国際中等教育研究　第７号　p.25 ～ 51
東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

# 数学的リテラシーの育成を目指す取組

## ～学習指導および評価の実際～

## Initiatives for Developing Mathematical Literacy: Practice of Teaching and Assessment

数学科
高橋広明・鳴海文彦・成田慎之介・指田昭樹・小林廉・内野浩子・福井正之

## 要旨

本校数学科では，数学的リテラシーの育成を目指して，独自カリキュラムや独自テキストの開発を行うとともに MYP 数学の枠組みに基づく学習指導や評価を実践してきている．本稿では,「実施されたカリキュラム」の視点から数学的リテラシーを育成する取組について報告する．即ち，第１学年から第６学年までの学習指導および学習評価の実際を示し，それぞれ事例に基づいて数学的リテラシー育成に関する考察を行う．今後もこうした「実施されたカリキュラム」レベルからの検討が欠かせないが，今後さらに本校数学科の取組を評価・改善していくために,「達成されたカリキュラム」レベルからの検討が課題となる．

## １．はじめに

本校数学科では，国際バカレロア機構が提供する中等課程プログラム“Middle Years Programme”（MYP）の正式認定校として，その枠組みに基づく指導と評価を行ってきているところである．また，それより以前から，MYP 数学を見据えつつ，数学的リテラシーの育成を目的とした独自のカリキュラムを開発し，その実施を試みてきている．

カリキュラムの開発・評価・改善にあたっては,「意図されたカリキュラム」,「実施されたカリキュラム」,「達成されたカリキュラム」の三層から考察することが欠かせない．このうち「意図されたカリキュラム」レベルの取組については，これまでの本校研究紀要においてたびたび報告してきている．本稿では,「実施されたカリキュラム」レベルの取組を中心的に示す．即ち，数学的リテラシーの育成を目指す学習指導および学習評価の実際を示し，それぞれ具体的事例に基づいて考察を行う．

## ２．「意図されたカリキュラム」からみた取組の概要

### ２．１．本校数学科のカリキュラム

本校数学科独自カリキュラムの理念は「国際社会の一員として適切に判断し，行動できる人間を育成するために，数学的リテラシーを育成するとともに，数学に対する興味・関心を高め，豊かな感性を養う」ことである．この理念を達成するために，数学的モデル化の重視，ICT の積極的な利用を前提としている点が特徴的である．

学習指導要領改訂に伴って，本校のカリキュラムの改訂も行った．カリキュラムについての詳細を示す代わりに，学年の領域別単元配当と主な学習内容を巻末に示す．カリキュラムの理念等に関する詳細はこれまでの本校研究紀要を参照いただきたい．

### ２．２．ＭＹＰ数学の特徴

MYP 数学の目標と評価は，４つの観点「知識と理解」，「パターンの探究」，「数学におけるコミュニケーション」，「数学における振り返り」に基づく．特にその観点に基づく評価の仕方が特徴的である．評価する際には「評価課題」（本校では主としてレポート）を用いる．教師は，本校で設定した評価規準を参照し，個々の評価課題に対して期待される状態を明らかにする．例えば，MYP 数学ガイドによるとこれは以下の形式をとる．（International Baccalaureate，2011，p.29）

- 課題に合わせて言葉の変更を伴った MYP 評価規準を用いた，課題特有の規準の明確化
- 期待される状態についてのディスカッション
- 期待される状態を説明する課題シート

教師は個々の課題の冒頭に期待される成果を明らかにし，その結果として生徒は何が必要とされているかに気付くことが重要であるとされている．本校でも，評価課題として「レポート」を課す場合には，本校で設定した評価規準を反映させた「評価課題ごとの評価規準」を課題シートに示す形で出題している．

なお，本校における MYP の対象学年は第１学年から第４学年であり，第５学年と第６学年は MYP の枠組みには基づいていない．しかしながら，本校数学科では第５学年と第６学年においても MYP の趣旨を活かし，高等学校数学科としてはあまり行われていない観点別評価を実施したり，MYP 数学の一領域である離散数学に対応してグラフ理論を指導する準備を整えたりしている．

### ２．３．独自テキスト『TGUISS 数学』の開発

本校数学科では，独自カリキュラムや MYP 数学という「意図されたカリキュラム」を「実施されたカリキュラム」として具現化するために，独自テキスト『TGUISS 数学』の開発を行ってきた．本テキストは，事象の探究過程で生徒にとっての新たな数学的概念や知識を学ばせることや，数学的モデル化に関わる力を総合的に育成することを意図した展開にしていること，テクノロジーの使用を前提としていることなどが特徴的である．本テキストは MYP 数学に対応して第１学年から第４学年までの使用を意図しているが，第５学年および第６学年においても，その趣旨を活かして，探究としての数学科授業の実現を試みている．以下で挙げる事例のほとんどはこの『TGUISS 数学』にある教材に基づいている．なお，本テキストは 2013 年度末において第一次改訂を終える予定である．

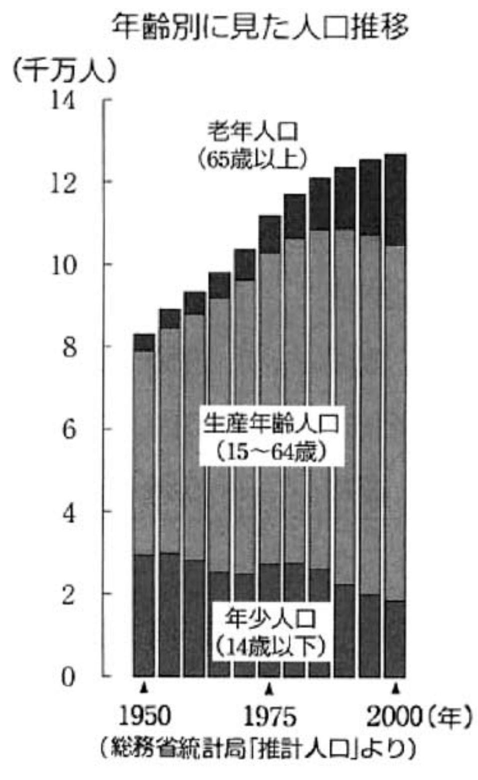
## ３．「実施されたカリキュラム」からみた取組の実際

### ３．１．数学１

#### ３．１．１．探究課題について

「日本の年少人口は？」

本探究課題は，日本の人口推移を表すデータをもとに，将来の人口は今後どのように推移するか



を考察していくものである．ここでは特に年少人口と老年人口について考察する．

**●本探究課題の位置づけ**

本探究課題は，『TGUISS 数学 1』の第 2 章「事象の見方」の第 2 節に含まれている．第 2 章の節構成は以下のとおりである．

第 1 節「表とグラフ」

第 2 節「繰り返しの関係」

第 3 節「文字式と一次方程式」

第 1 節では，現実の様々な事象について，データからどのような変化の仕方をしているのかを考察するうえで，表にまとめたりグラフに表したりする活動を通して，表やグラフのよさを学ぶことを目的としている．

第 2 節では，繰り返しの関係がある事象についてそれを「Now と Next」を用いた式で表し，数値計算によって値が算出できることを学ぶ．第 3 節では，文字を用いて事象を表現する活動を通して，変数としての文字，未知数としての文字，一般的なものを表すものとしての文字など，文字の機能や文字のよさを学ぶとともに，文字式の計算や一次方程式，文字を用いた証明などについて学習する．

本課題はこの第 2 節「繰り返しの関係」にある課題である．年少人口については，次の 2 つから将来の年少人口を予測する．

(1) 2003 年の年少人口はおよそ 1800 万人であった．

(2) 年少人口は毎年およそ 33 万人ずつ減少している．

ここで，(1)は測定値であるが，(2)は仮定であることなどを確認し，仮定の意味についても少しずつ学習することになる．これらの情報に基づき年少人口の推移を考察する．算出の過程としては，2003 年の年少人口をもとに以下のように順次計算する．この計算を振り返ると，同じ仕組みでの計算を繰り返していることが分かる．そこで，現在の年少人口を Now，翌年の年少人口を Next で表すと，「Next＝Now－33 万」で統一的に表現できる．この関係をつかむことができれば，その後の数値計算はグラフ関数電卓を用いて処理することができる．グラフ関数電卓では，まず初期値である 1800 を入力する（以下，万は省略する）．次に「Ans－33」を入力する．これが「Next＝Now－33」に相当する．その後は[EXE]キーを押すたびに，自動的にそれ以降の計算結果を順次出力される（図 3.1.1）．このように算出できる本質は，「毎年 33 万ずつ減少する」という繰り返しの関係があるからである．探究ではこの後老年人口についても考察する．老年人口については，

| | | |
|---|---|---|
| 2003 年 | | 1800 万 |
| 2004 年 | 1800 万－33 万＝ | 1767 万 |
| 2005 年 | 1767 万－33 万＝ | 1734 万 |
| 2006 年 | 1734 万－33 万＝ | 1701 万 |
| 2007 年 | 1701 万－33 万＝ | 1668 万 |

(1) 2000 年の老年人口は約 2200 万人であった．

(2) 老年人口は 5 年ごとにおよそ 20%ずつ増加している．

という条件のもとで考察する．このとき繰り返されるのは「5 年ごとに約 20%ずつ増加する」という関係である．これを Now-Next の式で表すと「Next＝Now×1.2」となる．このとき Next は現在から 5 年後の老年人口を表していることに注意する．初期値を基に数値計算した結果が図 3.1.2 である．

