東京学芸大学附属高等学校紀要　49　pp.17～22, 2012

一元体 $\mathbb{F}_1$ 上の代数群

Algebraic groups over the field with one element $\mathbb{F}_1$

数学科　吉岡 雄一

概要：しばしば $\mathbb{F}_1$ と書かれる一元体は通常の（可換）体ではないものの，さまざまな数学的対象を考察できることが知られている。ここでは（通常の）体上で定義されている代数群の $\mathbb{F}_1$ 上の類似について紹介する。

キーワード：代数群，一元体，$\mathbb{F}_1$，絶対数学，Coxeter 群

1　序

一般線形群 GL_n の性質が対称群 $\mathcal{S}_n$ を用いて記述されることは多い。たとえば GL_n の既約指標は Schur 多項式という対称群と密接に関係する多項式で記述できる([岩堀] など)。一般に Lie 群 G あるいは Lie 環 $\mathcal{G}$ に対して Weyl 群と呼ばれる有限群 W が定義され，G（あるいは $\mathcal{G}$）の（特に表現論的な）性質も W を用いて記述されることが多い。こういった状況を標語的に「Weyl 群は Lie 群（Lie 環）の骨格である」などと言うことがある。なお冒頭の例では，GL_n の Weyl 群が n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ である。

また，J.Tits は 1957 年の論文 [Tits] で “標数 1 の体” を考えることができるならば，“標数 1 の体” 上の一般線形群は対称群と同型であることを示し，一般の代数群についても “標数 1 の体” 上ではその Weyl 群と同型になるであろうと書いている。もちろん通常の定義において体の標数は素数 $p = 2, 3, 5, \cdots$ であり “標数 1 の体” は存在しえない。

さて，本稿はまず代数群に関する用語の準備をし，[黒川・小山] に従って “標数 1 の体”–“一元体 $\mathbb{F}_1$” を導入する。その後，古典型と呼ばれる代数群に対して，$\mathbb{F}_1$ 上の代数群 $G(\mathbb{F}_1)$ を具体的に構成し，Weyl 群と同型であることを紹介する。すなわち，$\mathbb{F}_1$ 上という肉が乏しい状態（＝骨格）では代数群はその Weyl 群に退化すると考えることで，前述の folklore の傍証としたい。また，“$\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体” の具体例を与えることにつながるのではないかと期待している。例外型についても同様の構成を試みたが，時間の関係もあって間に合わなかった。例外型については今後の課題としたい。

2　代数群について

2.1　代数群と例

群構造をもつ可微分多様体を Lie 群という。代表的な例として実数を成分とする n 次正則行列の集合 $GL_n(\mathbb{R})$ や（実）直交行列の集合 $O_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = x^{-1}\}$ があり，それぞれ一般線形群，直交群と呼ばれる。また直交行列であってその行列式が 1 である集合 $SO_n(\mathbb{R}) = \{x \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det x = 1\}$ も特殊直交群（回転群）と呼ばれる Lie 群である。

行列の成分を複素数とし，可微分多様体に関する用語を複素多様体のものにおきかえることで，$GL_n(\mathbb{C}), O_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{C})$ など，複素数体上の Lie 群（複素 Lie 群）の例が得られる。

同様に成分を q 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$（ただし q は素数 p のべき乗）として，

$$GL_n(\mathbb{F}_q) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \middle|\, x_{ij} \in \mathbb{F}_q,\ \det x \neq 0 \right\}$$

と定義すると，この集合は位数 $q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1) = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$ の有限群であり，同時に $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体として定義でき，群構造を決める写像たちが（$\mathbb{F}_q$ 上の）代数多様体としての射になることが確かめられる。このように群構造をもつ代数多様体を代数群という。先に挙げた実数体や複素数体上の Lie 群も，それぞれ実数体上，複素数体上の代数群となる。代数多様体が体 k 上のものであることを強調する場合は体 k 上の代数群という。考えている体が明らかなときは，一般線形群 GL_n，特殊線形群 SO_n などという表記も用いられる。通常，代数多様体とは代数閉体上

で定義されるものを指すので，“有限体上の代数多様体”では，まず $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包 K 上で代数多様体を構成し，Frobenius 写像と呼ばれる写像の固定点集合をとる等の手続きが必要となるが，そもそも “$\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体” の定義が未確定である以上（web 上では [Dei], [LoLo] などがある），本論では素朴な理解にとどめておく。

