数学を見いだす活動を促す指導に関する研究（２年次）

―　数学を見いだす活動の共通点や相違点に関する研究　―

鈴木　　誠（代表者）※3

矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田辰一朗※2　永山　香織※2　羽住　邦男※3

傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　青山久美子※4　井上　哲明※4　大谷　　晋※4　岸谷　正彦※4

佐藤　亮太※4　菅原　幹雄※4　祖慶　良謙※4　田中満城子※4　花園　隼人※4　吉岡　雄一※4

岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター

※２　東京学芸大学附属世田谷小学校

※３　東京学芸大学附属世田谷中学校

※４　東京学芸大学附属高等学校

※５　文京区立第六中学校

※６　荒川区立尾久八幡中学校

目　　次

数学を見いだす活動を促す指導に関する研究（２年次）

―　数学を見いだす活動の共通点や相違点に関する研究　―

鈴木　　誠（代表者）※3
矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田辰一朗※2　永山　香織※2　羽住　邦男※3
傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　青山久美子※4　井上　哲明※4　大谷　　晋※4　岸谷　正彦※4
佐藤　亮太※4　菅原　幹雄※4　祖慶　良謙※4　田中満城子※4　花園　隼人※4　吉岡　雄一※4
岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター
※２　東京学芸大学附属世田谷小学校
※３　東京学芸大学附属世田谷中学校
※４　東京学芸大学附属高等学校
※５　文京区立第六中学校
※６　荒川区立尾久八幡中学校

１．研究の目的

平成22年度～平成24年度の３年計画でプロジェクト研究として，「算数・数学的活動を促す教材開発と指導法に関する研究」に取り組んできた。そこでは，あらたな教材開発を行うとともに，数学的活動を促す課題や指導に内在する条件について実践授業を通して具体的に示してきた。そして，研究の成果の一部を各学校で実施された現職研修において公表し，教員養成に対しても貢献し，学会発表も行なってきた。本研究はこの研究に続く研究として位置づけられるものである。

過去３年の研究では算数・数学的活動を促す教材や指導についていくつもの実践授業を通して算数・数学的活動を外延的に捉え研究を進めてきた。小学校では平成23年度，中学校では24年度から新学習指導要領による指導が行われ，高等学校においても平成24年度より学年進行に合わせて実施されている。各校種において，数学的活動がこれまで以上に重視され，算数・数学的活動を通した指導について具体的に明らかにしていくことは算数・数学教育において現代的な課題である。

本研究では，算数・数学的活動の中でも特に数学を見いだす活動に焦点をあてて研究を進める。見いだす活動に焦点を当てることとしたのは，見いだす活動に焦点を当てた授業を行なっていくことで，日本の子どもたちの数学に対する情意面の課題を改善し得るのではないかと考えたからである。日本の子どもたちは，数学の成績はよいが，数学が好きではなく，数学を公式の集まりとみており，解き方を覚えるものだと考えている傾向があることは過去の国際調査でも指摘されている。そして，そのような実態は現在も教室において指導する中で感じることもある。数学を見いだす活動に焦点を当てた授業を適切にカリキュラムに位置づけ指導することにより，数学は自分たちで作ることができるという意識へと変化させる一助となり，数学に対する情意面における課題を改善する方向へと向けることができるものと考える。

このような背景と課題意識のもと，本研究において次のことを明らかにすることを目的として研究を進めることとした。

<研究の目的>

１．数学を見いだす活動を促す教材開発を行い，その成果を蓄積すること。また，授業実践を振り返ることによ

り，数学を見いだす活動とはどのような活動であるかを，授業の中で子どもたちが行う具体的な活動をもとにして事例的に明らかにすること。

2．小・中・高等学校における授業研究を通して，各学校段階における数学を見いだす活動の違いや共通点は何かについて知見を得ること。そして，その知見をもとにして，よりよい算数・数学の授業のあり方や小4～中～高1までの6年を見通したカリキュラムを検討すること。

3．研究を通して得られた知見について，各附属学校で行っている現職研修セミナーなどの機会を通して，教員養成や現職教員研修に資すること。

2．研究の方法

(1) 目的1に対しては，文献による研究やこれまで扱ってきた課題を数学を見いだす活動を視点として再検討することを通して，算数・数学的活動を促す指導において扱うことができるような課題を開発する。そして，開発した課題をもとに，授業研究を通して教材開発を行い，その成果を蓄積する。蓄積された授業実践を検討することにより，数学を見いだす活動がどのような活動であるかを授業の中で子どもたちが行う活動をもとにして明らかにする。

(2) 目的2に対しては，小・中・高等学校における授業研究や毎月の附属研究会を通して知見を得る。授業研究においては，同一の課題を異なった学校段階において扱うことや，同種の活動（帰納的に調べるなど）を行った際にどのような活動の違いや共通点があるかに目を向け検討し知見を得る。

(3) 目的3に対しては，各附属学校が行っている現職研修セミナーを研究の成果をもとにして実施する。また，各学校で実施される公開研究会で成果を公開したり，教育実践研究センターの教育実習部門と連携をとり，教員養成において本研究で得られた知見をどのような形で生かしていくかを検討し，教員養成の充実に役割を果たす。

3．研究計画

本研究は3年計画で実施することを念頭に置き，進めてきている。その計画は次のようにまとめられる。

(1) 平成25年度（1年次）

<u>数学を見いだす活動を取り入れた授業づくりと教材収集のための基礎的研究</u>

教材や題材の収集（4月～3月）および授業研究（10月，11月，1月，2月）を通しての授業記録の収集。各月の附属学校研究会での研究討議。

8月に行われた，日本数学教育学会全国大会において，附属世田谷小から4名（稲垣　悦子，越後　佳宏，栗田　辰一朗，永山　香織），附属世田谷中から2名（鈴木　誠，峰野　宏祐），附属高校から3名（佐藤　亮太，花園　隼人，吉岡　雄一）が成果の一部を発表した。

