき，練習問題で類似の現実場面にフィードバックしていく流れで構成されている．また，この流れは，MYP next chapter の中で以下のように示される，Teaching and learning in the IB の図（図１）の流れに合致している．つまり，本校のカリキュラム理念と授業設計は，MYP の教育理念に沿うものであると考える．

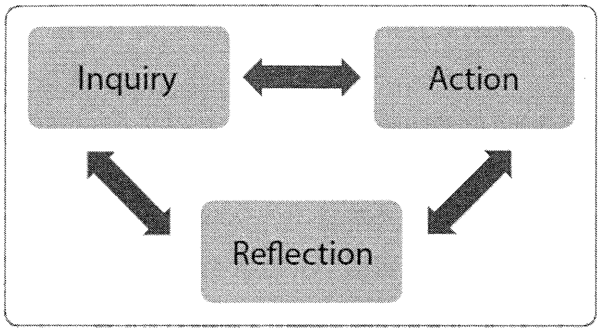


図 2- 1

この本校のカリキュラムの中で，1 年生の数学の第 2 章には「事象の見方」という独自の単元を設定している．これを設定している目的は，通常，学習指導要領で１年生が学習するように設定されている，比例する関数や文字式，方程式を包括的に捉え，それらの数学が現実事象を整理し捉えるためにとても有効でスマートな手段であるという側面から見ているところから始まる．具体的には，関数に関しては，現実事象の中の２つの数量関係を表やグラフを使って表す力を養うことに重点を置き，また再帰関係にある２つの離散的数量を数式で表すことに留まり，具体的な比例や関数式は２年次で学習させることにしている．また，文字式や１次方程式も事象の中の数量関係を数学的に捉えるという側面から学習をすすめるようにしている．よってこの第２章は，数学的リテラシーの育成を目的とする本校のカリキュラム理念を具現化した，オリジナルの単元の一つとなっている．別な角度から見ると，1 年の 1 学期の学習がこれから６ヵ年の数学の学習における，事象を数学的に捉えるという手始め的な構成を取っている．

また１年生はこの章の前の第１章「数の見方」で，数を様々な側面から捉える，扱うということをやってきた．具体的には，素数の性質を知り，素因数分解の良さ，最大公約数や最小公倍数と素因数分解との関わり，ユークリッドの互除法の良さ，数を剰余類的なあまりで分類してみる見方，正負の数を用いることの良さを現実場面の探究課題で学習してきた．

そこで今回は，１年生は 6 月下旬までに正負の数の学習をほぼ終える予定であることを考慮して，第１章と第２章のブリッジとしての課題学習を設定した．具体的には，学習した正負の数を用いて，事象の要素を数値化して表し，条件や状況を，表などを用いて整理して捉え，数学的に考察させる，この単元の手始めとしての学習課題を設定したい．特に今回の学習課題で

は，事象の中に変化する数量を含まず，事象そのものを数学的に捉え，表現することに焦点を置き，「数の見方」から「事象の見方」への学習のつながりをもたせ，学習の発展と学習の焦点の変化をスムーズに行わせたい．

ちなみに今回の学習課題では，表を用いて事象を捉えるという，本校オリジナルテキスト数学１の第２章でもあまり扱っていない内容を扱う．

２．２．学習課題のテーマと設定理由

「こんなとき数学的にはどのように捉え表現し，考えて決めたらいいの？」

～ゲームを数学的に表現処理し，戦略を数学的に考察する～

今回の課題設定にあたっては，第１章と第２章のブリッジとなるよう，まず正負の数を利用して，事象を表すことが可能なものを考えた．そしてさらにその表を数学的に活用できる場面を設定したいと考え，それらを満たすものとしてゲーム理論に注目した．

ゲーム理論の中でも基礎となるゼロ和ゲームや非ゼロ和ゲームなどは，正負の数を用いて利得を表し，数学的に戦略を考える．よってゲーム理論自体が事象を数学的に捉えて問題解決と意思決定を行うための学問であるため，その見方や考え方は事象を数学的に捉え考察する方法例の一つとして考えられる．特にゲーム理論の基礎的なところは，今回の課題設定にもふさわしく，生徒にとっても新しい見方を与えるものになるだろうと考えた．

ところでゼロ和ゲームは互いの損得が裏表になっており，単純で理解しやすい．また非ゼロ和ゲームのほうが，利得が複雑なものを表すので，現実事象の利得を表現するにはより適している．しかし例えば１年生の生活場面の中で２者が対峙関係にあり，数値で利得がはっきりと表されて，しかもゼロ和になっている場面はなかなかない．また価値観を数値で表すならば，設定も可能だが，その数値化の妥当性がかなり問われる．そこで身近な場面の中でのゲーム遊びという形をとって，ゼロ和となるゲームを現実場面の設定することにした．

またゼロ和ゲームにおいて戦略を考える場合，ミニマックス，マクスミン戦略という数学的な考察方法がある．それの戦略のベースには，２者が“できるだけ損をしないように”といういわばローリスクローリターンの価値観があり，その視点から表を分析すると，ある特定の戦略に両者とも落ち着くという鞍点があることがわかる．この戦略を用いての戦略思案は，大きな社会事象でいえば，国家間の交際問題における戦略にも使われることがあるという．また個人のレベルでいえば，他者との利得が絡む状況にも，“できるだけ損をしないためには？”ということを考えての意思決定の場面がある．

一方，それとは対照的に，“できるだけ得するには？”という価値観で戦略を考える場合がある．よくある状況は，“得を求めれば求めるほど，リスクが高くなる”というもので，いわばハイリスクハイリターンである．この戦略も社会事象でも個人の身近な事象でも考えられるものである．よって今回の課題学習では，表を活用して数学的に戦略を考える際，これらのハイリスクハイリターン，ローリスクローリターンを数学の学習の中で考えることで，個人や社会まで広がる経済や政治などにおける意思行動決定を，この小さなゲームの中で相似形としてとして経験し，最終的には視点を現実世界に戻すことで，holistic な視点からの学びとしたい．

2．3．使用する学習課題

"ゲームの戦略はどのように考えたらいいの？"

『ある1年生のクラスでは，HRのレクリエーションで，次のようなカードを用いた対戦ゲームを行うことになった．このゲームの数学的戦略とはどのようなものだろうか？』

『Which is lucky?』ゲーム

<ルール>

・2 人で対戦する

・以下のような数字が書かれた 4 枚組のカード1セットをそれぞれが持つ

7	−4	−6	3

・机を挟んで，両側に向き合って立つ

<対戦方法>

①じゃんけんをして，勝ったほうがプレーヤーAかプレーヤーBのどちらかを選ぶ

②トランプのババ抜きの要領で，手持ちのカードを数字が相手に見えないように，
自分の前に持つ

③互いに「（せーの，）Which is lucky?」と言うと同時に，一枚カードを選んで
自分の目の前に数字を見せて机に置く

④　ｉ）相手と自分のカードの数の積が正だったら，A がその絶対値の分だけポイントをもらい，逆にBはその絶対値の分だけポイントを失う

ｉｉ）相手と自分のカードの数の積が負だったら，B がその絶対値の分だけポイントをもらい，逆にAがその絶対値の分だけポイントを失う

⑤対戦は１相手につき3回行う

⑥3回分の対戦記録をとって次の相手とゲームを行う

⑦3人の相手とゲームを行ったら終了し，全部の獲得ポイントを合計する

★合計ポイントの一番大きい人が優勝となる！　　Good luck!!

この学習課題は，２．の学習課題のテーマに沿うものとして考案したものである．まずはゲームの利得を考え，数学的に表現処理した理想形の一つとして以下の表１が考えられる．

A＼B	−6	−4	3	7
−6	36	24	−18	−42
−4	24	16	−12	−28
3	−18	−12	9	21
7	−42	−28	21	49

表 2-１

カードの枚数は，少ないと簡単すぎるし，多すぎると戦略を考えるとき少々複雑になりすぎるという点を考慮して４枚とした．またカードの数値は当初絶対値が今より小さいものにしていたが，これくらいまで大きくても正負の加法の計算は大丈夫だろうと想定し，利得にメリハリをつけることにした．さらに当初はA，Bのカードの数値を違うものにしていたが，これはAのカードセットとBのカードセットのどちらかを持つことでも損得が発生し，論点がカードの出し方の戦略から外れることを防ぐために，A, Bとも同じ数値を扱わせることにした．そして，４枚のカードの数値の和が０になるようにして，１６パターンの積をプラスとマイナスでそれぞれまとめたときに同じになるようにすることで，A，Bのプレーヤーの立場に違いがないようにした．

また戦略を考えたときに，Aにとっては４９が最大の利得であり，一方Bにとっては最大の利得が４２と小さくなり，一見不利のようだが，－４２となる積のパターンが２つあることから，一概に不利とはいえない状況設定になっている．しかし，両者ともできるだけ損をしないようにカードを出すならば，両者とも３を出したほうがよい．その場合，Bは不利と考えられる．これらのことから，戦略に関して考察が深まる要素がたくさんある課題であると考える．

２．４．「逆向き設計」から設定する目的と評価規準

今回の課題は，第1章と第2章のブリッジとなる課題であり，また第1章で学習した正負の数を活用し，身近な事象を数学的に捉え，考察することを目標とするため，本校研究テーマである「逆向き設計」に基づき，まずはMYPにおける目的から，この課題において「数学を使う」活動で高めたい数学的力が，特にどの目的の内容に主に合致しているか検討した．MYP Next chapterでは，数学の目的として，以下の４つのタイトルを設定している．

目的 A: 知ることと理解すること
目的 B: パターンを探究すること
目的 C: コミュニケートすること
目的 D: 現実世界の文脈において数学を応用すること　　（これらは本数学科での仮訳）

この中で，今回の課題では事象を数学的に表現して，表を活用して戦略を論理的に推論する数学的力を高めたいこと，また戦略と意思決定が現実世界にも通じていることから，目的C: コミュニケートすること，目的 D: 現実世界の文脈において数学を応用することの２つに特化して，学習活動の水準を高めることを試みる．

またMYP Next chapterでは，評価規準を直接目的と連動して設定しているため，それに基づいたYear 3の規準 C:　コミュニケートすること，規準D: 現実世界の文脈において数学を応用することを用いて評価する．この学習課題全体を通しての目的や評価基準の詳細に関しては，１．をいただきたい．

２．５．対象生徒の実態

指導の対象となる1年4組の生徒26名は，附属大泉小学校からの選抜11名，A方式による選抜（外国語作文等による入試で，主に帰国子女が受験）7名，B方式による選抜（適性検査等によるもの）8名で構成されている．入学当初に行った学力推移調査によると，1年全体の算数の結果は，100点満点で全国平均よりも7.4点低い結果がでた．

今までの授業を振り返ると，やや発言は同じ生徒に偏る（だいたいA方式，B方式の生徒が活発）ことがあるけれども，毎回全員ほぼ集中して学習によく取り組んでいる．また隣どうしやグループでのシェアリングも互いに遠慮なく活発にできる．ちなみに担当しているもうひとつのクラスの１年２組でも発言は活発であるが，こちらは附属小学校出身の生徒もよく発言をする．またシェアリングも同様に活発である．

指導をしていて感じるユニークな特徴は，両クラスで同じ課題や問題を扱っていても，発言や反応，思考のタイプや種類など，2 つのクラスでかなり違いがあるということである．最近では１年２組の生徒はこちらの問いかけの言葉をよく理解して考え，発展的に突っ込んだ考えをする傾向にあり，思考に幅が感じられる．また４組は，忠実に素直に一生懸命考えて答えるが，時折思考の幅が狭く感じられるときもある．しかしこの傾向は§１の素因数分解やあまりによる分類などのところでは，逆の傾向にあったので，A 方式と B 方式の生徒が小学校までで，どのようなことを学習したかの違いが影響しているのではないかと考える．

２．６．指導計画（計 3 時間）

	指　導　内　容	時間
1	日常生活の中の身近な場面に設定されたゼロ和的ゲームを実際体験させる．	1
2	ゲームの利得を数学的に整理する方法を考え，吟味させる．また利得表を利用してゲームの戦略を数学的に考えさせる．**（本時）**	1
3	ゲームの戦略を多角的に考え，様々な戦略を比較検討させる．また今回の学習を他の現実事象へとつなげさせる．	1

２．７．前時の流れと実態

１）前時の主な流れ

1: 新しく入る第２章「事象の見方」の学習の目的を知る．

2: 学習課題を知る．

課題　“ゲームの戦略はどのように考えたらいいの？”
『ある1年生のクラスでは，HRのレクリエーションで，次のようなカードを用いた対戦ゲームを行うことになった．このゲームの戦略とはどのようなものだろうか？』

3: ゲームのルールと対戦方法を理解し，準備をする．

・3 人の人と対戦する

・結果を記録しておく

4: ゲームの準備をする．

5: ゲームを実際行う．

6: 獲得ポイントの計算を各自行う．

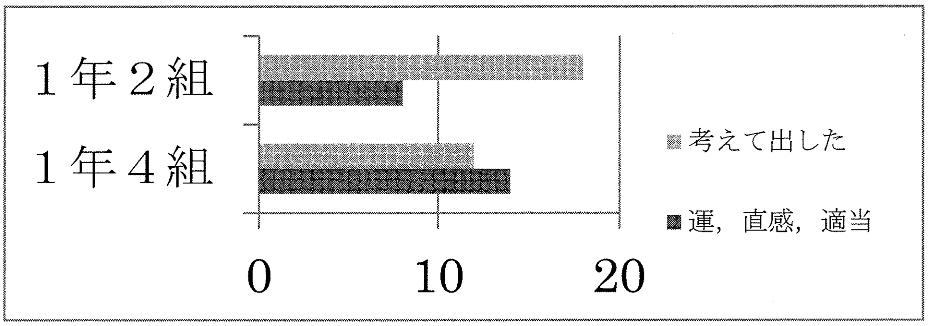
7: ゲームの結果の発表を全体で行い，だれが優勝者か確認をする．

8: ゲームを実際やっている最中にどのようなことを考えながら，カードを選んで出したか，また改善点や良かった点など，振り返って記録する．何人かの生徒の振り返りを全体でシェアする．

