東京学芸大学附属高等学校紀要　52　pp.7～20, 2014

微分と積分のつながりがわかる授業の開発

The lesson that make understand fandamental theorem of calculaus

数学科　大 谷　晋

＜要旨＞
関数 $f(x)$ の導関数 $y=f'(x)$ のグラフからオイラー法によって、もとの関数 $f(x)$ の近似折れ線をつくることを通して、微分積分学の基本定理の理解を容易にする授業を開発し、実践を行ったので報告する。

＜キーワード＞　面積　接線　近似折れ線　オイラー法　微分積分学の基本定理　区分求積法

1. はじめに

高校数学において、数学IIの「微分・積分の考え」は重要な単元であり、高校数学の到達点であるといっても過言ではない。しかし、生徒は本当に微分積分の考え方を理解し、活用できているのだろうか。微分積分においては、形式的な式操作により問題を解くことができることもあるため（この単元に限ったことではないが）、問題が解けるということが必ずしも理解していることの証拠にはならない。

微分といえば接線、積分といえば面積であるということは、数学IIの学習を終えた多くの生徒が持っているこの単元についてのイメージであるが、接線と面積がなぜつながるのかはよく分かっていないのが現状である。通常は、不定積分（実際には原始関数）が微分の逆演算として定義され、それを利用して定積分が定義される。そして、面積を求めることへ応用されるが、なぜ微分の逆を考えるのかは生徒にとっては理解しがたい。

そこで、微分と積分のつながりを理解しやすい教材を開発し実践を行った。平成25年度第12回公開教育研究大会での研究授業の記録を中心に、別紙資料の単元計画にある「3次関数のグラフを描く1,2」「面積とは何か？」「面積を求める2」の授業の概要を報告する。

2. 3次関数のグラフを描く1,2

2-1　増減表から描いたグラフ

微分の応用として関数の増減を学習した後、3次関数を微分して増減表を作成してグラフを描くことを学習する。普通は、微分して導関数を求め、増減表を作成し、3次関数のグラフを描くことになっているが、はじめて学習する生徒にとって、単に増加する、減少するという情報だけから、凹凸も含めてグラフの概形を正確に把握することは困難である。

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ のグラフをかくという課題を与える。

$f'(x)=x^2-4x+3$

$f'(x)=(x-1)(x-3)$

であるから、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{7}{3}$	↘	極小 1	↗

増減表では、増加かするか、減少するかはわかるが、どのような増加・減少かということはわからない。また、3次関数のグラフが持つ対称性については全くわからない。
そのため、次の図のようなグラフを描く生徒もいる。図1では、$x<1\,,3<x$ における増加の様子が正確に描けていない。図2では、グラフの対称性が捉えられていないことがわかる。