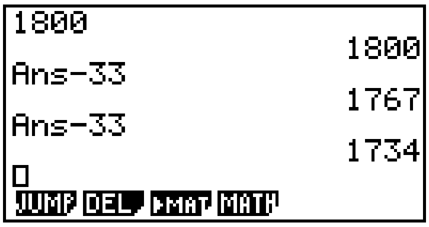



図 3.1.1：年少人口の推移

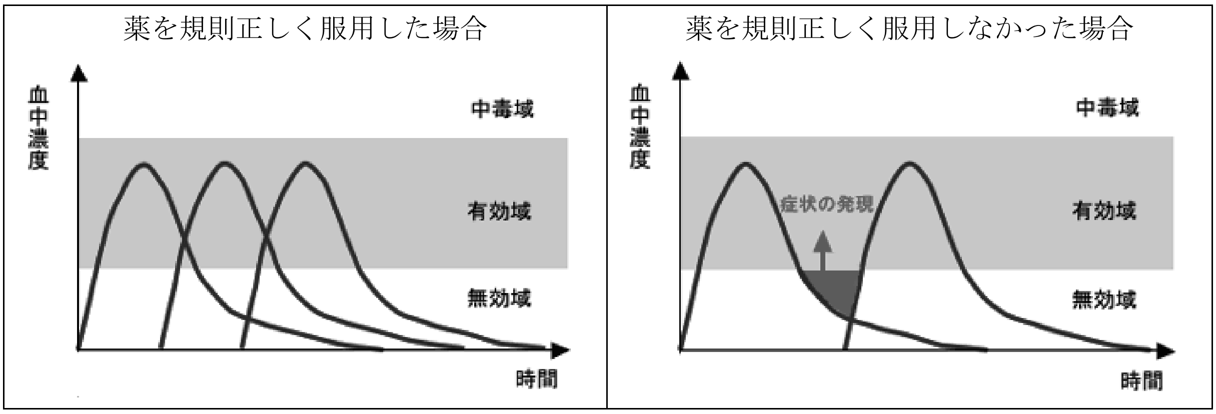

図 3.1.2：老年人口の推移

このように，この段階での Now-Next の関係式の学習は，漸化式の学習の素地指導としての役割も負っている．

### ３．１．２．授業の実際

授業は第 1 学年の生徒対象に，9 月に行った．授業の流れは上記で述べたとおりであり，Now-Next の関係式はいずれも無理なく導くことができた．その後，繰り返しのある事象の発展的考察として，薬の処方について扱った．

医者から処方される飲み薬には，内用薬と頓服薬とがある．頓服薬は一時的に症状を緩和させるためのものであるのに対し，内用薬は一定期間決められた時間間隔で飲み続けるものであることを授業で確認した．ここでは内用薬に焦点化する．薬が効くというのはどのようなことであるかについても扱った．内用薬は腸なので吸収され，血液に溶け込む．その溶け込んだ内用薬の成分は，時間経過とともに分解や排泄などによって体内から少しずつ消失する．体内の血中濃度をある程度の値の範囲に収めるために，一定時間後に再び薬を服用することとなる．ただし，その量が少なすぎると薬は効かず，多すぎても体に良くない．この範囲のことをそれぞれ「無効域」「中毒域」といい，適切な血中濃度の範囲を「有効域」という．



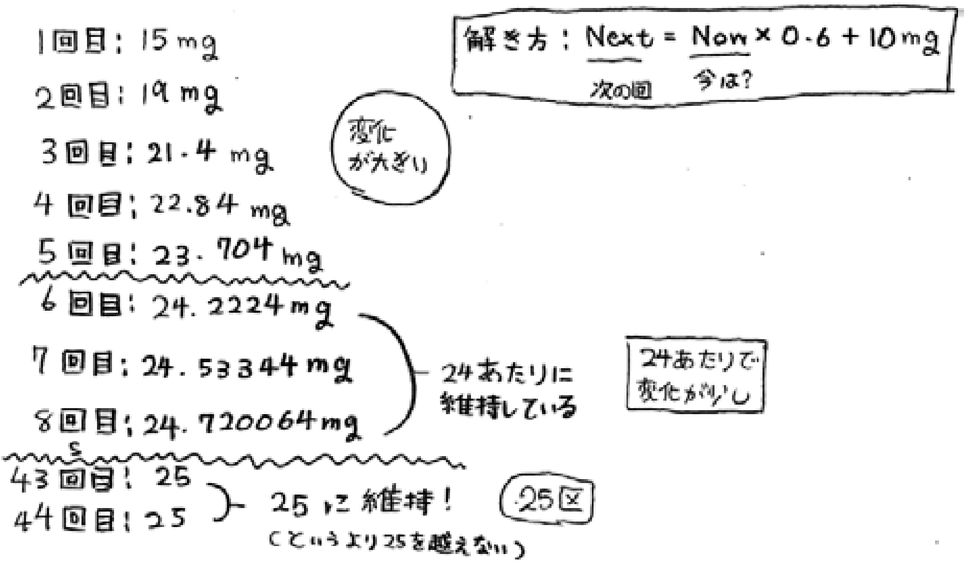

(http://www.smilenavigator.jp/tougou/life/report/eve04_01.html)

以上の予備知識をもとに，以下の課題について考察した．

| |
|---|
| ある伝染病の治療薬としての抗生物質がある．この薬は，血中濃度が 8 時間で服用直後の約 6 割になる特性がある．<br>この薬は大人には最初は 15mg，2 回目からは 10mg ずつ服用するように処方される．<br>体内の血中濃度はどのように変化するだろうか？ |

薬が体内に入ると，それが血液に溶け込むまでには多少時間がかかるが，ここでは服用した薬は速やかに血液に溶け込むと理想化した．また，どの段階での血中濃度を調べるのかという質問に対し，服用直後の血中濃度を考察することと統一した．しばらく自力解決の時間を取った後，4 回目までの変化を確認した．すると血中濃度の値は単調に増加するため，この処方の

仕方についてどう思うかを尋ねると，「やばいよ．中毒域になっちゃうよ．」という意見が出たが，「でもどんどんやっていくとずっとは増えていかない」という意見も出た．そこでグラフ電卓を用いて，この処方で薬を飲み続けたらどうなるかを考察するよう求めた．




その結果，ほとんどの生徒が Now-Next の関係式を導き出し，それをもとにグラフ電卓から血中濃度の値の変化を調べることができた．この関係は，漸化式では

$a_{n+1}=pa_n+q$

の型であるが，中学生においても事象に基づいてこの型の Now-Next の関係式を導くことができることが確認できた．

### ３．１．３．評価について

この学習に対して，以下の評価レポートを課した．

銀行の定期預金にお金を預けると，利息が付きお金が増える仕組みである．利息は一般に年率で表され，年利ともいわれる．その利息の付き方には単利型と複利型とがある．

単利型：最初に預けた金額に対して，毎年利息が付く方式

複利型：利子を含めた金額に対して，利息が付く方式

例）年利 1%で，100,000 円を預けた場合

[単利型]1 年後に，100,000×0.01＝1,000 円の利息が付くので合計 101,000 円となる．

2 年後も同じ 1,000 円の利息が付くので，合計 102, 000 円となる．

3 年後以降も同じである．

[複利型]1 年後には，100,000×0.01＝1,000 円の利息が付くので，合計 101, 000 円となる．

2 年後は 101, 000 円に利息が付くので，利息は 101, 000×0.01＝1,010 円で，合計 102,010 円となる．

3 年後以降も同じである．

(1-1) 年利 1%で，100,000 円を単利型で預けた場合，3 年後，4 年後の合計金額はいくらになるか，それぞれ答えなさい．[2 点]

(1-2) 年利 1%で，100,000 円を複利型で預けた場合，3 年後，4 年後の合計金額はいくらになるか，それぞれ答えなさい（小数になる場合は，小数のままでよい）．[2 点]

(1-3) 現在の合計金額を Now，1 年後の合計金額を Next とする．年利 1%で，100,000 円を単

| |
|---|
| 利型で預けた場合の合計金額を，Now-Next の式で表しなさい．[10 点] |
| (1-4) 現在の合計金額を Now，1 年後の合計金額を Next とする．年利 1%で，100,000 円を複利型で預けた場合の合計金額を，Now-Next の式で表しなさい．[10 点] |

この課題は，観点 A「知識と理解」を確認するものであり，その rublic は以下のとおりである．

| | Specific Indicators |
|---|---|
| 0 | 以下のいずれでもない． |
| 1-2 | 10 点以上で，解答の根拠や算出過程が述べられている． |
| 3-4 | 20 点以上で，解答の根拠や算出過程が述べられている． |
| 5-6 | 30 点以上で，いずれの解答の根拠や算出過程も述べられている． |
| 7-8 | 40 点以上で，いずれの解答の根拠や算出過程も明確である． |

### ３．１．４．本探究課題についてのまとめ

現在漸化式については高等学校の数学 B における指導内容となっている．学習指導要領解説では「数列を漸化式で表現し，漸化式の意味を理解させる．また，簡単な漸化式を用いて表された数列の一般項を求めることができるようにする.」こととなっている．教科書において実際の取り扱いを確認すると，いずれの教科書でも漸化式を解くことが主となっており，漸化式で表現することやそのよさについてはほとんど触れられていない．まして，漸化式から数値計算によって値の変化を考察する場面は皆無である．非線形の漸化式は特殊な場合を除いては一般に解くことはできない．そのような場合でも，テクノロジーを用いれば，容易に数値計算によって値の変化を追うことができる．漸化式に関してこれから求められる数学的リテラシーは，解くことが目的ではなく，表現することに重きが置かれるようになるべきである．そしてその活動は, 事象に基づけば, 中学の低学年からその指導は可能であることが実践から確認された．事象を数学的に考察するためのツールとして，積極的に Now-Next の関係式を扱っていくことを提案する．

## ３．２．数学２

### ３．２．１．探究課題について

冷蔵庫の買い替えをするという身近な事柄について，2 つの製品の内でお得な方を選択しようとしたときに，いずれかがお得であるということを何をもとにして判断するかということを考える．

導入については，まず家の冷蔵庫が古くなったので新型の冷蔵庫に買い替えをしようとなったときに，新しい冷蔵庫のなにを重要視するかということを自由に考えてもらう．実際の授業で出たものとしては，

「値段」「扉が両開きかどうか」「自動製氷機があるか」「容量」「エコかどうか」「デザイン」「TV の CM」

などが挙げられた．この中で「扉が両開きかどうか」「自動製氷機があるか」「容量」などは冷蔵庫の「性能」というようにまとめることができる．また,「エコかどうか」ということは電化製品においては省エネ性能を示すものととらえられるので，消費電力と置き換えても同等の意味としてとらえられる．これらのことから，候補として残ったものが同じ性能をもつ製品であ

