東京学芸大学附属高等学校紀要　50　pp.25～34, 2012

センター試験誘導電流の分析

～誘導電流は本当にそう流れるか～

Analysis of the induced current problem in the 2012 National Center Test for University Admissions

— Does the flow really occur in the way it is shown in the question? —

物理科　　川　角　　博

＜要約＞

2012 年度センター試験第 2 問 A　問 2 は，電磁誘導の典型的な問題にみえる。しかし，問題のための実験風な問題となっているだけに，誘導起電力ではなく誘導電流を扱う危うさが気になる。物理Ⅱの水準で，この問題を解くと，選択肢とは似ても似つかぬ正解の姿が見えてくる。回路の微分方程式の数値解から，本当の電流の様子を示してみた。解答の矩形波に近づく条件は、r/L が非常に大きいこと、領域Ⅱ通過時間が十分あることでコイルに流れる電流がすべてジュール熱になって失われることである。この条件下で、現象は解答に近づく。

＜キーワード＞　センター試験　　電磁誘導　　誘導電流　　自己インダクタンス　　抵抗

1．はじめに

ここで分析しようとしている問題を，図 1 に示す。

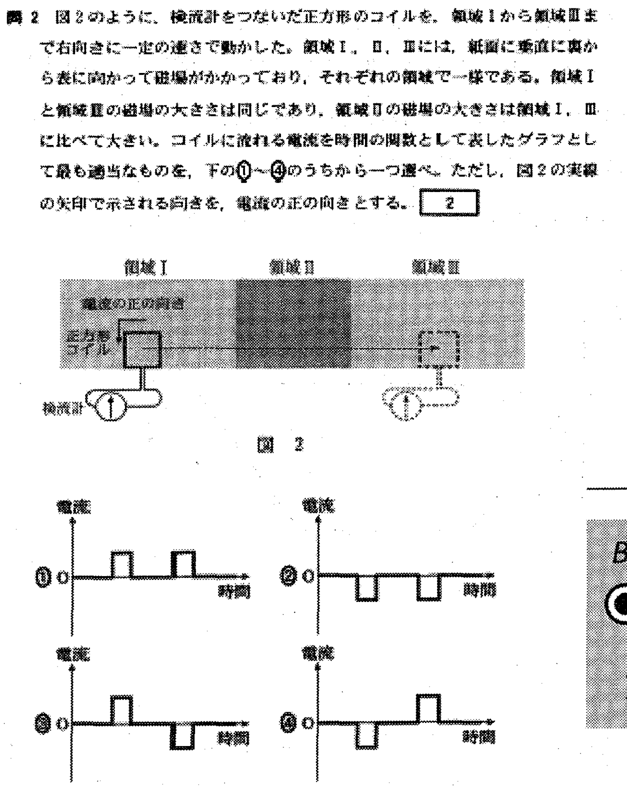

問 2　図 2 のように，検流計をつないだ正方形のコイルを，領域Ⅰから領域Ⅲまで右向きに一定の速さで動かした。領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲには，紙面に垂直に裏から表に向かって磁場がかかっており，それぞれの領域で一様である。領域Ⅰと領域Ⅲの磁場の大きさは同じであり，領域Ⅱの磁場の大きさは領域Ⅰ，Ⅲに比べて大きい。コイルに流れる電流を時間の関数として表したグラフとして最も適当なものを，下の①～④のうちから一つ選べ。ただし，図 2 の実線の矢印で示される向きを，電流の正の向きとする。 2

図 1

2012 年度センター試験物理Ⅰ第 2 問　A 問 2 は，電磁誘導を検流計で見ているところに困難さ，危うさを感じた。電圧計の測定結果をグラフにするならあれでよいのかもしれないが，電流を流すとコイルの自己インダクタンスが気になる。この問題を，そのまま物理Ⅱの記述問題としたとき，あれでよいのか気になるところである。そこで，回路電流を表す微分方程式を具体的な数値解で解くことにした。

まずは、微分方程式を示し、その解析解を求める。

2．回路に抵抗が無い場合の誘導電流

物理の問題では，導線や検流計は理想的に抵抗が無いものとして扱う。この問題の場合は，まさにそのような回路になる。すると，誘導電流を制限するものがなくなってしまうので，自己インダクタンスを無視できなくなる。

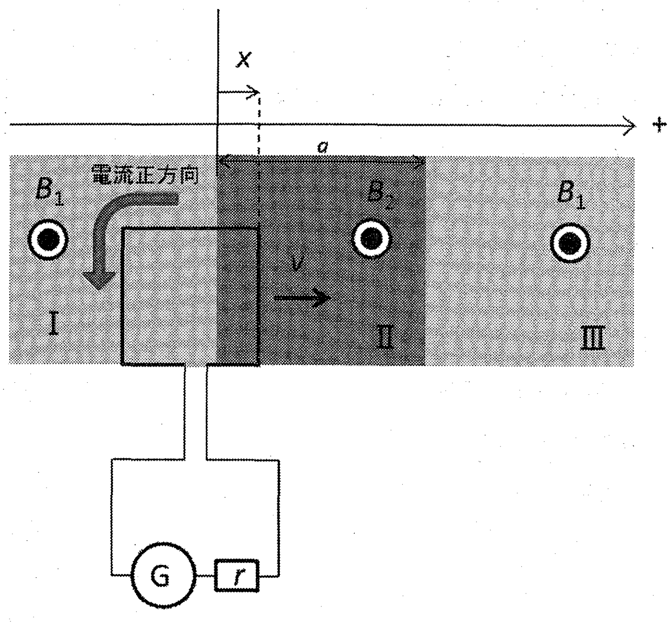


図 2

図 2 のように、電流、電圧は、反時計回りを正の向きとして解くことにする。コイルは一辺 ℓ の正方形、領域Ⅰ，

Ⅲの磁束密度を B_1、領域Ⅱの磁束密度を B_2（$>B_1$）とする。領域ⅠとⅡの境界を原点とし、領域Ⅲに向かって x 軸を取り、コイルの座標は進行方向一番前方にあり、領域境界線と平行な導線の位置とする。

抵抗がない場合を考えるので、ここでは $r=0$ である。

(1) コイルが領域ⅠからⅡに向かうとき

コイルが領域ⅠからⅡに向かうとき，誘導起電力 Vは

$$V=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d\left(xl\left(B_2-B_1\right)\right)}{dt}=-\frac{dx}{dt}l\left(B_2-B_1\right)$$

