「算数・数学的な考え方」の変容に関する研究（1年次）

― 空間図形の探究の際の演繹的思考に焦点を当てて ―

高橋　丈夫[2]（代表者）
太田　伸也[1]　加固希支男[2]　小野健太郎[2]　柴田　翔[3]　川村　栄之[3]　樺沢　公一[3]

1）東京学芸大学
2）東京学芸大学附属小金井小学校
3）東京学芸大学附属小金井中学校

目　　次

「算数・数学的な考え方」の変容に関する研究（１年次）

―　空間図形の探究の際の演繹的思考に焦点を当てて　―

高橋　丈夫[2)]（代表者）

太田　伸也[1)]　加固希干男[2)]　小野健太郎[2)]　柴田　翔[3)]　川村　栄之[3)]　樺沢　公一[3)]

1）東京学芸大学

2）東京学芸大学附属小金井小学校

3）東京学芸大学附属小金井中学校

１．研究の目的

我が国では、証明の指導は中学校２年生の図形の単元と文字式の単元において行われている。しかし、形式的な証明は生徒にとって困難であることが指摘されてきた。指摘されている困難とは生徒にとって形式的な証明の必要性を感じない（帰納的な説明や範例を用いた説明などでも十分であると感じている）ことであったり、形式的証明の記述を生成することの難しさであったり様々な理由によっている（例えば國本、1995)。

一方で、児童・生徒は小学校、中学校において、根拠を元に説明する前形式的な証明や具体物を用いた操作的な証明を、問題解決の中で自分の考えが正しいことの確認に用いたり、級友に考えの正しさを説明するために用いたりしているはずでる。このような前形式的な証明や操作的証明に焦点を当てた研究も多い（小松2014、國本2009など)。そのような素朴でありながらも一般性を指向し、根拠を元にして演繹的に考えたり説明したりする態度は、形式的な証明の前段階あるいは準備として価値があるだけでなく、多くの情報が得られる社会に旅立つ児童・生徒にとって有益であり、重要なことであると考えている。しかしながら、前形式的な証明や操作的証明に焦点を当て、その発展とそれらの内容がどのようにして中学校以降の形式的な証明につながっていくのか、またつながっていくべきなのかという点は児童・生徒の実際も含めて明らかになっていないように感じる。本研究では証明することをそれまでの説明する活動と切り離さず、児童・生徒の説明を昇華、あるいは形式的に整えることを通して証明につなげていくことをねらいとしている。そのために、以下の３点を目的として研究を行う。

第一の目的は、児童・生徒がどのように演繹的思考及び演繹的説明を行うか、その様相を明らかにするために授業における教材を開発することである。第一で開発した教材を基に、授業における児童・生徒の考えや説明の様相を分析し、学年によってどのような相違があるか、また学年進行とともにどのように変容していくかを明らかにすることが第二の目的である。以上のことを研究の成果を基に、小学校中学校の連携を考えた思考指導への示唆を得ることが第三の目的である。

２．研究の方法

第一の目的を達成するために、文献による研究を通して小学校と中学校、それぞれの児童・生徒が取り組むことができ、児童・生徒の思考する姿や説明しあう姿を見ることのできる教材を開発し、それらを用いて実践を重ねることを通して児童・生徒の思考の様相とその相違、学年進行による変容を明らかにするために適した教材を開発する。第二の目的を達成するために、第一の方法と並列しながら、開発した教材を用いて小学校・中学校において授業を行い、その授業における児童・生徒の発言、操作、記述、相互作用などについて分析を行う。また、小学校から中学校まで追跡し学年進行による変容について考察する。これらの実践研究で明らかになった点と児童・生徒の思考に関する先行研究を比較、考察することを通して第三の目的を達成する。

３．研究計画

本研究は３年計画で実施することを考えており、本年度はその１年目にあたる。

平成26年度（１年次）

教材の開発及び教材開発のための授業実践

算数・数学の思考指導に関わる先行研究の精査を通して、教材の開発を行った。この教材を基に研究授業を設定し、授業、並びに児童・生徒の考え、説明する姿を分析、考察した。

平成27年度（２年次）

教材の評価・開発　授業実践と追跡調査

平成26年度の研究成果を基に教材の評価を行い、追跡調査のための教材などを開発する。その教材を用いて、研究授業を行い、授業、並びに児童・生徒の考え、説明する姿を考察する。そして、平成26年度研究授業の対象となった児童・生徒に対して追跡調査を行い、学年進行による変容を明らかにする。