ったとすると，最終的に「値段」と「消費電力」が決め手として考えることになる．

そこで『TGUISS 数学 2』にある次の問題を提示する

この夏，なおきさんの家では冷蔵庫を買い替えることにした．冷蔵庫はエアコンに次いで消費電力量が多い家電製品である．いろいろなカタログを見比べて，同じメーカーの次の 2 製品が候補となった．

| | 価格（円） | 消費電力（kWh/年） |
|---|---|---|
| 製品 A | 71800 | 580 |
| 製品 B | 81500 | 430 |

総費用を考えると，どちらの製品を購入する方がよいだろうか．ただし，年間の電気使用料金は消費電力(kWh)×22(円)で算出するものとする．

### ３．２．２．授業の実際

前章で示した探求課題に取り組む時点では連立方程式またその解き方は未習である．そのため総額を y，一年間の消費電力を x として方程式を 2 つつくり，その解を求めるという方向に思考が向かうことはほとんどない．

解法を大きくわかると 2 種類の方法が見られた．A，B それぞれの製品における一年ごとの総額を算出し，製品 A と製品 B の大小関係を比較しているのであるが，その各年の総額の求める過程に相違がみられる．一つ目は初期の価格に，年間の電気使用料金である 12600 円または 9460 円を加えていってそれぞれの年の総額を求めているものである．もう一つは，y を x の式で表したものに代入を行い，総額を算出していたものである．この時点でほとんどの生徒が製品 A，製品 B についてそれぞれ $y = 12760x + 71800$ (①)， $y = 9460x + 81500$ (②)と y を x の式で表していた．

グラフをかくことを促すと，2 本の直線が交わっているところがあることに気が付く（グラフは図 3.2.1 のようになる）．その交点の座標をよむと x の値が 2 から 3 の間であり，3 に近いあたりで 2 つの直線が交わっていることをとらえることができる．それは各自の解決で求めた総額が逆転する使用年数と一致していることになる．

使用年数が 2 年(x＝2)のときは，製品 A，B の総額がそれぞれ 97320 円，100420 円であるが，使用年数が 3 年(x＝3)のときには，製品 A が 110080 円，製品 B が 109880 円となる．具体的数値をもとに使用年数と総額を考えた場合は，使用年数が 2 年のときは製品 A のほうが総額が小さかったのに，

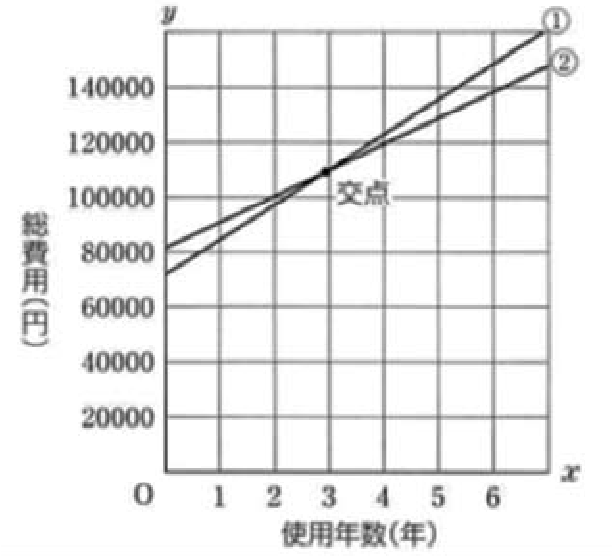



図 3.2.1

3 年になると製品 B のほうが小さくなっていることに気が付く．しかし，2 年と 3 年の間に総額が逆転したことはわかっても，具体的にどれくらいたった頃かということはわからない．その一方で，グラフの交点をもとにした場合は，おおよその値の見当はつく．

実際の授業では，A，B の両製品についての総額の，一年ごとの差の縮まり方に着目をして，電気量の差が 3300 円，価格の差が 9700 円であることから，9700÷3300 を行い，およそ 2 年と 11 カ月で総額が同じになるということを見出している解決も見られた．そして，その後に「冷蔵庫は一度買い替えたら何年くらい使うものだろうか」ということを考え，「3 年以上使うならば，製品 B の方がお得になる」また「1，2 年でまた買い替えるならば製品 A のほうがお得である」という結論を導いた．

それらの活動を踏まえた上で図 1 のようなグラフをもとにして交点についてまとめる．本校の独自教科書『TGUISS 数学 2』では以下のようにまとめている．

「方程式①を成り立たせる x，y の値の組(x，y)を座標とする点の集まりは，下の図の直線①になる．同様に，方程式②を成り立たせる x，y の値の組(x，y)を座標とする点の集まりは，下の図の直線②になる．したがって，2 つの方程式①，②を同時に成り立たせるような x および y の値は，2 つの直線①と②が交わった点の時である．これの点を交点という．」

さらに，2 つ以上の方程式を組み合わせたものを連立方程式に触れたうえで「2 つの直線①，②の交点の x 座標および y 座標は，連立方程式①，②の解である．」と交点と，連立方程式の解との関係を述べている．

交点についての理解を共有した後，授業では，「製品 A, B の総額がその後逆転することはないのか」「製品 A，B の総額が同じになることはもうないのか？」などの発問をした．これは連立方程式の解の一意性についての理解を深めるためのものであるが「$y=12760x+71800$，$y=9460x+81500$ のグラフの差が広がっているから，お得度も差が広がっていく」など，それぞれのグラフの交点とその前後の変化のしかたを根拠として交点，すなわち連立方程式の解が 1 つに定まる理由を，考えることができていることが示唆される反応が見られた．

### ３．２．３．まとめ

連立方程式と一次関数については，その両者を同じものとしてとらえられない．またグラフの交点を求めるということが，連立方程式の解を求めているということと本質的に同じことを行っているというようにとらえられず，その 2 つが乖離してしまっているという課題がある．

例えば，『平成 21 年度全国学力学習状況調査』では，T シャツのプリント枚数を x，値段を y として次のグラフが示されている問題がある．その中で「ある枚数の T シャツをプリントすると，パレット印刷と染屋のどちらに頼んでも料金が同じになります．このときの T シャツの枚数は，グラフ上のどの点の座標からわかりますか.」という小問がある．この問題の答えは E で正答率は 54.4%であった．

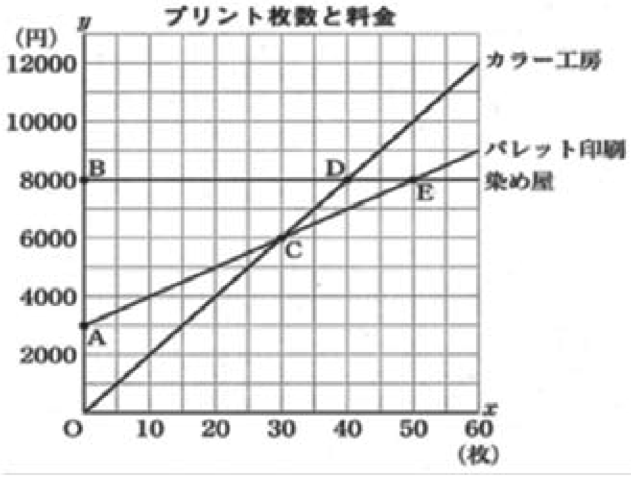



図 3.2.2

これは，各方程式を成り立たせる数値の組み合わせは連立方程式の解となり，連立方程式を解くことは 2 つの方程式を

同時に成立させる値の組み合わせを求めることを意味しているという認識が，グラフの交点の座標を求めるということと結びついていない．つまり一次関数のそれぞれのグラフの交点の x 座標，y 座標を明らかにすることが，連立方程式の解を求めることと本質的に同じことを行っている認識がないことが原因であると考える．

中学校２学年の教科書『新しい数学２』では，２章で連立方程式が登場し，その上で３章で一次関数について述べられている．３章の連立方程式とグラフの関係について扱う際に「x，y についての連立方程式の解は，それぞれの方程式のグラフの交点の x 座標，y 座標の組である」とまとめられている．扱われている内容は『TGUISS 数学 2』のものと同様である．

本校のカリキュラムでは単元の順序を入れ替えている．一次関数を先に学習し，その後に連立方程式とその解法が登場する．そのため 2 つの式を満たす x，y の値を求めようとする場合は，連立方程式を加減法，代入法などを用いて解くというよりも，既習である一次関数に帰着させてグラフをかいてみることが考えられる．そして，グラフは式を満たす x，y 座標の集まりであるため，2 つのグラフの交点の座標をよむことになる．これは，結果的に連立方程式の解を求めることと変わりがないのである．文字式の形式的操作による様々な連立方程式の解法を知る前に，交点と連立方程式の解の関係について学習することができるため，グラフの交点すなわち連立方程式の解の本質的な意味を理解することが可能となる．それと同時に，一次関数を表す式も連立方程式のそれぞれの式も，同じ 2 元 1 次方程式であるととらえることができることも考えられる．

### ３．３．数学３

#### ３．３．１．探究課題について

数学 3 では，「富士山が見える山は？」(以下，「富士山」問題)というレポート課題を事例として挙げる．これは，内野ほか(2011)で本校のテキスト『TGUISS 数学 3』の事例として挙げている探究課題「東京スカイツリーの展望台から，どこまで見えるの？」(以下，「スカイツリー」問題)を授業で扱ったあとにレポートとして課したものである．「スカイツリー」問題は，高さ 350m と 450m の展望台から見える範囲の違いを探究する問題である．

この探究課題のねらいは主に以下の 2 点である．

「○見える範囲には限界があることから，地球を球ととらえた図をかいて考察することができる．
○円と接線，三平方の定理を使って，見える範囲を求めることができる．」
(内野ほか，2011，p.33)

すなわち，図 3.3.1 のような図をかき，x の大きさを求めることが主たる活動となる．

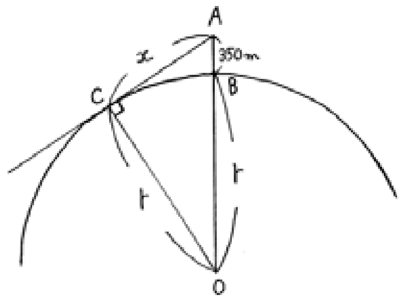



図 3.3.1　スカイツリーから見える距離を表す図

内野ほか(2011)では，この探究課題の評価課題として，図 3.3.2 の新聞記事と共に以下の課題(以下,「日山」問題)を挙げている(内野ほか，2011，p.34)．

| |
|---|
| 北は釧路市から南は長崎市まで，全国各地に「富士見」という地名をみることができる．福島県の日山(ひやま)から富士山をみることができるのだろうか． |