2）生徒のゲームの体験と振り返り

①ゲームの体験で・・・カードを出す前に何か考えたか？

（相手のカードの予想や心理的なものも含めて　両クラスとも 26 名）



②前回のゲームを体験して・・・[カードを出す前に考えたこと]　1－4

・なるべく負の数で，小さな数を出した．
・プレーヤーB の方が勝ちやすかったかもしれない．／B になっていたらもうちょっと得点がとれたかも．／プレーヤーB を選んでいたらよかったかも．／B のほうが，得点が取りやすい？
・相手は1回目が何であっても次はきっと－を出す．
・同じカードを連続して出してみたら，勝った．
・差を縮めようと思い，大きな数を出したら全敗した．⇒運の悪さが確かめられた．
・あまりたくさん点を取られないために，少し低めの数を出した時があった．
・自分が A だったら相手と同じ符号，B だったら，相手が出さなそうな符号を出した．
・相手の心理を予想する．
・大きな数を出したら勝つ可能性も高くなるが負ける可能性もある．
・なるべく小さい数になるようにしたかった．⇒リスクが大きいから．
・相手が－のカードを出したら，2 回目は＋を出す確率が上がる．その予想が当たったら 3 回目も同じカードを出す．
・（カードを）見ないでやったほうが，面白いから見ないでやった．
・運に任せた方が楽しい．
・自分が負けている時には，たくさん点が欲しいので，できるだけ－6 や 7 を出した．逆に負けている時には，あまり大きな失点をしたくないので，－4 や 3 を出した．

3）前時の授業を終えて考える手立て

★1年4組の方が考えずに，適当に，運任せや直感でやっている生徒が多い．よって本時ではそこのところを指摘して，戦略についてしっかり考えてみるよう強調するという補助的手立てを取る．

★ゲーム中に考えていたことは1年2組の方が多かったが，1年4組の生徒の中には，戦略的な思考をしている生徒もいたことを本時のはじめで注目させることで，戦略を考えることへ全員の意識を向けさせる補助的な手立てを取る．

２．８．本時の指導計画

２．８．１．本時における目的と到達目標

Year 3 目的 C：コミュニケートすること
本時における具体的到達目標
・正負の数を用いて利得を正しく数値化でき，A，B の利得を合わせて表現したりできる． ・異なる立場からみた利得表の違いを理解し，効果的に読み取ることができる． ・ゲームの戦略をどのように考えたのか，理路整然と説明できる．

Year 3 目的 D：現実世界の文脈において数学を応用すること
本時における具体的到達目標
・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に，互いの利得を数学的な方法で分析して戦略を選択することができる． ・戦略を考える際に，他者の立場を考慮し，自らの戦略を考えることができる． ・ハイリスクハイリターン，ローリスクローリターンなど，いろいろな価値観から考えようとしている．

２．８．２．本時における評価基準

Year 3 規準 C：コミュニケートすること

	Level descriptor	Specific indicator
	以下のいずれにも達していない．	以下のいずれにも達していない．
1-2	ⅰ．限られた数学的言語を用いることができる． ⅱ．情報を示す際に限られた形式での数学的表現を用いることができる ⅲ．推論の流れを伝えることができるが，解釈するのが難しい．	・ゲームの利得の一部を表現することができる． ・ゲームの戦略をどのように考えたのか説明はするが，解釈するのが難しい．
3-4	ⅰ．いくつかの適切な数学的言語を用いることができる． ⅱ．情報を示す際に異なる数学的な表現形式を適切に用いることができる ⅲ．推論の流れ理解できるように伝えることができるが，必ずしも明確であるとは限らない． ⅳ．論理的構造を用いて，情報を的確に整理することができる．	・ゲームの利得を数値化できる． ・ゲームの戦略をどのように考えたのか，理解できるように説明できるが，明確であるとは限らない．
5-6	ⅰ．適切な数学的言語を大抵は用いることができる． ⅱ．情報を示す際に異なる数学的な表現形式を大抵は正しく用いることができる ⅲ．異なる数学的な表現形式間を行き来することができる． ⅳ．推論のながれを明確に伝えることができるが，必ず	・正負の数を用いて利得を正しく数値化でき，A，B の利得を合わせて表現したりすることも試みる． ・異なる立場からみた利得表の違いを理解し，読み取ることができる． ・ゲームの戦略をどのように考えた

	しも筋が通っている，もしくは完全であるとは限らない． ｖ．論理的構造を用いて，おおむね整理された取組みを示すことができる．	のか，明確に説明できるが，筋が通っているとは限らない．
7-8	ｉ．適切な数学的言語を首尾一貫して用いることができる． ii．情報を一貫して示す際に異なる数学的な表現形式を正しく用いることができる． iii．異なる数学的な表現形式間を効果的に行き来することができる． iv．推論のながれを完全にかつ理路整然と伝えることができる． ｖ．論理的構造を用いて，矛盾なく整理された取組みを示すことができる．	・正負の数を用いて一貫して利得を正しく数値化でき，A，B の利得を合わせて表現したりできる． ・異なる立場からみた利得表の違いを理解し，効果的に読み取ることができる． ・ゲームの戦略をどのように考えたのか，完全に理路整然と説明できる．

Year 3 規準 D: 現実世界の文脈において数学を応用すること

	Level descriptor	Specific indicator
0	以下のいずれにも達していない．	以下のいずれにも達していない．
1-2	ｉ．真正の現実場面の状況においていくつかの要素を特定することができる． ii．少しうまくいくぐらいではあるが，真正の現実場面の状況で，ある解を見出す数学的方略を適用するができる．	・限られた範囲であるが，とにかく数学的に利得を考え，戦略をみつけようとすることができる．
3-4	ｉ．真正の現実場面の状況において関連する要素を特定することができる． ii．真正の現実場面の状況をモデル化するために，いくつかのだいたい適切な数学的方略を限られた範囲で選択することができる． iii．真正の現実場面での状況で，ある解に到達する数学的方略を適用することができる． iv．真正の現実場面の文脈において，解の整合性がとれているか述べることができる．	・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に，互いの利得を限られた範囲で数学的な方法で分析して戦略を選択することができる． ・戦略を考える際に，他者の立場を考慮し，自らの戦略を考えようとしている．
5-6	ｉ．真正の現実場面の状況において関連する要素を特定することができる． ii．真正の現実場面の状況をモデル化するために，おおむね適切な数学的方略を選択することができる． iii．真正の現実場面の状況で，有効な解に到達する数学的方策を選択し適用することができる． iv．解の正確さの度合いを述べることができる．	・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に，互いの利得をおおむね数学的な方法で分析して戦略を選択することができる． ・戦略を考える際に，他者の立場を考慮し，自らの戦略を考えることができる．

	v．真正の現実場面の文脈において，解の整合性がとれているか議論することができる．	・いろいろな価値観から考えようとしている．
7-8	i．真正の現実場面の状況において関連する要素を特定することができる． ii．真正の現実場面の状況をモデル化するために，妥当な数学的方略を選択することができる． iii．真正の現実場面の状況で，正しい解に到達する数学的方策を選択し適用することができる． iv．解の正確さの度合いを説明することができる． v．真正の現実場面の文脈において，解の整合性がとれているか説明できる．	・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に，互いの利得を数学的な方法で分析して戦略を選択することができる． ・戦略を考える際に，相互の立場を行き来しながら，自らの戦略を考えることができる． ・ハイリスクハイリターン，ローリスクローリターンなど，いろいろな価値観から考えようとしている．

2．8．3．本時で高めたい水準と主な手立て

今回の公開授業では，特に

「事象を数学的に捉えて適切に表現処理し，それを活用して数学的に考察しようとすること」

に焦点を置き，これらの水準を上げるためにどのような手立てを施すかということに重点をおく．以下の図２では，数学的活動の水準が高まる構造を左側半分のように考え，今回の課題学習での主な具体的手立てを右側半分に示した．

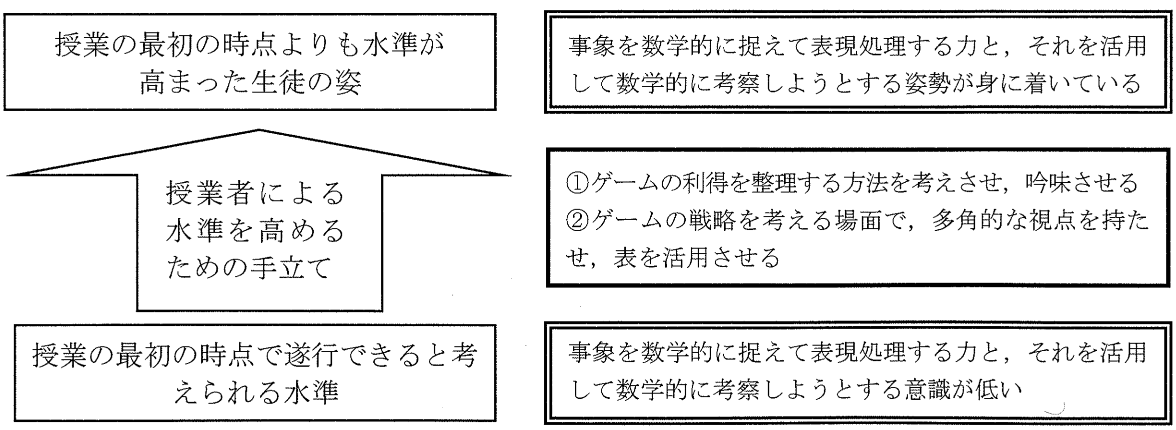


図２－２　本授業における水準を高める授業の構造

授業の最初の時点では，生徒全体を考えると様々なレベルの水準が考えられるが，全体的には事象を表で整理し，それを活用して数学的に戦略を考えようとする意識と数学的力をあまり持っていない生徒が多いのではないかと想定している．そこで，個々の生徒の現状の水準からそれぞれ引き上げるために，主に①，②の手立てを施すことを考えた．

①の手立ては，ゲーム全体を捉え，利得を数学的に整理して表すことを問いとして設定することで，まずは“全体を捉えて整理”しようとする数学的問題解決の初めのステップを全員に体験させる，そして生徒が様々な水準で利得を整理して表そうとすることを想定して，どの方

法や表し方がより良いかを自ら吟味させることで，個々の事象を捉えて数学的に表現する力の水準をあげることをねらいとする．

②の手立ては，ゲームの戦略を考えるとき，利得を数学的に表したものを活用させることで，市医学的に処理したものが大いに役立つことを実感させ，相手が利得をどのように考えるかで，それに伴って自分はどのようなカードを出すかを決定する見方や，できるだけ得をしたいか，できるだけ損を少なくするかをベースとしたカードの出し方を考えるなど，多角的な視点を扱うことで数学的に戦略を考える水準が高まることをねらいとする．またこの手立て②に関しては，第２時の後半から第３時にかけて戦略を多角的に考えていくため，第３時にもまたがる手立てを示している．

２．８．４．予想される生徒の思考例

（1）ゲームの利得を整理する方法

a.　A　B

$-6\times(-6)=36$　　$3\times(-6)=-18$

$-6\times(-4)=24$　　$3\times(-4)=-12$

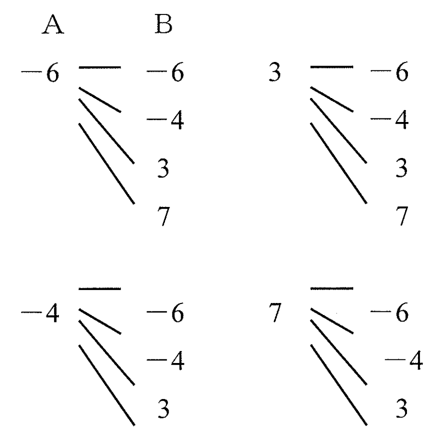
$-6\times3=-18$　　$3\times3=9$

$-6\times7=-42$　　$3\times7=21$

$-4\times(-6)=24$　　$7\times(-6)=-42$

$-4\times(-4)=16$　　$7\times(-4)=-28$

$-4\times3=-12$　　$7\times3=21$

b.


c.

A＼B	−６	−４	３	７
−６	３６	２４	−１８	−４２
−４	２４	１６	−１２	−２８
３	−１８	−１２	９	２１
７	−４２	−２８	２１	４９

d.