平成28年度（３年次）

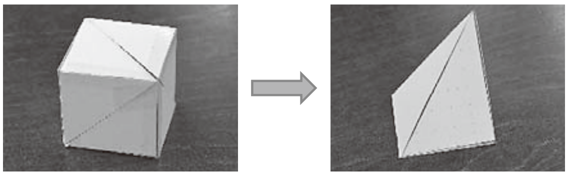
授業実践と追跡調査

平成27年度までに蓄積した実践やその考察を基に、先行研究などと比較検討することを通して、小学校中学校を通した思考指導の改善点について研究する。

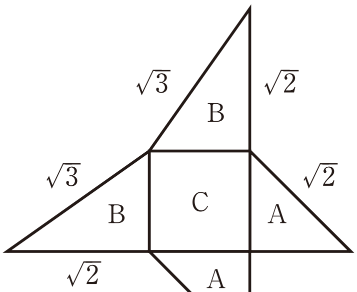
４．研究の実際

４．１．教材「立方体の三等分割」

４．１．１．本実践で扱われる教材の特徴



本研究では、児童・生徒の演繹的思考、演繹的説明を顕在化させることのできる教材の開発を第一の目的として挙げた。そのために本実践では、右図のように立方体を合同な三つの錐体に分割するという活動を課題とした。



側面となる三角形の辺はそれぞれ元の立方体の面の対角線と、立方体を貫く空間の対角線に相当する。したがって、側面の三角形の辺の比は、立方体の１辺を１としたときに、それぞれ$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$となる。無理数の性質や三平方の定理を用いた直角三角形の辺の長さを求める方法を未習である小学校６年生の児童や中学校１年生の生徒にとって、この錐体の辺の長さを演繹的に正確に求めることはできない。しかしながら、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$は立方体の中に、正方形の対角線、立方体の対角線という形で表れており、それらの長さや関係を、観察を通して発見することは、形式的な証明や三平方の定理を学ぶ前の小学校６年生や中学校１年生にも可能であると考えた。そこで、観察を通して明らかにした事実をもとにしながら、また、その事実を他の児童・生徒と共有しながら、どのように立方体の三等分割を考えていくのかを明らかにすることで、児童・生徒の素朴な形での演繹的な推論を顕在化させることを期待したものである。

また、立方体の三等分割を考える際に問題となるのは、「立方体の内部にある面がどのようになっているか」であると考え、児童・生徒に課題を提示する際には上図のように面を埋めた形でなく、不足した形で四角錐を提示した。このように提示することで、児童・生徒の課題が「不足した面」に焦点化され、不足した面が１面でないことや、直角三角形になることを、また、その辺の長さや、どのように三角形を構成するか、またその理由などが、実際に観察することや、それらの事実をもとに考え、説明することを通して明らかにされていくことを期待している。その過程で先にも述べた児童・生徒の素朴な形での演繹的な推論を顕在化させていくことを目的とした。（文責　柴田　翔）

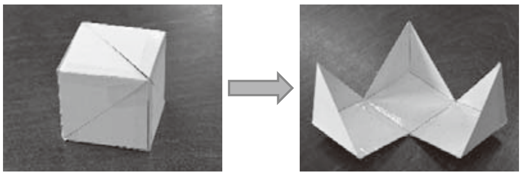
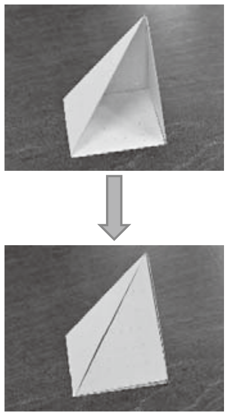
４．２．小学校における実践教材「立方体の三等分割」

４．２．１．本時の指導

〈本時のねらい〉

立方体を三等分割した錐体について、その構成要素の形や長さを演繹的に考えることにより、錐体を構成することができる。

〈学習指導の展開〉

過　程	学習活動	○指導上の留意点　◆評価
つかむ 見通す	①本時の問題場面を理解する。	○立方体を三等分割して、中空の錐体を提示。 
	立方体を三つの同じ形、大きさのすい体に分けよう。	
	C１：これじゃあ、すい体になっていない。 C２：まずは立方体の模型をつくってみよう、	○立方体を分割する線が入った見取図を提示する。
調べる	②一人ひとりが調べ、考える。 C３：どんな形になるのか全く想像がつかない。 C４：底面（C）と、その周り（A）はわかる。「中」をどうやって埋めたらいいんだろう。	○それぞれの児童が、困難に感じる部分がどこかを把握する。 ○C３のような児童に対しては、右図の状態まではできるように支援したい。 
確かめる	③それぞれの考えの発表 T：「中」はどのようになると思いますか。 C５：「中」には三角形が二枚必要になると思う。 C６：一つの三角形の辺の長さは、底面の辺に重なる部分が５cm で、底面の対角線に重なる部分が測ると約7.1cm になる三角形を作図すればいい。 C７：５cm の辺と7.1cm の辺を直角に挟むとうまくいきそうだよ。 T：B は本当に直角三角形になっているでしょうか。 C８：立方体の底面は正方形で、辺と辺は直角に交わっている。それが、直角のまま持ち上がってきたと考えると、B の５cm の辺と7.1cm の辺も直角になっていると思う。	○板書の図を工夫することによって、意見の共有がスムーズに進むように配慮する。  ○児童が発言する際には、見本となる大きな立体を活用させる。 ○発表する児童と同じ立体を、聞いている児童に共通に持たせ、発表する児童と同じ方向から、同じ場所を見るようにさせる。 ◆三等分割した錐体の構成要素の作り方について、自分なりの根拠をもって説明しようとしている。（発言）