また，以下のような公開授業研究会を行い，各校からそれぞれ授業を観察し，授業後の研究協議会や附属研究会において意見交換を行った。

小学校	8月21日（水）	授業者	越後　佳宏	（6年　速さ）
			永山　香織	（5年　商分数）
			稲垣　悦子	（2年　かけ算）
中学校	11月11日（月）	授業者	峰野　宏祐	（1年　比例・反比例の活用）
高　校	11月30日（土）	授業者	大谷　晋	（2年　面積を求める）
			祖慶　良謙	（2年　3次方程式の解の公式をつくる）

(2) 平成26年度（２年次…本年度）

数学を見いだす活動の共通点や相違点に関する研究

教材や題材の収集（4月～ 3月）および授業研究（8月，11月，1月，2月）を通しての授業記録の収集。これまで得た記録をもとにし，数学を見いだす活動とはどのような活動であるかを子どもが行う活動を示して明確にする。

8月に行われた，日本数学教育学会全国大会において，附属世田谷小から3名（稲垣　悦子，越後　佳宏，栗田　辰一朗），附属世田谷中から2名（鈴木　誠，峰野　宏祐），また，日本教材学会において附属高校から1名（花園　隼人）が成果の一部を発表した。

また，以下のような公開授業研究会を行い，各校からそれぞれ授業を観察し，授業後の研究協議会や附属研究会において意見交換を行った。

小学校	8月19日（火）	授業者	稲垣　悦子	（1年　10より大きいかず）
			栗田　辰一朗	（6年　比）
	1月30日（金）・31日（土）	授業者	稲垣　悦子	（1年　大きなかず）
	2月11日（水）	授業者	越後　佳宏	（5年　割合）
中学校	11月15日（土）	授業者	傍士　輝彦	（1年　比例の活用）
			峰野　宏祐	（2年　図形）
高　校	11月29日（土）	授業者	菅原　幹雄	（1年　確率を求める）
			吉岡　雄一	（2年　三角関数の周期）

(3) 平成27年度（3年次）

数学を見いだす授業づくりと現職研修および教員養成への貢献

1年次，2年次までに得られた知見を現職研修および教員養成においてどのような形で扱っていくかを教育実践研究センターの教育実習部門と連携する中で検討し，実施する。現職研修セミナーについては8月と3月に実施予定。8月に行われる，日本数学教育学会全国大会や日本教育大学協会研究集会等において，成果の一部を発表予定。

（文責：鈴木　誠，佐藤　亮太）

４．研究の実際

４．１．小学校における数学を見いだす活動を促す授業

ここでは，小学校における数学を見いだす活動を促すことを意図した授業の実践例を述べる。

４．１．１．15の美しさを見いだす活動

数の見方を愉しむ子どもを育てよう！　　～第1学年「10より大きいかず」より～

日　時：平成26年8月19日（火）　児　童：第1学年1組　授業者：稲垣　悦子

(1) 単元の目標

59までの数について，個数の数え方，数の読み方，書き方，数の構成などを理解し，数を用いることができるようにする。

(2) 本単元で大切にしたいこと「数の見方を育てる」

第1学年の「10より大きいかず」の単元について，子ども達（大人も？）は学習前にわかっていると 思っていないだろうか？しかし，この単元は数の見方を育てる基礎となる大切な単元である。

例えば,「15ってどんな数か説明してみよう」と言われて,どれだけの説明ができるだろうか。「じゅうごです」「1と5とかきます」「10と5です」というだけではない。「5が3つ」「14の次の数」などという数の多様な見方ができるようにしたいのである。さらに,「1＋2＋3＋4＋5＝15とブロックにすると階段における」などとの数のおもしろさや美しさも経験させたい。

本単元では,10のかたまりをつくること,2ずつや5ずつ数えていくこと,十進位取り記数法,数の合成分解,数直線や数表などを学習する。しかも,集合数と順序数の両方を理解することが必要である。このとき,単元を構成していくにあたって,1時間目は10のかたまり,2時間目は2ずつや5ずつ数えること,3時間目は10といくつということ,4時間目は数直線…と各時間に学習が区切れてしまい,子どもがつくりあげていくという学習になりにくい。

そこで,本実践では,本単元の2時間目に本単元の全体の素地となるような時間を設ける。数の多様な見方に子どもが気付けるようにし,その気付きから本時以降の授業を子どもがつくっていけるようにした。

そのために,本実践では,ある1つの数(「15」)について考えることを通して,ブロックを動かしながら,言葉や式や図で表す。子ども達がこれからの学習の素地となることに気付き,関連づけていく授業が大切だと考えた。

【子どもの姿 A】

・じゅうごとよむ	…よみかた	
・15とかく	…かきかた	十進位取り記数法
・10と5	…加法的な構成(10といくつ)	

↓ ⇐ 【手立て】

ある一つの数をブロックで表し,言葉,式,図とつなげる。

【子どもの姿B】

・5が3つ	→5ずつ数えること,乗法的な構成
・14より1つ多い,14の次の数	→数の系列・大小,数直線の素地
・16より1つ小さい,17より2小さい	
・ブロックでおくと,H型は6＋3＋6＝15に。だったら,3＋3＋3＋3＋3＝15もできる。	→数の加法的な構成・乗法的な構成
・1＋2＋3＋4＋5＝15	→数の美しさ・おもしろさ,自然数の和,数列の素地

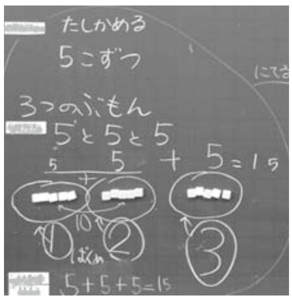
(3) 学習指導計画(全9時間)

第1次	10から20までの数	…4時間(本時2/4)
第2次	59までの数	…4時間
第3次	力だめし	…1時間

(4) 本時の目標

15を言葉やブロック,足し算,引き算,数直線などいろいろな方法で表すことができる。

(数の構成,合成分解をブロックや式で表したり,数直線の素地を経験したりする。)