A＼B	−６	−４	３	７
−６	３６，−３６	２４，−２４	−１８，１８	−４２，４２
−４	２４，−２４	１６，１６	−１２，１２	−２８，２８
３	−１８，１８	−１２，１２	９，−９	２１，−２１
７	−４２，４２	−２８，２８	２１，−２１	４９，−４９

※数値の使う順序や表などでの並べ方など，小さい順や大きい順など秩序を持って並べない生徒もいると予想される．秩序を持って並べたほうが，分析しやすいことから，ここにも水準の差があると考える．

※戦略を考える上で，適切な表し方の水準の高いほうから　c>d>a,b　と設定する．

（2）ゲームの戦略

① ハイリターンをベースに求める

ⅰ）Aの立場で考える：

最大の利益の7を出したいところだが，Bにとっては最大の損失となる恐れがあるため，Bはおそらく7を出さないだろう．しかし私が7を出すと思っているとするなら，Bは－6を出してくるから，私も－6を出すと最大の利益が出る．⇒　－6を出す

さらに続けてBは私が－6を出すと思っているから，やはり7を出す　⇒　7を出す

ⅱ）Bの立場で考える：

最大の利益を出すために，7か－6を出したいところだが，Aが7を出してきたら，損失が大きいので，－6のほうがよさそうだが，Aは私が－6を出すと予想して，Aも－6を出してくる可能性がある．だからやはり7を出す　⇒　7を出す

あるいはさらに続けて考え，7のリスクを回避するために，やはり－6,,,

※ⅰ），ⅱ）はこれ以上堂々巡りとなることに気づく．あるいは，できるだけ損失がないように考えていく方向に途中で移行する．

② 損失ができるだけ少なくなるように考える

ⅰ）Aの立場で考えると3を出せば，Bがどの手を出しても，損失は－12か－18　となり，－28や—42よりもましである．⇒　3を出す

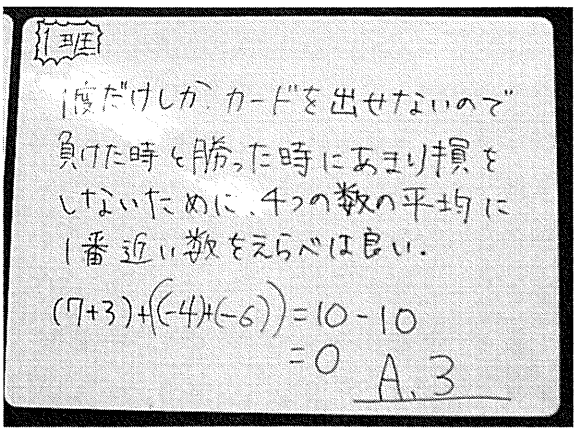
ⅱ）Bの立場で考えると3を出せば，Aがどの手を出しても，損失は－9か－21で，－4を出した時の損失，－16か－24よりもましと考える．⇒　3を出す

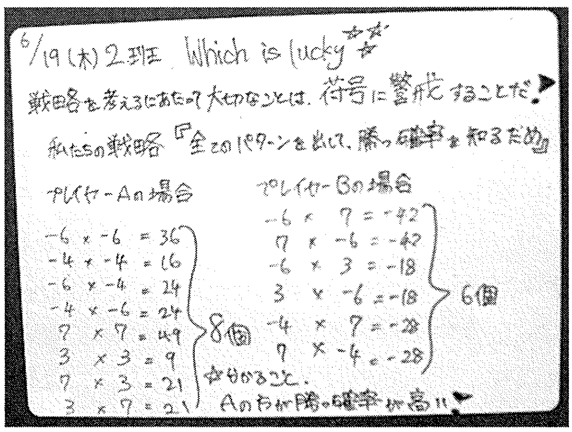
※両者ができるだけリスクを負わないようにと考えると，両者とも3を出す可能性があり，その場合，Aのほうが得することになる．なので，プレーヤーAになっておくほうが得である．

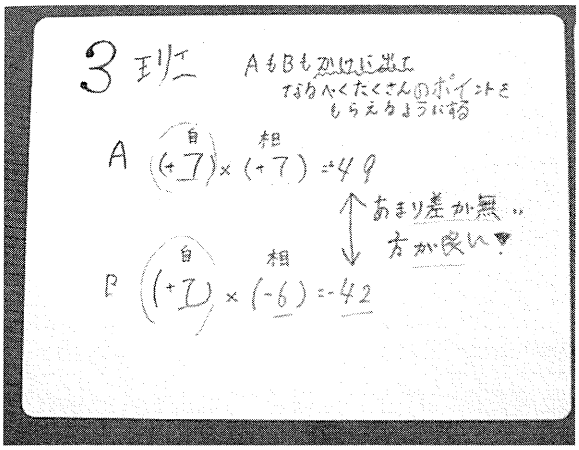
※第2時の段階では（2）を考える生徒は，あまりいないのではないかと予想する．

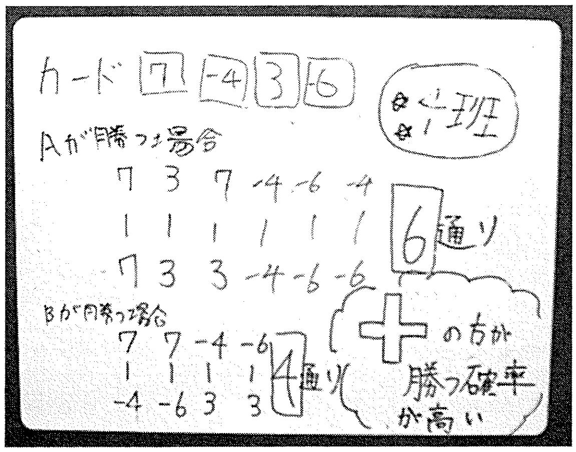
２．８．５．第２時を終えた１年２組において，グループ発表で出てきた戦略の説明

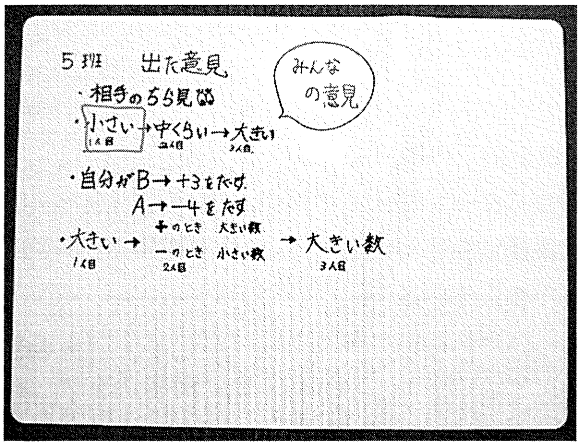
課題「“Which is lucky?” ゲームで，1相手につきカードをたった1回だけ出すという1チャンスで勝負するルールに変えたとすると，どのカードを出したらよいだろうか？その戦略を考え，説明しよう！」に対して，自力解決からグループで話し合わせて発表させたところ，以下のような結果が出た．

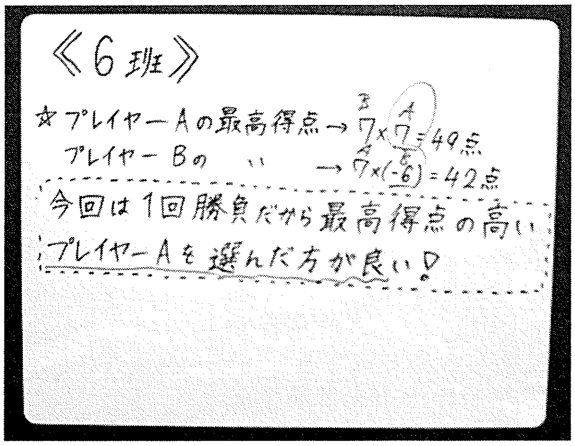












これらを振り返ると，２数の積のパターンをすべて把握しようとした上で戦略を考えるという思考に至ったのは，２つの班だけであった．しかしその２つの班もすべてのパターンを出し切っているわけではない．そのことを突っ込めていた生徒はほとんどいなかった．また相手のカードの出し方まで予想をするという発想がほとんどなかった．これらから，こちらが当初予想していた学習前の水準よりもさらにそれは低いことがわかった．よって１年４組においても，同様のレベルの学習前水準か，もしかしたらそれ以上が少し期待できるくらいだと考える．従って次のような手立てを取ることにした．

★グループ活動で戦略を検討させる前に，個人で戦略を考えている時に，式や表などを使って２数の積のパターンを出そうとしている生徒をピックアップして紹介する．さらに，個人で取り組む時間を増やす．

２．８．６．本時の展開　T:教師　S:生徒

生徒の学習活動	時間	教師の指導と手立て
【前時の振り返り】 S1: 前時の活動を振り返る．	5	T1: ゲームを実際やっている最中にどのようなことを考えながら，カードを選んで出したか，前時のワークシートの生徒の記述を整理したものを PC・プロジェクターを利用して提示する．

[S1 への補助の手立て] 次の学習の焦点化のために

- ◆ １年４組の生徒があまり考えずに，適当に運任せや直感でやっている生徒が多いことを指摘して，今日は戦略についてしっかり考えてみるよう強調する．
- ◆ また１年４組の生徒の中には，戦略的な思考をしている生徒もいたことに注目させることで，今回，戦略を考えることへ全員の意識を向けさせる．

【学習の焦点化】 S2: 今日の学習課題を知る.	2	T2: 課題が伝わるように, PC・プロジェクターでも示す.

今日の課題（水準を高めるための手立て）“Which is lucky?” ゲームで, 1相手につきカードをたった1回だけ出すという1チャンスの勝負をすることにする. どのカードを出したらよいだろうか？ その戦略を考えて, 説明しよう.

[S2への補助の手立て]**課題をクリアーにさせるため**
◆ 課題が理解されたかどうか確認する.

S3: まずは各自で戦略を考え, 記述する.	8	T3: ワークシートNo.2を配布する. ワークシートNo.1も合わせて返却する.
S4: 戦略を考える上での大切なことを知る. ＜大切なこと＞ ○すべてのパターンを調べて, ゲームの利得を明らかにすること ○相手の出方を予測すること	5	T4: 生徒の記述を以下の観点でチェックする. ⅰ）2数の積のパターンやA,Bの利得を調べている ⅱ）戦略だけ言葉で書いている ⅲ）表や式だけ書いている ⅳ）何も手がついていない

[S4への補助の手立て]**戦略を考えるとはどういうことかの水準を上げるために**
◆ <u>2数の積のパターンやA,Bの利得を調べている生徒がいる場合</u>
　その生徒を指名して拡大投影機で発表させる. その良さを生徒に尋ねる.
◆ <u>だれも2数の積や, A,Bの利得を調べていない場合</u>
　何人かの生徒に発表させる. それらの戦略は考え方として不足している部分あると予想されるので, それを指摘し, どのように改善したらよいか問いかける.
◆ <u>さらにそれでも利得のパターンを把握しようという発想に至らない場合</u>
　こちらから, すべてを把握した上で, 戦略を考えることを求める.
発問 適宜以下のような発問を投げかける.
「ゲームのポイント獲得（プレーヤーの利得）をどのように数学的に整理したら, ゲーム自体を捉えやすくなるだろうか？整理する方法を考え, 実際整理してみよう.」

S5: さらに個人で利得のパターンを整理してみる. さらに戦略まで考える.		T5: 指示「グループでシェアしてみましょう.」

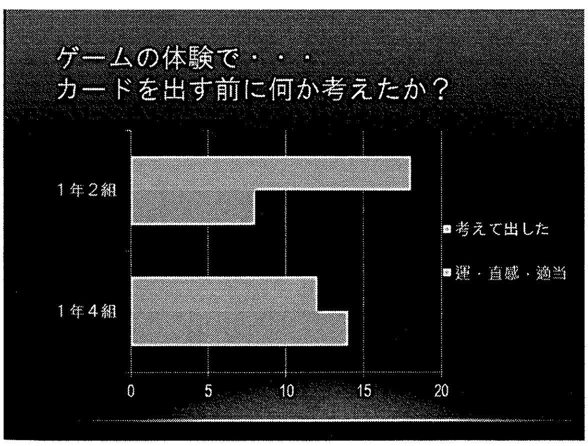
[S5への補助の手立て]**さらに水準を高めるために**
◆ <u>利得のパターンの整理の方法が多様に出ている場合</u>
戦略の前にそれぞれの方法をピックアップして発表させる. (S7:①へ)
◆ <u>利得のパターンの整理の方法が多様に出ていない場合</u>
生徒の中に出てきている整理の仕方をもとに, 戦略を考えさせ, 相手の出方を予測するし, 自分の手を決めることがシミュレーションしやすいかどうか考えさせる. (S7:②へ)

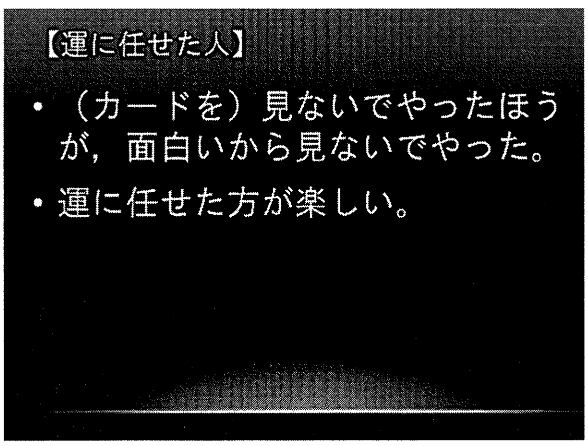
S6: グループで利得のパターンの整理の仕方と戦略をシェアする.	13	※生徒の発表時には，適宜，実物投影機かマグネットシートを使用させる. T6: $\boxed{\text{指示}}$ S7の①または②についての指示をする.
		[S7①への補助の手立て] さらに水準を高めるために ◆ A,B それぞれの立場に立っているか，両者を合わせて整理する方法があるかどうか，発問する.
【小練り上げ】 S7: ①出てきた整理の方法を全体でシェアし，その良さや欠点，問題点などについて検討する. ②グループで話し合ったことを，全体でシェアし，その良さや欠点，問題点などについて検討する.	12	[S7②への補助の手立て] さらに水準を高めるために ◆ 十分シミュレーションができているかどうか，A,B それぞれの立場に立っているかなどを発問する.
【終末】 S8: 次回の学習でさらに今日の学習を深めることを確認する.		T7: 次回戦略についてさらに深めることを伝える. T8: ワークシートを回収する.