まとめる	④本時の学習をまとめ、振り返る C：立方体を同じ形で、同じ大きさの四角すいに分けられるなんて、驚いた。 C：三角形を、なんとなく作図するのではなくて、きちんと理由も考えて作図すると、その形に納得できる。	◆根拠を持って考えることの良さを理解している。（ノート）

４．２．２．授業実践　個別的な操作及び演繹的推論の様相の観察　～Ａ児に焦点を当てて～

小学校６年生の段階において、児童一人ひとりの教材に対する向き合い方や、操作、思考の様相を個別に観察し分析することを目的として、実践を行った。以下においては、授業実践中のＡ児の行動や思考の分析を中心に論ずる。

(1) 実践の概要

日時：平成26年10月14日（火）３・４校時　　対象学級：６年４組（38名）　　授業者：小野健太郎

(2) 授業の実際（Ａ児の操作／思考を中心に）

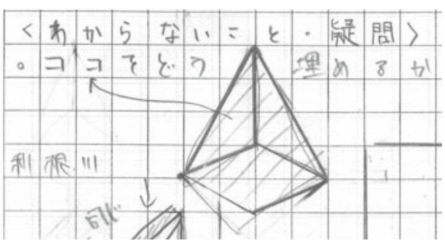
〈課題提示〉（0' 00"～4' 38"）

〈個人作業（1）〉

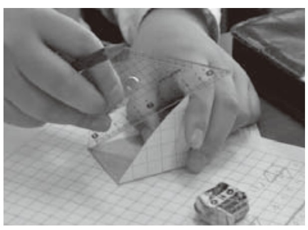
工作用紙を配布して、作業を開始。Ａ児を初めとして、まずは「立方体」の展開図を作図し、立方体の模型を作ろうとする児童が多数であった。（11' 55"）教師が、立方体は自作せずに、予め用意したものを手にとって観察してよいことを伝える。Ａ児は、手に触れられない錐体（見本）と、手にとって良い立方体を観察するために席を外す。その後Ａ児は、立方体の模型を作成して自席に戻る。自作した立方体に、ワークシートの見取り図や錐体（見本）を観察してわかる、切断線を記入し、その線に沿って、立方体を分割した。（19' 35"）

この時点でＡ児は底面と、それに垂直な側面２枚、合わせて３枚が組み合わさった状態に到達する。また、同様の立体を３つ作成し、Ａ児はそれが組み合わさって元の立方体に戻ることを確かめる姿が観察された。（20' 20"）

Ａ児はこの段階で、残りの２面で構成される斜面を、どのように埋めたら良いのかに疑問を感じ、ワークシートにその疑問を記入し始める。（25' 00"前後）この段階で、個別に教師がＡ児に介入。何に困っているか尋ねると、ワークシートに記入している内容に沿って、発言。「ここをどう埋めようかなって。」（26' 22"～）



その後、Ａ児は斜面を埋める問いについて思考を始めるＡ児。27' 51"には、「（何かに応答しながら）ああ、確かに。（斜面をなでながら）これって一面だっけ。」とつぶやく。その後、作成していた三面の立体を再び面に分解し、何かを書き込む様子が見られた。分解された面の内、直角二等辺三角形の２枚を操作するＡ児。この２枚を組み合わせることによって、空いた面を埋めることを模索している。（30' 50"前後）



なお、この時点の前後から「きた！（Ｗ児？）」「なんだ、そういうことか。（Ｕ児）」など、最も長い斜辺の長さを求めることに、測定の方法を用いるなどして成功した児童のつぶやきが目立つようになる。

〈集団検討（1）〉（33' 00"～）

Ａ児と同様の問いを持つ児童、及び測定しながらどうにか見当をつけている児童が一定数にのぼることを把握した教師は、ここで児童の作業を止め、一回目の集団検討を行った。

A 児に代表される問いを受けて、To 児が説明を行った。To 児は右図のように、辺の長さに着目しながら、四角錐に「なるはず」であるということを、展開図を用いて語っている。

To 児

〈個人作業（2)〉（44’ 33”～）

A 児は、To 児の「展開図」を参考にして、残りの二面を埋める三角形を作図し、切り取った。確かに埋まることは確かめられたものの、納得しきれない表情を浮かべる。ここで教師が A 児の作業に介入。A 児は「埋まるは埋まるんですけど、なんかね、あーって思うような説明じゃなかった。もやっていうのが残る感じ。」と教師に伝えた。（45’ 40”）A 児は、教師がその場を離れた後も「質問したら、脱線しちゃうから。」「なんか腑に落ちないけど、今はまだ大丈夫な状態。でも、なんかしっくりこない。」と、同様の思いを周囲の児童に伝えている。これを受けて A 児は、このことを疑問点として、二度目にワークシートに記入した。「その方法以外にもっと簡単な方法はないの？➡展開図➡もやもやが残る。」（47’ 50”）ワークシートに記入後、A 児は座席を離れた。四角錐を完成させるために残りの 2 面を、セロハンテープで固定しに行ったものと思われる。（48’ 05”～ 51’ 28”）