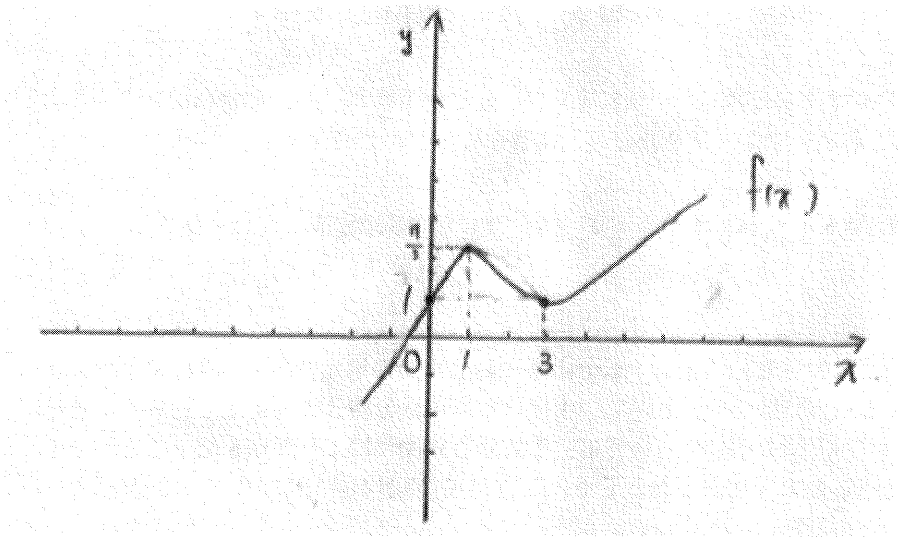


図1　増減表からかいた3次関数のグラフ1

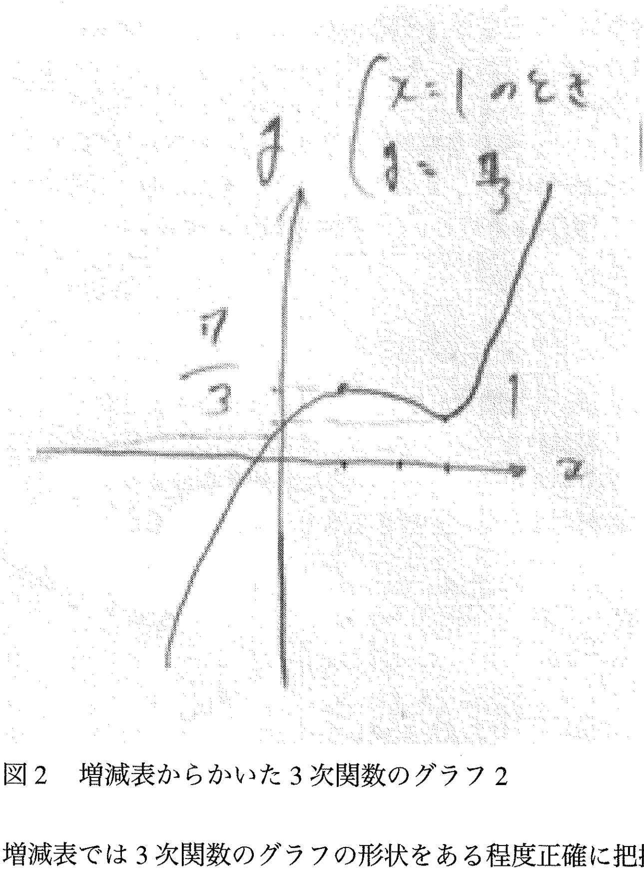


図2　増減表からかいた3次関数のグラフ2

増減表では3次関数のグラフの形状をある程度正確に把握するためには基本的に情報が不足している。
そこで、微分係数の符号 (つまり、関数の増減) だけではなく、微分係数の値すなわち接線の傾きを用いてグラフを描く授業を行った。

グラフの曲線はごく狭い範囲でなら、接線で近似できる（$f(x) \doteqdot f(a) + f'(a)x$）ということを利用して、微分係数に着目して、定規を用いて折れ線グラフで3次関数のグラフを近似するという課題を与えた。今、関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ について、その導関数 $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ のグラフが方眼紙に与えられている。方眼紙の最小目盛は $\dfrac{1}{10}$ である。

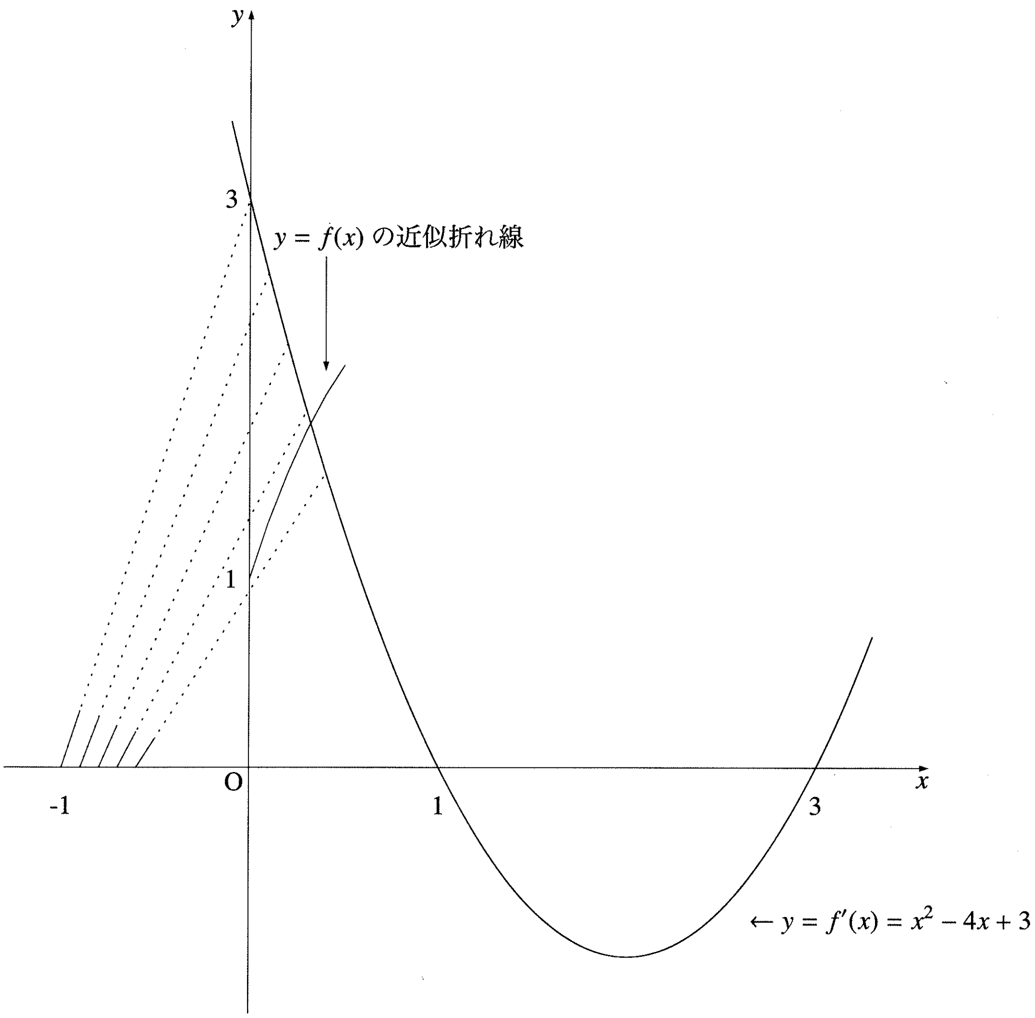
導関数 $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ からわかること、つまり接線の傾きを利用して $y = f(x)$ のグラフを作成する。
これは、常微分方程式の数値解法の1つであるオイラー法（オイラーの折れ線法）である。
作業としては、以下に述べるように2つの作業を行うことになる。