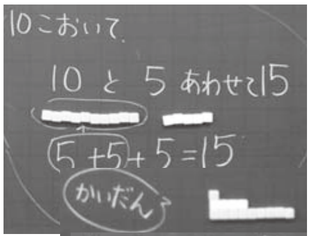


(5) 授業の実際と考察

まず,教師が袋からブロックのつかみ取りをして見せた。前時は子ども達がおはじきのつかみ取りをしたが,教師は大人で手が大きいから,ブロックで挑戦することにした。子ども達は私がつかんだブロックを見て,「数える!」と言い始めた。

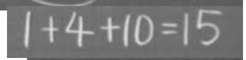
Aちゃんが2ずつ「2，4，6，8，10，2，4，と1。15」と数えた。10と5と見ているので，**十進位取り記数法の素地（10といくつ）**となる。

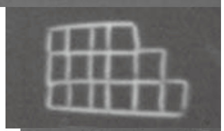
すると，Bちゃんが「確かめたいです。」と言って，黒板の前にでてきた。ブロックを5個ずつおき，「1と2と3を足して15」と説明した。この5のかたまりのブロックを見ると，1番目は白のブロック，2番目は黄色のブロック，3番目は白と黄色のブロックとして表している。かたまりを強調したかったのだろうか。5のかたまりが3つという第2学年のかけ算につながる考えである。**数の乗法的見方（乗法の素地）**となる。

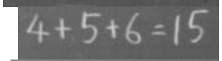


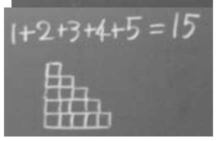
また，「5と5と5で15」「10と5あわせて15」「5＋5＋5＝15」とブロックを言葉や式で表した。

ここまでくると，子ども達は15がいろいろと変身することに気付き，「15をいろいろなほうほうであらわしてみよう」を課題とした。



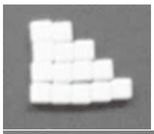


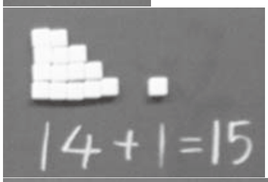


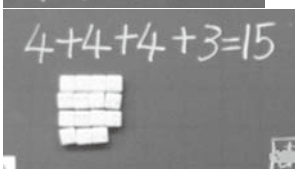


自力解決の時から，Dちゃんは，ブロックをピラミットや階段のようになんとかしておけないかと考えていた。そのDちゃんが右の写真のように自分のつくったブロックを見せると，「階段だ！」と他の子が言って，子ども達は盛り上がった。すると，そのブロックを1＋4＋10＝15と式に直したり，Eくんが階段の幅を同じ幅にしようとして4＋5＋6＝15という階段を作ったりした。教師は子どもに確認し，ブロックから図に移行した。

1＋2＋3＋4＋5＝15の意見がでた時「本当の階段だ！」と嬉しそうな声がした。**数の面白さ，美しさ（自然数の和）**を感じることができた。また，友達のブロックから式，友達の式からブロックをよむ活動を入れた。

←  誤答





また，右の14個しかない誤答から，Eくんの「あと1個必要だよ。」「14＋1＝15」という新たな意見がうまれた。あと一つということを式にしている。ここから，1増えると，2増える…1減る，2減ると発想することにつながる。それは，4＋4＋4＋3＝15がでた時でも，子どもがあと1つあるといいなと感じ，16－1＝15とつなげることも考えられる。**数直線**につなげることができる。また，Fくんから「引き算でもできる！ 16－1，17－2 … 」という意見もでた。ここから**引き算のきまり**をブロックで動かし気付くこともできる。

また，5＋5＋5＝15のブロックをくっつけて置くと，**面積の素地指導**になりそうである。その形からブロックを1つずつ動かすと，差が1ずつの階段をつくることができる。4＋5＋6＝15，3＋5＋7＝15，2＋5＋8＝15，1＋5＋9＝15である。このようなことは，15ではない他の数でやろうとするとできない。15は$2^0+2^1+2^2+2^3=15$でもある。15は面白い数である。

授業の最後に，まとめとしてGちゃんが「15っていろんなつくりかたがある。」と話した。授業後，自らブロックを持ち帰っていた子がいた。家でもやってみたいと思ったのだろう。「知っている」ではなく「何かありそう，他のもつくってみよう」と考え，指やブロック，式からの発見を愉しめると算数も好きになるのだと思う。

次の時間では，子どもが「15で英語のEが作れた！」と嬉しそうにみんなに話をしていた。「4＋2＋3＋2＋4＝15」「縦に見たら，5＋5＋3＋2＝15」と見方を変えていた。また，（答えが15なのは）「ブロックの数を変えていないから。」「全部，（足す順序を）反対にしても15」と**加法の交換法則**に気付いたり，ブロックを使って実感したりすることができた。発展的に考え，多様な数の見方ができた。

（文責：稲垣　悦子）

４．１．２．比で表すことのよさを見いだす活動　　　第6学年「比」の授業

日　時：平成26年8月19日（火）

児　童：第6学年1組38名（内　25名）　　　　　授業者：栗田　辰一朗

(1) 単元の目標

分数の見方や表し方及び分数と小数，整数の関係を理解し，分数についての理解を深める。

(2) 本単元で大切にしたいこと

【子どもとともにつくる「比」によって，比のよさを味わわせる。】

2つの材料を混ぜ合わせて味をつくる場面で，同じ味のものを作る方法を考えさせる。すると，子どもは自然と2つの量を比例させる必要があることに気づく。そこで，その2量の割合の表し方として比を教えることで，子どもとともに等しい比をつくることができるとともに，等しい比を用いて様々な同じ味をつくることができることから，比のよさを実感させることができる。