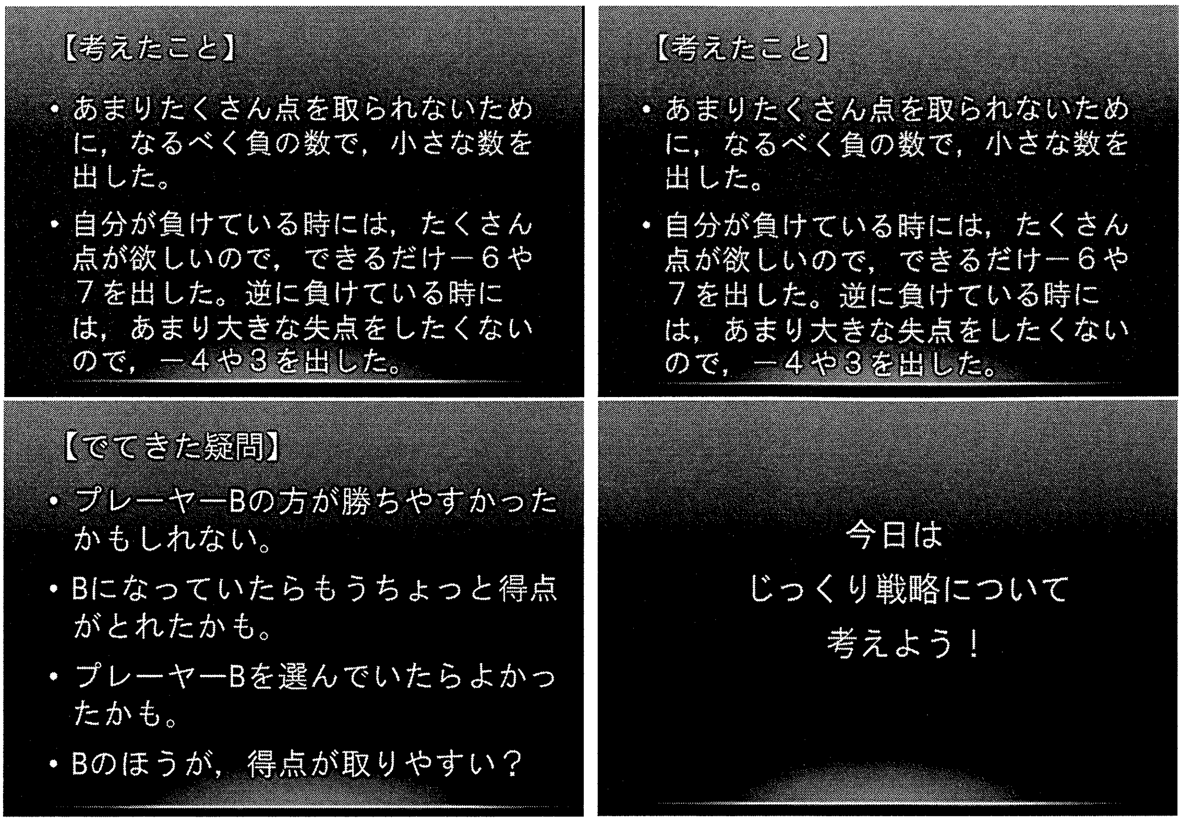
２．９．本時の実際と考察

２．９．１．授業の主な流れ（T:教師，　S:生徒）※発言は要約してある部分あり.

T:本時の学習の意欲と意識づけのために以下のようなスライドを見せた.







T:「今日は戦略についてしっかり考えてもらいたいと思います.」

T:課題配布の上，課題の確認をする．生徒に個人で課題に取り組ませる．（８分間）

T:机間指導で，課題の取組みに行き詰っていたS1を全体に取り上げる．

S1:「Bが有利だという意見に目をつけて，それを探してみたけど，見つからない．それで，全部消して白紙に戻した．でどうしようと思っている.」

T:「ほかの人たちはどうしているんですか？」

S2:「７を出したら，得るポイントが大きいけれども，失うポイントも大きい．３を出したら，得るポイントも少ないけど，失うポイントも少ない．－のほうが４と６で，あまり得るポイントと失うポイントがない．だから自分が出すカードは－６にしました.」

T:「自分が－６だとしたら，相手のことを考えていますか？」

S2:「自分がＢで相手がＡで７を出すと，自分のポイントになる.」

T:「自分がＢだったら，－６を出すということですね．もし相手が７を出さなかったらどうなるのかな？」

S2:「もし相手が３とか出したら，ポイントは減るけど…，（同じ積のパターンで）自分がＡで－６を出して，相手が７を出したらＢが有利になります.」

T:「Ｂが有利だということですね．だからＢが有利だというポイントを見つけたということですね.」

S3:「２つの積の符号を考えると，（－）×（＋）＝（－）で一通り．（＋）×（＋）＝（＋）と（－）×（－）＝（＋）で二通り．だからＡのほうが勝つ確率が高いと思います.」

S4:「得失点を６通り考えました．(図３参照) 積がーになるのが４通り．積が＋になるのが２通り．だからＡのほうが不利だと思う．」

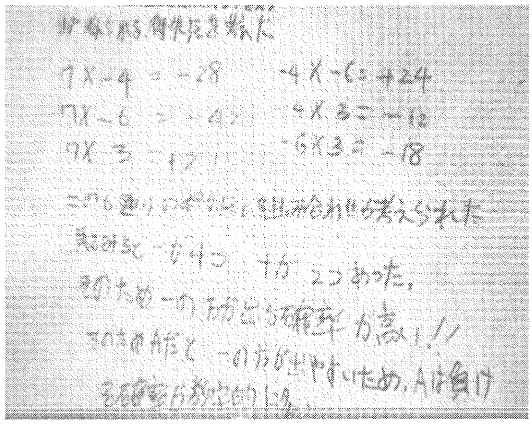


図２－３　S4 のワークシートの記述

T:「S4 に対して何か質問はありますか？」

S5:「僕が調べたところだと，Ａがもらえるポイントは，４９，２４，２１，９，３６，１６の６通りで，Ｂがもらえるポイントがー４２，－２８，－１２，－１８の４通りだったので，Ａのほうが有利だと思う．」

S4:「ミスりました．同じ数のことを考えていなかったです．」

T:「じゃあ，まだあるということで，ここにまだ（積が）並ぶということですね．これからまだ修正できますね．」

T:「今まで出てきたのを聞いていると，Ａが有利か，Ｂが有利かが考えるポイントになっていますが，忘れないでほしいのは，１相手の対戦につき，どのカードを出しますか？ということです．またどういう２つの数の積があるかというのを S4 が出してくれましたが，ここはちょっとはっきりしたほうがいいですね．」

S6:「…結局（Ａがポイントを得るには）Ａが１枚出したら，Ｂは後から何を出すかを２枚から考え，(Ｂがポイント得るには）Ｂが１枚出したら，Ａは後から何を出すかを２枚から考えることになるから，勝つ確率は同じになる．」

T:「Ａが勝つかＢが勝つかというのは関係ないんじゃないかと言っていますが，いかがですか？」※この後 S6 に他の生徒も同じようなことを考えていることを会話の中で示唆する．

T:「今少しずつ見えているものがありますが，詰め切れていないところがありますね．S4 が言ってくれたように，(積のパターンが）抜けていることがある．そういうのは詰めていかないといけないですね．ほかの人は同じように掛け算の積を調べていっている人がいたら手を上げてください．」※何人かの生徒が手を挙げた．

T:「じゃあ，調べていって，調べた結果，そのうえで戦略を考えていってください．」

S7:手を挙げて「僕は同じだと思う．Ａがポイントを得るのに８通りある．同じようにＢがポイントを得るのにも８通りある．だからＡが有利，Ｂが有利というのはないと思う．」

T:「S7 と同じという人？…その人たちは調べたということですか？」

S8:「そういうマイナスとかプラスとかについて考えるより，絶対値に集中して考えるとよいと思います．クラスで１位になるなら，絶対値の高い数を出したほうがいいんですけど，負けるとすごくマイナスに…引かれるじゃないですか．３人と対戦して合計してプラスに

なったらいいという目標があったら，絶対値が小さいほうを出して，コツコツためたらいいと思います．目標によってちょっと違う.」

S6:「(積を調べてみると）プラスが４個で，マイナスが６個なんです．これだけだとまだなんともいえないというか…．Ｂが１番得点を得るのは４２で，一番少ないのが１２で，Ａが得点を得るのは，４９から９と幅があって，得られるポイントはその中のどれかを選ぶから確率は６分の１で，…符号のパターンだけでは考えられない.」

T:「これからグループでシェアをしつつ，いろいろ検討してほしいと思います．まず，最初にこの課題では１相手につき何を出したらよいのか？またそれぞれのグループにＡが有利という人，Ｂが有利という人がいるので，それについても検討して下さい.」

（グループごとの話し合い７分間）

T:「では時間があと５分になったので，各グループから一人だれか，グループの話し合いの内容を簡単に報告してください.」

G1:「３か７を出すことを考えて，もしＢが７を出すと最高が４２点となって，自分がＡだとしたら－になってけっこう差が大きい．３だったらマイナスは少なくていいいけど，得るものは少ない．あと運もあるかなと話しました.」

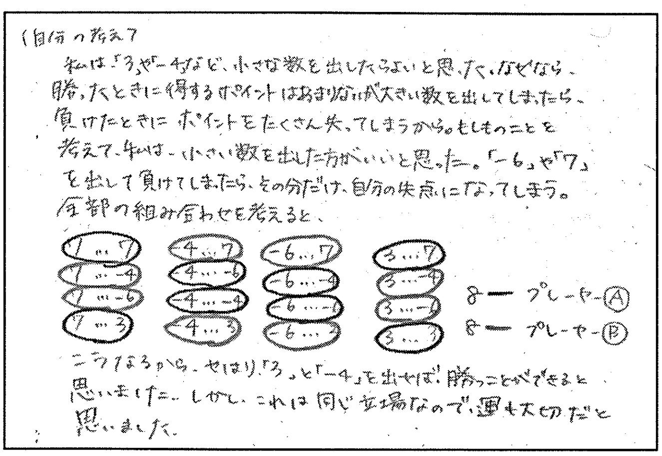
G2:「初めはＡが１２個，Ｂが８個のパターンがあると思っていたけど，(調べていったら…) Ａも８パターン，Ｂも８パターンあることがわかった.」

G3:「Ａだったら正でポイントをもらうから，緊張してプラスをだして，Ｂだったら負でポイントをもらうから，緊張して－を出すと思う.」

G4:「初めほとんどの人がＡが有利だと思っていて，通り（パターン）を出した時にＡの確率が高いと思っていました．でも例えば７×７＝４９，７×（－４）＝－２８，７×（－６）＝－４２，７×３＝２１で，それぞれ２つで同じ確率で，それにそれぞれをたしたときの点数が７０と７０で同じ確率になってしまうから，同じじゃないかという結論になりました.」

G5:「点数が低いか高いかを考えずに，ポイントを得るか失うかという観点で考えました．さっき G6 が言っていた通りで，それぞれ８パターンあるから，ポイントを失うか得るかの確率はそれぞれ２分の１だと思う．そしたらどっちが有利というのはないんじゃないかと思いました.」

G6:「(図４のワークシートを見せて）全部のパターンを調べたら１６通り出てきて，(それぞれ８通りだから）ＡとＢのどちらかが有利というのは関係なくて，だから３か－４を出せばよいと思いました.」


(自分の考え)
私は「3」や「-4」など、小さな数を出したらよいと思った。なぜなら、勝ったときに得するポイントはあまりないが大きい数を出してしまったら、負けたときにポイントをたくさん失ってしまうから。もしものことを考えて、私は、小さい数を出した方がいいと思った。「-6」や「7」を出して負けてしまったら、その分だけ、自分の失点になってしまう。
全部の組み合わせを考えると、

7…7　-4…7　-6…7　3…7
7…-4　-4…-6　-6…-4　3…-4
7…-6　-4…-4　-6…-6　3…-6
7…3　-4…3　-6…3　3…3

8ー プレーヤーⒶ
8ー プレーヤーⒷ

こうなるから、やはり「3」と「-4」を出せば、勝つことができると思いました。しかし、これは同じ立場なので、運も大切だと思いました。

図２-４　G6の代表の生徒のワークシート

２．９．２．ワークシートから見る生徒の学習結果

授業を終えて，生徒の学習課題への取組みを，本時における到達目標の観点から“利得の調べ方”と“課題の問いの考え方”の大きく２つの項目で分析し，表に整理してみた．

以下の表では，縦の項目が“利得の調べ方”で，上にあるほど水準が高い，つまり到達目標に近いとみなした．また横の項目が“課題の問いの考え方”で，左にあるほど水準が高い，つまり到達目標に近いとみなした．

	戦略（６名）	経験的確率（３名）	合計点比較（１名）	考えた過程がほぼない（１５名）
すべての積のパターン，あるいはすべての組合せをあげられていた（５名）	４名 ➢ Lose と Get で獲得・失点数を調べ，リスクという用語を使ってリスクを調べている． ➢ ＡでもＢでも３を出すとよい． ➢ ３か－４を出せばよい． ➢ 失点を出さないようにする．	１名 勝つ確率として得をするパターンの数で考えている．	１名 Ａ，Ｂそれぞれの獲得点数の合計を比較し，どちらが得か考えている	
パターンをすべてあげようとした（２名）		３名 ➢ ＡとＢそれぞれのパターンをしっかり区別できていないので，Ａが勝つパターンのほうが多いからＡのほうが有利． ➢ 確率という言葉を使っている．		
一部の組合せのみ調べた（１名）				１名 勝ちやすさはなし

積の最大最小に注目（１名）				１名 結論に至っていない．
結論と理由のみ（２名）	１名 失点を出さないことがポイントと考えていた．			
戦略のみ記述している（１名）	１名 Ａ，Ｂのカードの出し方をシュミレーションしている．結果としてＡもＢも有利不利の違いはないとしている．			
深く考えられていない（１３名）				13 名 ➢ 積の符号のパターンのみを考え，正しく理解していない． ➢ 条件を正しく理解していない． ➢ 心理的なものを考えている．

この表から見えてくることは，まずこれだけ多岐にわたった９つの解答のパターンが出てきていたということが特徴に上げられる．

２．９．３．授業中の様子や流れとワークシートの結果を合わせた視点からの分析

授業中の様子や流れとワークシートを照らし合わせると以下のようなことが特徴としてあげられる．

- ◆ 表の上にいる，比較的水準が高い生徒たちの中には，例えばG2の代表の生徒の発言のように，授業内で水準を挙げた生徒もいたことがわかった．
- ◆ S6 のようにはじめは正しくパターンをあげられていないが，あとで G5 の代表としての発言の中では，ＡとＢがポイントを得るパターンを８通りずつだと認めて発言をしている．しかしこの生徒はワークシートには自分で調べた記述がない．