2-2　作業1(短い接線を作図する)

グラフから、$f'(0) = 3$ であるから、未知の関数 $f(x)$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きは3であることがわかる。傾き3の直線を作図するため、$y = f'(x)$ のグラフ上の点 $(0, f'(0))$ と x 軸上の点 $(0-1, 0)$ を結び、点 $(0-1, 0)$ から x 軸の正の方向へ $\dfrac{1}{10}$ 増加するように線分を定規で引く。次に、$y = f'(x)$ のグラフの点 $(\dfrac{1}{10}, f'(\dfrac{1}{10}))$ と x 軸上の点 $(\dfrac{1}{10} - 1, 0)$ を結び、点 $(\dfrac{1}{10} - 1, 0)$ から x 軸の正の方向へ $\dfrac{1}{10}$ 増加するように線分を定規で引く。以下同様に、$y = f'(x)$ のグラフ上の点 $(\dfrac{1}{10}n, f'(\dfrac{n}{10}))$ と x 軸上の点 $(\dfrac{n}{10} - 1, 0)$ を結び、点 $(\dfrac{n}{10} - 1, 0)$ から x 軸の正の方向へ $\dfrac{1}{10}$ 増加するように線分を定規で引く。
この作業を $n = 40$ まで続ける。

2-3　作業2(接線を平行移動してつなぎ合わせる)

次に、最初にかいた線分を x 軸方向に1、x 軸方向に1平行移動する。これは、$y = f(x)$ のグラフの $x = 0$ における接線を $(0 \leqq x \leqq \frac{1}{10})$ においてかいた線分 $y = f(0) + f'(x)x$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{10})$ である。次に、先ほどの作業で2番目にかいた線分を $y = f(0) + f'(x)x$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{10})$ の終点につながるように平行移動する。以下同様に、作業1でかいた線分を次々に平行移動してつなげていき、折れ線を作る。これが、$y = f(x)$ のグラフに対する近似折れ線である。



2-4　3 次関数のグラフの特徴

この近似折れ線を観察すると、いくつかのことに気が付く。

まず、x が 3 より大きくなればなるほど、接線の傾きは大きくなる。x が 1 より小さいときも同様。したがって、x が 3 より大きくなると関数 $f(x)$ は増加するが増加の度合いは増していくことがわかる。また、3 次関数のグラフのもつ対称性（変曲点に関して点対称）に気がつく生徒もいた。導関数が 2 次関数でそのグラフは軸 $x = 2$ に関して対称であるから、もとの 3 次関数のグラフの接線の傾きは、$x = 2$ に関して対称になっている。

2-5 実際の関数のグラフと折れ線の比較

各自が、定規を用いて近似折れ線を描いたところで、コンピュータでかいた $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ のグラフを配付して、自分のかいた近似折れ線と比較した。

近似折れ線ではあるが、少し離れて見ると曲線のように見えることがわかる。また、コンピュータでかいたグラフとは少しずれているが、そのずれは大きくはないことがわかる。また、今回は作業を $\dfrac{1}{10}$ ごとに行ったが、もっと細かく行えば、より本来のグラフに近づくであろうこと、つまり極限的には本来のグラフに収束するであろうことも感じることができただろう。