この評価課題を基に作成したものが以下の「富士山」問題である．

以下の表は，日本にある 2 つの山で，富士山からの直線距離と標高が示してある．以下の問いに答えなさい．ただし，富士山の標高は 3776m，地球の半径は 6378km とする．

| | | 富士山からの直線距離 | 標高 |
|---|---|---|---|
| ① | 八丈富士(東京都) | 264.9km | 850m |
| ② | 蛤山(宮城県) | 334.23km | 1014m |

課題 1　理論上，これらの山頂から富士山を見ることはできるかどうか，それぞれの山について考察しなさい．

課題 2　一般に，どのような条件ならば，ある山の山頂から富士山をみることができるか，数学的に考察しなさい．

この「富士山」問題は，①と②の山から見る対象(富士山)に高さがあるという点で，「スカイツリー」問題と構造が異なっている．図 3.3.1 の弧 BC の間に富士山がなくても，直線 AC よりも上に富士山の一部がでていれば，理論上は富士山がみえることになる．すなわち，図 3.3.3 において, AB を①および②の山, DE を富士山としたとき, DE(3776m)＞FE となればよい. 尚, 三角比は未習であるため，弧 BC，BE は直線とみなし，さらに BC=AC，BE=AF として解決する．

一般に，ある山の高さを h，富士山までの距離を L としたとき，

$$FE = \sqrt{\left(L - \sqrt{(h+6378)^2 - 6378^2}\right)^2 - 6378^2} - 6378$$

となる．「日山」問題では，一般化までは行っていないが，「富士山」問題では，そこまで踏み込んで考えさせることにした．


富士山撮れれば10万円

ただし福島県から

福島県の岩代町観光協会はこのほど、同町の日山（一、〇五七・六メートル）から富士山の写真撮影に成功した人に、賞金十万五千七百六十円を出すことを決め、募集を始めた。賞金額は日山の標高を百倍した数字をとった。

日山は一部の人たちの間で「富士山が見える北限の山だが、実際に撮影に成功した人はいない」とされていた。同観光協会が、富士山までの距離や山の連なり具合などを調べるパソコンソフトでシミュレーションしたところ、北限の山である可能性が強いという結果があらためて出た。

日山と富士山の直線距離は約三百キロ。日山山頂からは南南西の方角に、富士山の山頂部がわずかに見えるはずだという。

写真は日山から撮影したものに限るが、応募資格でプロ、アマチュアの別は問わない。同観光協会へ郵送か直接持参して応募し、到着順に審査。第一撮影者に賞金と認定書、町の特産品などを贈る。

応募先は〒964 0313 福島県岩代町小浜北月山二七、岩代町役場内、同町観光協会、電話0243（65）2803。

撮影の北限、挑戦者募る

図 3.3.2　日山の新聞記事

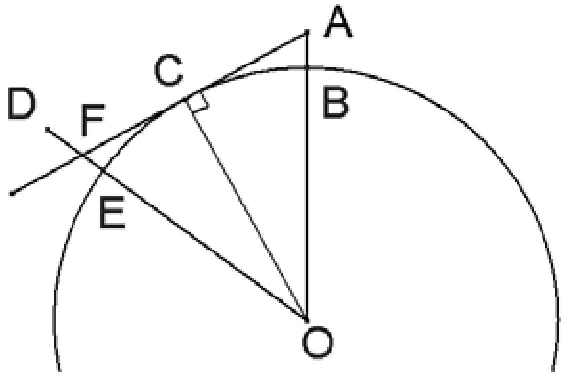



図 3.3.3　「富士山」問題の図

この課題に対するルーブリックは，以下の表の通りである．表の括弧内は評価の観点である．

表３.３.１「スカイツリー」問題の評価

| | 課題 1(数学的コミュニケーション) | 課題 2(パターンの探究) |
|---|---|---|
| 0 | 以下のいずれにも達していない | 以下のいずれにも達していない |
| 1-2 | ①と②のいずれかの山頂から富士山が見えるかどうかを考察しようとしている． | 課題 1 の解決過程を参照して，問題を解決しようとしている． |
| 3-4 | ①と②のいずれかの山頂から富士山が見えるかどうかを，図式化して，ある程度論理的に説明することができている． | 課題 1 の解決過程を参照したうえで，架空の山を自分で複数設定し，それぞれの山頂から富士山をみることができるか考察している． |
| 5-6 | ①と②の山頂から富士山が見えるかどうかを，適切に図式化し，論理的に説明することができている． | 課題 1 の山と自分で設定した山の解決過程を参照して，一般に，ある山の山頂から富士山を見ることができるかどうかは，数学的には何によって決まるのかを，文字を用いて示唆することができる． |
| 7-8 | | 課題 1 の山と自分で設定した山の解決過程を参照して，文字を適切に用いて解決できており，その文字と課題 1 の解決過程で用いた数値との関連を踏まえて記述することができる． |

ただし，本稿では紙面の都合上，課題 1 の生徒の反応についてのみ考察し，課題 2 については今後考察する．

この課題 1 では，具体的な数値が与えられているため，CF の長さが決まり，FE を求めることができる．実際に計算すると，①では FE≒2.03(km)，②では FE≒4.15(km)となり，①からは見えないが，②からは見えるという結論になる．ここでは，「スカイツリー」問題よりも複雑な構造を見抜き，論理的に説明できているかを問うた．同時に，事象を図式化することができるかという力を評価することをねらいの一つとした．これは，「スカイツリー」問題の探究においてねらいとしていたことが身についているかという評価になる．

### ３．３．２．課題１の実際

この課題に対する生徒の解答には，大きく分けて以下の 5 通りの解決方法があった．

解決方法 1

先に示したように，図３.３.３における FE を算出し，DE(3776m)と比較するというものである．

図式化だけでいえば，概ねルーブリックの「5-6」に相当する．

<u>解決方法 2</u>

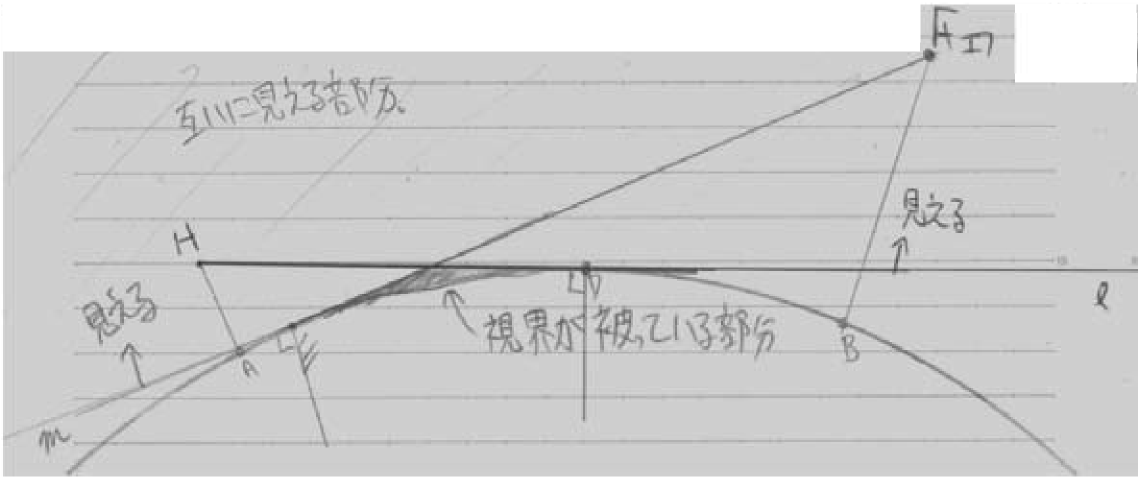



図 3.3.4　解決方法 2 の図

図 3.3.4 において，ある山から見える範囲と富士山から見える範囲が重なっていれば，ある山から地球への接線よりも富士山が上に出ているため，見ることができるというものである．そのために，ある山と富士山から見える範囲をそれぞれ算出し，その和が 2 つの山の距離よりも大きければ見ることができると結論づけている．

解決方法 1 とは視点が少し異なるが，図式化だけでいえば概ねルーブリックの「5-6」に相当する．

<u>解決方法 3</u>

図 3.3.5 において，点 A，B をそれぞれの山頂としながらも，点 A，P，B を一直線上にかいて解決している．このように解決している生徒のほとんどは，解決方法 2 と同様に計算をして見えるか否かの判断をしている．

この場合，計算から結論を出す過程が正しくとも，図式化が適切とは言えない．また，根拠の妥当性も保証されない．そのため，概ねルーブリックの「3-4」に相当する．

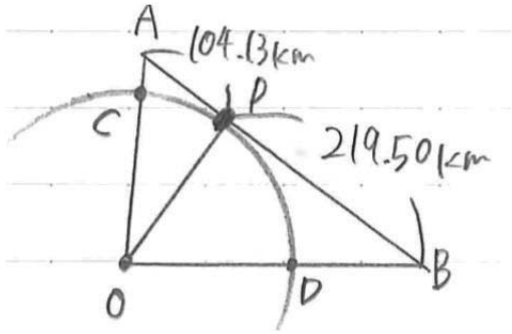



図 3.3.5　解決方法 3 の図

解決方法 4

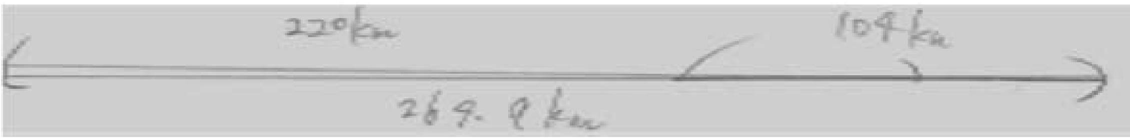



図 3.3.6　解決方法 4 の図（1）

図 3.3.6 や図 3.3.7 のような図を用いて，2 つの山から見える範囲が重なっていれば，富士山を見ることができるとしている．このようにして解決した生徒のほとんどは，その根拠を明確に示していない．そのため，概ねルーブリックの「3-4」に相当する．