(3) 本単元でつくる算数とその計画学習指導計画（全８時間）

第1次　同じ味をつくろう（3時間）◎比と比の相等，比の値について理解する。

比の意味や表し方，比の相等（本時1／3）　　**子どもとともに「同じ味」をつくる**

比のよさ（本時1／3）　　**子どもとともに「等しい比」をつくる**

比の値

第2次　比の利用（5時間）　◎比を用いて問題解決する。

比の利用

(4) 本時の目標

2つの数量の割合を表す方法として比について理解し，生活や学習で活用する能力を伸ばす。

(5) 授業の概要

① 30mL と50mL という数値設定から「増やす」問題場面をつくる

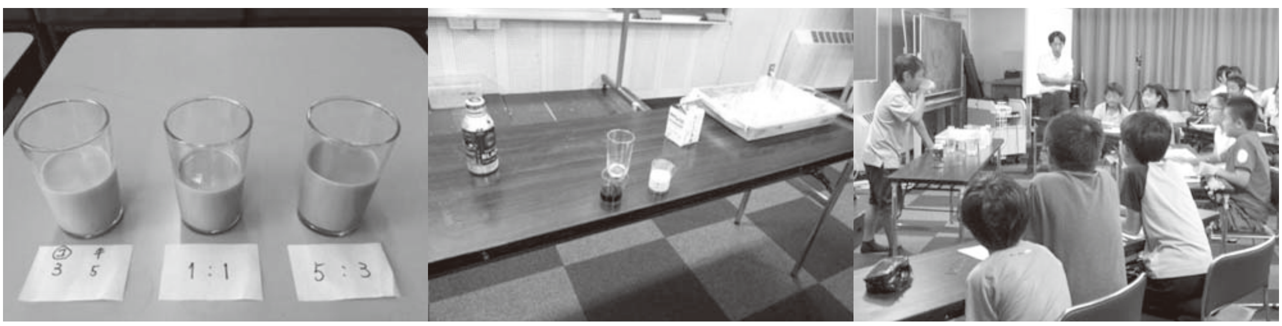
② 「少ないから増やしたい」という思いが，差の考えを生んだ

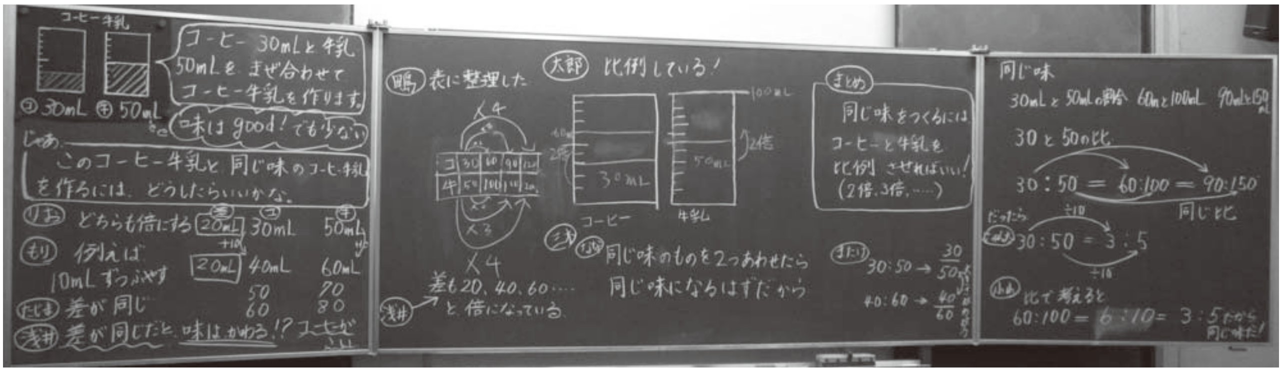
③ 「差が同じでは味が変わる」という根拠を説明できない子どもたち

④ 同じ味を作る方法について根拠を明らかにして説明する子どもたち

⑤ 実際に同じ味を作ることで，操作手順の違いや均質性は理想化される

⑥ 比例を根拠とした比を教えることで，子どもが等しい比（同じ味）を作り出す



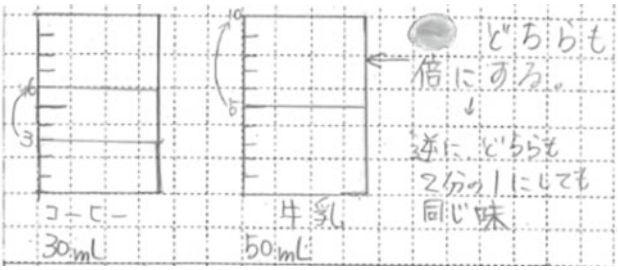


(6) 考察

(1) 比で表すことのよさを見いだす指導のポイント

①図に表すことで見えてくる「比例」の根拠

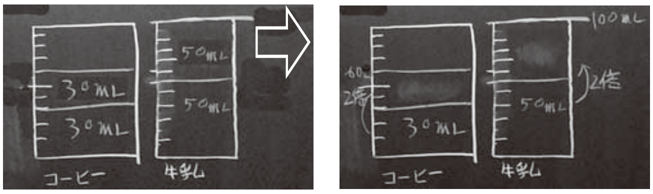
同じ味のコーヒー牛乳を作るために，多くの子がコーヒーも牛乳も「倍にすればいい」と考え，比例することを前提に同じ味の作り方を説明していた。しかし，なぜ比例すると考えられるのかについては，根拠を明確に持てていない子も見受けられた。「同じ味と同じ味のものを混ぜたら，同じ味ができる」という根拠をもてている子とノート記述を比べると，図をかいたかどうかにその差異が見られることが分かる。必ずしも図をかいているからといって根拠をもてているとは限らないが，液量図をかくことで「同じ味と同じ味のものを混ぜたら，同じ味ができる」ことを意識できている子が多い。



②同じ味を作る過程を大切にした指導

次に，図をかいた子どもたちのノートに注目してみると，ある子は自力解決で液量図をかき，倍にすれば同じ味がつくれることを書いていたが，比例と考えてよいことの根拠を明記することができなかった。

一方，授業で前に出て図をかいたCTEくんは，ノートでも板書でも同じ味を作る過程を表現していた。（右図　板書）



この表現の変化によって，「同じ味と同じ味のものを混ぜたら，同じ味ができる」ことが顕在化し，さらには，CN83「えーっと，同じ濃さのもの2つ作って，それを合わせればいい。」という発言を引き出すことにつながった。