◆ 表の一番左上の中のある生徒は下の図５のように，すべてのパターンを初めからあげ，lose または get で丁寧に調べ，リスクを考えていた．

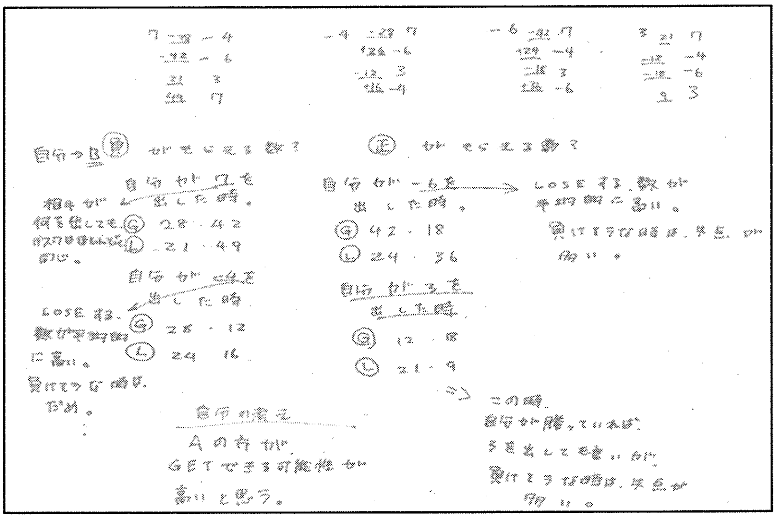


図２-５　“利得の調べ方”と“課題の問いの考え方”が初めから水準が高かった生徒の記述の一部

この生徒のことは初めの段階で水準が高いことにこちらも気がついていたが，授業中に自ら発言することはなかったし，グループ G3 の中でもこの生徒の考えが前面に出ておらず，心理的な考えが大半になっていた．

◆ また上の生徒と同じ G3 に２数のパターンを全く記述していないが，相手の立場も考慮してカードの出し方をシュミレーションしており，こちらが考えていた戦略の考え方をやっていた生徒がいたことがわかった．この生徒は最終的にＡでもＢでも同じだと思うと結論付けている．（図６参照）

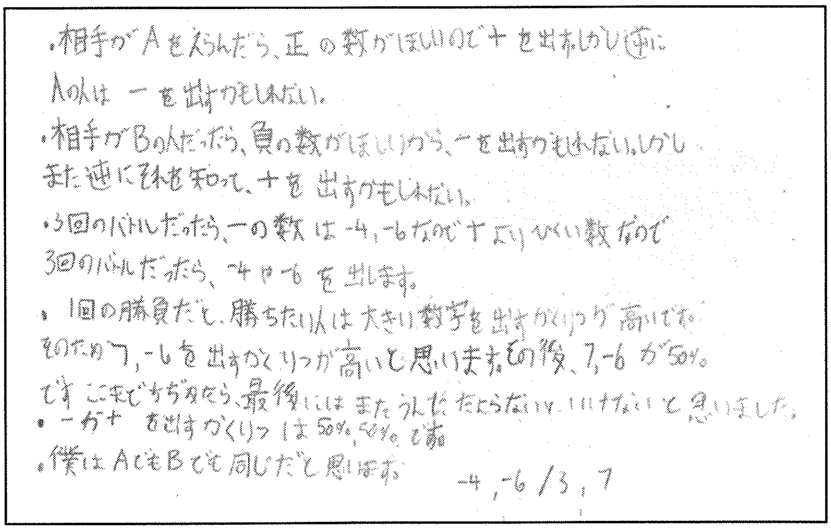


図２-６　戦略のみ記述していた生徒のワークシートの一部

◆ G6 は代表の発言から，全員がすべてのパターンが１６通りであることを理解していたが，だからその結果，どちらに有利不利はないというところで終わっている生徒と，だから３か－４を出すと結論を述べている生徒がいた．しかも話し合いでは同意していても，ワー

クシートを見る限り，２名はしっかり１６パターンをあげているが，他の２名は記述をしっかりしていない．そういう意味では，表の中の各人数と，実際どう思っているかはずれが生じていることがわかる．

◆ 表の右下には，特に結論しか書いていない，あるいは深く考えられていない生徒がクラスの半分の１３名いたとワークシートからは受け取られる．この中には授業を通して水準が上がった生徒がいたことは上のように確認したが，他の生徒は記述を見る限りでは水準は上がりきれなかったといえるだろう．

２．９．４．授業中の手立てを振り返って

授業中の手立てを以下のように箇条書きで振り返ってみた．

● 発言している生徒の中には勘違いや間違いがいろいろあったが，生徒から気づくことを期待してあえてこちらから指摘しなかったが，グループ活動の前に一言今までの生徒の発言にはそういう部分が多々あったことを示唆して話し合わせたほうが，より話し合いが吟味や検証する方向に流れて，例えば心理的なことを中心に考えていたG3なども，より数学的な話し合いになったかもしれない．

● 中盤の全体の話し合いの途中で，こちらから２つの数の積のパターンを正しく出してみようと教師から投げかけたにもかかわらず，次から次に生徒から自分の考えを発言する場面が続いた．この投げかけをたびたび繰り返したが，いろいろな考えが飛び交ったために，教師としては結局グループでいろいろな意見をもませることにしたが，これについても，グループでの話し合いの前に，まずはパターンを正しく出してみることをもう一度投げかけると，グループの話し合いをもう少し方向付けできてよかったかもしれない．

● 授業の後半ではグループでいろいろ考えをもませることにしたので，この時間内に既出したことを一つ一つ整理して考えさせなかった．よって次時の活動に生徒の水準をさらに高めていく重要な展開がゆだねられてしまうことになった．したがって次時のためにこの本時の展開の内容をもう一度整理して，どのような授業展開を行うか，十分に練る必要がある．

２．９．５．研究協議会での質疑応答より

指導案の作成や授業の展開について主に以下の２つのことが質問された．

(1)“戦略と攻略は同じではないか？どう違うのか？”

このことについては，本数学科の指導案検討の中でも吟味したことでもあるが，私たちの中ではこの２つの言葉を区別して考え，ここでは戦略とするのが，指導目的・学習目的にふさわしいと決めた．その理由は実際の協議会ではしっかりと伝えらえなかったかもしれないが，後で辞書を改めて引くとのその違いがはっきりと示されていたので，以下に載せる．

・「戦略とは，戦術より広範な作戦計画．各種の戦闘を総合し，戦争を全局的に運用する方法．転じて，政治・社会運動などで，主要な敵とそれに対応すべき見方との配置を定めることをいう．」

・「攻略とは，適地などを攻めとること．転じて相手を負かしたり説き伏せたりすること．」(広辞苑) つまり，われわれとしては相手の立場も含めていろいろな視点からどうすべきかを

考えていってもらいたいという点から，戦略という言葉を選んだ．
(2)“ここでは１相手とのみを考えさせているが，でも生徒のなかには優勝するためのポイント獲得を考えている生徒もいたりして混乱していたように感じたが．”

たしかに，ＡとＢのどちらが有利か不利かと考えている生徒の多くは，1 相手との１回きりの勝負に焦点を当てすぎてしまって，勝か負けるかしか考えていなかったかもしれない．だからＡ，Ｂそれぞれのポイント獲得パターンの数が同じであるので，どちらも一緒と結論づけていた生徒もいた．一方，2 数の積の絶対値に注目している生徒は，リスクの大きさにも注目していた．たしかに優勝を目指すのか，1 相手との対戦のみを考えるのか議論の中で曖昧になってきていたと思う．課題の趣旨としては，1 相手につき 3 回勝負していたものを 1 回きりにしたが，ゲームとしては 3 人の相手と勝負して最終的にはその合計点で優勝を決めるという大筋は変わらないことを強調していなかった．だから混乱をきたしていたと思うので，そこについては配慮が足りなかったと考える．

２．１０．終わりに

生徒自ら考え気づかせることで水準を上げていかせようとするならば，議論自体を生徒が気づかない形で指導者がコントロールすること，つまり議論に方向付けをすることや導いていく発問やリードが必要であると改めて感じた．今回の授業の振り返りを通して，もっと生徒一人一人の水準を上げていくためのリードやコントロールの仕方は上記に例を挙げたが，他にもいろいろあると思われる．今後はもっとそのスキルを挙げていくよう目指していこうと思う．

またこのゲーム理論をベースにした本学習課題の中で，生徒は何度も何人もの生徒が確率という言葉を使っている．これは確率を数学的にまだ学習していない生徒の発言だから，生活経験の理解からくる確率であった．しかし実際のゲーム理論の中では，数学的確率をもとに戦略を考えていっている．つまりこの学習課題は，確率の学習課題としても扱えるということである．今後の研究では確率の学習における題材としてもアレンジしていくことも試みたい．

【2 章参考引用文献】

１）IBO：MYP: From principles into practice, (2014)
２）IBO：Mathematics guide,　(2014)
３）小島　寛之，松原　望：戦略とゲームの理論（東京図書，2011）
４）松原　望：社会を読み解く数学（ペレ出版，2009）
５）トニー・クリリー：知ってる？人生に必要な数学（近代科学社，2009）
６）東京学芸大学附属大泉中学校数学科・附属高校大泉校舎数学科：東京学芸大学附属国際中等教育学校（仮称）数学科カリキュラム案，東京学芸大学附属大泉中学校研究集録４７集
７）広辞苑第六版（岩波書店，2008）

3．数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業

3．1．本授業の趣旨と設計

3．1．1．本研究授業上の問い

本時は，本校第5･6学年における目標の一つである「現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを遂行することができる」ことを目的とした授業の一環であり，特に次のプロセスを遂行できる力の育成に焦点化するものである．それは，「現実の問題を解決するために，数学的モデルとして微分方程式に定式化し，処理し，解釈・評価する」プロセスである．初めてその活動を行うことになる本時では，数学的モデルとして微分方程式を用いて現実の問題を解決するという発想を獲得すること，そして改めて数学的モデル化のプロセスおよびそれを遂行するに当たって必要となる考え方を実感することが目標である．実用的価値の高い微分方程式を数学的モデルとして用いる経験は，数学教育の実用的目的に応えるものであると考える．

とりわけ，本時では微分方程式とその使い方を「説明する」授業ではなく，数学的モデルとしての微分方程式を生徒たちが「生み出す」授業を実現したい．なぜなら，現象を探究しながら微分方程式を生み出すことで，どんな状況において微分方程式が有効であるのかということや，微分方程式自身の意味が実感されることを期待できるからである．

それでは，数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業とはどのようであるべきか．微分方程式は変化自身を記述する数式である．そこでは，問題解決者が変化の状態について仮定をおく必要が生ずる．変化の状態について仮定をおき，その変化自身を記述するという発想はいかにして生み出されるのだろうか．授業者は，生徒たちがその発想を生み出すためにどのような手立てを講ずる必要があるのだろうか．これが本研究授業上の問いである．この問いに対して，教材に即した具体的な手立ては後述するが，基本的な方針として以下の三点を手立てとして据えたい．

- 手立て①：活動を促す手立てとしての探究課題への問いの埋め込み
- 手立て②：活動を発展させる手立てとしての活動の振り返り
- 手立て③：生徒たちが探究の道具として利用できる数学の内容としての「数列」の利用

手立て①と②はどの授業においても講ずる手立てであるが，③は微分方程式を生み出すことを意図しているからこその手立てである．生徒たちは単元「数列」において，変化を漸化式に定式化して探究する方法を学習してきている．これを踏まえて本時では，漸化式を差分方程式として見直すことで，隣接二項間の差という変化自身を記述しているという見方をできるようにしたい．もちろん，差分方程式自体有効なツールであるが，ここでは，離散的変化から連続的変化へと促すことによって，微分方程式が生み出されることを期待する．

これを図3-1「水準を高める授業の構造」の枠組みで整理する．本時では，現象における変化を既習事項である漸化式で表現する水準から，生み出す対象である微分方程式で表現する水準へと高めることを意図する．そのためにまず，漸化式で表現することのできる（逐次的変化となる）現実の問題を用意する（手立て①）．これを生徒たちが漸化式に表現して処理した後，漸化式を差分方程式として見直す（手立て③②）．さらに，離散的変化ではなく連続的変化をみる

必要性のある現実の問題にしておくことで（手立て①），単位時間を縮めていくことを議論し，微分方程式を用いる水準へと高めたい．

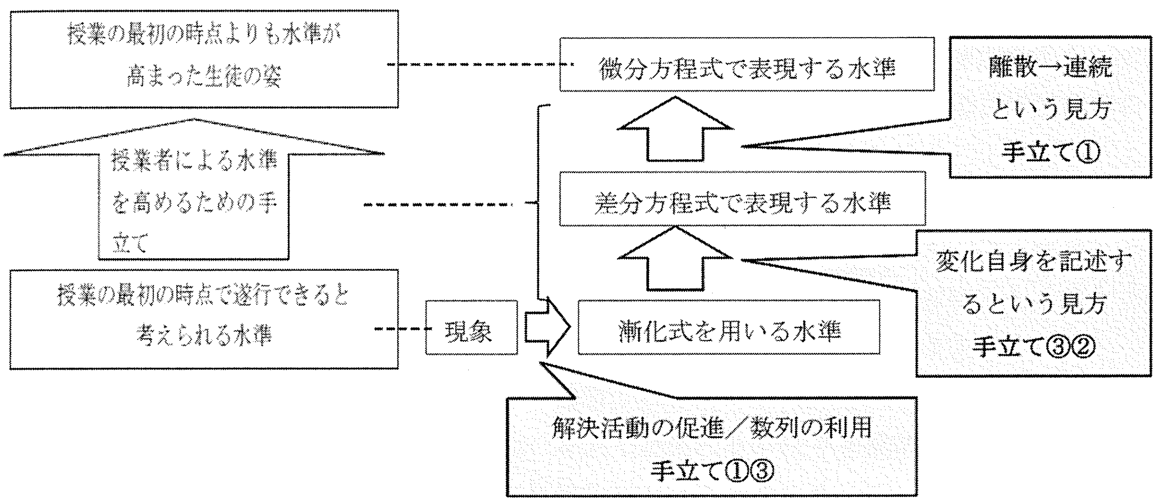


図 3-1　本授業における水準を高める授業の構造

特に本時では，具体的な教材に即して，漸化式を差分方程式として見直すための手立てと，差分方程式から微分方程式へと発展するための手立てを明示化し，それが機能するかを検証する．

３．１．２．本時で扱う教材について

本時では，感染症の数理モデルとして最も古典的・基本的であると言われる「SIR モデル」を題材として，生徒たちに以下の探究課題を提示する

ある感染症にかかっている 1 人が，総人数が 10 万人である集団に入り込んだとする．この感染症は，感染者と接触した未感染者のうち 1.8%の人が感染する感染力をもち，感染者が感染力を有する期間は 1 週間であるという．また，感染力を失った（回復した）人はこの感染症に対する免疫を獲得するとする．

あなたはこの集団における公衆衛生の責任者であり，この感染症の流行を予期して予防接種を促したい立場であるとする．調べてみたところ，この集団では 1 人が 1 週間で延べ平均 70 人と接触することがわかった．

(1) 何も対策をしないときの，週ごとの感染者数の変化をシミュレーションしよう．

(2) 副作用のリスクを考えると集団全員に予防接種を義務付けるのは効果的ではない．感染症の流行を防ぐには，10 万人中少なくとも何%の人が予防接種を受けておくべきかを決定しよう．

図 3-2　本授業における探究課題「感染症の流行予防」

この探究課題は次のようにして漸化式に定式化される．n 週目における，まだ感染していないが感染する可能性のある人口（感受性人口）を S_n，感染していてかつ感染力のある人口（感染人口）を I_n，病気からの回復による免疫保持者ないし隔離者・死亡者人口（隔離人口）を R_n とする．また総人口は $S_n + I_n + R_n = N$ で一定であるとする．新規感染人口は感受性人口から生じ，また感染人口から新規隔離人口が生じると考えると，様々な仮定をおく必要があるが，次

のように連立漸化式に表現できる.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} = I_n + S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} = R_n + I_n \end{cases} \quad \cdots(2.1)$$

この漸化式に基づいてシミュレートした結果のグラフが次の図である.