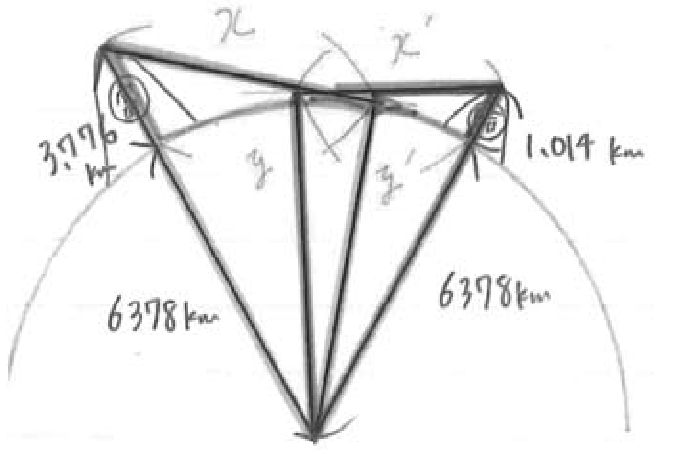



図 3.3.7　解決方法 4 の図（2）

解決方法 5

図 3.3.8 のような図を用いて，山頂 Q から接点 A までの範囲内にもう一方の山があるかどうかで，見えるか否かの判断をしている．すなわち，「スカイツリー」問題と同じ構造で考えているものである．このような解決方法の場合も，概ねルーブリックの「3-4」に相当する．

生徒のレポートでは，先の 5 つの方法のいずれかで図式化しており，全く図式化していない生徒は皆無であった．また，生徒がかいた図によって根拠の明確さに違いがでた．すなわち，解決方法1と2のような図をかいた生徒は，概ね根拠が明確であり，論理的に説明できていた．それに対し，解決方法 3 から 5 のような図をかいた生徒は，根拠の明確さや妥当性に欠けていた．

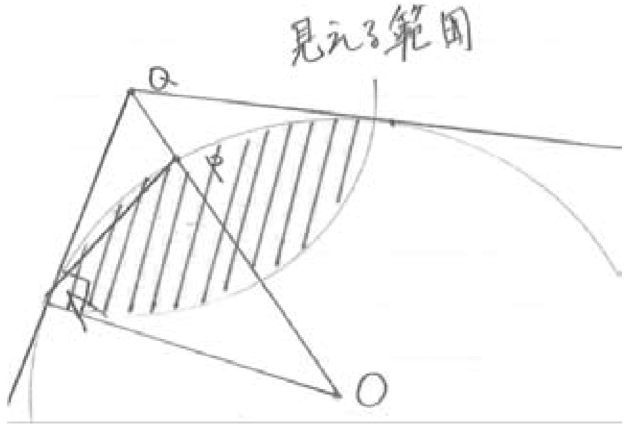



図 3.3.8　解決方法 5 の図

これらのことから，本レポート課題は,「スカイツリー」問題を授業で探究した後に，事象を図式化する力がどの程度養われているかという点と，複雑な構造を論理的に説明する力を評価するために適した課題であることがわかった．

### ３．４．数学４β（数学 A）

#### ３．４．１　評価問題および実施方法のねらい

MYP の評価方法は，事前に生徒に対して評価規準を示し，それを理解させたうえで課題を与え取り組ませ成果物を評価するという段階を踏む．そのため，レポート形式の課題を提示する

ことがありる．ここでは，レポート課題に生徒個人の学力がより適切に反映されることを目指した評価問題を例示する．

### ３．４．２　評価問題および実施方法

事前に授業で次の探究課題に取り組んだ．

探究 **3** 日本シリーズ，第6戦までいく確率は？

プロ野球の日本シリーズは第7戦まであり，それまでに4勝したチームが優勝となる。

この日本シリーズ第6戦のチケットを入手したこうぞうさんは，第6戦がないのではないかと心配している。日本シリーズで戦う2チームの実力がまったく互角であり，前の試合の結果は次の試合に影響しないと仮定するとき，第6戦がある確率はどれくらいだろうか。ただし，引き分けは考えないものとする。

**問1** A，Bの2チームで対戦するとき，4連勝してAチームが優勝する確率を求めなさい。

**問2** A，Bの2チームで対戦するとき，4勝1敗でAチームが優勝する確率を求めなさい。

**問3** 次のような勝敗でどちらかのチームが優勝する確率をそれぞれ求めなさい。また，第6戦がある確率を求めなさい。

(1) 4勝
(2) 4勝1敗
(3) 4勝2敗
(4) 4勝3敗

**問4** こうぞうさんは，1950年から2007年までの58回の日本シリーズについて，勝敗と試合数を調べた。それぞれの相対度数を求め，**問3**の結果と比較しなさい。

| 勝敗 | 試合数 |
|---|---|
| 4勝 | 7 |
| 4勝1敗 | 15 |
| 4勝2敗 | 18 |
| 4勝3敗 | 18 |

その上で，評価問題として次のような探究課題に取り組ませた．

実施日:平成25年6月18日(火)4校時
解答時間:40分
使用するもの:筆記用具, 電卓, TGUISS 数学3のテキスト, 授業ノート, 教科書(数学A)

探究課題 プロ野球の日本シリーズは, 野球界最大のイベントなので, その前には様々なメディアで野球評論家がそれぞれ予想を述べる. 例えば, "F,G 両方のチームの戦力を比較すると 6:4 ぐらいである"などの予想が聞かれる. これは, F チームと G チームが 1 試合対戦したとき F チームが確率 0.6 で勝つだろう, G チームは確率 0.4 で勝つだろうということを意味している. 以降, この確率を勝率と呼ぶことにする. ところで, 勝率と優勝する確率は同じなのだろうか. 日本シリーズは優勝するまでに何試合行われると見込まれるのだろうか. F チームと G チームが日本シリーズを戦うとするとき, 次の問いに答えなさい. ただし, 前の試合結果は次の試合に影響しないものとし, 引き分けは考えないものとする.

問1 F チームの勝率が X であるとき, F チームが優勝する確率を P (X)とする. F チームの勝率を 0.6 とするとき, F チームが優勝する確率 P (0.6)を求め, 勝率と優勝する確率は同じか確かめなさい. また, P (X)を表す式を導きなさい. さらに, F チームの勝率と, F チームが優勝する確率との差が一番大きくなるのは F チームの勝率がおよそいくつのときか調べなさい. 〈規準 A, B, C〉

次の問2は宿題です(問1が終わった人は取り組んでもかまいません). この探究課題の振り返り(問 1, 問 2 を含めて)〈規準D〉も行い, 6月25日(火)の4校時に提出すること.

問2 Fチームの勝率を 0.6 とするとき, どちらかのチームが優勝するまでにどれくらいの試合数が見込まれるか(期待値)求めなさい. また F チームの勝率が変わると, この優勝するまでに見込まれる試合数はどのように変化するかを考察しなさい. 〈規準 A, B, C〉

この課題の問 1 はテストとして授業の 40 分を使い, 教科書やノート等を持ち込んでよいということでおこなった. その上で, 問 2 は 1 週間後を提出日とした自宅等で取り組める課題とした.

この課題の評価規準は次のようにした. 規準 A で測る内容は生徒が一番先に取り組む内容なので, ここに焦点を絞るため規準 A のみを記載する.

規準 A　Knowledge and Understanding

| | ISS4 Descriptors | 確率＜探究課題＞知識と理解 | |
|---|---|---|---|
| 0 | 以下の説明で記述されるいずれの基準にも達しない. | 以下の説明で記述されるいずれの基準にも達しない. | |
| 1-2 | 馴染みのある文脈で，簡単な問題解決をする際に演繹的な推論しようとする. | P（0.6），および，優勝するまでに見込まれる試合数（期待値）を求めようとしている. | |
| 3-4 | 馴染みのある文脈で，簡単なあるいは多少複雑な問題解決をする際に適切な演繹的な推論が出来ることがある. | P（0.6），および，優勝するまでに見込まれる試合数（期待値）を概ね求められている. | |
| 5-6 | 様々な馴染みのある文脈で，挑戦しがいのある問題解決をする際に適切な演繹的な推論が概ね出来る. | P（0.6）を求め，正しく比較できている．または，優勝するまでに見込まれる試合数（期待値）を求められている. | |
| 7-8 | 馴染みのない状況を含む，様々な文脈で，挑戦しがいのある問題解決をする際に一貫して適切な演繹的な推論が出来る. | P（0.6）を求め，正しく比較できている．さらに，優勝するまでに見込まれる試合数（期待値）を求められている. | |

### ３．４．３　評価とその考察

規準 A による評価は次の表のようになった.

| 評価 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 2 | 1 | 10 | 7 | 4 | 47 | 27 | 6 | 20 |

ここで，注目すべきところは評価５が 47 人もいることである．評価５は，問１では「F チームが優勝する確率」についてほとんど手が付いていないか考え方が全く違うかであったが，問２では「どちらかのチームが優勝するまでにどれくらいの試合数が見込まれるか（期待値）」が正確に求められた生徒である.

問 2 の「どちらかのチームが優勝するまでにどれくらいの試合数が見込まれるか（期待値）」を解くには，問１の「F チームが優勝する確率」が求められることが必要である．教科書やノート等を持ち込んでよいテストで「F チームが優勝する確率」を求められなかった47人の生徒全員が1週間でそれを求められるようになり，さらに「期待値」まで求められるようになった背景には，本人たちによる見直しの努力に加えて，何らかの形で他からの援助があった可能性も考えられる.

### ３．４．４　まとめ

上で述べたように，生徒が授業時間外で取り組んだ場合などは何らかの形で他からの援助を受ける可能性は否定できない．というより，わからないことをわかるようになるために他からの援助を受けることはある意味当然である．今回の評価問題では，難易度は高いが他からの援助が受けられる状況にある問2は，多くの生徒が正しく求められることを前提にし，問1によって差がつくように評価規準を作成した．上の評価規準の表でいえば評価5から8の生徒がそれに当たる．今後も，この点に留意し工夫しながら，評価問題を作成し実施していきたい.