座席に戻った A 児は残りの工作用紙を手に取り、作業を再開。ここで三度目の教師の介入。教師は A 児の言う「もやもや」をどのような言葉で「問い」として明確にすることを意図していた。（52’ 13”）

C（A 児）：ここはわかるんだけど。
T：（To 児の板書と同様の長方形を示しながら）この直角三角形がはまることはわかるの？
C（A 児）：できるのはわかるんだけど、なん、なんだろう。なんかね、原因がわかんない。原因はわかんないけど、なんか違う気がする。

結果、A 児の言葉として未消化の部分を言語化することはうまくいかなかった。その後、A 児は同様の作業で、残り 2 つの錐体の面を埋める直角三角形を作成する。その際、5 cm ✕ 7.1cm の長方形を対角線で切断した直角三角形でうまるかどうかを確かめている。

〈集団検討（2)〉（62’ 20”～）

教師は再度、斜面をうめる三角形について問い返したいと考え、A 児を指名した。

T：A さん、うまくしゃべれなくてもいいから、あなたの思っているところを教えて。
C（A 児）：うーんと、なんだろうな。うーん。なんだろう。
T：なんだろう。
C（A 児）：まだ、もやもやが残るというか引っかかるというか。何がなんだろう。方法はわかるんだけどさ。
T：じゃあ、私から。<u>どうしてこの長方形を持ってくると、その対角線を持ってくると、ちょうどいいくらいにはまる三角形ができるの？</u>

この発問に対して W 児が説明を行った。（66’ 43”）

C（W 児）：僕の場合は対角線で考えていないんだけど。5 cm…、2 辺を考えたんです。ここの 5 cm とこの7.1cm の 2 辺を考えて、こっちの 5 cm と7.1cm を考えて、（中略）この形をどうにかして、下の正方形に持って行きたいわけだから。それを下の正方形にぴったり合うようにしたいわけなんで。で、正方形にするには、正方形は 4 辺あって、その内の 2 辺が、正三角形…じゃないか。二等辺三角形の、5 cm、5 cm の部分の、二等辺三角形の 5 cm、5 cm の部分が、正方形の辺の 1 ／ 2 の長さにあたって…
T：対角線。

C（W 児）：正方形の二つの辺で、もう２つの辺はここの２つでつくらなきゃいけないんで。ここを合わせると、それが１辺じゃ、大きすぎるんで。
T：大きすぎるんで。
C（W 児）：そうすると、直角に合わせるとなると。
T：立体の直角だよね。
C（W 児）：直角に合わせると、合わせると、この高さがちょうど対角線の長さ。
C（A 児）：お前の言い分だとすると、長さはたまたまなの？　W 児の言い分だと、その長さが対角線になるのはたまたま？　ということ？
C（W 児）：うーん。正方形は４辺あるじゃん。その２辺は、ここで使っているわけだから、ここの２辺。
C（A 児）：うん。
C（W 児）：残りの２辺をこのパーツでつくらなきゃいけないわけだから。
T：ここは決まりだっていっているんだよな、W は。正方形を下から見るよ。正方形がみえますね。
T：その内の２辺はもう使っているって、くり返し言っているんだよ。それはどこかっていうと、もうここに２つ使っているから、残っている２辺というのは
C（A 児）：手を示しながら、ここととこだ。
T：ここととこでしょ。だからこの辺は使わなきゃいけないと。
C（W 児）：この辺とこの辺を組み合わせると、２つ使うと、ここととこは直角だから。
T：裏から見ると、直角だから、ここに入るべき面も直角でそろえなければいけない。これが正解かわからないけど。
C（W 児）：そうすると、合わさった辺が、それが対角線になる。（中略）
C（A 児）：え、待って。待って
C（W 児）：（たこ型）になって、他も同じのを作る。（後略）

(3)　実践を振り返って

①本教材を６年生児童が取り組む際の、方法的な段階

A 児の活動を中心に子どもの作業を振り返ってみると、本教材を６年生の児童が取り組む際の、方法的な段階は、大きく分けて次の三点にまとめられることが示唆された。

第一が「立方体を構成する」場面である。６年生の児童は、与えられた課題の「操作」に忠実である。言い換えるならば、彼らは思考操作を通して三等分割された四角錐を演繹的にイメージするのではなく、実際の具体的操作を通して四角錐を求めようとするのである。そのために、まずは初期状態である「立方体」を構成しようとする児童（A 児を含む）が多く見られたのは必然であった。

第二が「中身のない四角錐を構成する」場面である。この段階もまだ、具体的な操作を通じて考える児童が多い。四角錐の側面となる二等辺三角形は、立方体の二辺と対角線から構成されている。ワークシートに記された見取図、及び教師が提示した「見本」をたよりにその３つの構成要素を見出し、先ほどの立方体に記入し、分割する児童が多数見られた。A 児も同様である。