この起電力により，コイルに電流 i が流れると，自己誘導起電力 V_s が生じる。コイルの自己インダクタンスを Lとすると、

$$V_s=-L\frac{di}{dt}$$

キルヒホフの法則より，回路の抵抗は0なので、

$$-\frac{dx}{dt}l\left(B_2-B_1\right)-L\frac{di}{dt}=0$$

$t=0$で、$i=0$なので、コイルが領域Ⅱに進入開始から完全に入り終わるまでの$0\leqq t\leqq\frac{l}{v}$では、

$$i=-\frac{l\left(B_2-B_1\right)}{L}x=-\frac{l\left(B_2-B_1\right)}{L}vt$$

(2) コイルが領域Ⅱを進んでいるとき

コイルが領域Ⅱにすべて入ったまま進んでいるときには、電流を変化させる要素はない。領域Ⅱの長さを a とすると、$\frac{l}{v}<t<\frac{a}{v}$では、

$$i=-\frac{l^2\left(B_2-B_1\right)}{L}$$

(3) コイルが領域Ⅱを抜けるとき

コイルが領域Ⅱを抜け始めると、

$$-\frac{d\left(\left(x-a\right)l\left(B_1-B_2\right)\right)}{dt}-L\frac{di}{dt}=0$$

$$L\frac{di}{dt}=-\frac{d\left(x-a\right)}{dt}l\left(B_1-B_2\right)$$

定数を Cとすると、

$$i=C-\frac{l\left(B_1-B_2\right)}{L}\left(x-a\right)=C-\frac{l\left(B_1-B_2\right)}{L}\left(vt-a\right)$$

$x=a$

のとき、すなわち

$$t=\frac{a}{v}$$

のとき、

$$i=-\frac{l^2\left(B_2-B_1\right)}{L}$$

であるから、

$$C=-\frac{l^2\left(B_2-B_1\right)}{L}$$

以上より、

コイルが領域ⅡからⅢへ抜けきるまでの$\frac{a}{v}<t<\frac{a+l}{v}$ では、

$$i=\frac{l\left(B_2-B_1\right)}{L}\left(vt-a-l\right)$$

となる。抜け出るとき $i=0$ となり、これ以降は誘導起電力は生じないので、以降 $i=0$ が続く。

つまり，電流の強さは時間に比例して増加し，領域Ⅱ内では一定の電流が流れ，領域Ⅲに出て行くときに一定の割合で電流が減り、最後は0になる。

問題の電流の向きを正とすると、図3のようになる。

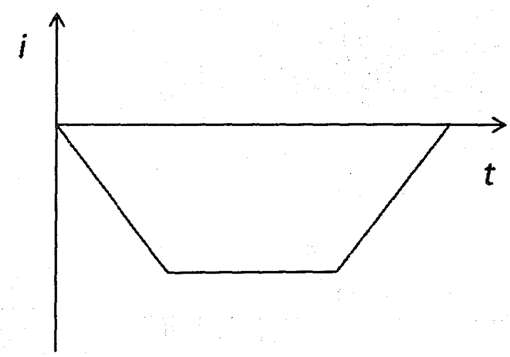


図3

ここで、エネルギー収支はどのようになっているのだろうか。コイルを含む回路を一定の速さで領域Ⅱに引き込む力がした仕事は，コイルが作り出した電流による磁場が蓄えたエネルギーとなるはずである。コイルが領域Ⅱに入るまで、外力がコイルにした仕事を、以下のように求めてみた。

$$W=\int_0^l il\left(B_2-B_1\right)dx=\int_0^l\frac{l^2\left(B_2-B_1\right)^2}{L}xdx$$

$$=\frac{l^4(B_2-B_1)^2}{2L}$$

これは、コイルが磁場として蓄えたエネルギー

$U=\frac{1}{2}Li^2$ と等しい。

なお、センター試験の正解にするために、自己インダクタンス L=0 とすればよいかというと、抵抗0で電流を制限するものがなくなってしまい、回路は破たんをきたす。抵抗がすごく大きければよいのではないかと思うが、それは電流計ではなく電圧計を入れたことになるだろう。むしろ、自己インダクタンス L も含めて考えれば、r/L が極めて大きいとセンター試験の選択肢のようになることが、以下の議論で分かる。

3. 回路に抵抗 r がある場合の誘導電流の計算

$r \neq 0$ とする。

$v=\frac{dx}{dt}$ 一定である。

(1) 領域ⅠからⅡへの進入

領域ⅠからⅡに進入すると、時計回りの向きに誘導起電力 $vl(B_2-B_1)$ を生じる。問題では、反時計方向を電流の向きとし、磁場は紙面の裏面から表面向きを正としているので、ちょうど右ねじの法則の関係を満たすように設定されている。そこで、電流が正となる向きに回路を一周してキルヒホッフの法則を使うことにする。このとき、起電力は電流の向きに電位が上がると正、電圧降下は電流の向きに電圧が下がるので負となる。すると、反時計回りのキルヒホッフの法則に従えば、

$$-vl(B_2-B_1)-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{-vl(B_2-B_1)-ri}{L}=\frac{r}{L}\left(\frac{-vl(B_2-B_1)}{r}-i\right)$$

$$-\ln\left(\frac{vl(B_2-B_1)}{r}+i\right)=\frac{r}{L}t+C$$

$$\frac{vl(B_2-B_1)}{r}+i=e^{-\frac{r}{L}t+C}$$

$$\frac{vl(B_2-B_1)}{r}+i=Ae^{-\frac{r}{L}t} \qquad ただし、A=e^{-C}$$

t=0のとき i=0なので、$A=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}$

以上より、

$$i=-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right) \cdot\cdot\cdot ①$$

(2) 領域Ⅱ中をコイルが進むとき

$\frac{l}{v} \leqq t \leqq \frac{a}{v}$

磁場変化がなくなるので、この分の誘導起電力は0となる。したがって、電流変化による自己誘導起電力のみであるから、

$$-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

$$\ln i=-\frac{r}{L}t+C'$$

$$i=A'e^{-\frac{r}{L}t} \cdot\cdot\cdot ②$$

境界条件は、

$t=\frac{l}{v}$ のとき、①より

$$(i)_{t=\frac{l}{v}}=-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(1-e^{-\frac{rl}{Lv}}\right)$$