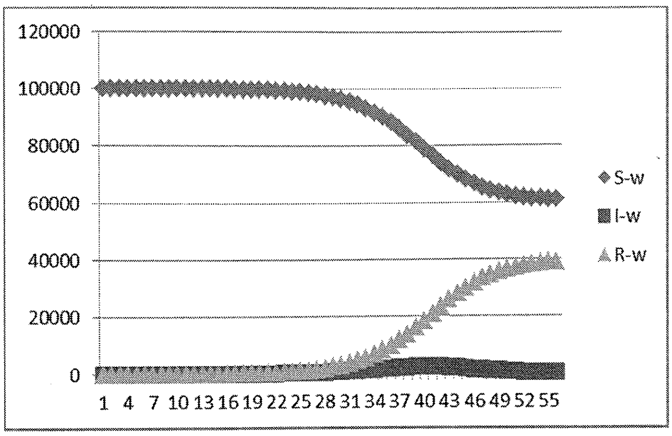


図 3-3　シミュレーション結果

なお，$S_n + I_n + R_n = N$ より $S_n = N - I_n - R_n$ であり，$R_n = \sum_{k=1}^{n-1} I_k$ であるから，連立漸化式 (2.1) において第 2 式の感染者数は

$$I_{n+1} = I_n + (N - \sum_{k=1}^{n} I_k) \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n$$

と I_n のみで定式化することも当然ながら可能である.

ここで漸化式(2.1)をそれぞれ「週当たりの人口増加数」として見直せば,

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} - I_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} - R_n = I_n \end{cases} \quad \cdots(2.2)$$

と差分方程式の形になる．そこで「週当たり」という時間間隔を小さくしていき，差分間隔を 1 日したうえで，さらに間隔を 0 に限りなく近づけていくときの極限を考える．ここでは間隔を$\triangle t$<<1 にとり，接触する延べ人数を 10$\triangle t$，感染力を失う人数を$(1/7)\triangle t I(t)$として，両辺を$\triangle t$でわり$\triangle t \to 0$とすると

$$\begin{cases} dS(t) / dt = -S(t) \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 \\ dI(t) / dt = S \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \\ dR(t) / dt = (1/7)I(t) \end{cases}$$

となる．さらに，流行初期は $S \approx N$ であるとすれば，この第 2 式は

$$dI(t) / dt = N \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \fallingdotseq 0.037I(t)$$

となり，この微分方程式は $I(0) = 1$ という条件のもと，$I(t) = e^{0.037t}$ と解ける.

感染症の数理モデルである SIR モデルの教材化は，次の三点の理由で本公開授業の趣旨に合致していると考えている.

まず，本探究課題において感染者人口をシミュレーションするにあたっては，感染者人口 (I) だけでなく，少なくとも感受性人口（S）を考慮する必要が生ずる．そうすると，感受性人口から感染者人口への移動といったように，感染者人口の単位時間当たりの変化を考える必然性があり，それが何らかの形で表現されることを期待できる．そこでその変化自身に焦点をあて，表現を洗練していくことで，差分方程式・微分方程式が生み出されることを想定できる．

次に，感染病の流行初期を考察することで，線形 1 階微分方程式 が生ずることである．この形の微分方程式は，非常に簡潔で解くことも簡単でありながら，いくつかの現象を記述することができるものである．この微分方程式を知っておくこと自体が有効である．そしてそのような微分方程式であるからこそ， で記述されるような他の現象の探究を評価課題として課すことで，目標が達成されたかどうかを評価することができる．評価については後述する．

最後に，微分方程式の実用性を実感できる題材であると考えられることである．微分方程式が用いられている実例であり，感染症の流行を防ぐためにその様子を数学的に記述したいという，微分方程式が有効に働くことを実感できる題材であると考える．

３．１．３．指導計画

微分方程式は，数学Ⅲの検定教科書において最後の方で発展として扱われている．それは「微分方程式を解く」ことまで話題としているからであるが，本時の趣旨は「微分方程式を解く」ことではなく，数学的モデルとしての「微分方程式に表す」ことにある．本教材は，「微分法の応用」の一つとして位置付ける．即ち，数学Ⅲにおける微分法が既習事項である．

本教材は全 5 時間で指導を行う．本時は第 4 時に該当する．第 4 時までに連立漸化式(2.1)あるいは第 2 式だけがつくられ，さらにその式において，流行初期は $S_n \approx N$ であることから $I_{n+1} = 1.26 I_n$ となり，感染者数 I_n は等比数列（離散的指数関数）に従って増加するところまで考察されている想定である．

表 3-1　本教材の指導計画

時数	生徒の主たる活動	主たる目標
第 1 時	グループによる課題(1)の自力解決	現象を探究する上での仮定を適切に設定することができる．変化の規則性を見抜くことができる．
第 2 時	自力解決の発表・共有	現象を漸化式に定式化し，それを利用してシミュレーションすることができる．
第 3 時	流行初期の変化の考察（離散）	現象にみられる変化を数学的に特徴づけることができる．
第 4 時（本時）	漸化式を差分方程式と見直す 流行初期の変化の考察（連続）	微分方程式を生み出し，現象における変化の状態を記述することができる．
第 5 時	グループによる課題(2)の自力解決と共有	数学的モデル化のプロセスを理解することができる．

３．１．４．数学的モデルとしての微分方程式を生み出す具体的な手立て

本教材に即した具体的な手立てのうち，本時（第 3 時）において主となる二点を次のように設定する．

手立て①：感染者数の週当たりの増加数についてわかることを問う． 目的①：漸化式を見直して差分方程式を生み出すため

予防対策のためのシミュレーションの一環として，流行初期における週当たりの増加数を調べさせる．感染者数ではなく，その増加数についてわかることを問うことによって，週当たりの変化それ自身に目を向けさせる．様々な調べ方が想定されるが，最終的には連立漸化式(2.1)の第 2 式（ただし $S_n \approx N$）を根拠として，「週当たりの感染者増加数がその週の感染者数に比例する」ことを見出させたい．

手立て②：1 週間あたりではなくもっと短い時間単位において刻々と変化する感染者の変化を調べられないか問う． 目的②：差分方程式から微分方程式を生み出すため

週ごとの感染者数のシミュレーションに基づいていては，予防対策もあくまで週ごとにしか講ずることができない．そこで，もっと短い時間単位での変化を調べられないかを問い，理想的には限りなく小さな時間単位における感染者数の変化を調べられると良いという意見や変化率を考えるというアイデアが出されることを期待したい．

３．１．５．生徒観と学習歴

数学 6α（数学Ⅲ）習熟度別上位クラスに属する生徒たちであり，それなりに力のある生徒たちである．これまで，文脈に埋め込まれた現象を探究する経験を重ねてきており，まずは自力で考える姿勢が十分に身についている．面白い，解いてみたいと思う問題に対しては非常に熱心に問題解決に取り組む．また，授業者が全体に問いを発すると，特に挙手を促さなくても，積極的に発言する生徒が数名見られる．他人の発言や説明に対して真摯に向き合うことができる．さらに，この学年の生徒は探究の振り返りをしっかりと記述できることが特徴である．

なお，対象クラス 15 名中 8 名が，昨年度の 5 月に実施された総合的学習の時間の一環で，計 2 時間，生物個体数の変化をシミュレーションした経験を有している．そこでは数列を利用して，羊の頭数の 1 年あたりの増加数が全体の頭数に比例するという見方（離散マルサスモデル），また，全体の頭数と当該の環境においてまだ生存できる頭数の積に比例するという見方（離散ロジスティックモデル）をした．ただし差分という見方はしていないし，微分は未習であったため全くそうした眼ではみていない．したがってあくまで 1 年あたりの増加数という扱いであり，それを単位時間当たりの変化率とはみていない．この経験が本教材においてどう働くかが未知数である．当該の 8 名をバランスよくグループに振り分けることを考えている．

３．１．６．評価の計画

本教材の指導計画に基づく一連の授業を終えたのち，評価課題「炭素 14 年代測定法」（図 3-4）を用いて，生徒個々の「現実の問題を解決するために，数学的モデルとして微分方程式に定式化し，処理し，解釈・評価する」プロセスを評価する．評価規準は次のとおりである．

> 古代史でいつ頃つくられた土器なのか，いつ頃の遺跡なのかを調べるために，炭素 14 年代測定法という方法が用いられる．放射性物質である炭素 14 の原子核は元々不安定であり，外部の影響を全く受けずに一定の時間が経つと一定の確率で崩壊して別の原子核に変わり，その際に放射線を放出するという性質をもつ．大気中の炭素 14 は宇宙線の照射によってつくられ，濃度がほぼ一定である．生体の中の炭素 14 も，植物は光合成によって大気をとりこみ，動物は食物連鎖によって植物と結びついているので，生存しているときは，同じ濃度に保たれる．その生体が死ぬと，新たな炭素の取り込みがなくなるため，炭素 14 は崩壊し続けることになる．
>
> ある土器の内側に埋め込まれた種子の炭素 14 原子核数が 4.2×10^{10} 個含むことが測定された．現代の炭素が，炭素 14 原子を 6.0×10^{10} 個含むことがわかっているとき，この土器が今から何年前に使われていたかを推測したい．
>
> (1) 原子核数が元の半分になる時間を半減期という．炭素 14 原子核数の半減期が一定であることを示しなさい．
>
> (2) 炭素 14 原子核数の半減期はおよそ 5730 年であることが測定されている．この土器は約何年前に使われていたと推測できるか．

図 3-4　炭素 14 年代測定法

表 3-2　評価規準　観点 B. プロセスと振り返り（B1）

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	現実の問題を微分方程式に記述している．
3-4	現実の問題を微分方程式に記述し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる．
5-6	現実の問題を微分方程式に記述し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ，解決過程および結論について振り返り，評価することができる．

３．２．前時までの概要

３．２．１．第１時

授業者が問題を提示し，「現在のところで気になる点はありますか」と問うと，いくつかの確認事項が出された．また探究をし始めて最初の方にもいくつかの確認がなされた．それら一つ一つについてクラスとしてどうするかを決めた．以下，確認事項が出された順に，その内容とそれに対してどう対応することにしたかをまとめる．

表 3-3　問題に対する質問とクラスとしての対応

No.	質　問	クラスとしての対応
1	潜伏期間は考える？	潜伏期間はなしと考えるか，潜伏期間中も他人にうつすと考える．
2	予防接種受けた人はもう完全にかからないとする？	考えやすくするために 100%予防できるとする．
3	例えば月曜にかかるのか水曜にかかるのかでずれるから１日単位で考えたほうが考えやすいのではないか？	１日単位の変化の方が考えやすいのであればもちろんそれでもよい．各グループに任せる．
4	「流行」とは何か？	シミュレーションしてみてから考えよう．

5	この集団における人口の増減や構成員は変わらないとするんですよね？	変わらないとする．総人口は 10 万 1 人ということになる．
6	1 回接触した人ともう一回接触したりもする？	延べ 70 人はランダムに接触する．
7	最初に入り込んだ感染者はかかってどれくらい？	1 週間うつしつづけるとする．

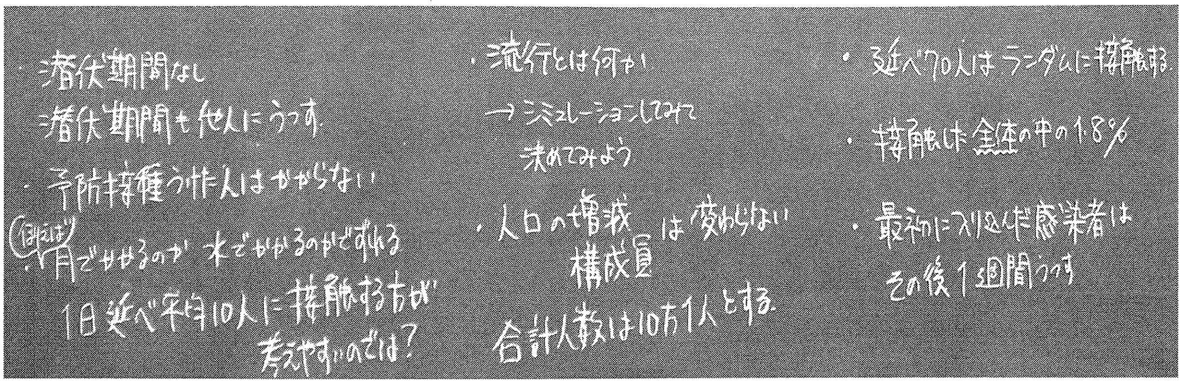


図 3-5　第 1 時の板書

また，質問ではなかったが，問題における「感染者と接触した未感染者のうち 1.8%の人が感染する感染力」の解釈を一個体どうしが接触したときに感染する確率が 1.8%であるとしているグループがあったため，そうではなく接触した中で 1.8%が感染するという割合を意味していることが強調された．板書にはその一文もある．