第三に、「斜面を決定する場面」である。この段階のみ、純粋に操作的には得ることができない場面であり、演繹的な推論を行って、斜面を決定しなければならない。本時に即して振り返ると、斜面の決定方法は二通り程度観察された。まず U 児の様に、稜線の存在を仮定してその長さを実測し、また残りの２辺との組み合わせで、三角形の面を構成する方法。また、To 児のように２辺の長さ（＝１、$\sqrt{2}$）を決定した後、直角三角形になることを仮定して三角形を構成する方法である。

②本実践を通して得られた考察と課題

以上の分析から得られた示唆を、以下にまとめたい。

第一に、演繹的な説明を要するための前段階として、演繹的な説明を必要と感じるメタ認知的視点を児童がどれだけ持ちうるかという観点の重要性が挙げられる。A 児は結果的に、本時の中で立方体を三等分割した錐体の作成に成功した。しかしながら、ワークシートの記述、及び発言から、その錐体の構成方法に納得のいく様子は見られなかった。（例えば、A 児の「まだ、もやもやが残るというか引っかかるというか。何がなんだろう。方法はわかるんだけどさ。」という発言である。）一方、本稿では詳細に分析し切れてはいないが、A 児を除く多くの児童には、立方体が三等分割された錐体を作る「手順」の理解が、その構成の意味理解となっている様子が散見された。すなわち、錐体を「作ることができた」ことから、三等分割のことが「わかった」という認知状態にあることを意味している。

後者の水準にある児童は、演繹的な説明を行う場面での積極的な参加が見られなかった。一方、前者であるA 児の発言は、発話記録にもあるように、演繹的な説明活動のきっかけとして活発に機能している。このことはつまり、自分の認知状態として「本時の課題を達成した」と捉えているかどうかが、演繹的な説明活動の生起に関わっていることを示唆している。ただし、A 児についても自分の認知状態を明確に自覚できているとは言い難く（＝自分の「わからなさ」を言語化できていない）、この点が 6 年生の児童における本教材の困難な部分の表れであったとも考えられるだろう。

第二に、演繹的説明を行う際の「仮定」の扱いである。先ほど述べた「斜面を決定する場面」において紹介した方法はいずれも、児童の演繹的推論の過程において仮定を置いている。斜面をうめる三角形が 2 枚になるという仮定、また、その 2 枚の三角形が作る斜面の稜線があることの仮定、斜面をうめる三角形が直角三角形になることを仮定することなどである。

彼らの多くが、それらの仮定に自覚的でないという姿はいたるところに観察された。この「仮定に自覚的でない」という点が、小学校段階における演繹的な説明の特徴である可能性があるだろう。それと同時に、どこまでが仮定であり、どこからが妥当な推論であるのかを子どもたち自身が自覚できるような、教師の働きかけが今後の検討課題として浮かび上がってきたと言えるだろう。（文責　小野健太郎）

４．３．中学校における実践教材「立方体の三等分割」

４．３．１．本実践の目的と概要

本実践では小学校と同様の問題を扱った（4.1.1. 参照）ため、教材の特徴などについては省略し、本実践の目的について述べる。生徒はこれまでに、線対称・点対称や移動を根拠として作図の根拠を説明する活動や、空間における辺と面の位置関係、投影図などの学習を終えている。しかし、生徒が説明に用いる、または他の生徒の説明において認める根拠は、立方体の知識や、空間における位置関係などのこれまでに学習してきた正しいとされる根拠だけでなく、立方体やその三等分割をつくる中で気づいた点や、自身の感覚から正しいと認められそうなものも含まれることが予想される。実際に生徒がそれらの根拠をどのように用いて、立方体の三等分割となる立体を構成していくのか、またどのようにして、立方体の内側にある面（立方体の対角線、正方形の対角線、正方形の 1 辺によって囲まれる三角形）が直角三角形となることを説明するのか授業における抽出生徒の活動と議論を分析することで明らかにしていくことが本実践における目的となる。これらのことを明らかにすることで、形式的証明を学習していない生徒たちにとって、これまでに学習してきた事実（既に正しいと認められた性質）と、この課題に取り組むにあたって発見した事実（正しいことを説明する必要がある性質）がどのような認識であるのかを考察することができるはずである。

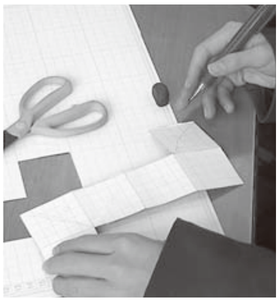
なお、小学校での実践と同様に立方体を三等分割した四角錐は授業の始めに、面が立方体の内部になる面が不

足した形で生徒に提示され、その後は立方体の形にテープで固定され（内部は見えないが）自由に参照できるようになっている。また、見取り図は生徒に与えていない。これまでに生徒は見取り図や投影図、正多面体の性質、空間における面や線の位置関係などの学習は終えている。