これと②から、

$$A'=-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{rl}{Lv}}-1\right)$$

$$i=-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{rl}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{r}{L}t} \cdot\cdot\cdot ③$$

(3) 領域ⅡからⅢに進入するとき

$\frac{a}{v} \leqq t \leqq \frac{a+l}{v}$

$$-vl(B_1-B_2)-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{-vl(B_1-B_2)-ri}{L}=-\frac{r}{L}\left(\frac{vl(B_1-B_2)}{r}+i\right)$$

$$\ln\left(\frac{vl(B_1-B_2)}{r}+i\right)=-\frac{r}{L}t+C''$$

$$\frac{vl(B_1-B_2)}{r}+i=e^{-\frac{r}{L}t+C''}=A''e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$i=-\frac{vl(B_1-B_2)}{r}+A''e^{-\frac{r}{L}t}$$

境界条件は、

$t=\dfrac{a}{v}$ のとき、

$$(i)_{t=\frac{a}{v}}=-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{rl}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{ra}{Lv}}$$

$$A''=\frac{vl(B_1-B_2)}{r}\left(e^{\frac{rl}{Lv}}+e^{\frac{ra}{Lv}}-1\right)$$

以上より、

$$i=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}-\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{rl}{Lv}}+e^{\frac{ra}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(1-\left(e^{\frac{rl}{Lv}}+e^{\frac{ra}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

・・④

(4)　領域Ⅲを進むとき

$\dfrac{a+l}{v}\leqq t$ のとき、磁場変化による誘導起電力はないので、

(2)と同様に

$$-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

$$\ln i=-\frac{r}{L}t+C'''$$

$i=A'''e^{-\frac{r}{L}t}$　・・・⑤　ただし、

$t=\dfrac{a+l}{v}$　のとき④より、

$$(i)_{t=\frac{a+l}{v}}=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(1-\left(e^{\frac{rl}{Lv}}+e^{\frac{ra}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{r(a+l)}{Lv}}\right)$$

$$A'''=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{r(a+l)}{Lv}}-e^{\frac{ra}{Lv}}-e^{\frac{rl}{Lv}}+1\right)$$

以上より、

$$i=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{r(a+l)}{Lv}}-e^{\frac{ra}{Lv}}-e^{\frac{rl}{Lv}}+1\right)e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$=\frac{vl(B_2-B_1)}{r}\left(e^{\frac{ra}{Lv}}-1\right)\left(e^{\frac{rl}{Lv}}-1\right)e^{-\frac{r}{L}t}$$

4．微分方程式からルンゲ・クッタ法により数値解を求める

以下の３つの領域についての微分方程式の数値解を求める。このとき，抵抗 r によりコイルに流れる電流がどうなるかをグラフ化してみた。計算には、表計算（EXCEL）を用いた。各境界条件は，３．(1)では $t=0$ のとき，$i=0$，(2)以降は，その直前の最終値となる。