以下は、生徒のかいた近似折れ線と考察である。

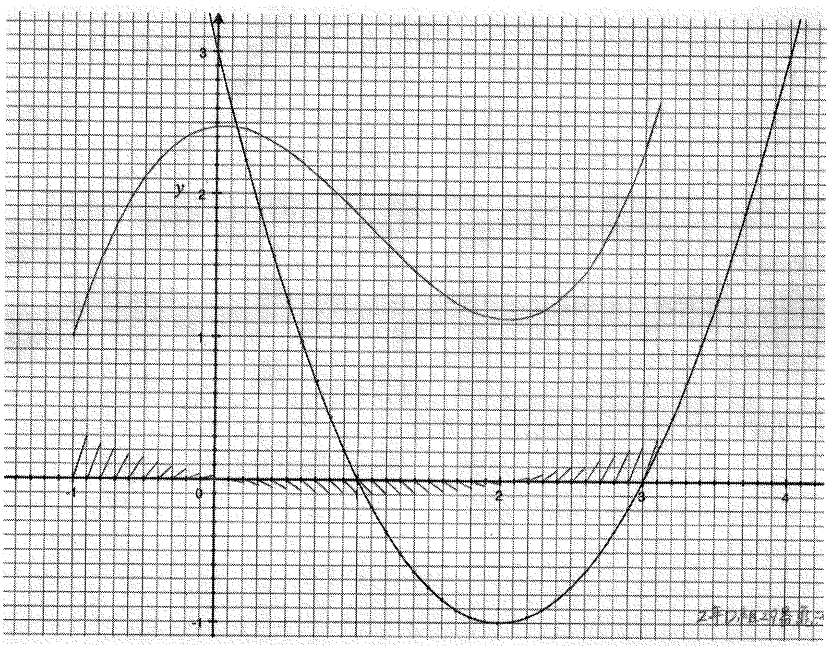
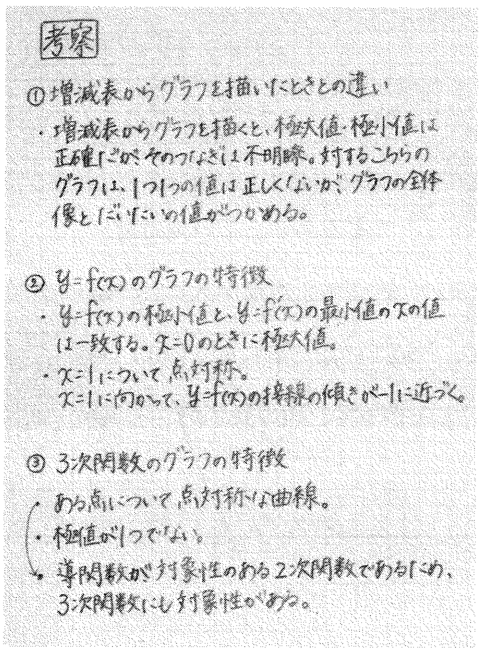


図３　生徒が描いた近似折れ線

（授業の都合により、$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したグラフを描いた）



考察

①増減表からグラフを描いたときとの違い

・増減表からグラフを描くと、極大値・極小値は正確だがそのつなぎは不明瞭。対するこちらのグラフは、1つ1つの値は正しくないが、グラフの全体像とだいたいの値がつかめる。

② y=f(x)のグラフの特徴

・y=f(x)の極小値と、y=f′(x)の最小値のxの値は一致する。x=0のときに極大値。

・x=1について点対称。
x=1に向かって、y=f(x)の接線の傾きが−1に近づく。

③ 3次関数のグラフの特徴

・ある点について点対称な曲線。

・極値が1つでない。

・導関数が対称性のある2次関数であるため、3次関数にも対称性がある。

図４　生徒の考察

3. 面積とは何か

面積とは何かということの確認から授業を行った。

生徒は、「長方形の面積は縦×横である」ということは当然知っているが、面積とは何かと聞かれるとはっきり答られる生徒は少ない。

面積とは、平面図形の広さを表す方法であり、一辺１の正方形の面積を１としたときに、他の図形の広さを実数で表すことであると確認する。

面積が持つあるいは持っていてほしいと期待される基本的な性質として、我々は暗黙のうちに次の2つのことを理解している。
(1) 合同な図形の面積は等しい
(2) 2つの重ならない図形を合わせた図形の面積は、それぞれの図形の面積の和である。（加法性）
これら、2つのことを意識させ、長方形の面積について考えさせた。