③ CMさんの「同じ量ずつ増やす」方法では，なぜ味が変わるのか，ふり返る学習を

本実践ではCMさんの「同じ量ずつ増やす」考えを教師が取り上げ，全体に投げかけている。これは，安易に比例すると考えて解決が終わらず，同じ味になりそうでならない現象を考えることで，同じ味をつくるとはどういうことかの理解を深められるはずだと教師が考えたからである。

「同じ量ずつ増やす」方法に対して子どもたちは，「同じだけ倍する」考えではないからという理由で説明しており，なぜ「同じ量ずつ増やす」方法は味が変わるのか根拠を明確にして答えることができていない。しかし，等しい比を学習した後のG17では，30：50と40：60は等しくないことを根拠に，やはり同じ味ではなかったとふり返っている。このことから，等しい比を学習した後にCMさんの「10mLずつ増やす」ということはどういうことだったのかをふり返って考えさせることで，より明確に同じ味の作り方，等しい比の根拠について理解させることができると考える。

(2) この指導実践の有効性と可能性　～ 比例，割合の理解が深まる比の指導 ～

①比例関係を前提とした比の意味理解によって，比例や割合についての理解が深まる

②同じ味をつくることと同じ割合

子どもたちの次のような学習感想から，既習事項と結びつけ，割合をとらえようとする思考が読み取れる。

G06「比例は2量の割合を変えずに2量を大きくするもの」

G17「30：50を30/50と考えて，40：60にすると40/60で大きさが違う」

このように，これまでの学びを生かして統合的に比例や割合についての理解を深めていくことが，この学年で「比」を見いだす指導をする一つの価値だと考えられる。　（文責：栗田　辰一朗）

４．２．中学校における数学を見いだす活動を促す授業

ここでは，中学校における数学を見いだす活動を促すことを意図した授業の実践例を述べる。

４．２．１．「折り紙を折る」作業から，暗黙の仮定を見いだす活動

(1) 課題

①ねらい

中学校2年「図形の調べ方」は，小学校までの観察や帰納的推論を中心とした考察から，中学校1年「平面図形」における，作図の方法を説明するための演繹的な考察を経て，本格的に「論証」に移行する単元である。この単元では，平行線の性質をはじめとして幾何学を構成していく展開の中で，演繹的な考察の必要性（論証の意義）を感得するとともに，仮定と結論，定義と定理など，論証に関わる概念及び用語の意味理解を目指していくことになる。

しかし，論証に関わる概念及び用語の意味理解については，指導においては往々にして無味乾燥な展開になりがちではないか。そこで実践では，論証に関わる概念及び用語を生徒が獲得していくにあたって，意味理解と並行してそれらの必要性を見いだしながら獲得していくような展開を提案したい。本稿では「仮定」に焦点を当て，演繹的な説明をする際に「何が仮定として設定されているか」を明確にしないと説明が変わってしまうことを見いだすことで，仮定を明確にする態度を育むことをねらいとする。

②実践の概要・位置づけ

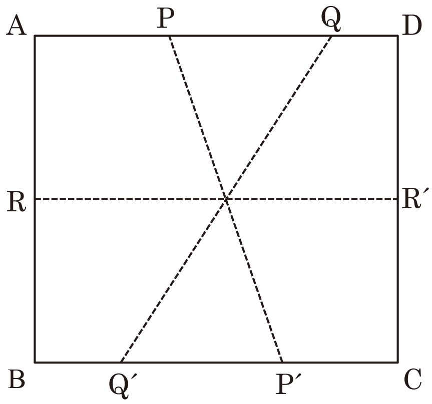
日時：2014年11月14日（金）

場所：東京都内国立大学附属中学校2年（40名）

単元における位置づけ：「図形の調べ方」の単元をひと通り学習後（仮定や結論については学習済み）

③授業の実際

生徒に折り紙を配布し，次のように折るよう指示を与えた。



① 向かい合う辺同士を重ねて半分に折る（RR′）。
② 折り目の端が①で重ねた辺上に来るように折る（PP′）。
③ ①，②の交点を通って，折り目の端が①で重ねた辺上に来るように折る（QQ′）。

このとき，次のように発問した。

Q. PQとP′Q′はどのような関係になっているだろうか。

（ⅰ）課題把握及び帰納的考察

生徒はまず見た目の印象から真っ先に「PQ＝P´Q´」と答えた。折り方は自由度があるので，当然生徒によって長さは違う。周りの生徒を見渡してみても PQ と P´Q´ 同じくらいの長さになっているので，課題としては非常に当たり前のことを聞いているようにも思える。そこで「本当に？」と聞き返すと，生徒は定規を持ち出して PQ，P´Q´ を測りはじめた。ここではやはり折り方での誤差や測定誤差が生じる。しかし，何人かの生徒に聞いてみたところ，大体誤差2㎜程度に収まっており，やはり「PQ＝P´Q´」であるというように結論づいた。

（ⅱ）演繹的推論へ

上記の結論はあくまで40名の折り紙で試した結果であることから，「必ず等しくなる」ことをいうにはまだ不十分である。そこに「証明」の必要性を見出させた。「図形の調べ方」の学習において既に帰納的・演繹的についての理解は高まってきていることから，証明を与える必要性については理解できていたように思える。

以下の証明を何人かの生徒は考えた。

PO = OP´，QO = OQ´，∠POQ´= ∠QOP´（対頂角）より，二辺夾角相等より△POQ´≡△QOP´ 合同な三角形の対応する辺の長さは等しいので　PQ = P´Q´　（証明終わり）

（ⅲ）仮定の明確化

上記の説明で納得している生徒もいる中で，次のような疑問が複数の生徒から挙げられた。

「説明の中で，PO = OP´，QO = OQ´ といってしまっているが，それは果たしていいのか（理由は？)」

この疑問は，仮定が明確になっていないことに起因するものである。今回の仮定とは折り紙そのものであり，①～③の折る作業である。この作業によっていま「何を言っていいのか」を明らかにしなければならない。そこで「今回の問題，そもそも仮定は何だったのだろう？」と問いかけた。生徒から挙げられたのは以下の通りである。