第 1 時はその後グループごとの自力解決で終えたが，終盤には「数列っぽくなってきたな」「漸化式が」などの発言が各グループでなされていた．実際第 1 時を終えた時点で次のように変化の規則性を表しているグループがみられる．

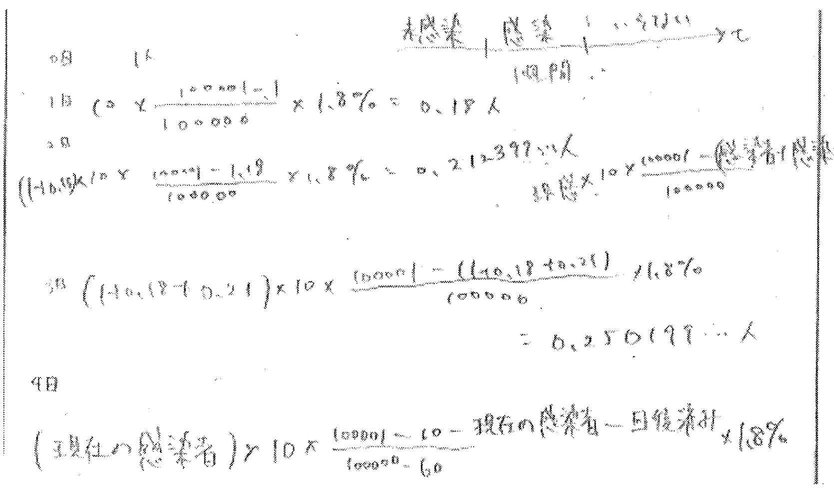


図 3-6　グループ②・生徒 TS の記述

3．2．2．第 2 時

最初の 20 分間で各グループが現在行っていることを板書し，その後全体で共有された．各グループが行っていたことと共有後の行動は以下の通りである．

表 3-4　各グループの自力解決と共有後の行動

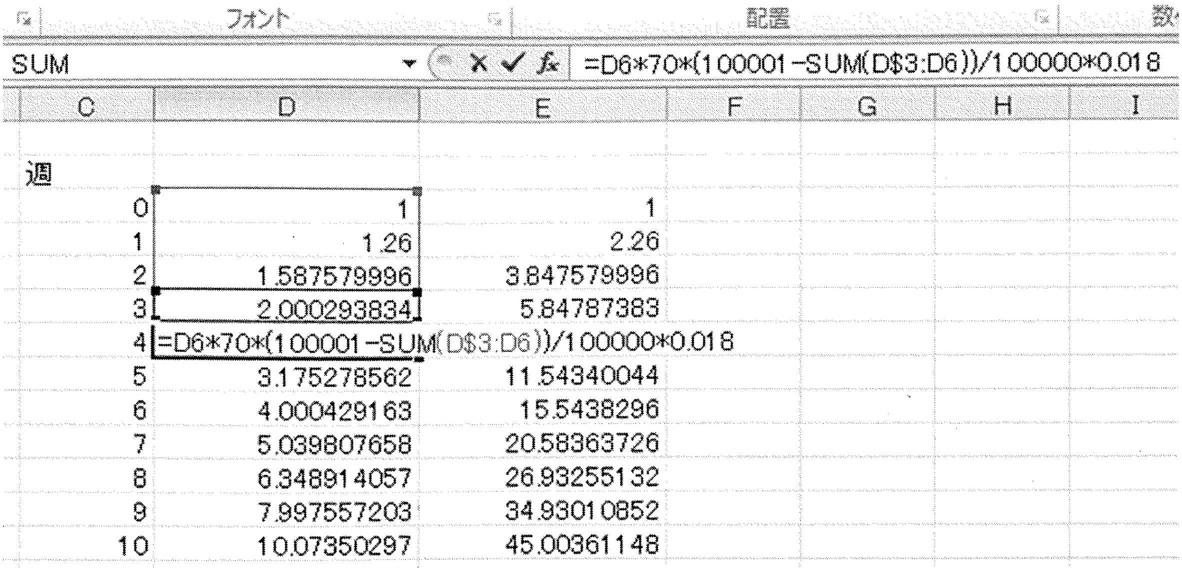
グループ	行動
①	n 週目に感染している人数を a_n として，$a_n = a_{n-1} \times \frac{70}{100000-(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \times 0.018$ という漸化式に表す．→しかしグループ 2・3 の発表をきいて，グループ②・③の漸化式に変える．
②	k 週目に感染する人数を a_k として n 週目に感染する人数を $a_n = a_{n-1} \times 70 \times \frac{100001-\sum_{k=0}^{n-1} a_k}{100000} \times 0.018$ という漸化式に表す．→エクセルでシミュレーションを始める．
③	n 週に感染する人数を a_n とすると n 週で感染 or 免疫を持っている人数は $\sum_{k=1}^{n} a_k$，そうでない人に会う確率 $p_n = \left(1-\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{100000}\right)$，70 人中持っていない人数は $70p_n$，よって $a_{n+1} = 70p_n \times \frac{1.8}{100} \times a_n$
④	1 日ごとの変化を考えたが，7 日区切りで漸化式を考えることにする．
⑤	a＝0.018 として，1 週が終わった直後：70，2 週：$70a \times 70 \times \frac{98.2}{100} \times a = (70a)^2 \times (1-a)$，3 週：$(70a \times 70 \times \frac{98.2}{100} \times a) \times 70 \times \frac{98.4}{100} \times a = (70a)^3 \times (1-a)(1-2a)$，…→しかし第 4 時が始める前に授業者に，グループ②③と同じように全体の人数を考慮すべきであったと伝えに来る．

板書がされるまでの 20 分間で，第 1 時とは解決の方向性を変更したグループが確認される．例えばグループ②は図 5-2 にあるように第 1 時では 1 日ごとの変化を考えていたが，第 2 時では週ごとの変化に戻している．一方でグループ①は第 1 時にはグループ②③と同じような漸化式の形に表現していたが第 2 時では上記のように変えた．しかし②③の発表を聞いて誤りであったと述べた．

それぞれが発表を終えて（グループ④⑤①②③の順で発表された），グループ②③が表現した漸化式が受け入れられ，漸化式でとらえればよさそうであることが共有された．残り 10 分間では，漸化式に表現していなかったグループ④⑤は②③が表現した漸化式を解釈し，②③は自分らが表現した漸化式を用いてエクセルでシミュレーションを進めた．

３．２．３．第３時

第 3 時のはじめには，グループ②③が表現した漸化式（最初を 0 週で考えるのか 1 週で考えるのかでずれがあるが）に則ることが確認され，第 2 時までに漸化式を用いてエクセルで数値計算を行い感染者数が最大になる週を見つけたりしていたグループ②が，全体の場で，PC を用いてやり方を発表した．そのときグループ②は総感染者数まで求めた．



フォント　配置

SUM　=D6*70*(100001-SUM(D$3:D6))/100000*0.018

C	D	E
週		
0	1	1
1	1.26	2.26
2	1.587579996	3.847579996
3	2.000293834	5.84787383
4	=D6*70*(100001-SUM(D$3:D6))/100000*0.018	
5	3.175278562	11.54340044
6	4.000429163	15.5438296
7	5.039807658	20.58363726
8	6.348914057	26.93255132
9	7.997557203	34.93010852
10	10.07350297	45.00361148

図 3-7　グループ②が作成した表計算の一部

他のグループも同様の活動を行った上で，感染者数と総感染者数をグラフにした．PC を用いて全体の場でグラフにした生徒は次の図にした．グラフが連続であるように見える．

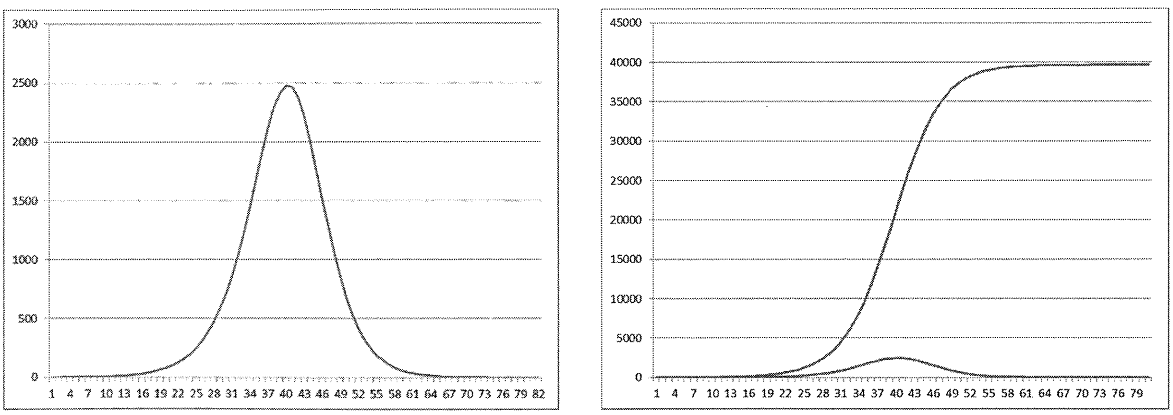


図 3-8　感染者数のシミュレーション（左）と感染者数・総感染者数のシミュレーション

グラフを作成した生徒に確認すると折れ線グラフを用いたとのことであった．それを受けて，いま求めた値は週ごとであることが改めて確認された．その後授業者によって東京都のインフルエンザ患者報告数（週ごと）のデータとそのグラフが提示され，様子が同様であることが確認された．

次に授業者から，感染者数が増加している流行初期の部分が問題であること，その部分の変化を数学的に特徴づけられないかが問われた．すぐに「指数関数」といったつぶやきが聞こえた．グループの活動では増加部分を取り出して散布図にし，指数関数で近似する活動などが行われた．残り 5 分になって全体の場で共有が始められ，授業者がどんな変化であるかと問うたところ「指数関数」という発言がされた．それに対し授業者が，いまは数列で考えているので，それは数列でいうと何かと問うと，「等比数列」と発言された．その上で授業者が「では等比数列をみなすことが妥当であることの根拠は？」と問うた．これに対し，第 2 時においてグループ③で漸化式を発表した生徒は「でも公比が変わっていっちゃう」と発言した．しかしグルー

プ⑤の生徒が，「でも初期の段階では感染者数が10万人に対して少ないから，漸化式にある $\frac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000}$ の部分が1とみなせる限り（範囲）では，漸化式が単純に a_n の定数倍が a_{n+1} となるから等比数列」であることを発言した．その発言は納得され受け入れられた様子であった．ここまでで第3時が終わった．

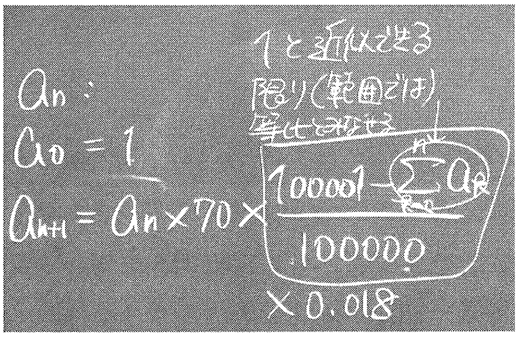


図3-9　漸化式から流行初期が等比数列とみなせることが確認された時の板書

３．２．４．前時までの概要・まとめ

- グループごとの自力解決では全グループが数列ととらえ，さらに5グループ中4グループが漸化式に言及した．結果として，漸化式 $a_{n+1} = a_n \times 70 \times \frac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000} \times 0.018$ が用いられている．
- 初期値はグループ②によって $n=0$ から始められ，$a_0 = 1$ であるとされている．
- この漸化式と初期値を用いて，エクセルでシミュレーションが行われた．39週でピークを迎えることや，最終的に約4万人が感染してしまうことが確認された．
- 感染者数が増加している段階の変化は等比数列とみなせることが漸化式に基づいて説明された．漸化式にある $\frac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000}$ を1と近似できる限りは等比数列とみなせるという説明であった．

※留意点

- どの曜日で感染するかわからないので1日単位で考えたほうがよいという意見が既に出されている．
- “a_n” の意味が完全に明示されていない（n 週目の感染者数なのか，n 週後の感染者数なのか）

３．３．本時の実際と考察

本時の実際と考察を，２．１節（４）で提案した「手立て」と「目的」に応じて述べる．

３．３．１．週当たりの感染者増加数についての考察から差分方程式へ

まず，前時の振り返りを経て，「週ごとの感染する人数の増加人数分を数学的特徴づけると？」

を問うた．それに対してグループでの自力解決が行われた後，グループ⑤が，感染者数の差を調べ，その変化の様子を数値・グラフ・一般項でそれぞれ説明した．グループ⑤は，感染者数の差の変化をグラフにしたときに，感染者数の変化の様子に似ていることに気づき，一般項で調べたようである．

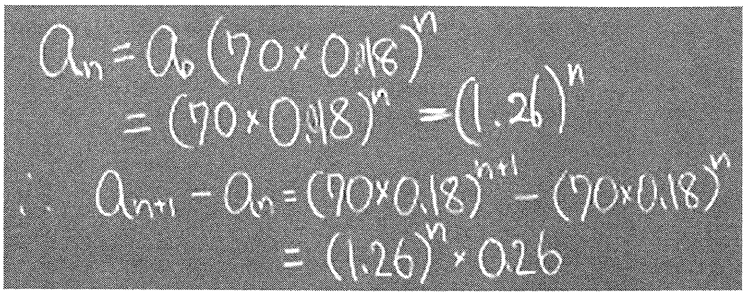


図 3-10　グループ⑤による一般項を用いた説明

この一般項による説明を受けて，授業者が「$a_{n+1} - a_n = a_n \times 0.26$」になっていることを示し，この式がいまの状況において何を意味しているかを問うた．しかしながら，授業者が期待していた「感染者の週当たりの増加数がその週の感染者数に比例する」という発言はなかなか得られなかった．授業者が関係をたずね，感染者の週当たりの増加数を y，その週の感染者数を x で置いたところでようやくその発言がなされた．