4-1　辺の長さが整数である長方形の面積
辺の長さが、自然数である長方形は、一辺1の正方形の個数が面積であるから、縦×横で面積が求まる（図5）。

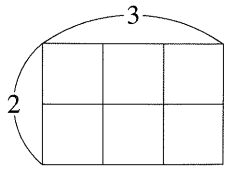


図5　縦2横3の長方形

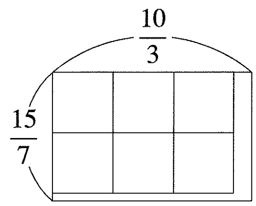


図6　縦 $\frac{15}{7}$ 横 $\frac{10}{3}$ の長方形

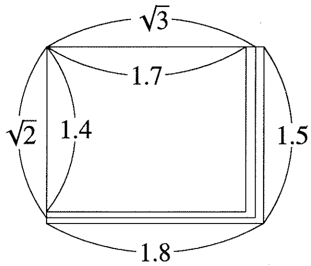


図7　縦 $\sqrt{2}$ 横 $\sqrt{3}$ の長方形

4-2　辺の長さが有理数である長方形の面積
辺の長さが有理数である長方形の場合は、例えば縦、横が $\frac{15}{7}, \frac{10}{3}$ の長方形（図6）であれば、7と3の最小公倍数が21であるから、一辺1の正方形を縦と横それぞれ21等分した一辺 $\frac{1}{21}$ の正方形を新たに基準として考える。$\frac{10}{3}=\frac{70}{21}, \frac{15}{7}=\frac{45}{21}$ であるから、この長方形には一辺 $\frac{1}{21}$ の正方形が縦に70個、横に45個入るので合計 70×45 個の正方形が入る。一辺 $\frac{1}{21}$ の正方形の面積は、この正方形が 21×21 個合わさって、一辺1の正方形になるので、基本性質(1)より、一辺 $\frac{1}{21}$ の正方形の面積は $\frac{1}{21^2}$ とわかる。したがって、辺の長さが $\frac{15}{7}, \frac{10}{3}$ である長方形の面積 S は、
$S = 45 \cdot 70 \cdot \frac{1}{21^2} = \frac{45}{21} \cdot \frac{70}{21} = \frac{15}{7} \cdot \frac{10}{3}$
となり、縦×横で面積が求められる。

4-3　辺の長さが無理数である長方形の面積
しかし、このような考え方では、辺の長さが無理数の長方形の面積を求めることはできない。例えば、縦、横が $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ の長方形の面積を考える（図7）。一辺1の正方形をどんなに細かく等分してもこの長方形を埋め尽くすことはできない。
そこで、内と外から近似するという考えを紹介する。
この長方形の面積を S とすると、$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ であるから、
$1.4 \times 1.7 < S < 1.5 \times 1.8$
さらに近似の精度を上げると、
$1.41 \times 1.73 < S < 1.42 \times 1.74$
$1.414 \times 1.732 < S < 1.415 \times 1.733$

・

・

縦、横が $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の長方形に含まれる長方形の面積を a_n、縦、横が $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の長方形を含む長方形の面積を b_n とすると、$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

となりともに同じ値 $\sqrt{6}$ に収束するので、$S = \sqrt{6}$ と考える。

このようにして、長方形の面積はどんな場合にも、縦×横で求められることがわかった。

4. 面積を求める 2(区分求積法)

通常は、数学 III で扱う区分求積法であるが、長方形の面積を求めるにも極限の考え方が必要であることを学習したので、曲線で囲まれた図形（$y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ とで囲まれた図形）の面積を区分求積法で求めた。

次に、関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフと x 軸、y 軸とで囲まれた図形 F の面積 S を求めるという課題を与えた。

前時に、微小区間において長方形の高さは最大にとっても最小にとっても同じ値に収束することを確認したので、ここでは、長方形の高さは最大にとることにした。

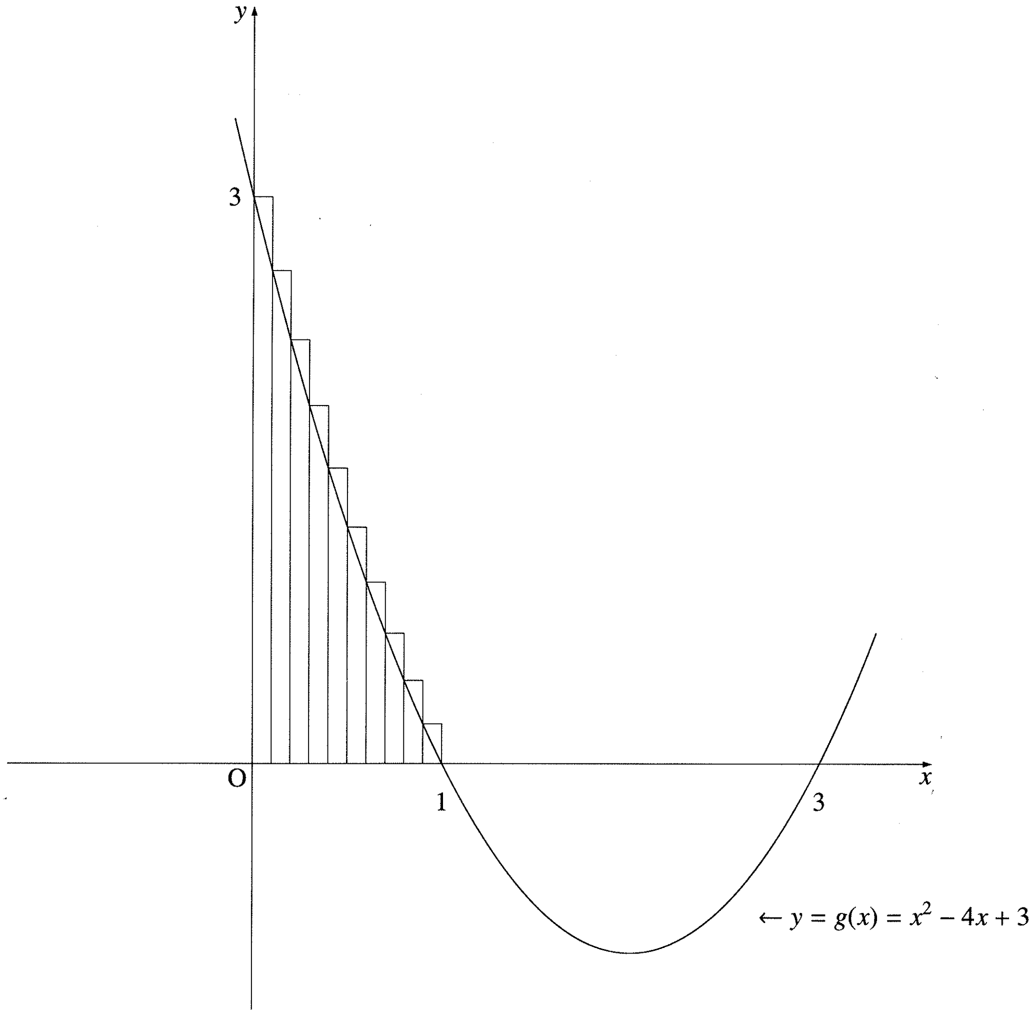
$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \{(\frac{k-1}{n})^2 - 4\frac{k-1}{n} + 3\} \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{4}{3}$$