## ３．５．数学５α

### ３．５．１．探究課題について

（１）単元　三角関数

（２）学習内容　三角関数の合成

（３）課題学習「正弦波の倍音を関数グラフ電卓で合成して楽器の音の波形を作成してみよう」

（４）課題の目的

この課題は三角関数の合成を学習するにあたって，三角関数の正弦波が日常事象である音とどのように関わりがあるのか，特に楽器の音色に注目させ，楽器の音色の波形と近似する波形の作成を試みさせる中で，正弦曲線の合成の特徴をつかませる．また楽器の波形の複雑さと音色の関わりを数学的に学習することで，音色を別な視点から味わわせ，数学が自然の仕組みを知る媒介となる役割を持てることを多少なりとも実感してもらうことが目的である．

### ３．５．２．実践内容

（１）　指導計画と指導目標

| 全２時間 | 指導内容 | 指導目標 |
|---|---|---|
| １時間目 | ＜音のしくみや倍音，課題について知る＞<br>・音の伝わり方について知る<br>・音の大きさ，高さと音の伝わり方の関係を知る<br>・　基音と倍音について知る<br>・倍音の合成について知る<br>・　課題を知る | ①　音と倍音の関係に興味・関心を持たせる．<br>②　音の要素，音の伝わり方，音圧曲線について理解させる．<br>③　基音と倍音，倍音の合成について理解させる．<br>④　課題をしっかり理解させる．<br>⑤　課題に興味関心を持たせる． |
| （授業外） | （生徒が各自で課題に取り組む） | |
| ２時間目 | ＜課題のまとめ＞<br>・　生徒の課題の取組みにある正弦波の合成式とグラフの特徴についての気づきを共有し，実際関数グラフ電卓で確かめさせる．<br>・　生徒の作成した合成式の中で楽器の波形の近いものを紹介し，実際グラフ電卓で確かめさせるとともに，楽器の音色の波形の複雑さを味わわせる | ①　正弦波の合成式とグラフの関係について興味関心を持たせる．<br>②　正弦波の合成式とグラフの関係について，その特徴を実際確かめさせることで理解を深めさせ，味わわせる．<br>③　楽器の波形に近い合成式を関数グラフ電卓で確かめさせ，楽器の波形に近似する式づくりの難しさと単音とは違う楽器の音色の複雑さ，微細さを味わわせる． |

（２）　課題に取り組ませるための指導の工夫

①　音についての基礎知識を物理で学習しているが，再度，音の仕組みと正弦曲線の関わりを復習させる．特に以下の内容について扱う．

・音の伝わり方と，音の伝わる様子と音圧曲線の関係

・音の大きさ・高さと音圧曲線の関係

・基音と倍音の違い　例）$y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=\sin 3x$，$y=\sin 4x$　…

・倍音の合成　例）$y = \sin x + \sin 2x$

②　基音の音とは実際どのような音か，パソコンを利用して音の波形が $y = \sin x$　で表される音を聞かせることで，楽器の音色とは全く違うことを理解させる．

（３）　提示資料　　　以下の４つの楽器の音の波形（小林）を例として挙げた．

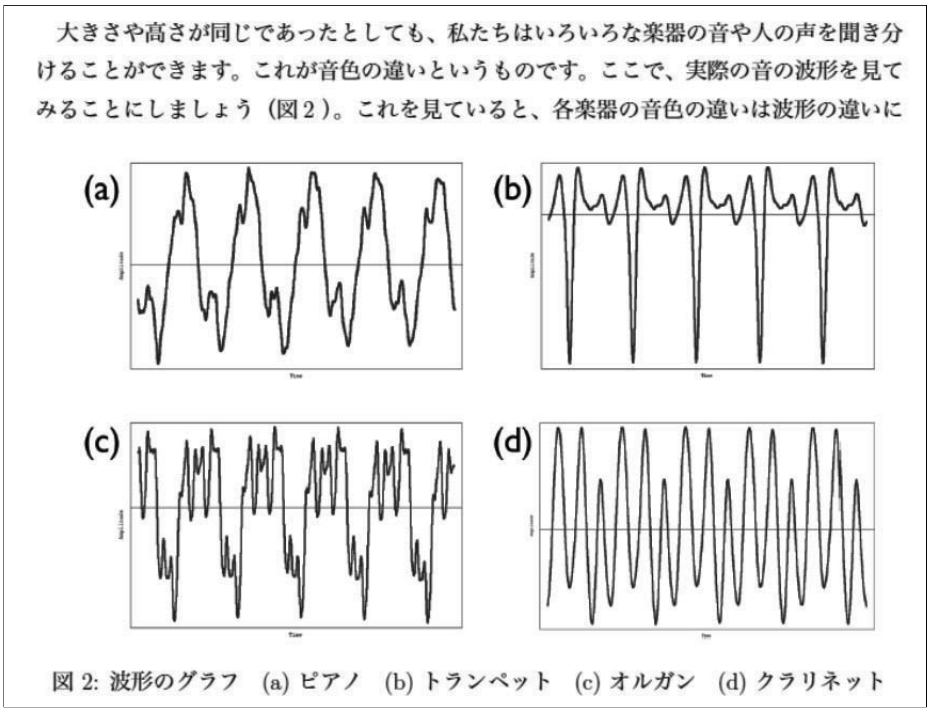

大きさや高さが同じであったとしても、私たちはいろいろな楽器の音や人の声を聞き分けることができます。これが音色の違いというものです。ここで、実際の音の波形を見てみることにしましょう（図２）。これを見ていると、各楽器の音色の違いは波形の違いに



図 2: 波形のグラフ　(a) ピアノ　(b) トランペット　(c) オルガン　(d) クラリネット

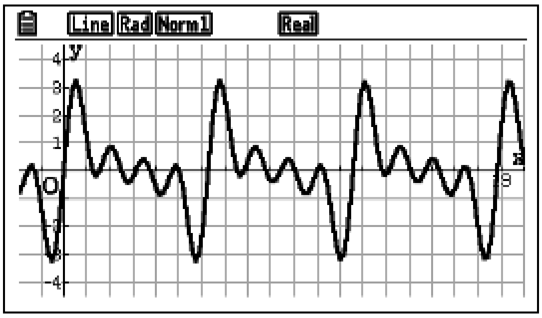
（４）　ワークシート

関数グラフ電卓では，スクリーンの画像をプリントアウトすることができないので，作成した式とそのグラフは簡易のワークシートに気づいたことや感想とともに記録してもらうことにした．

（５）　生徒の課題の取組み結果

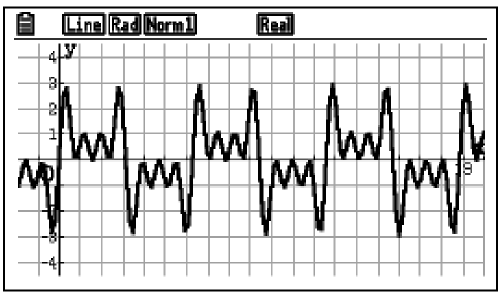
①　生徒が挙げていた正弦波の合成の特徴の主な例

$y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$



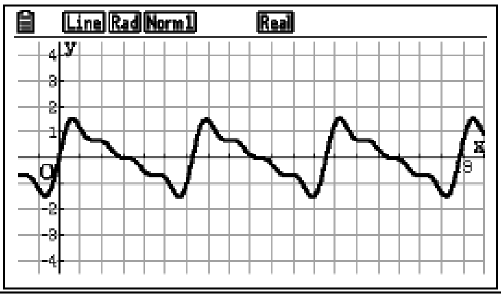

1 周期の中に波が 4 つ現れる．さらに $\sin ax$ （$a$ は自然数）の足していく個数を増やすと
1 周期の中の波の数が増える．

$y = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$



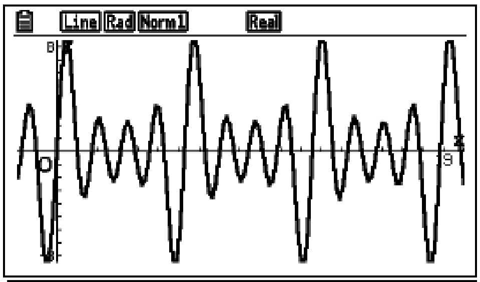

$\sin ax$ の $a$ を正の奇数のみで足すと波形が $x$ 軸の上下に交互に出る．さらに $\sin ax$ を増やすと 1 周期の中の波の数が増える．

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x$$



のこぎり波に近い形がでてくる.

$$y=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+4\sin 4x$$

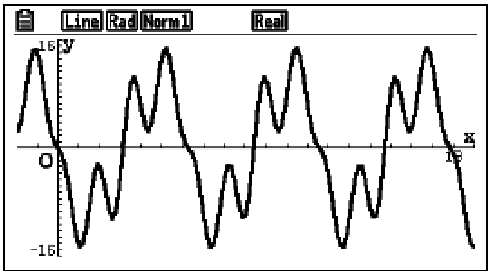


振幅幅が大きくなり，楽器の波形の振幅に近い形が出てくる.