４．３．２．授業実践　個別的な操作及び演繹的推論の様相の観察　～Ｋ児に焦点を当てて～

(1) 抽出生徒の取り組みの分析

抽出した生徒Ｋがどのように立体を作成していったかについて述べる。Ｋは教師が提示した面の不足した四角錐をつくるために、立方体の展開図をつくった。立方体の対角線が切られていることから展開図の正方形に対角線をかくなどして四角錐をつくろうとするが、切るべき正方形の位置関係が捉えられずに苦戦した。その後、教室の前に提示されている立方体で切るべき対角線を確認した後、教師に課題を確認し、立方体の展開図を切ることで、課題の四角錐を作成していく。ここでは、教室の前に提示された立方体を確認した後の生徒の活動を記述する。

番号	活　動	画　像
K1	立方体の展開図をかき、立方体をつくる。	
K2	立方体を眺め立方体の面に線をひこうとするが、手が止まる。	 図1　対角線をひく
K3	隣り合う面に○をかきこむ。	
K4	立方体の一面に対角線をひく。（図１）	
K5	対角線をすべて消す。（図２）	
K6	対角線を引き消す。	
K7	今度は立方体の形にしたまま１つの頂点からひける対角線をひく。（２本）	
K8	その後２本目に引いた面と反対側の面に２本目の対角線とねじれの位置になるような対角線をひいた。	
K9	立方体を広げる。	
K10	引かれた直線をなぞる。	 図2　対角線を消す
K11	また立方体の形に戻す。	
K12	立方体を広げ、３本目にかいた対角線を消す。	
K13	すべて消そうとするが、先程までの裏面が表になるように折る。	
K14	立方体をつくる。先とは表裏逆にして、工作用紙の方眼が内になるように立方体を作り直す。	
K15	対角線を引く。（１つの頂点から２本）	
K16	眺める。開く。	
K17	立方体に戻す。	
K18	○を１つの頂点に接する面3つにかく。	
K19	立方体をおき、新しく立方体をつくる。切った展開図はＴ字型。先程まではＳ字型。	
K20	前にいき教師の用意した模型を見る。	
K21	席について立方体をながめる。	
K22	１つの頂点から３本の対角線をひく。	
K23	眺めて、「あー」とうなずく。	
K24	立方体を広げる。	

K25	三角定規をとって、K22でかいた対角線をなぞる。
K26	ノートを取り出し、展開図を書く。（S 字と T 字が混じったような図で立方体の展開図としては間違っている）（図３）
K27	図３の右上の正方形を消し、逆 S 字に書きなおし対角線を引く。（図４）
K28	対角線１本ひき止まる。
K29	逆 S 字の縦に並んだ4つの正方形を残し、左右２枚をけす。
K30	消した左右の２つの正方形を逆にかき、S 字の展開図をかく。
K31	対角線を展開図にひく。（図２）
K32	配られたワークシートを出す。
K33	K12まででかいた展開図を立方体の形にする。
K34	ワークシートに課題を書く。
K35	ワークシートにノートと同じ S 字を書いて、展開図を見ながら、対角線を書き入れる。
K36	教師を呼び、「今更なんですけど、主趣旨がわからない。これで切ったときに空いている面を作るんですか？」
T1	「これ切ったら、俺が見せたやつできるかな？できたらさ、空間あいてるでしょ。面をつけてほしい。」
K37	「ああわかりました。あーそこは難しい。」
K38	S 字の展開図の表面に書いた対角線を消す。
K39	立方体にしながら対角線をかく。（消した対角線と同じ位置に。）
K40	立方体を開く。（上下逆転した形だが、ノートに書いたものと同じ。）
K41	対角線３本を切る。
K42	正方形３枚と直角二等辺三角形３枚ついたものが残り、首をかしげる。
K43	２枚の直角二等辺三角形と正方形を K42から切る。
K44	K43の展開図をテープで貼り、眺める。
K45	K44で出来た立体の一部の空いている面に手を当てる。（対角線ではなく、空いている２面のうちの片方に手を当てた。）
K46	横から眺める。
K47	直角三角形を立体の内部に当ててみる。
K48	工作用紙を手に取り、はさみで正方形3枚がつながった長方形を切ろうとするが、途中でやめる。
K49	K43で切り落とされた直角二等辺三角形を K45で手を当てていた部分に当ててみる。（長さが足りない　図５）
K50	直角二等辺三角形を K48で切ろうとした長方形に当てる
K51	辺の長さが10cm、５cm の直角三角形を切る。
K52	K45と同じ所に当てる。（図６）
K53	四角錐からはみ出た部分に点を打ち、線を引く。
K54	線を引いた部分が、K45と同じ所に当ててぴったりになることを確認する。
K55	高さ７cm 横５cm の長方形を２枚、定規を使ってかき、対角線を１本ずつひき直角三角形をつくる。

図３　間違った展開図

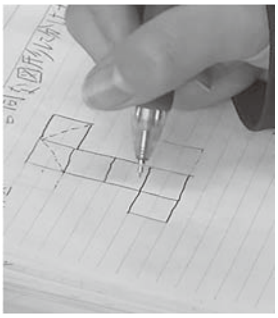


図４　訂正された展開図

※この後、右下の正方形に対角線をひく

図５　直角二等辺三角形を当てる

図６　直角三角形を当てる

K56	工作用紙の隙間を利用して、K55と同じ直角三角を１枚つくる。	
K57	K55、K56でつくった直角三角形を切る。	
K58	セロハンテープで３つの立体を完成させる。	