以下で示されるように，コイルの抵抗が０に近づくと，最初に示したグラフに近づいていく。抵抗が０では，図３で示したグラフとなることが分かる。

なお、パラメータを自在に変化できるようにしているが、ルンゲ・クッタ法の精度についての考察はしていないので、まだ課題は残っている。

(1)　領域ⅠからⅡに進入するとき

$$-vl(B_2-B_1)-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

(2)　領域Ⅱ中をコイルが進むとき

$$-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

(3)　領域ⅡからⅢに進入するとき

$$-vl(B_1-B_2)-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

(4)　領域Ⅲを進むとき

$$-L\frac{di}{dt}-ri=0$$

(5)　以上から様々な r について電流と時間のグラフを求める。

すべての数値は，全く適当な値である（特に自己インダクタンス L ははるかに小さな値であろう）が，一番の

ポイントは r/L による影響であるので，r を r=0.001Ω ～ r=0 まで変化させた。

計算に使った数値は，以下とした。

時間刻み＝0.001s　初期電流＝0A

コイルの速さ＝0.1m/s

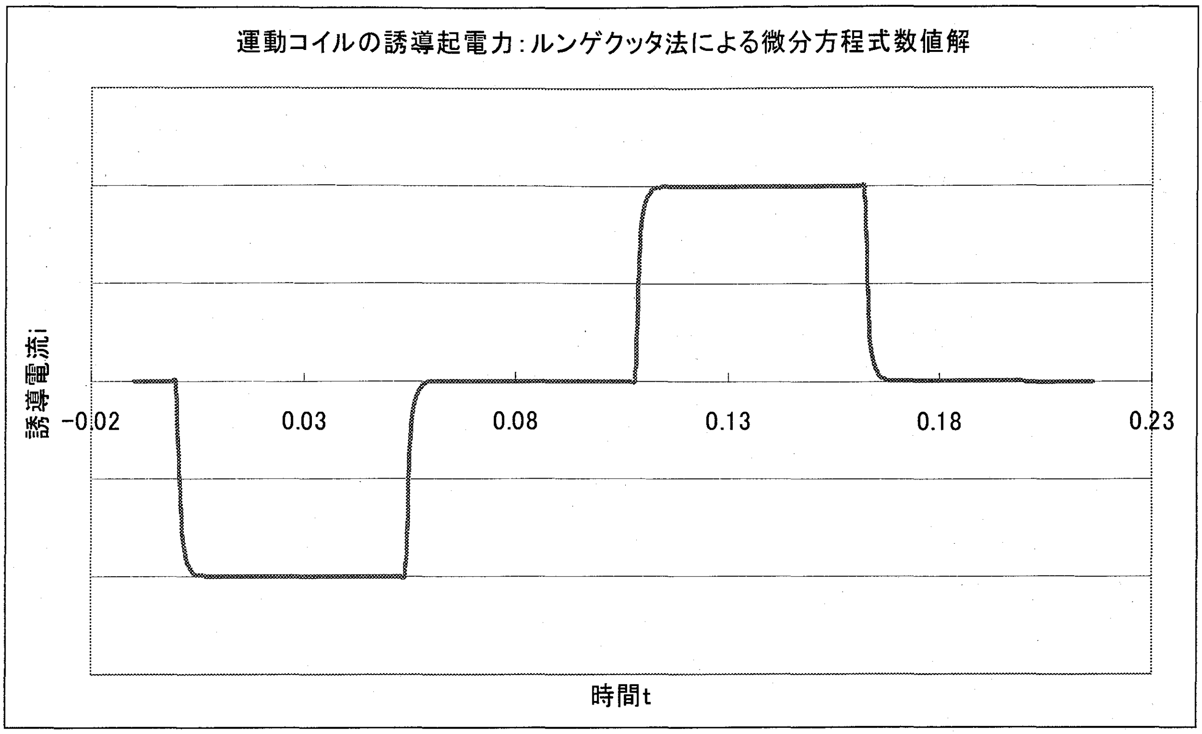
コイルの一辺＝0.1m

自己インダクタンス＝0.000001H

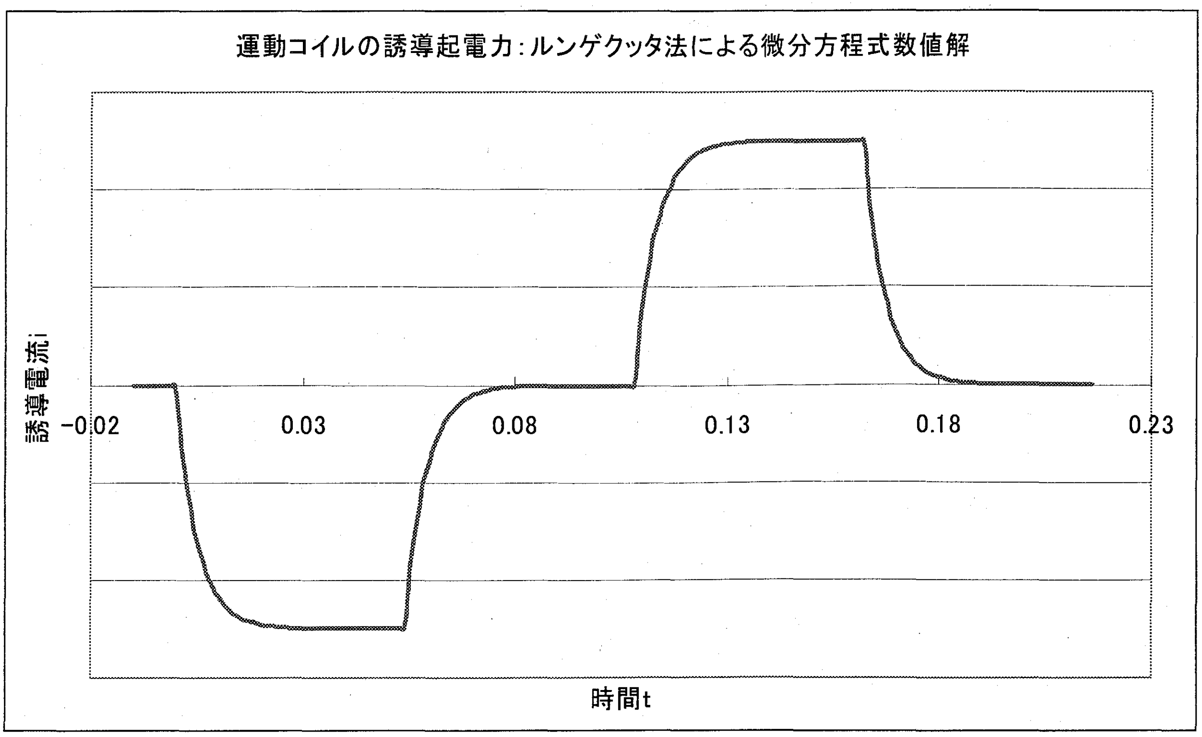
領域Ⅰ,Ⅲの磁束密度＝0.1T

領域Ⅱの磁束密度＝0.2T

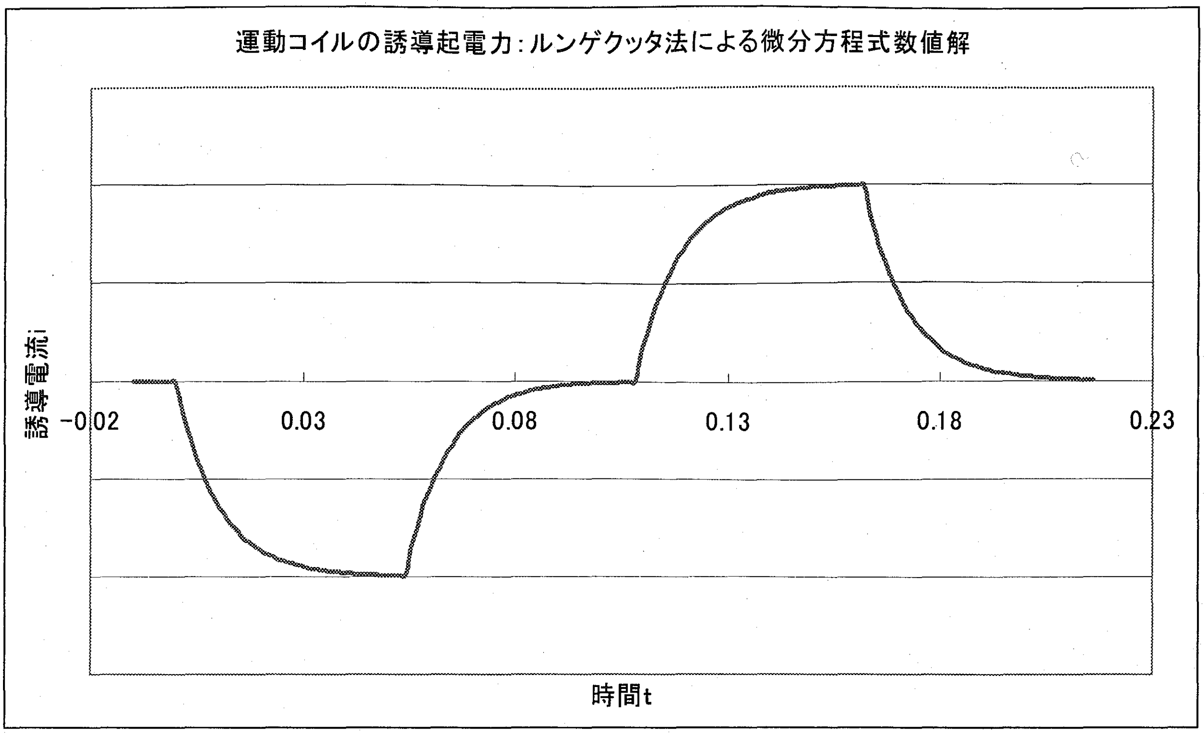
時間刻み	初期電流		コイルの速さ	コイルの1辺長さ	自己インダクタンス	電気抵抗		領域Ⅰの磁束密度	領域Ⅱの磁束密度
dt	i_0		v	l	L	r		B_1	B_2
0.001	0		0.1	0.1	0.000001	0.001		0.1	0.2