② 楽器の波形に近似している式とグラフ

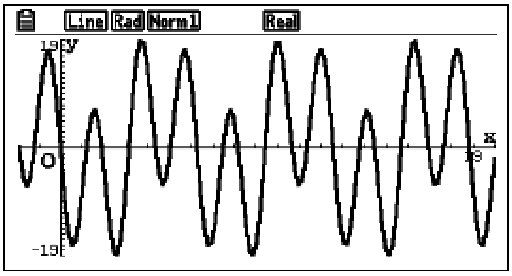
生徒 A の作品　【ピアノの波形】

$$y=-11\sin x-2\sin 2x-3\sin 3x+5\sin 4x$$



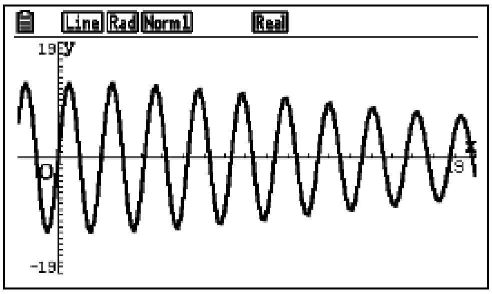
【クラリネットの波形】

$$y=-8\sin x+\sin 2x-15\sin 3x$$



【その他　気づいた特徴のある波形】

$$y=10\sin 3x+3\sin \pi x$$

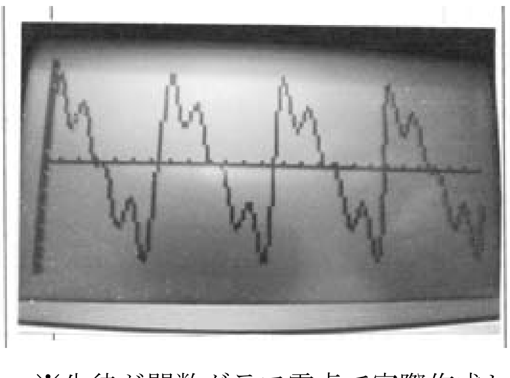


【生徒 A の取組み感想】→

どんどん式をたくさん書いてみると，何となく法則が見えてきた。それは"y＝asinx－bsin2x＋csin3x…"といったような式のとき，"　"この形に何回も波が出来る。つまり，"y＝sinx－sin2x＋sin3x"：　という形になる。逆に"y＝－sinx＋sin2x－sin3x"：　という形になることがわかった。少なくしたら波の数も減る。またπを使うと，面白い形が出来ることもわかった。
しかし，どれだけ式をいじっても，元の楽器の波形に近づけるのはとても難しかった。でも類似の形が出来て良かった。しかし完ぺキではないのが少しくやしい。

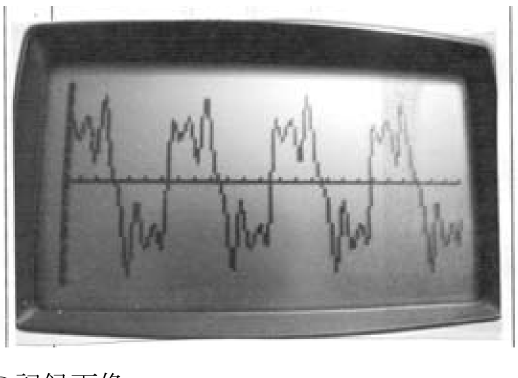
生徒 B の作品　【ピアノの波形】

$$y=15\sin x+5\sin 3x+5\sin 2x+6\sin 4x$$



【オルガンの波形】

$$y=16\sin x+6\sin 3x+6\sin 6x+\sin 9x$$



※生徒が関数グラフ電卓で実際作成したグラフの記録画像

【生徒 B の取り組み感想】

楽器の音の波形を作るのは
難しかったです。長時間かけてグラフ
を作成しましたが，あまり本物のグラフに
似せることはできませんでした。
sin ax の a の値を大きくすると
ギザギザしたグラフになることが
わかりました。

③　その他の生徒の感想例

1）生徒 C

合成した式は不規則に見えて規則的な形
をしていたり，式からは想像できない規則性をもって
いてとても面白かった。数字のパターンを見つ
けてそれを確認していたらより科学的な側面
に触れた気がする。

2）生徒 D

表で紹介されていた楽器の波形に
近付けようと思ったものの，式からグラフの形
を推測するのが難しかった。結果，あまり
おもしろい波形を表現できず，全て同じ
ようなギザギザした波になってしまった。
ただ，このギザギザとした中にもなんと
なく規則性が見える気がする。その
独特の規則性があるから，不快な音
ではないのか，それとも不快な音なのか
式と波形に加え音の関係も見えてきたら
よりおもしろいと思った。
また，楽器をやってきたものとしては，改めて，
各楽器の奏でる音の複雑さ（倍音の重なり
合い）に触れることができた。ひとつの楽器で
吹き方・弾き方でどう波形が異なるかも気に
なった（プロ・アマの違いも）

### ３．５．３．最後に

初めての試みで，授業者自身が音についてまず物理学的な理解を深める必要があった．またその中で授業に適した音の波形を示す，シンセサイザー関係の PC アプリケーションソフトや音声データ，資料などを探すのが難しかった．またこの課題に関しては，実際，音をサンプリングして波形で示したりなどできたらもっとおもしろいと思う．またフーリエ級数など音に関する数学への発展も考えられる.まだまだ課題をよりよくしていける可能性があるので，回を重ねるたびに改良していきたい．

## ３．６．数学６$\alpha\beta$（数学Ⅲ）

### ３．６．１．授業のねらい

現代は，情報社会であると言われ，情報端末さえあれば必要な情報を好きなときに取りだして利用することができる．今回の授業では，現実の課題を解決するにあたり，適当な機器を用いて必要な情報をインターネットなどから検索し，その計算過程においてはグラフ電卓やパソコン（表計算ソフト）などを積極的に利用する．

その問題解決の延長線上にあるネイピア数と呼ばれる数 $e$ を数表で与えるのではなく，実際にベルヌーイの定義を用いて計算することにより，無理数 $e$ を身近な数と感じられるようにする．

### ３．６．２．授業の実際

（1）探究課題

**”年利率5％で1万円を金融機関に預けたときの 20 年後の元利合計を求めてみよう”**

問1　単元「数列」で学んだように，利率の計算方法には単利法と複利法がある．この金利の仕組みを

インターネットなどを用いて調べ，それぞれの計算結果の違いを比較してみよう．

① 単利法と複利法についての調査結果

定期預金やローン計算などの利息を計算するときには，複利法を使う．元金に利率を掛けた結果が利息になるが，単利法で利息を計算する場合と複利法で利息を計算する場合は，期間が複数に渡る場合には利息の額が異なってくる．

単利法…元金に期間数と利率を掛けたものが利息になる

複利法…期間毎に元金と利息の合計に利率が掛かかったものが次の利息になる

定期預金で 10,000 円を 3 年預けた場合を年利率 1%として計算すると以下のようになった．

単利法…$10000 + 10000 \times 0.01 \times 3 \rightarrow 10{,}300$（円）

複利法…$10000 \times (1 + 0.01) \times (1 + 0.01) \times (1 + 0.01) \rightarrow 10{,}303$（円）

単利法と複利法ではこのように差がでることと，通常の利息の計算は複利法で計算することがわかった．

② この課題についての単利法と複利法による計算結果

単利法 $10000 + 10000 \times 0.05 \times 20 = 20{,}000$(円)

複利法 $10000 \times (1 + 0.05)^{20} = 26{,}532$(円)

同じ利率なら複利の方が多い？

問２ 単元「数列」で学んだように，預金と借金での計算方法に基本的な違いはない．複利法による計算方法を詳しく調べ，問１の計算結果を見直しなさい．そして，年利率 5%で 1 万円を金融機関に預けたときの 20 年後の元利合計を求めなさい．

① 通常利息に使われる複利法についての調査結果

通常利息に使われる年利率(年率あるいは年利)は，1年における利率を示している．しかし，月で返済するようなローンや，日で返済するようなローンなどの場合は，1 月の利率(月率)，あるいは1日の利率(日率)を求める必要がある．さらに，複利を使った定期預金でも，半年複利のものもあり，ローンでもボーナス払いを別に用意しているものもある．その場合には，半年の利率が利息計算に使われることになる．

半年の利率→ 年率を 2 で割ればよい

月率 → 年率を 12 で割ればよい

日率 → 年率を 365(366)で割ればよい

② 利率をかける期間が分かれた複利法のエクセルによる計算結果の見直し

・通常の複利 $10000(1 + 0.05)^{20} \fallingdotseq 26533$（円）

・半年率の複利

$$10000\left\{\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2}\right\}^{20} \fallingdotseq 26850 \text{（円）}$$

・月率の複利

$$10000\left\{\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12}\right\}^{20} \fallingdotseq 27126 \text{（円）}$$

・日率の複利

$$10000\left\{\left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365}\right\}^{20} \fallingdotseq 27180 \text{（円）}$$

複利でも期間を分けた方が多い？

問３　問２では，複利法の利率をかける期間をいくつかに分割して計算する方法を学んだ．利率をかける期間を $x$ 分割したと考え，問２で求めた式を $x$ で表しなさい．また，その式をできるだけ整理した形にしなさい．

・整理した式（単位を万円として）

$$\left(1+\frac{0.05}{x}\right)^{20x}=\left(1+\frac{1}{20x}\right)^{20x}$$

問４　複利法の計算において，利率をかける期間を分割した場合，計算結果はどうなるか考察しなさい．

・通常の複利

$$\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}=2.653297705$$

・半年率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 2}\right)^{20\times 2}=2.685063838$$

・月率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 12}\right)^{20\times 12}=2.712640285$$

・日率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 365}\right)^{20\times 365}=2.718095668$$

分割数をもっと増やしてみると

・時率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 365\times 24}\right)^{20\times 365\times 24}=2.718274071$$

・分率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 365\times 24\times 60}\right)^{20\times 365\times 24\times 60}=2.718281699$$

・秒率の複利

$$\left(1+\frac{1}{20\times 365\times 24\times 60\times 60}\right)^{20\times 365\times 24\times 60\times 60}=2.71828168$$

･･･減った？

<u>これ以上増えそうもないことが予想される．（表計算ソフトによる計算の限界？）</u>

（２）『数学Ⅲ』の内容から自然対数の底 $e$ の存在確認を行う．

・ｎ→∞のときの，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ の極限について，$\frac{1}{n}=t$ とおくと

n→∞のときt→0だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

t→0のときの$(1+t)^{\frac{1}{t}}$の極限を調べさせる.

| t | $\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}$ | t | $\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.59374246 | −0.1 | 2.867971991 |
| 0.01 | 2.704813829 | −0.01 | 2.731999026 |
| 0.001 | 2.716923932 | −0.001 | 2.719642216 |
| 0.0001 | 2.718145927 | −0.0001 | 2.718417755 |
| 0.00001 | 2.718268237 | −0.00001 | 2.718295420 |
| 0.000001 | 2.718280469 | −0.000001 | 2.718283188 |
| 0.0000001 | 2.718281694 | −0.0000001 | 2.718281963 |
| 0.00000001 | 2.718281786 | −0.00000001 | 2.718281852 |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |

上の表から予想されるように，t→0のとき，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は極限値をもちそうである.