・この折り紙が正方形であることから…：4辺・4角が等しい　対辺が平行
・半分に折ったことから…：AC//RR´//BD　AR=RB，DR´= R´C

このとき，「PO = OP´，QO = OQ´」は挙げられなかった。その理由としては「直接そうなるように折ったわけじゃないから，そこには説明が必要」とのことであった。

以上の事を踏まえて，生徒はまた自身の証明を見直していった。修正した証明を共有し，授業の終わりには活動全体を振り返り，「いま何を前提（すなわち仮定）として説明するかをはっきりさせる必要がある」とまとめていった。

⑵ 何を見いだす活動なのか

先に述べたとおり，説明をするときに暗黙としている仮定は何なのかに視点を向けさせるとともに，その内容を見いだすことをねらいとした活動である。問題自体は教科書にも記載があるポピュラーなものであるが，直線を引き条件を付ける部分を，折り紙を使った作業に代用することで，仮定の部分を曖昧にした。また，指導の展開の中で，説明に入る前に仮定は何なのかを敢えて問わずに証明作業を進めさせ，証明を振り返る中で生徒自身に仮定は何なのかに目を向ける必要性を生じさせた。これらの手立てが，本時でねらいとした暗黙としている仮定を見いだすことにつながっていったように思う。

⑶ 見いだす活動を促す留意点

本時では，証明そのものはあまり困難でないものから教材を選定した。特に ⑴ ③（ⅱ）で生徒が行った証

明は，既習として似たような証明を扱っており，多くの生徒がその段階までは辿り着き，「そもそも仮定は何なのか」を考える土俵に乗ることができた。考える土俵に乗れるような問題の選定が必要であろう。

また指導においては，生徒に生じた問いを黒板上，ノート上に顕在化させて議論を進めることが肝要である。本時においては暗黙であった仮定の内容を見出すことはもちろん，そもそも仮定が明らかになっていないことを見いだすことが重要である。「そもそも仮定は何だったんだ？」という文言こそが見いだしたことであり，記録されているべき事柄であるといえる。（文責：峰野　宏祐）

４．２．１．課題の中に潜む予想外の数学を見いだす

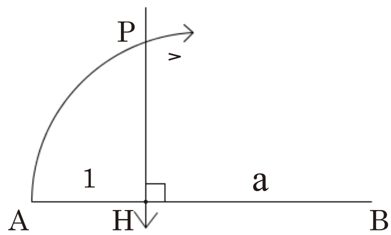
この例は，中3の『ピタゴラスの定理』の学習場面である。ピタゴラスの定理を利用して解決する解決課題の中に，予想外の円の知識や対称性の数学が潜むことを見いだすことができる教材である。その意外性に，生徒は興味を示し，終了後に印象に残る教材である。

(1) 課題

教師が課題を板書・作図し，ワークシートに解決課程を書かせる。そのワークシートにも，課題と図を載せている。この授業では，以下のような課題を用いて，授業場面の数学との関連性から意外な数学が潜むことを見いだすことを試みる。

右の図のような直径 AB ＝1＋a の円弧を描き、AH＝1の点 H を足とする垂線 PH を引けば、AH＝1に対して PH=$\sqrt{2}$を得る。

このことを証明せよ



この問題は，無理数という掴みにくい数を作図によって視覚化し可視化・具体化する操作を課題化したものであり，有意義な課題である。この方法で，10cm を1として1mm 方眼紙上で作図すると，小数点以下2桁まで可視化できる。例えば$\sqrt{2}$の場合なら PH=141mm＋α，すなわち14cm1mm 強であることが，点 P の位置から可視的に読み取れる。したがって，平方根の学習時にこの方法で作図すると，生徒の印象に残る。しかしながら，平方根の学習の段階では数学的準備不足によって扱うことが出来ない。ピタゴラスの定理を学んでいないからである。そこで，『ピタゴラスの定理』学習の際に，今度はその活用の問題として取り扱うのである。すなわち，なぜこの作図によって平方根の値が得られるか，その理由を問うものである。

いろいろな考え方・解き方があるので，ワークシート等を配布する際には証明の覧を複数用意するのがよい。

(2) 生徒の反応例

「円」，「相似」について学習し，続いて「ピタゴラスの定理」の基礎について学んだ際に，定理を利用して解決する問題として実施している。だから，通常では，ピタゴラスの定理を用いて解決しようとする生徒が圧倒的に多数を占める。

三平方の定理の前に相似について学んでいるので，生徒は三角形の相似と三平方の定理を利用しようとする。そのような代表的な解決は，以下のようなものであろう。

左図のように△ PAB を描くと、

$\triangle \mathrm{HAP} \backsim \triangle \mathrm{HPB} \backsim \triangle \mathrm{PAB}$

であるから、

$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{PH}^2$

$\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PH}^2 + \mathrm{a}^2$

$(1+\mathrm{a})^2 = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2$

よって、

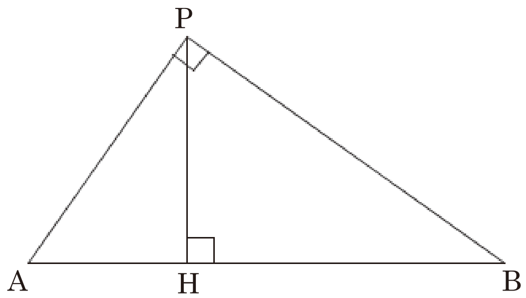
$(1+\mathrm{a})^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{PH}^2 + \mathrm{PH}^2 + \mathrm{a}^2$

$= 1 + 2\mathrm{PH}^2 + \mathrm{a}^2$

$\therefore\ 1 + 2\mathrm{a} + \mathrm{a}^2 = 1 + 2\mathrm{PH}^2 + \mathrm{a}^2$

$\therefore\ \mathrm{a} = \mathrm{PH}^2$

$\therefore\ \mathrm{PH} = \sqrt{a} > 0$



この問題は，高度な考え方を必要とするものではない。が，上記の方法は決してスマートではなく，簡潔でない。だから，この考え方で解き進みながらも計算が複雑化し，途中であきらめる生徒も少なくない。