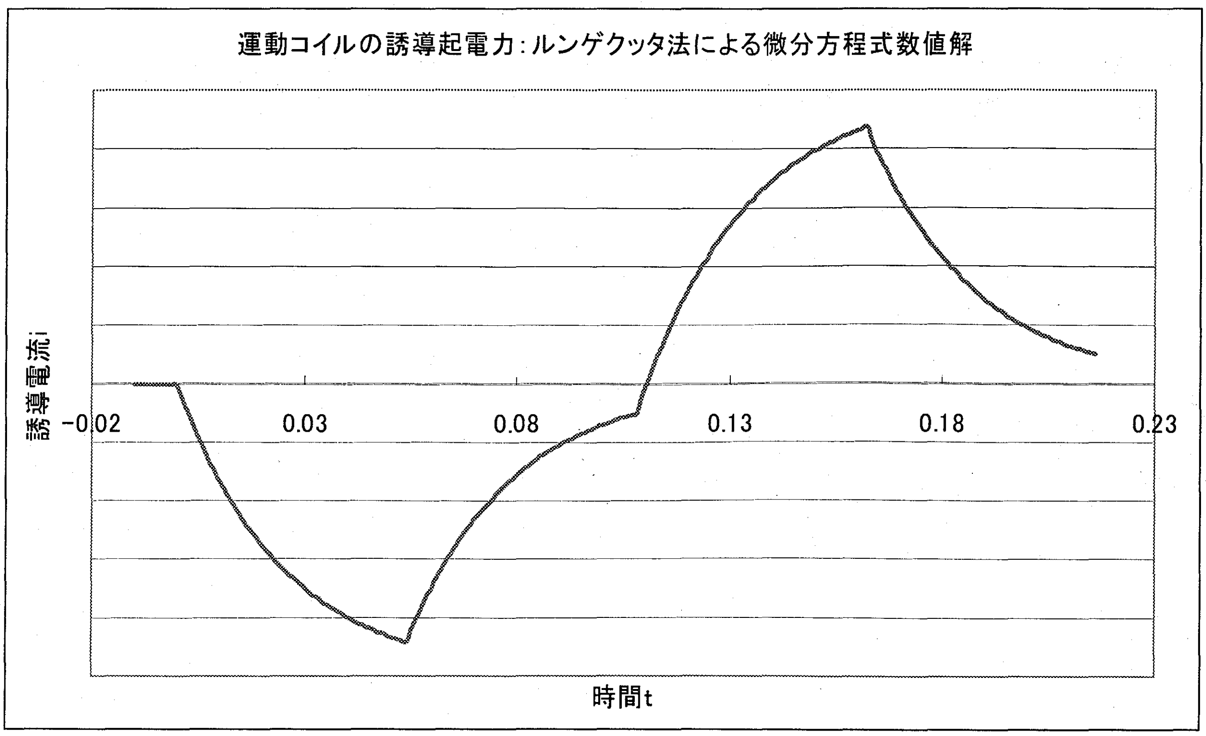
r=0.0002



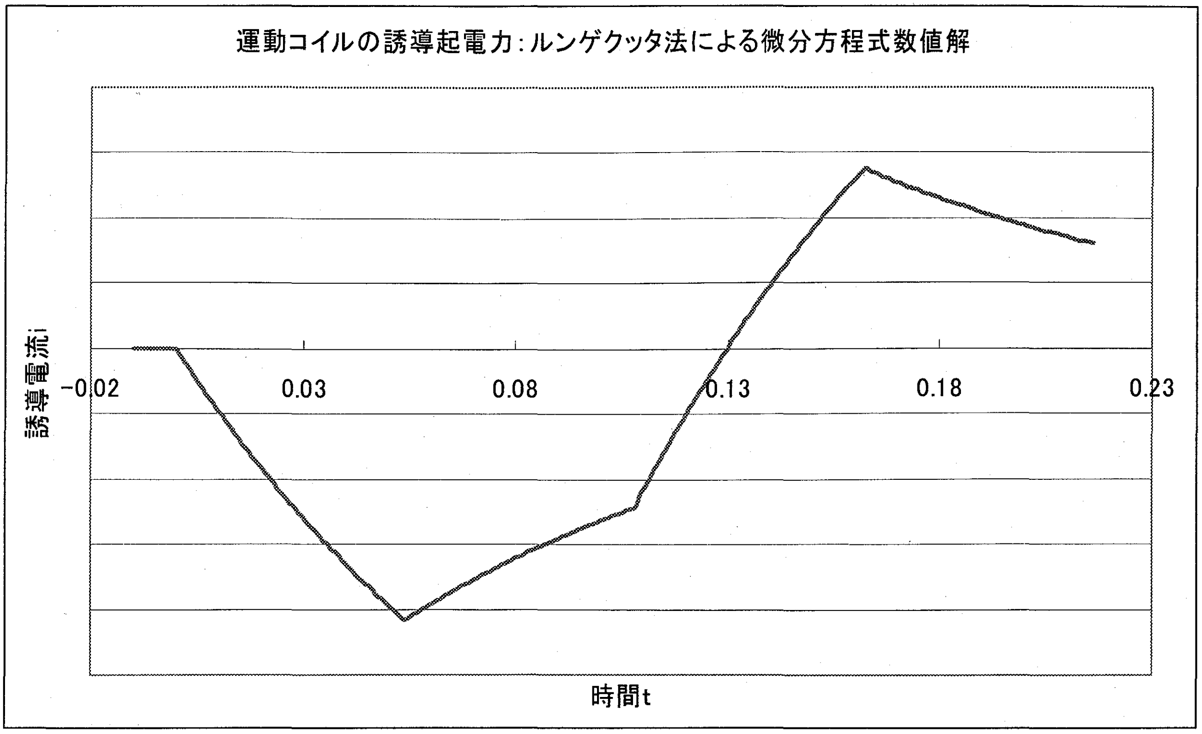
r=0.0001



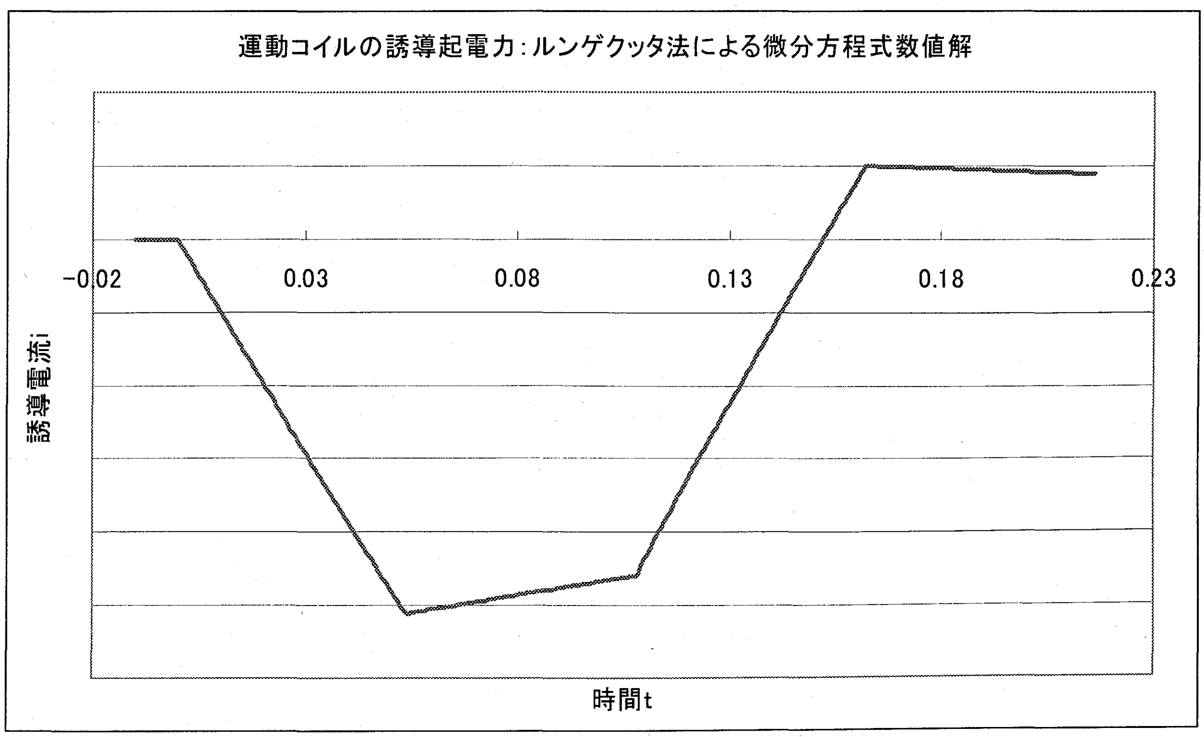
r=0.00004



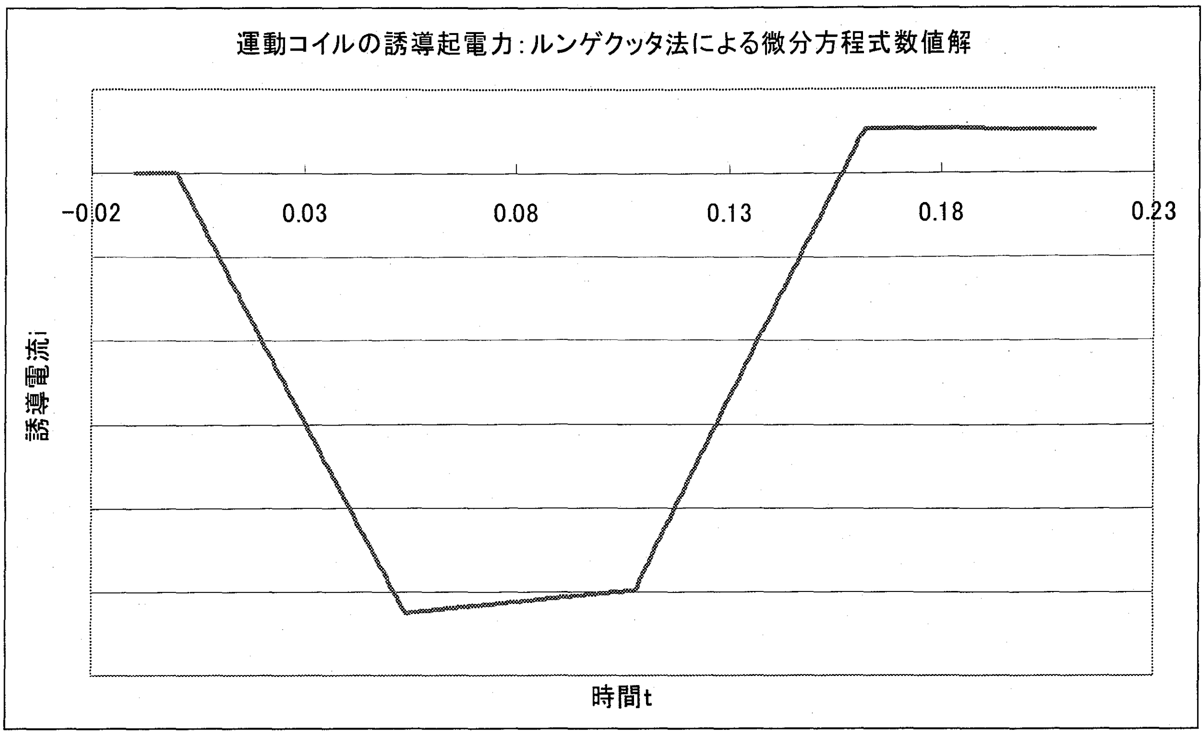
r=0.00001



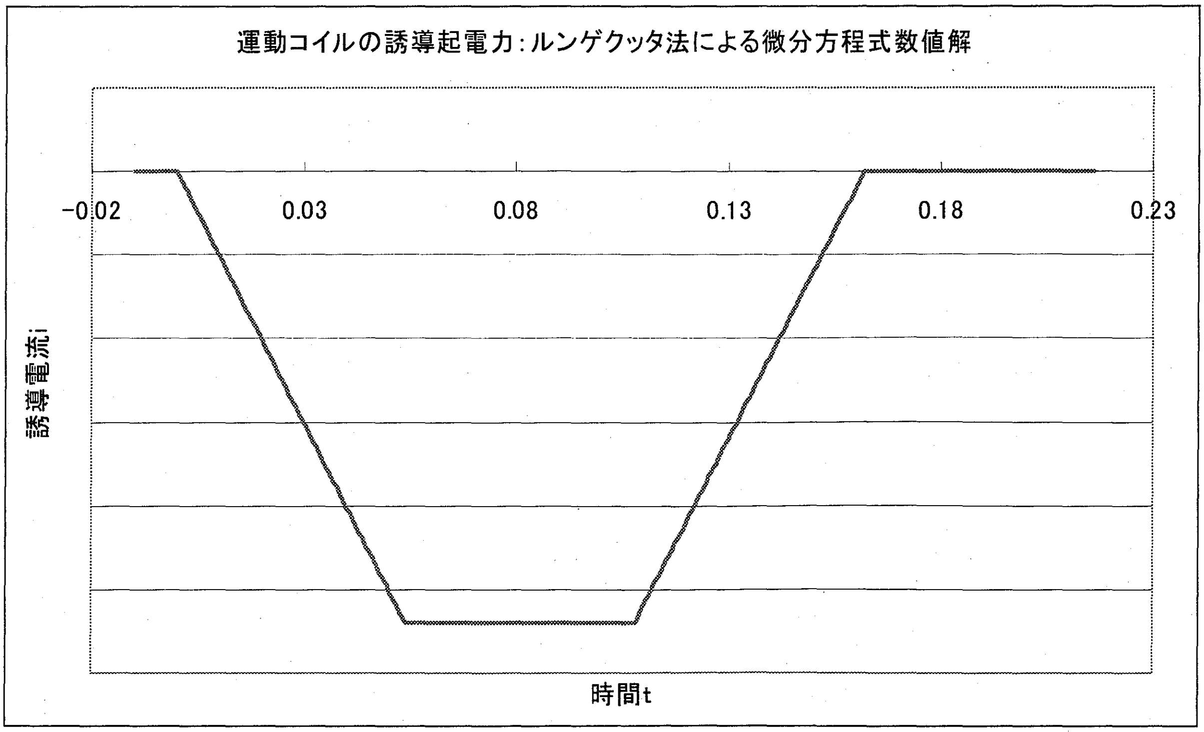