区間 $[0, 1]$ を n 等分して、$n \to \infty$ の極限を考えるのであるが、10 等分したときの長方形の面積の総和を考えさせた。

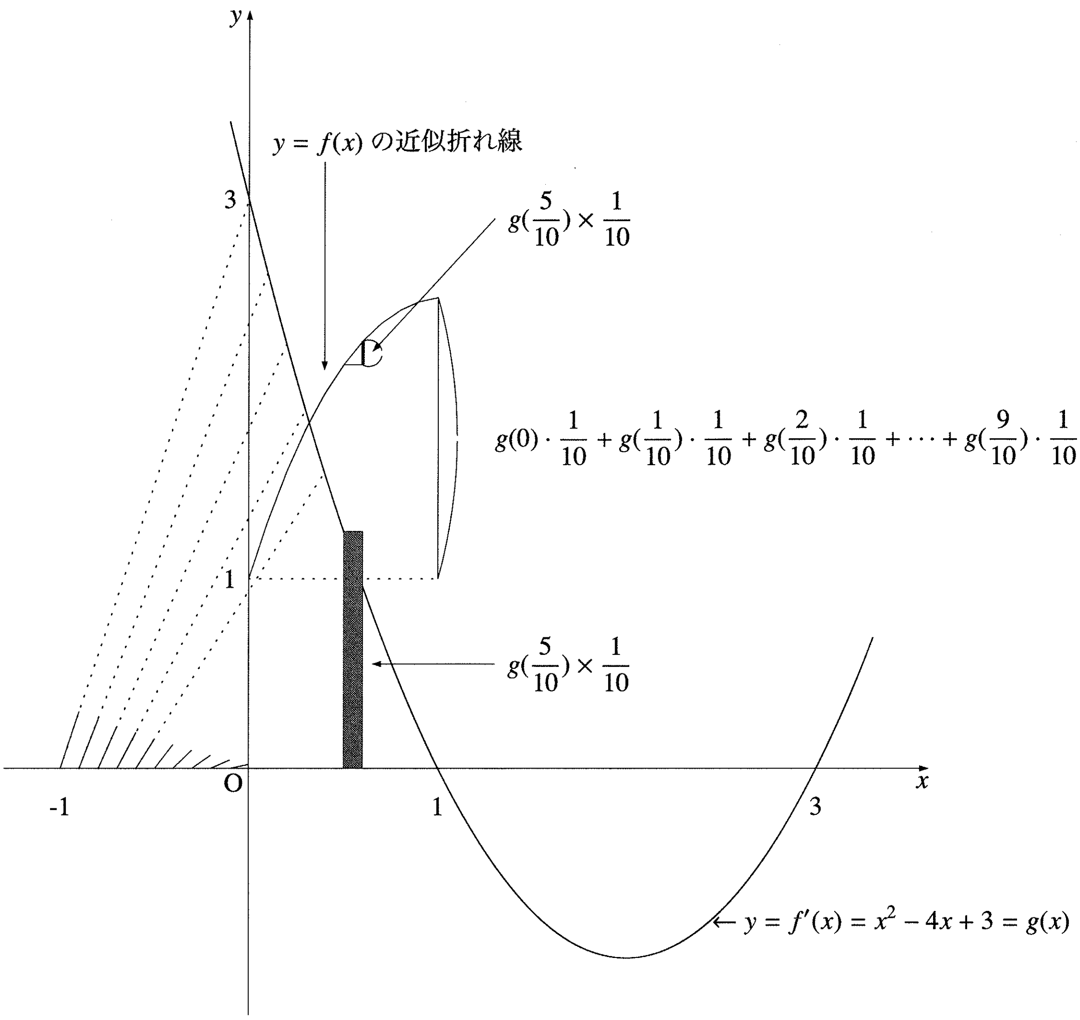
このときの長方形 10 個の面積の総和を T_{10} とすると、$g(x) = x^2 - 4x + 3$ とすると、

$$T_{10} = g(0) \cdot \frac{1}{10} + g(\frac{1}{10}) \cdot \frac{1}{10} + g(\frac{2}{10}) \cdot \frac{1}{10} + \cdots + g(\frac{9}{10}) \cdot \frac{1}{10}$$