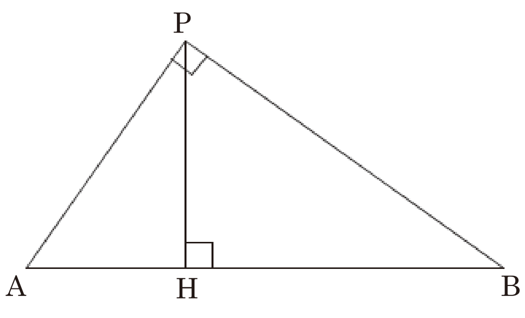
(3) 意外でユニーク，かつ極めて簡潔な解法

実は，この問題の解決において，ピタゴラスの定理は必須ではない。しかし，あえてピタゴラスの定理の学習の直後に総合問題と称して実施するから，生徒はピタゴラスの定理を利用しようとする。図中で，PH⊥AB であり，したがって互いに相似な3つの直角三角形が登場することも，そのことに貢献している。

そこで，机間指導と助言しながら時期を見計らい，『ピタゴラスの定理を使わなくても説明できる方法は無いかな ?』『ピタゴラスの定理を使わなくても説明できる方法があるよ。』等と，教室全体にヒントを与える。

一方，下に示す2つの反応例は，共にヒントを与える前に既に独自なされていた。ただし，例1は与えたヒントによって得られた説明の中にも認められた。また，反応例2はヒントが与えられた後では認められなかった。共に，生徒記述を簡略化して記してある。

［例1］直角三角形の相似を利用する



$\triangle \mathrm{PAB} \backsim \triangle \mathrm{HAP} \backsim \triangle \mathrm{HPB}.$

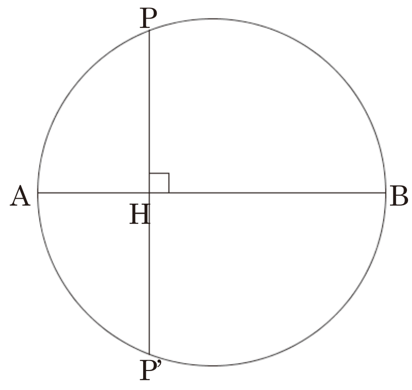
$\therefore\ \mathrm{AH} : \mathrm{HP} = \mathrm{PH} : \mathrm{HB}.$

$\therefore\ \mathrm{PH}^2 = \mathrm{AH} \cdot \mathrm{HB}$

$= \mathrm{a}.$

$\therefore\ \mathrm{PH} = \sqrt{a} > 0.$

［例2］円と直径 AB についての対称性を利用する



方べきの定理により、

$\mathrm{AH} \cdot \mathrm{BH} = \mathrm{PH} \cdot \mathrm{P'H}.$

対称性により $\mathrm{PH} = \mathrm{P'H}.$

$\therefore\ \mathrm{PH}^2 = \mathrm{AH} \cdot \mathrm{HB} = 1 \cdot \mathrm{a}.$

$\therefore\ \mathrm{PH} = \sqrt{a} > 0.$

例1では，相似な直角三角形に関する知識，すなわち，相似な三角形の対応する辺の比が等しいことと，比例式に関する知識で，簡潔に説明されている。相似を利用すればよいことに気が付いた生徒でも，多くはピタゴラスの定理の存在に引きずられ，「相似であることを利用してピタゴラスの定理に基づく式を立てる」という方法に流れたのである。

例2は，相似な図形の性質と，直径について線対称であるという円の性質を巧みに組み合わせて説明した例である。この説明も非常に解りやすく，また，何より方法としての意外性に富む。平方根やピタゴラスの定理に関わる問題の中に，意外にも相似の数学や円の対称性に関する数学が潜んでいるのである。

容易に気が付くことではないが，このような発想は一部の生徒のものとするのではなく，必ず生徒発表の形で教室で共有したい。このような考え方の共有が，多くの生徒にとって別の場面で生きてくるのである。解決場面に限定されず，相似の考え方で解けるかもしれない，円に関する数学が使えるかもしれない，というような広く柔軟に考える姿勢が身に付くのである。（文責：傍士　輝彦）

４．３．高等学校における数学を見いだす活動を促す授業

ここでは，高等学校における数学を見いだす活動を促すことを意図した授業の実践例を述べる。

４．３．１．同様に確からしいように根元事象をとることを見いだす活動

(1) 単元　いろいろな確率の計算

(2) 課題と生徒の解答

課題1

「赤玉1個と白玉3個入った袋からA，Bの2人が交互に玉を取り出し，先に赤玉を取り出した方が勝ちとする。ただし，順番はAが先で，取り出した玉は袋に戻さないものとする。このとき，Aの勝つ確率を求めよ。」

課題1に対する生徒の解答

解1　Aが1回目で赤を取り出して勝つ確率は，$\frac{1}{4}$

Aが3回目で赤を取り出して勝つとき，1回目と2回目は白玉を取り出す。

よってこのときの確率は，$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

これらの事象は排反なので $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

解2　AとBの玉の取り出し方について，次のような表を作成した

A_1とは，Aが1回目に取り出す玉の色のことである。

以下の表より，すべての場合の数が4通りで，そのうちAが赤玉を取り出す場合が2通りあるので，Aの勝つ確率は，$\frac{1}{2}$

A_1	赤	白	白	白
B_1	×	赤	白	白
A_2	×	×	赤	白
B_2	×	×	×	赤

課題2

どちらも同じ確率の値が求められているが，「どちらの解答がより良いだろうか？」

課題2に対する生徒の解答

意見１　解1が良い

解2では，それぞれの玉の取り出しかたが同様に確からしいことを示していない。

意見２　起こりうる全ての場合の数は，解2の表より $1+3+3\times2+3\times2=16$

そのうちＡが勝つ場合が7通りなので，Ａの勝つ確率が $\frac{7}{16}$ となった。

課題3

課題2に対する「意見2」は解2について，それぞれの起こる場合の数を考えることで，同様に確からしいかどうかを考察しようとしたものだった。しかし，解2の考察をする以前に，そもそも解1，解2とは異なる確率の値が求まってしまった。