r=0.000002



r=0.000001



r=0



r=0.001Ωの場合は、正解の選択肢に近いものとなる。このｒの値を徐々に小さくしていくと、やがてはじめに示した図３へと変化していく様子が良く分かる。

5．過去のセンター試験から

下の図は、1995 年度センター試験物理本試験第３問Ｂである。

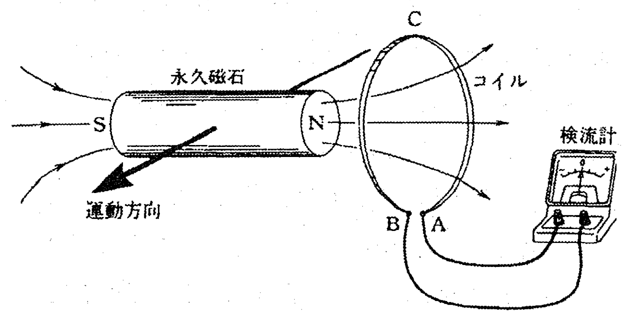
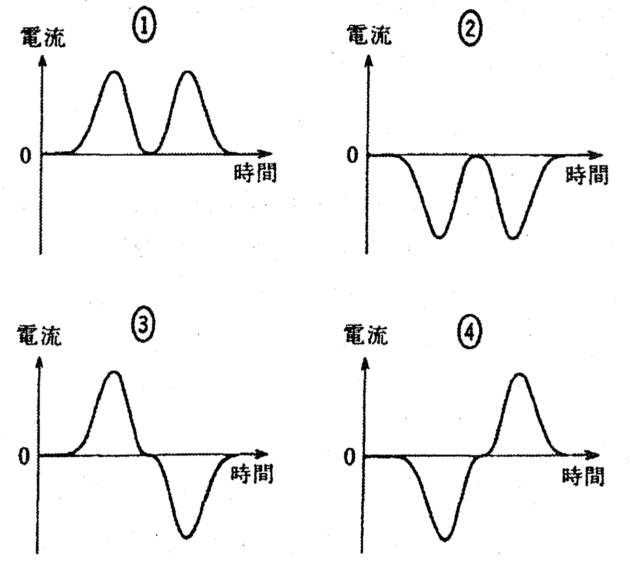