である。



次に、以前定規でかいた3次関数のグラフを出すように指示し、面積と近似折れ線のつながりについて考えさせた。
何人かの生徒は、10個の長方形の面積と近似折れ線の関係に気づいた。
つまり、$g(\frac{k}{10}) \times \frac{1}{10}$ は左から $k+1$ 番目の長方形の面積であると同時に、近似折れ線についてては左から $k+1$ 番目の線分の y 方向の増分である。
したがって、長方形の10個の面積の総和は、近似折れ線の $x=1$ のときの y の値と $x=0$ のときの y の値との差であることがわかる。
このことから、$n \to \infty$ の極限を考えると、面積Sは $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ としたとき、$S = f(1) - f(0)$ で求められるのである。まさにこれが微分積分学の基本定理である。



5. 考察

近似折れ線によるグラフの再構成と区分求積の関係に気づいた生徒は少なくなかった。しかし、研究授業の後の研究協議会では、生徒に気づきを促すための手だては乏しいということが指摘された。区分求積の授業と近似折れ線の授業との間隔があいていたこともあり、2つの事柄の関係性をうまく考えることができない生徒もいた。そのような生徒をサポートする手段を考えることは今後の課題となる。

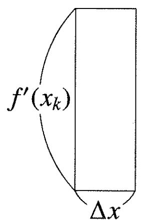
1つには、接線の傾きと面積の関係を、物理的な速度と移動距離の関係に置き換える方法がある。他には、近似折れ線による関数値と、真の関数の値を比較するような作業（例えば極大値の比較など）をどこかに入れておくことが考えられる。また、これは生徒にとってはやや難しいが、近似折れ線の方程式を求めさせるということも考えられる。

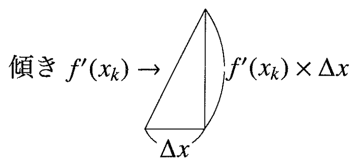
区分求積の考え方は、曲線図形を非常に細い長方形の集まりとみなすということであり、その直線図形の極限として曲線図形をとらえるということであろう。このことは、少なくとも数学 III の微分積分での区分求積においては、生徒が学習する事柄である。

他方、曲線（関数のグラフ）が、短い接線による折れ線の集まりとみなすという見方は、従来あまり教えられていなかったと考えられる。しかし、この2つの考え方を対にすることによって、微分積分学の基本定理

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ の理解が容易になると考える。

$\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)\cdot\Delta x \;\; (\Delta x = \frac{b-a}{n} \;\; x_k = a + k\cdot\Delta x)$ であるが、
$f'(x_k)\times\Delta x$ について、$f'(x_k)$ を関数 $f'(x)$ の $x = x_k$ における関数値とみれば、これは長方形の面積であるが、$f'(x_k)$ を関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の $x = x_k$ における値、つまり $x = x_k$ における微分係数とみれば、$f'(x_k)\times\Delta x$ は関数の y の増分である。このような 2 つの見方ができると、面積と接線がつながるのである。





数学 II の「微分積分の考え」を学習する生徒には、是非このような見方を習得してもらいたいものである。

(資料：学習指導案)

東京学芸大学附属高等学校　公開教育研究大会
「面積を求める」学習指導案

平成 25 年 11 月 30 日
数学科教諭　　大谷　晋

単元：微分・積分の考え　積分
単元の目標
微分・積分の考えについて理解し，それらの有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。
単元計画　別紙
面積を求める 2（本時）　1 時間

本時のねらい
導関数のグラフを用いて元の関数のグラフを描くときに作図した短い接線の y 方向の増分が，区分求積法における微小長方形の面積と一致することを見いださせる。このことによって，関数 $y = f(x)$ グラフと x 軸，直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積が，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき，$F(b) - F(a)$ となることを理解させる。