「意見2を解3と考えて，この解3について考えよう。」

課題3に対する生徒の解答

解2の表において，赤玉を取り出したあとも白玉を取り出す，と仮定して場合の数を考えると解1や解2で求めた確率の値と一致する。表で表すと以下のようになる。

A_1	赤	白	白	白
B_1	（白）	赤	白	白
A_2	（白）	（白）	赤	白
B_2	（白）	（白）	（白）	赤

つまり，次のような解答が考えられる。

解４　玉の取り出し方の総数は，${}_4P_4=24$通り

そのうち，Ａが勝つ場合は，

赤（白）（白）（白）の $1\times3\times2\times1=6$通りと，

白 白 赤（白）の $3\times2\times1\times1=6$通り。

よって，Ａの勝つ確率は，$\frac{6+6}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

課題4

「なぜ解1と解4は一致するのか？また，解4のように白玉を取り出すことを仮定してよいのか。」

課題4に対する生徒の解答

例えば，袋から玉を取り出しても玉の色を見ないでおくとする。袋から玉を出し切ったあとで，一気に玉の色を確認する，と考えても確率は同じはず。だから，白玉を取り出すと仮定しても良い。

(3) 数学を見いだす活動を促す指導について

本研究授業では，先述のように最初の課題1における生徒の解答をもとに，少しずつ考察を深めていくように発問を重ねていった。その結果，課題1から課題4までの発問を行うことができた。課題4では，課題1のような確率の値を求める，という単純な発問ではなく，確率の問題文を読みかえてよいのだろうか，という高等学校の確率の定義の在り方に迫るまであと一歩というところまで深めることができた。　（文責：菅原　幹雄）

４．３．２．２元１次不定方程式の解法とユークリッドの互除法のつながりを見いだす活動

(1) 生徒に与えた問題

（問1）500g より重く1kg より軽い郵便物を一般書留の速達で送る場合（1370円）に，50円切手と80円切手が何枚必要か？

（問2）50円切手と80円切手を用いて，支払うことができる金額はどのようになるか？

(2) 数学を見いだす活動を促す指導について

問1では，$50x+80y=1370$を満たす負でない整数x，yを求める問題である。生徒は，この解が複数あるということを見いだし，それを全て求めることができた。

問2では，$50x+80y$（x，yは負でない整数）で表すことのできる整数について考えることになるが，後でx，yは整数という条件にかえて考察した。生徒は全員，50と80の最大公約数である10の倍数しか表すこができないということを見出した。また，多くの生徒は，10の倍数はすべて表せることを見出した。その根拠を論理的に的確に記述できた生徒は多くなかったが，自分なりの言葉で根拠を述べることができた。

ある生徒は，$50x+80y$（x，yは整数）・・・①が表す整数について，$y=0$ならば①は50の倍数，$y=1$ならば①は50で割って30余る整数，$y=2$ならば①は50で割って10余る整数，$y=3$ならば①は50で割って40余る整数，$y=4$ならば①は50で割って20余る整数であるということから，①は10の倍数全てを表すことを示した。

さらに，このことを一般化して，$ax+by$はaとbの最大公約数の倍数しか表すことができないということも，ほとんどの生徒は見出した。$17x+57y=1$を満たす整数x，yは存在するかという問に対して，何人かの生徒は17と57の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて調べた。そのことを通じて，$ax+by=1$を満たす整数x，yを求めるために，ユークリッドの互除法を逆にたどる解法に気づき，クラスで共有することができた。

この課題を通して，2元1次不定方程式（$ax+by=c$）を解く際に，ユークリッドの互除法を利用することに気がつく生徒が出てきた。ただ，多くの生徒にとっては，気がついた生徒の解法を聞いて学ぶということになったので，より多くの生徒が自ら発見するような手だてを講じることが今後の課題となる。　（文責：大谷　晋）

５．主な成果と次年度の課題

(1) 数学を見いだす活動の共通点と相違点について

4章に書いた具体例を基に，ここでは数学を見いだす活動の共通点と相違点について考えてみる。

数学を見いだす活動の共通点は，大きく課題に関するものと指導法に関することに分類できる。まず，課題に関することとして，色々な解決方法がある課題が多い。その根拠を基に数学を見いだすこともあれば，その根拠自体が見いだす数学であることもある。また，答えが一つに定まらない問いである必要はない。次に，指導法に関することとして，生徒自身がしっかり課題を解決するための時間を与え，生徒によく考えさせているところが挙げられる。その後，比較検討をし，根拠を問うている。また，子供の発言をきっかけに授業を展開しており，教師主導の一方的な授業展開ではない。

共通点として根拠を問うていることを挙げたが，その根拠に相違点がある。小学校段階では，具体物や生活経験が根拠となる場合もあり，演繹的ではなく，帰納的であったり類比的であったりする。中学校・高等学校段階では，根拠を深く問い，暗黙にしていた仮定を浮き彫りにしたり，定義を考えたりし，演繹的に考えている。このことから，小学校では，演繹的に押さえることがきちんとできないことを念頭に置き，中学校・高等学校での数学を見据えて指導する必要があるだろう。また，中学校・高等学校では，小学校において帰納的・類比的に扱ってきていることを念頭に指導を組み立てる必要があるだろう。

(2) 次年度の課題

今後の課題としては，数学を見いだす活動を促すためのより一層の教材開発を行っていくとともに，数学を見いだす活動を促す指導法を挙げる必要がある。そして，今年度の研究においていくつか明らかになった見いだす活動における共通点と相違点を基に，見いだす活動の質が上がるように，小中高の連続性を持って指導する必要がある。その具体的な題材を提案し，実践し，教材及び指導法を検証することが今後の課題として挙げることができる。また，昨年度と今年度の成果を，各学校の現職教員研修会や公開研究会等において提案するとともに，より深いものにする必要がある。

（文責：佐藤　亮太）