この極限値を $e$ （ネイピア数）と表す.

$e$ ＝2.718281828459045‥‥‥　としてt→0のとき　$(1+t)^{\frac{1}{t}}\to e$ となる.

複利法において,利率をかける期間を分けると,元利合計は限りなく $e$ 万円に近づく.

**３．６．３．授業中の生徒の反応**

授業開始当初，内容が数学Ｂ「数列」や家庭科の既習事項であることで，問１の単利法と複利法の違いのあたりでは新しさが感じられず多少の戸惑いが見られる生徒もいた．しかし，問２の複利法の種類あたりになると，生徒は，金額の変化に目を輝かせながら各計算を行うようになった.

授業の中盤，計算式の整理にさしかかると，一部の生徒が式の形に気づき始め，”これは $e$ だ”，”ネイピア数だ”，” $e$ ってネイピアが求めた数じゃないの？”というような声が聞こえるようになり，”ネイピアって銀行家だったの？”と言い出す生徒もいた.

**３．６．４．今後の課題**

高校3年生ともなるとクラスの生徒の学習進度にかなりの個人差があり，すでに「数学Ⅲ」を一通り終えてしまっている生徒も数名存在している．このような現実からすると，教科書の内容に関連する知識を利用するのも生徒の興味や関心を得る一つの策であろう.

今回の授業では，生徒が携帯しているグラフ電卓などの情報端末をできるだけ利用させ，情報収集と計算をさせたが，生徒の中にはスマートフォンや表計算ソフト付きのタブレットを利用して，即座に各利息計算をしてしまった者も存在した．その反面，生徒のもつ情報端末とその機能にかなりの差があり，学習過程の”生徒の気づき”に不公平感が生じてしまった.

しかし，情報端末の形態や機能の発達がこのまま続けば，授業中に必要な知識の獲得や複雑

な計算をするのに学校が用意した電卓やパソコンを利用するのではなく，携帯している情報端末で済ませることができる生徒の割合は年々増加するはずである．

よって，このように生徒が携帯できる情報端末で現実場面の問題解決と数学の授業内容とを結びつけることができる課題の研究を今後も継続していく．

## ４．おわりに

本稿では，「実施されたカリキュラム」レベルからみた本校数学科の取組，即ち数学的リテラシーの育成を目指す学習指導および学習評価の実際を示した．今後も，本校数学科の取組を評価・改善していくために，「実施されたカリキュラム」レベルからの検討が欠かせない．

一方で，今後さらに本校数学科の取組を評価・改善していくためには，「達成されたカリキュラム」レベルからの検討が必要不可欠である．そもそも生徒がどのような状態になっていれば, どのような知識や技能, 能力を有していれば数学的リテラシーが育成されていると言えて，それはどのように評価することが適切であるのか．この点に関してはまだまだ議論の余地があると考えられる．今後さらに研究を進め，数学的リテラシーを育成する学習指導のあり方を追究していく必要がある．

## 註

本稿における各章・節の執筆担当者は次のとおりである．

内野浩子（3.5 節），小林廉（1 章・2 章・4 章），指田昭樹（3.4 節），高橋広明（3.1 節）

成田慎之介（3.3 節），鳴海文彦（3.2 節），福井正之（3.6 節）

## 引用参考文献

内野浩子　小林廉　指田昭樹　高橋広明　福井正之　本田千春（2012）「数学科」．国際中等研究紀要．第 5 号．pp.23-43

内野浩子・小林廉・指田昭樹・高橋広明・成田慎之介・福井正之・本田千春．2013．「数学的リテラシーを育む授業の創造－公開研究会の報告を兼ねて－」．国際中等研究紀要．第 6 号．pp.23-43

小林亮．音の波と三角関数．www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/KOUKAI/text-h18/sound.pdf

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会.2010～2013.TGUISS 数学 1～4.正進社.

（参考資料１）単元・領域と学年配当（2014 年度から）

<table>
<tr><th>学年</th><th>領域<br>科目名</th><th>代数・関数</th><th>幾何・三角法</th><th>確率・統計</th><th>離散数学</th><th>時数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1年</td><td rowspan="2">数学１</td><td>数の見方</td><td rowspan="2">図形の見方</td><td rowspan="2">データの分析</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>事象の見方</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2年</td><td rowspan="2">数学２</td><td rowspan="2">一次関数と方程式</td><td>平行と相似</td><td rowspan="2">相関と回帰</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>図形の論証</td></tr>
<tr><td>3年</td><td>数学３</td><td>いろいろな関数と<br>グラフ</td><td>三平方の定理と<br>三角比</td><td></td><td>数え上げ</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4年</td><td rowspan="2">数学４α</td><td>指数関数と<br>対数関数</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">統計基礎</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>方程式と不等式</td></tr>
<tr><td>数学４β</td><td>整数の性質</td><td></td><td>確率</td><td>数列</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">5年</td><td rowspan="2">数学５α</td><td>三角関数</td><td rowspan="2">図形と方程式</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>微分・積分の考え</td></tr>
<tr><td rowspan="3">数学５β</td><td rowspan="3"></td><td>ベクトル</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>複素数平面</td></tr>
<tr><td>２次曲線</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6年</td><td>数学６</td><td>関数と極限<br>微分法<br>積分法</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>国際教養</td><td></td><td></td><td>統計</td><td>グラフ理論</td><td>1</td></tr>
</table>

（参考資料２）単元の学年配当と主な学習内容（2014 年度から）

| 学年 | 科目 | 時数 | 単元名 | 主な学習内容 |
|---|---|---|---|---|
| 1年 | 数学1 | 4 | 数の見方 | 約数，倍数，素数，素因数，最小公倍数，最大公約数，負の数とその計算 |
| | | | 事象の見方 | グラフ，ことばの式　，文字の式，一次方程式 |
| | | | 図形の見方 | 投影図，回転体，空間における直線や平面の位置関係，多面体，正多面体，柱体，錐体，球の表面積と体積，扇形の弧の長さと面積，展開図 |
| | | | データの分析 | 幹葉図，散布図，ヒストグラム，代表値（中央値・平均値・最頻値），箱ひげ図 |
| 2年 | 数学2 | 4 | 一次関数と方程式 | 一次関数，連立方程式，一次不等式 |
| | | | 平行と相似 | 平行線と角，平行四辺形の性質，合同な図形，相似な図形，作図 |
| | | | 図形の論証 | 証明のしくみ，三角形の合同条件，三角形の相似条件，直角三角形の合同条件，中点連結定理，平行線と比，重心，平行四辺形になるための条件，円周角の定理，円周角の定理の逆，円に内接する四角形の性質，接弦定理，方べきの定理 |
| | | | 相関と回帰 | 相関，相関図，メジアンーメジアン直線 |
| 3年 | 数学3 | 4 | 三平方の定理と三角比 | 三平方の定理，平方根，立方根，三角比，正弦定理，余弦定理 |
| | | | いろいろな関数とグラフ | $y=ax^2, y=ax^3, y=\frac{a}{x}, y=\frac{a}{x^2}$，偶関数・奇関数，平行移動したグラフの式，関数の和と積，2 次関数 2 次方程式 |
| | | | 数え上げ | 集合とその要素の個数，場合の数，順列，組合せ |
| 4年 ※2 | 数学4 α | 3 | 指数関数と対数関数 | 指数関数，$n$ 乗根，有理数と無理数, |
| | | | 方程式と不等式 | 整式の除法，2 次方程式・2 次不等式，複素数，鳩の巣原理，背理法，論証と命題，等式の証明，不等式の証明, |
| | | | 統計基礎 | 全数調査と標本調査，分布，分散と標準偏差，共分散，相関係数 |
| | 数学4 β | 2 | 確率 | 確率とその基本的な性質，期待値，独立試行の確率，反復試行の確率，条件付き確率，確率の乗法定理 |
| | | | 整数の性質 | 除法の性質，剰余類，ユークリッドの互除法，不定方程式，記数法 |
| | | | 数列 | 漸化式，数列の一般項と和，数学的帰納法 |
| 5年 ※2 | 数学5 α | 4 | 図形と方程式 | 点と直線，円，軌跡と領域，２次曲線 |
| | | | 三角関数 | 一般角，弧度法，三角関数のグラフ，三角関数の加法定理 |
| | | | 微分と積分の考え | 微分係数，導関数，導関数の応用，不定積分，定積分，定積分と面積 |
| | 数学5 β | 2 | ベクトル | ベクトルの演算，ベクトルの成分，ベクトルの内積，位置ベクトル，ベクトル方程式 |
| | | | 複素数平面 | 複素数平面，極形式，ド・モアブルの定理，図形への応用 |
| | | | 2 次曲線 | 放物線，楕円，双曲線，媒介変数，極座標，極方程式 |
| 6年 ※2 ※4 | 数学6 | 5 | 微分法・積分法 | 極限，微分法，積分法，簡単な微分方程式 |
| | 国際教養 | 1 | 統計※3 | 分布，推定，検定 |
| | | | グラフ理論※3 | グラフ表現，オイラー路・閉路，グラフの彩色，有向グラフ，最適なネットワーク |

※1　本校独自のカリキュラムであるため，学習内容が，学習指導要領上の当該学年とは異なる場合があります。
※2　４年生以降の科目（国際教養を除く）では習熟度別クラス編成を行っています。
※3　年度によって「統計」と「グラフ理論」のどちらか一方のみ開講とすることがあります。
※4　6 年次には，学習指導要領上の名称でいう数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bの学習を深める科目も開講しています。

Abstract
With the aim of developing mathematical literacy, the TGUISS mathematics department has developed an original curriculum and textbook while practicing teaching and assessment based on the MYP Mathematics framework. This article reports on our initiatives for developing mathematical

literacy from the viewpoint of "implemented curriculum." This is accomplished by showing the practice of teaching and assessment from the 1st to 6th grade and gaining insight on the development of mathematical literacy from actual cases. Although such consideration at the level of "implemented curriculum" will remain essential, consideration at the level of "achieved curriculum" will also be required if we are to evaluate and improve our initiatives.