本時の展開

時間	指導内容	生徒の学習活動	指導上の留意点
15 分	放物線 $y = x^2-4x+3$ と x 軸，y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよう。	各自で極限の計算をする。 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{(\frac{k-1}{n})^2 - 4\frac{k-1}{n} + 3\}\cdot\frac{1-0}{n}$ 計算結果を周りの人と確認する。	極限の計算が正しくできるよう援助する。 必要に応じてノートに図を書くよう指示する。
25 分	面積を別の方法で計算できないかをグループで考える。	区分求積の考えを再確認し，グラフ用紙に長方形を描く（10 等分）。 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ とし，この記号を用いて 10 個の長方形の面積の和を表す。 $f(0)\cdot\frac{1}{10} + f(\frac{1}{10})\cdot\frac{1}{10} + f(\frac{2}{10})\cdot\frac{1}{10} + \cdots +$ $f(\frac{9}{10})\cdot\frac{1}{10}$	導関数（$g'(x) = x^2-4x+3$）のグラフからもとの関数（$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$）のグラフを作ったことを思い出させる。(グラフを持っていない生徒にはコピーを配付する)
10 分	まとめ	他の関数についても同様のことがいえることを確認する	

単元計画

微分・積分の考え（21 時間）

回	学習内容
1	ふたのない箱の容積の最大値 1
2	ふたのない箱の容積の最大値 2
3	ふたのない箱の容積の最大値 3
4	微分係数，極限
5	微分係数
6	導関数
7	導関数（x^n の微分），接線
8	接線の方程式
9	関数の増減，極値，グラフ
10	3 次関数のグラフを描く 1
11	3 次関数のグラフを描く 2
12	微分の応用
13	面積とは何か？
14	面積を求める 1
15	面積を求める 2（本時）
16	定積分，不定積分
17	2 曲線間の面積
18	パフォーマンス評価
19	積分の応用
20	微分・積分の応用
21	期末考査

評価問題（時間 30 分）

曲線 $y = x^2$ と y 軸および直線 $y = 4$ とで囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体図形 A の体積 V を求めよ。

ルーブリック

	S	A	B	C
面積の定義を体積に応用できるか		立体図形 A を体積が既知の立体図形で挟むことができている	立体図形 A を体積が既知の立体図形で挟もうとしている	立体図形 A を体積が既知の立体図形で挟んでいない
定積分を微分法の逆演算によって求められるか	積分計算が正しくできている	積分計算をしている	極限計算で正しく求められている	極限計算をしようとしている

備考「3 次関数のグラフを描く１，２」の授業の概要

問）$y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ のグラフを描け．

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ とおく．

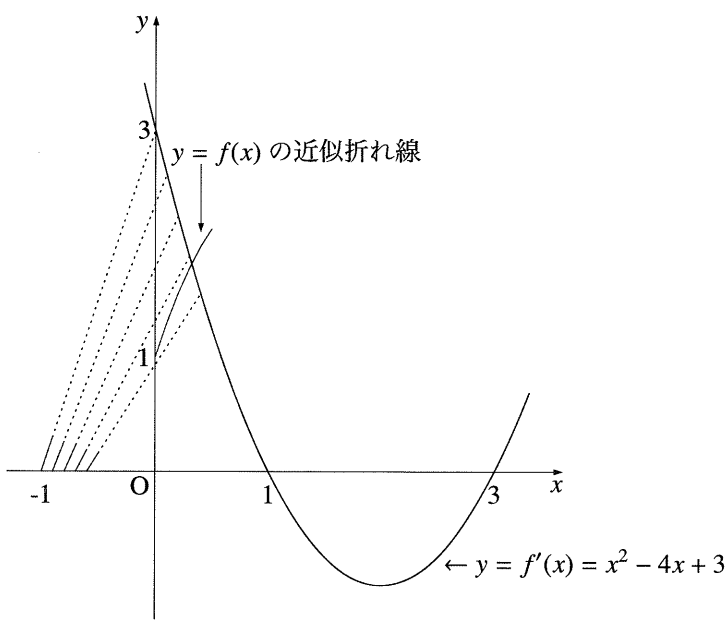
$f'(x)=x^2-4x+3$

$f'(x)=(x-1)(x-3)$

増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{7}{3}$	↘	極小 1	↗

増減表では、増加かするか、減少するかはわかるが、どのような増加・減少かということはわからない。
そこで，$y=f'(x)$ のグラフを利用して，x を 0.1 ずつ変化させたときの微分係数を求め，その微分係数を傾きとする短い線分 (x の増分は 0.1 とする) を定規を用いて作図する。$h=0.1$ とすると，$f'(nh)$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ は $y=f(x)$ のグラフの $x=nh$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きである。したがって，この短い線分は $x=nh$ における $y=f(x)$ のグラフの接線と平行である。したがって，この短い線分をたくさん作図して，平行移動して順番に始点を終点につなぐことにより，$y=f(x)$ のグラフの近似折れ線をつくることができる（オイラー法)。



求める図形の面積を S とすると，

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

ここで，Δは $x_k - x_{k-1}$ の最大値，$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$，$x_{k-1} \leqq c_k \leqq x_k$ とする．

$\Delta \to 0$ のとき，$f(c_k) \to f(x_{k-1})$ となるから，

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$