Ｋが不足した面をどのように作り、その根拠は何であったのかについて考察する。まず、立方体の外側がどのように分割されているのか、そして、それが展開図の上でどのように表されるのかの２点を考えていた。その際に、Ｋは実際に立方体に対角線をかいたり、教室の前に提示されている立方体を確認したりしながら、立方体の切るべき対角線を立体にかきいれた。しかし、その後、展開図に直す際に実際の立方体のどの面とノートにかいた展開図のどの面が対応するのか、それらを対応させるのに苦労したようである（K40までの活動）。

面が不足した四角錐をつくった後は不足した面に手を当て、不足した面を埋めるには２面必要となること、その面が三角形になることは観察することで気づいたようである。その後、不足する面に直角二等辺三角形を当てることで、１辺の長さが５cm の、直角を挟む２辺が長さの等しくない直角三角形となることを確認している。そして、どの程度の長さか分からないため、10cm、５cm の直角三角形を切りとり、不足している面に当てることで、10cm よりも短いことを発見し、その長さを長方形に印を打つことで、不足した面の直角二等辺三角形の長さを確認した（K41 〜）。この生徒の根拠はあくまで、実測であるが、その生徒は自分のノートには、「コンパスを使って長さを求める②（直角二等辺三角形）から」（右図　括弧内は筆者）とあり、実測よりも、作図による方法が「良い説明」であると考えていることが分かる。

(2) 学級での議論の分析

学級では次の授業で、それぞれがどのように四角錐を作っていったかを発表した。その後、不足した面を埋める三角形が本当に直角三角形であるかどうかが議論となった。以下はその際のプロトコルである。

番号	活　動
T1	直角三角形なのかどうか。なぜ、直角三角形なのか。違うっていう人はその理由を考えてほしい。 ちょっと聞いてみたいんだけど、作った人どうですか？ Ｎどう？
N1	90度の作ってみたら、一番長い所の長さが変わって、しかもはまらなかった。これ（面の不足した錐体）にはまらなかった。
T2	作ってみたら、あれ測ったんだっけ？測ったら何度だったの？
N2	98度。
T3	98度だったし、直角でここ当ててみたらもう一面あててみたら、ちょっとずれちゃった。どっちにずれたの？
N3	こっち。（立方体の外側に）
T4	90度じゃないんじゃないのって人？
T5	じゃ本当に90度じゃないかって理由考えた人いる？はいＳ。
S1	図かいていいですか。
S2	あれ（白線）が全部同じ長さだったら、90度。
T6	90度だったら4つ合わせて360度。４つぴったり合わさればいいだろう。これについて意見ありますか？これ先生が質問してもいい？同じ長さだったら90度じゃないですか。でも、この三角形そもそもどうやってかいたんですか？そもそも90度に書いてたら、90度になるの当たり前じゃない？