ある代数群 G の閉部分群 H（代数多様体として閉部分多様体であり，群として部分群であるもの）は代数群になることが知られている。GL_n の閉部分群を線形代数群と呼ぶ。以下では線形代数群のことを単に代数群と呼ぶこととする。

（線形）代数群のうち，特に SO_n や Sp_{2n} を重点的に扱う。ここで Sp_{2n} はシンプレクティック群（斜交群）と呼ばれる群であり，

$$Sp_{2n} = \{x \in GL_{2n} \mid {}^t x J x = J\},$$

$$\text{ここで } J \in GL_{2n} \text{ は，} J = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j & & \\ & & \ddots & \\ & & & j \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

として定義される。

特殊回転群やシンプレクティック群は（半）単純複素 Lie 群（あるいは（半）単純 Lie 環）の分類でもお馴染みの対象であり，古典型と呼ばれている。分類を行った E.Cartan によって SO_{2n+1} が B_n 型，Sp_{2n} が C_n 型，SO_{2n} が D_n 型と呼ばれるようになった。SO_ℓ を ℓ の偶奇で分けるのは後述する Weyl 群が異なるためである。なお A_n 型は GL_n，特殊線形群 $SL_n = \{x \in GL_n \mid \det x = 1\}$ などを指す。（単純）Lie 群論ではこれらの他に例外型として E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 という型の群が知られているが，例外型に対しても有限体上などで代数群が構成できる（[Spr], [MaTe]）。

2.2　極大トーラス部分群，Weyl 群

$G = GL_n(k)$ に含まれる対角行列全体 T_n は G の閉部分群であり，$T_n \cong (k^\times)^n$ である。一般に $(k^\times)^m$ と同型な代数群をトーラスという。トーラスは明らかにアーベル群である。

k 上の代数群 G に含まれる連結なトーラス部分群であって包含関係について極大なものを G の極大トーラス部分群という。極大トーラス部分群 T の正規化群 $N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$ は，明らかに T を正規部分群として含むので $N_G(T)/T$ が定義される。G が GL_n や連結な単純型などの場合，この剰余群は有限群となり，同型を除いて T の取り方に依存しない。これを G の Weyl 群という。有限体上の構造を考える場合，Frobenius 写像の作用などを考慮する必要があるが，ここでは省略する。

さて，GL_n の Weyl 群を具体的に記述しておこう。極大トーラス部分群として（対角成分が 0 でない）n 次対角行列全体をとる。このとき，$N_G(T_n)$ は各行各列に 0 でない成分を 1 つずつもつような n 次行列全体からなることがわかる。したがって，$N_G(T_n)/T_n$ は各行各列に 1 つだけ 1 を成分にもち残りは全て 0 である n 次行列全体となり，これは n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ と同型である。よく知られているように $\mathcal{S}_n$ は $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ で生成され，

$$\begin{cases} s_i^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n} & i = 1, 2, \cdots n-1 \\ (s_i s_{i+1})^3 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n} & i = 1, 2, \cdots n-2 \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geqq 2 \end{cases}$$

という基本関係式をもつ。

また，G が $SO_{2n+1}, Sp_{2n}, SO_{2n}$ についても同様の表示が知られている。

- SO_{2n+1}, Sp_{2n} の Weyl 群 W　$(n \geqq 2)$

SO_{2n+1} の Weyl 群と Sp_{2n} の Weyl 群は同型である。この群 W は $s_1, s_2, \cdots, s_n$ で生成され，

$$\begin{cases} s_i^2 = \mathrm{id}_W & i = 1, 2, \cdots n \\ (s_i s_{i+1})^3 = \mathrm{id}_W & i = 1, 2, \cdots n-2 \\ (s_{n-1} s_n)^4 = \mathrm{id}_W & \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geqq 2 \end{cases}$$

という基本関係式をもつ。

- SO_{2n} の Weyl 群 W　$(n \geqq 4)$

この群 W は $s_1, s_2, \cdots, s_n$ で生成され，

$$\begin{cases} s_i^2 = \mathrm{id}_W & i = 1, 2, \cdots n \\ (s_i s_{i+1})^3 = \mathrm{id}_W & i = 1, 2, \cdots n-2 \\ (s_{n-2} s_n)^3 = \mathrm{id}_W & \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geqq 2 \end{cases}$$