この点については授業後に，問われていることを難しくとらえすぎたので発言がなかったのではないかという意見を参観者からいただいたが，後日生徒たちに確認したところ，「感染者の週当たりの増加数がその週の感染者数に比例する」という見方は誰もしていなかったことが確認された．そこには難しさがあったようである．

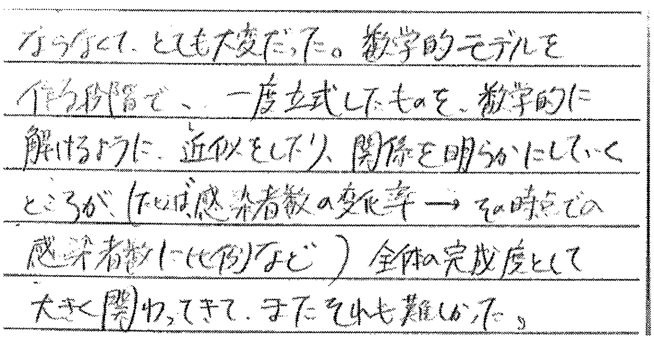


図 3-11　生徒の学習感想

また，図 3-10 のように一般項を用いた説明がなされたのはいいが，授業者は漸化式から $a_{n+1} - a_n = a_n \times 0.26$ を導くこと，即ち $a_{n+1} = 1.26a_n$ を $a_{n+1} - a_n = a_n \times 0.26$ と変形することをしなかった．指導案上では計画していたことであるが，図 3-10 が出されたことによって行うのをやめたのである．即ち，漸化式を差分方程式と見直す場を設定していない．

結果として，生徒たちの自力解決活動に基づいて差分方程式の形は生み出され，「感染者の週当たりの増加数がその週の感染者数に比例する」という見方は得られたものの，漸化式を差分

方程式と見直すことは達成されなかった．

その理由の一つとして，最初の課題である，「週ごとの感染する人数の増加人数分の数学的特徴づけ」に解決の必然性が感じられなかったことが挙げられる．授業者としては，感染者数の増加が問題になるのであるから増加数に目をつけるのは自然であると考えたが，すでに全体的な変化の様子をつかんでいるなかで差に着目する必然性は確かに強くない．改めて，自らの活動を「見直す」にはそれだけの必然性が必要であるという当然のことを実感するに至った．

３．３．２．短い時間単位における感染者の変化を調べることから微分方程式へ

次に，授業者が，感染が流行しないようにするために，どんな時間 t における感染者数が最初の感染者数以下になるための予防接種をどうすればよいかを問うた．ここで「どんな時間 t」という言い方をしたのは，連続性や瞬間に目を向けさせるためである．「このまま週当たりを考えていて問題ないか？」などと問うたが，特に発言はなされなかった．

そこで，最初から一日あたりの変化を考えようとしていた生徒（グループ④）を指名した．その生徒は，感染力を保持している人数の変化を考えるなら一日あたりの方がよいが，いまは感染者数の総和を考えているので，それならば週当たりの方が考えやすいと発言した．また，週の中で月曜日に感染した人は次の月曜日には感染力を持たなくなるし，火曜日に感染した人は次の火曜日に・・・と考えていくならば一日当たりで考えたほうがよいと発言した．するとその発言を受けて，他の生徒から「そんなこと言ったら一日の中でいつかかったかわからないんだから，細かく言うんだったらそこまで解析しなきゃいけない」という発言がなされた．そこはどうかと全体に改めて問い直したが，すでに授業終了時刻を過ぎていたためここで終わることになった．

結果として，微分方程式を生み出すことはできなかった．生徒たちから瞬間の変化を考えればよいという発言はなされなかった．「一日のどこで感染するかわからないのだから細かく調べるならそこまでしなきゃいけない」という趣旨の発言がなされたことは成果であって，そこから，だからこそ我々には変化率という見方があるという流れにできたかもしれない．しかしながら，発言した生徒も，一日のどこで感染するかまで調べるのは無理だから週ごとの近似でよいのではないかという立場での発言であった．最初から一日あたりで考える生徒がいたことから，少なくとも一日という時間単位で考えることの必然性はあったと考えるが，さらに時間単位を縮める必然性はなかったと考えられる．また，図 3-8 におけるグラフが連続であったように，生徒たちはすでに，週当たりの感染者数の変化をほとんど連続的変化としてとらえていたことも考えられる．いずれにしても，一日という単位より短い，瞬間的な変化を考えることが問題意識とならなかった．

授業後，参観者の方から，$a_{n+1}-a_n=a_n\times 0.26$ という式のままでは導関数を見通しづらいのではないか，左辺の分母に本当は $(n+1)-n$ があることを形として示す必要があるのではないかというご意見をいただいた．後日の授業で，なぜ時間単位を縮めるかどうかを問うたのかという意図と，その式の形を示したところ，導関数という発言がなされ，微分方程式に定式化し直すことができたことを付記しておく．この授業後には，「ただの数列の和で終わりうる話が微分方程式につながるとは思わなかった」という学習感想が得られた．

【3章参考引用文献】

稲葉寿.（2003）. インフルエンザ流行－数理モデル.
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~inaba/inaba2003_rinshou.pdf（平成26年6月20日最終確認）

瀬野裕美.（2008）. 個体群動態の数理モデリング序論. *シリーズ数理生物学入門 巻1 「数」の数理生物学*.（日本数理生物学会編，瀬野裕美 責任編集）pp.1-43.共立出版.

瀬野裕美.（2009）. 感染症個体群動態に関する時間離散モデルについての考察. *京都大学数理解析研究所講究録*. Vol.1663，pp20-29，2009.

瀬野裕美.（2011）. 離散型 Kermack-McKendrick SIR モデルの特性. *京都大学数理解析研究所講究録*. Vol.1757，pp37-43.

長崎栄三ほか.（2006）. 算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究. *日本数学教育学会誌*. 第90巻. 第4号. 明治図書.

西浦博・稲葉寿.（2006）. 感染症流行の予測：感染症数理モデルにおける定量的課題. *統計数理*. 第54巻第2号. pp.461-480.

西浦博.（2014）. あなたと私の予防接種の駆け引き. *数学セミナー*. 2014年4月号. pp.69-75.

西村圭一.（2012）. 数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究. 東洋館出版社.

D.バージェス，M.ボリー著. 垣田高夫ほか訳（1990）. 微分方程式で数学モデルを作ろう. 日本評論社

M.ブラウン著. 一楽重雄ほか訳.（2001）*微分方程式 上・下 その数学と応用*. シュプリンガーフェアラーク東京

ジェームズ.D.マレー著. 三村昌泰総監修（2014）. *マレー数理生物学入門*. 丸善出版.

H.Freudenthal.（1968）. Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*.vol.1.pp3-8.

4．まとめと今後の課題

本節では，第 4 回 TGUISS 公開研究会にて講師をお願いした東京学芸大学・太田伸也先生からの指導講評を基に，本校数学科の今後の課題を明らかにする。

太田先生からは，まず本校数学科の取り組みと本研究会の数学科のテーマとの関わりについてご説明頂いた（取り組みとテーマに関しては 1 を参照されたい）。これらが，本公開授業を研究対象とするための前提となる。つまり，本公開授業は，生徒の「現状」と「高まった姿」，そこに至るまでの「手立て」の 3 つの観点に整理しながらふりかえらなければ，今後につながる議論が生まれないということである。特に太田先生は，生徒の「現状」がどうであったのかをとらえることが重要であると述べられた。なぜなら，「現状」を正しくとらえていなければ，「高まった姿」を設定することも，その姿に見合った「手立て」を講じることができないからである。

まず公開授業 I（授業者：内野）について，「現状」と「手立て」に焦点をあてて図 4- 1 を用いてふりかえられた。

特筆すべきは，経験的な例を用いながら，いきいきとした議論ができていたところであるという。問題に対して，考えの共有や同意，反駁する姿勢が身に付きはじめている，あるいは今までの学習で身に付いていることが，本授業でも表れていた。これが，本校第 1 学年生徒の「現状」である。しかし，議論を支える根拠は，生徒たち自身の経験や勘であり，数学的にも，そして意思決定という側面からも不十分であったことは否めない。換言すれば，そこを「手立て」を通してどう質の高い議論にするかが問われていたのである。数学的な視点では，場合の数や確率を考えるような「手立て」が求められる。しかし本授業のねらいをふまえれば，意思決定の視点で，「仮定を置くこと」に焦点をあてるべきであったという。具体的には，どういう「手立て」を講じれば，生徒たちが仮定を置きたくなるのかを，現状をふまえて考えるべきであったということである。

- 相手のカードの出し方（傾向，仮説）を想定し，それに対応した戦略を考える
- 起こりうる場合について，全体集合や考察対象に焦点化して戦略の妥当性について考え合う
- 事象の数学的な表現方法を工夫する（場合の数，2 次元表，...）

戦略を考える課題意識につながる問い（確率事象でなく，相手の傾向に対応して戦略を考える）：相手の傾向について仮定をおいて考える
→いずれは確率，期待値を用いて式に表現

- 起こりやすさ（確率）に関する経験的な観念をもとにする判断
- 起こりうる場合を数え上げること
- 例を挙げて上記の妥当性を数学的に考え合うこと

図 4- 1　公開授業 I の構造（授業後）

公開授業II（授業者：小林）に関しても，図4-2を用いてふりかえられた。太田先生は，本授業の大きな反省点として，二点挙げられた。

一つめは，生徒の課題意識である。授業者としては，「週当たりの感染者の増加数がその週の感染者数に比例している」ことを漸化式からよみとることを意図していた。しかし，その必要性が生徒の中に課題意識としてあったか，あるいは持たせられたのか，疑問が残る。生徒の「現状」は，事象を漸化式に表現し，それをよむことは十分できていた。また，よむことが難しいときには，具体的な数や表に戻り思考を深めている様子も見られた。このようなことができてはいたが，「週当たりの感染者の増加数がその週の感染者数に比例している」とよむことはできない「現状」があった。ゆえに，そこに「手立て」が求められたのである。比例していることをよみとることができれば，その週にどれぐらい感染が広まるのかがおおよそわかる，といったことに気付かせることが必要であった。

二つめは，連続性である。太田先生の感触としては，生徒たちは，折れ線グラフを用いながらも，連続関数的にみているように感じられたという。離散的にとらえている段階での値が前提とされているため，その間を考えたとしても，グラフの概形が大きく変わることはないだろうと考えていた可能性がある。実際，エンジニアなどもそう考えるという。つまり，事象が先にある場合は，連続かどうかの議論よりも，現象がある時点で連続という仮定が暗黙裡に置かれて，考察されるという。そう考えたとき，数学で何を問うかを考えるべきであったし，また離散的にとらえることをもっと生かした授業をすべきであったのではないかと述べられた。すなわち，離散から連続へ見方を変えるところに価値があり，「手立て」を講じる必要があったのである。

- 増加数（変化）に着目して漸化式をよむこと
- 増加数（変化）が，何の関数になっているかという意識で，漸化式をよむこと
- （連続関数として，類推的に）増加（変化）率が何の関数になっているかを表したり読んだりすること（微分方程式へ）
- 微分方程式を事象と関連させてよんだり表したりすること（実感）

- 漸化式を「週当たりの感染者数の増加数はその週の感染者数に**比例する」とよむ必要性**　…事象や表（やグラフ）に戻る可能性？（独立・従属変数）次を予測する etc...
- 数列（漸化式）（離散的）→連続関数とみる必要性はどこから生まれるか　「瞬間的な感染者増加数」とは？　…現象が先にあること→連続とみなして考えること（グラフ）

- 漸化式への表現とそのよみ
- 1週間ごとの表（感染者数，合計，増加数）→セルごとの比，差
- そのグラフ表現

図4-2　公開授業IIの構造（授業後）

太田先生からの指導講評をふまえ，本校数学科の課題を示す。

大きな課題としては，生徒に「仮定を置くこと」を意識化させる手立ての検討がある。本校数学科の授業では，現実場面の問題を数多く扱う。現実場面の問題に対し，数学で解決していこうとしたときには，やはり単純化・理想化・簡単化，広く仮定を置くことが必要不可欠である。テキスト『TGUISS』でもそれを重視し，本校数学科の授業でも強く意識してきた。しかし，そのことを生徒の中でどこまで意識させられていたか，あるいはその視点で授業をどう構築しているかということに関しては，我々の中でも練り切れていない部分があった。つまり，数学科の共通認識として「仮定を置くこと」の重要性がありながらも，それを「手立て」としてどう明示するべきかという視点が足りなかったのかもしれない。「仮定を置くこと」をどう生徒の中で意識させるか，あるいはその姿勢をどう育成するのか，その手立てのあり方が大きな課題となる。

その課題に付随して表出する別の課題としては，やはり評価のあり方である。評価したいのは，数学的な知識・理解，技能ではなく，数学的な見方・考え方，ひいては数学する姿勢や態度である。本校では，レポートやノートを通して，ルーブリックを用いながら見方や考え方を評価してきた。しかし，それによって姿勢や態度も評価できているとは断言できない。ゆえに，直接的には評価できないとしても，間接的に評価するシステムを構築する必要がある。

その一つの方法として，生徒の意識・姿勢が，学年が上がるにつれどのように変化しているかをみることが挙げられる。これは，国際バカロレア・MYP の理念や，ルーブリックを用いた形成的アセスメントの考え方と類似するものがあるといえる。つまり，問題に直面したときの姿勢や態度が以前と比べてどのように改善されているのかをみるのである。幸いにも，本校は中等教育学校であるから，6 年間の生徒の姿勢や態度の変容が比較的追いやすい環境にある。本校数学科のカリキュラム・授業の中で，生徒が学年を追うにつれどのように姿勢・態度を変容させてきたのかをみることで，本校数学科のあり方を検討する指標となる一方で，生徒の姿勢・態度の評価にもつながるのではないだろうか。

今後，公開研究会を一つの区切り・目安としながら，上述の課題に対してよりよい数学科のあり方を提案できるよう，数学科一同，日々研究に邁進したい。