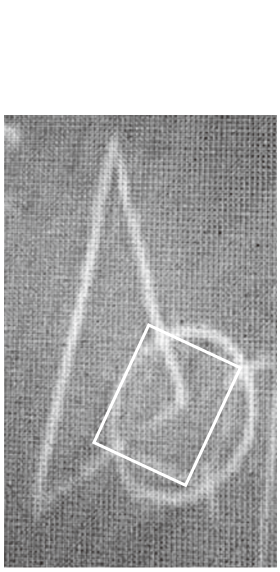


図１　Ｓの説明（一部筆者加筆）

S3	マス目使っちゃったんで。
T7	90度じゃないですか。これ、右の説明に右使っているのと一緒ですよね。これこの形を90度使ってかいたんなら、そりゃなるだろう。これ、同じことをＮがやっても一緒ですよね。Ｎは90度じゃないと思っているじゃないですか。Ｎの書いた三角形は同じ長さにならない。だから90度じゃないって言ってるのと同じじゃないですか？ Ｎの場合は90度だからこの形が少しくずれると思うんですよね、したら、これ98度の理由にも使われちゃうと思いません？
T8	これは、巡っちゃってますよね。90度になるためには、って説明してるんだけど、もそもそも90度っていうことを使ってませんか。他の人どうですか。はいＭ。
M1	前の三角形つかってもいいですか。ここの面（四角錐の底面、正方形）とここの面（四角錐の側面、直角二等辺三角形）が垂直に交わっていれば、90度だと思うんですよ。
T9	この面？
M2	その面と三角形。
T10	なら、この三角形、垂直なら90度になってる。
M3	90度を測るときに、こっちの面が90度になっているじゃないですか。ここで測ると変わっているときがあることに気づいちゃったんですよ。三角定規で倒れないか実験したんですよ。
T11	はかり方によって変わっちゃうときがある。何か質問ある人。じゃこの面と下の面垂直ですか。下の面てわかる。Ｍの、垂直？絶対垂直ですか？なんで？
M4	立方体の一面と一面だから。
T12	これは良いよね。垂直っていうのは。立方体の面が垂直だっていうのは小学校の頃に習ってますから、前半部分はOKだよね。その後はどうですか。ここは必ず90度？金綱は言い切ったんだけど、似たように考えた人はいませんか？それ上がってる？どうぞ。
I1	90度以外で作ったら、こんな感じです。
T13	これ90度以外で作ったらってさすがにずらしすぎじゃない？これ、これが理由で90度になる？つまりどういうことかと言うと、98度じゃなかったら、立方体にならないっていうのも、同じように説明できませんか？これ、何度くらい？
I2	72度。
T14	これ72度で作ったら立方体になりません。いい？これ100度で作ったら、立方体になるときに、72度で作ったら立方体にならないっていうのと同じじゃない？ 90度じゃないから、説明になってないですよね？ 72度になってないことは分かった。
H1	60度でも。
T15	60度でもできないことが分かった。じゃ全部確認しますか。これ90度とか91度とか全部見た目上は立方体に見えるよね。そうだよね。１度の差なんか僕ら気づかないでしょ。誤差の範囲だしね。どうですか他。この面とこの面に着目した人、他にどうですか。
Ko1	僕は、元が立方体っていうのを考えたんですけど、僕はこういう風に見たんですけど、この面を通ってしかもここの頂点を通って、この辺に交わるものは全てが直角になってる（図２）。そうじゃないと、平行四辺形の立体みたいになっちゃうので、なので、ここは必ず90度じゃないと曲がってしまう。
T16	ここここ？もう一個どこって言った？向きが違う？あってる？あってる。ここは90度っぽい。90度だ。なぜ？
Ko2	ここの頂点に接するっていうか接するようにこの面を通る辺が90度じゃないと、この図形が少しゆがんじゃう。

T17	この点を通る面上の直線は必ず90度。これと同じように考えた人。ちょっと似てるけど、全然似てない？これに付け足しある人。はい、K（抽出児）
K1	例えば、辺が２つあって、この角度が30度だとしたとき、この辺を軸にしても、この辺を軸にしても、回しても、変わらない。そう考えると、こうかぶせたときの、この部分の角度を知りたいので、元の直方体（立方体）のここにあった面を傾けたときに被さる所がある。どんなに傾けても角度は変わらないので、被さった所は90度だなって。
T18	で角度は変わらないので。
K2	直方体の角度は変わらず。
T19	立方体な。
K3	立方体で、ここは90度だなって。

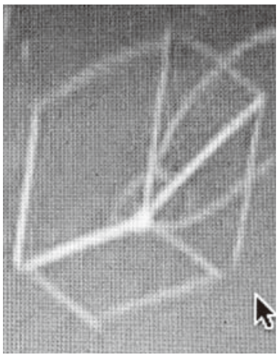


図２　Ko の説明

議論の中で、それぞれ説明しようとしていることは共通（直角三角形であること）だが、S は90度であること、N は実測とそれを元にした具体物作成の結果、M は立方体の面の性質（ただし、その説明に定規の90度を利用している）、Ko は立方体の面の関係から、その面上にあり、頂点を通る直線が90度になること（さらにその根拠として立方体がゆがんでしまうことを用いている）、K は不足した面を回転させたものとして捉えることなどを根拠としてそれぞれ利用している。このことから、それぞれに根拠となることはあるが、それぞれの「良い説明」を行っていることが分かる。また、説明の根拠となったのは、結論を用いた S や実測を元にした N のように形式的な演繹的説明としては不適なものもある一方で、立方体の面の性質を用いた M や根拠の根拠を求めた Ko のようにより形式的な演繹的説明も見出すことができた。

（1）（2）の分析から、生徒は観察や実測という方法を用いて思考し、与えられた課題に対して立体を構成していくが、その説明においては、それぞれの考える「より良い説明」を行おうとすることが明らかになった。また、その「よりよい説明」は抽出児 K にとっては「実測」による三角形の長さを求めることよりも、「作図」によって三角形の長さを決定することであることが明らかになった。このことは、前単元である作図の授業において、「実測」よりも「作図」による方法の方が説明として適していることを教師が指導してきたことによると考えられる。また、他の説明においても、素朴ながらも演繹的な説明が見られ、さらに根拠の根拠を探る態度や、これまでの学習を活かそうという態度が中学校一年生にも備わりつつあることが明らかになった。

５．まとめと今後の課題

今年度は、教材の開発及び教材開発のための授業実践を行い、立方体の三等分割という課題を用いて小学校・中学校において、研究授業を行い児童・生徒の考え、説明する姿を分析、考察した。小学校においては「仮定に自覚的でない」が、中学校では「根拠の根拠を探る」態度が見出された。今後の課題はこの知見の深化と児童・生徒の追跡調査である。

（文責　柴田　翔）

【引用・参考文献】

国本景亀（1995）「中学生の証明理解に関する研究Ⅰ」、全国数学教育学会誌１、pp.117-124

国本景亀（2009）「数学的推論の研究について：数学間と操作的証明を中心に」、数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録及び要綱42、pp.54-59

小松孝太郎（2014）「算数・数学教育における証明指導の改善」、東洋館