図　8

この問題では、具体的な検流計が示されているので、電気抵抗があることは間違いない。実際にこの実験は可能で、選択肢のような電流測定は困難だろうが、検流計の振れの雰囲気として選ぶことはできる。次に解答用の選択肢を示す。



下の図は、1990 年度物理本試験第３問　Ｂである。

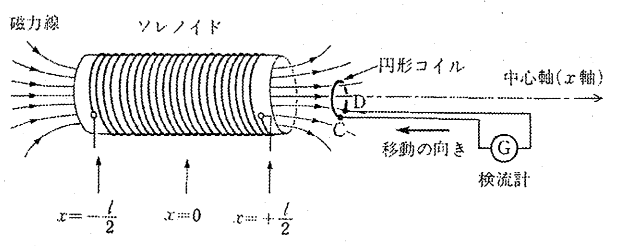
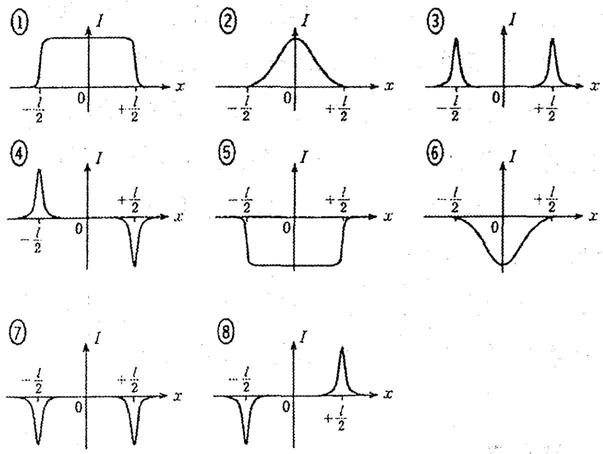


図　4

こちらの問題では、具体的な実験のようにも見えるが、問題のための問題に近い。実際にはこのような誘導電流を検流計で測定するのは困難であろう。一定の速さでコイル内に入れていくのだが、検流計を振らすには、かなりな速さが必要であろう。あるいは、回路の抵抗が無視できるかであろう。

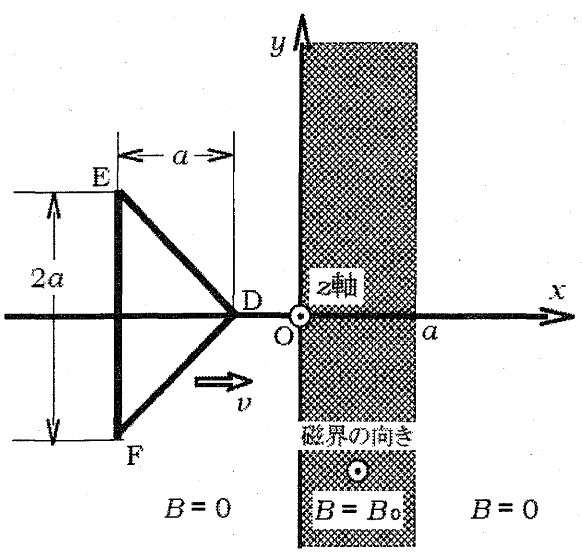
次に解答用の選択肢を示す。



もしも、回路の抵抗が十分に小さいと、本稿で扱ったような自己インダクタンスによる影響が現れる。最もまずいのは、選択肢①がこの場合の正解に極めて近いことである。これらの問題でも、誘導起電力（電圧）の測定とすれば、問題は起こらない。

6．大学入試問題から

以下は、2003 年度東京工業大学入試問題物理第２問の図である。



この問題では、「設問(a) 〜 (d) では、コイルの自己インダクタンスは無視するものとする。」として、わざわざ自己インダクタンスを無視することを示している。さらにこれに続く(e)では、「次に、コイルＬの自己インダクタンスが無視できない場合を考える。」となっており、

自己インダクタンスによる影響を定性的にではあるが論述するよう求められる。

下の図は、2008年度東京理科大学理学部物理学科の入試問題の図である。この問題では、一巻コイルの抵抗は0だが、自己インダクタンスは存在する場合を問うている。これは、超電導コイルに電流を流すことを背景とした問題と言えよう。この問題では、一定の速さで進入させることをしていないが、自己誘導起電力の影響を真正面から取り組まねばならない。これは、受験生にとっては難問であったかもしれない。

これを一定の速さで進入させれば、本稿　「2．回路に抵抗が無い場合の誘導電流」で述べた現象が現れる。

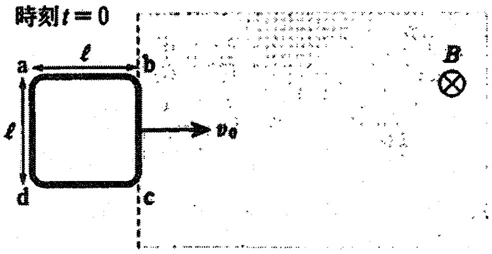


図1

このように、よく似た問題でも、物理Ⅱの問題となると大きく問題・解答の様相が変わってくる。

7．分析結果からの考察

多くの先生方は、本稿で分析したセンター試験の問題を、基本的な現象を扱った、易しい問題と評価されているのではないだろうか。

本当にそういってよいのだろうか。正解である④を選ぶとき、おそらく外部磁場の変化だけに注目しているだけで、自己誘導は考えていないであろう。それどころか、電流が流れることなど考えずに、誘導起電力が④のようになるので、これをコイルの抵抗で割れば正解となるという、単純な(しかし決して正しくない)判断をしているのでは無いだろうか。また、このように電流のグラフが得られるような実験も、きわめて困難であり、経験的に知っていることも無い。その経験は、やはりオシロスコープなどを利用した、電圧変化であろう。

ではなぜこのように、誘導電流を選ばせる問題にしたのだろうか。電磁気の研究が始まったころ、電圧計は無く、電磁誘導は敏感な検流計を使って検出していた。このためか、現在の電磁誘導の学習においても、誘導起電力こそが重要なはずだが、これが現れたかどうかを検流計で演示することが多い。教科書の図もそうなっていることが多い。中学理科などで電磁誘導を示すには、コイルと磁石と検流計で示すのが容易だからかもしれない。また、磁束の変化を妨げるように誘導電流が流れる、として教えてもいるので、誘導電流を扱うことになる。

ところが、誘導電流が流れれば、当然磁束の変化を妨げることになる。にもかかわらず、本稿で対象としているセンター試験問題では、自己誘導起電力による影響をかけらも考えない問題となっているのである。

今や、ディジタルオシロスコープが普及し始めているのだから、誘導起電力をもとにして扱ってはいかがであろうか。

この問題の手直しは容易である。検流計をやめて、オシロスコープか電圧計で観測するものとし、起電力の変化を示すグラフを選べばよい。そうすれば、迷いもなく、胸を張って④を選ぶことができる。

8．おわりに

本校で扱った問題で、正解の選択肢を選ぶことは難しくは無い。しかし、正解が消去法で選ばれる問題や、不十分な理解が正解を導き出す問題は、良い問題とは言い難い。

【参考文献】

1)　全国理科教育大会北海道大会論文集　2012年第34巻P.114~117川角博「センター試験誘導電流の分析」
2)　センター試験2012年度
3)　センター試験1990年度
4)　センター試験1995年度
5)　東京工業大学2003年度　前期入試問題
6)　東京理科大学2008年度　理学部物理学科入試問題