という基本関係式をもつ。

なお，これらは Coxeter 群と呼ばれる群のクラスに含まれる。GL_n や単純代数群の Weyl 群はそのすべてが（有限）Coxeter 群であるが，Weyl 群として実現できない有限 Coxeter 群が “少しだけ” ある。位数 10 の二面体群はその一例である。

3　一元体 $\mathbb{F}_1$

3.1　環からモノイドへ

黒川信重・小山伸也「絶対数学」（[黒川・小山]）は，標数 p での整数論や代数幾何が（技術的困難はともかく）比較的単純になるのは係数体というべき最小の体 $\mathbb{F}_p$ が存在するためであるという。実際 Deligne による Weil 予想に解決においても，$\mathbb{F}_p$ 上の代数多様体を $\mathbb{F}_p$上での“テンソル積”（ファイバー積）をとることが頻繁に行われているとのことである。$\mathbb{F}_p$ 上の代数多様体の係数環や関数体（の層）を $\mathbb{F}_p$ 上の代数として，テンソル積をとることで新しい環が作られ，多様体が定義される。

一方，有理整数環 $\mathbb{Z}$ においては，係数体（係数環）となるべきより小さな環が存在しない。$\mathbb{Z}$ 上の代数としてテンソル積をとっても $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ と同型なので新しい（より次元の高い）環を得ることができない。

そこで，より小さな代数構造としてモノイドの圏を用いて数学を記述できないだろうかと考えた。全ての環が $\mathbb{Z}$-代数であるように，すべてのモノイドが $\mathbb{M}$-代数となるようなモノイド $\mathbb{M}$ を構成すれば，$\mathbb{Z}$ に代わるより根元的な代数系となるであろう。このモノイドを一元体 $\mathbb{F}_1$ と名付けよう。したがって「体」という名称がついているが，古典的な定義による体–可換整域であって 0 以外の元には逆元が存在するもの，にはならない。

3.2　一元体 $\mathbb{F}_1$ の定義

環 R は和 $+$ と積 $\cdot$ の 2 つの演算をもつ。ここで，R から積を忘れ，和のみの演算を残すとアーベル群が得られる。同様に R から和を忘れ，積のみを残したものがモノイドとなる。一般に乗法群 G に零元 “0” を添加した集合 $G' = G \cup \{0\}$ はモノイドである。ただし，G の元と 0 の積はすべて 0 と定義する。

ここで，単位元のみからなる群 $\{1\}$ から作られるモノイド $\{1\}' = \{1\} \cup \{0\}$ を一元体と呼び，$\mathbb{F}_1$ で表す。すなわち，集合としては $\mathbb{F}_1 = \{1\} \cup \{0\}$ であり，演算は $1 \times 1 = 1, 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times 0 = 0$ である。このとき実際に任意のモノイドを $\mathbb{F}_1$-代数とみなすことができる。二元体 $\mathbb{F}_2$ も似ているように思われるが，$\mathbb{F}_2$ には積の他に「和」の演算をもつが，$\mathbb{F}_1$ ではそもそも和という概念をもたない点が最も大きな違いである。

3.3　“標数 1 の体” 上の一般線形群

“一元体” の起源である [Tits] においては，次のような仮想的な代数系として一元体を捉えている。ここでは最も単純な例を挙げる。**2.1** で紹介したように $GL_n(\mathbb{F}_q)$ において，

$\left| GL_n(\mathbb{F}_q) \right| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)$ である。これを q の関数と見なして単純に $q \to 1$ としても 0 になってしまう。そこで $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の極大トーラス部分群 $T \cong ({\mathbb{F}_q}^{\times})^n$ の位数 $(q-1)^n$ で割っておくと，$\left| GL_n(\mathbb{F}_q) \right| \to n!$ となり，GL_n の Weyl群である n 次対称群の位数と一致する。こういった有限体 $\mathbb{F}_q$ の $q \to 1$ での “極限” を “標数 1 の体” と呼んでいる。

4　$GL_n(\mathbb{F}_1)$ の構成

ここよりやっと本題に入る。[黒川・小山] に従って，$GL_n(\mathbb{F}_1)$ を決定しよう。

まず ${\mathbb{F}_1}^n$ 上の線形写像の行列表示を考える。

$$m \in M_n(\mathbb{F}_1) \subset \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \middle| m_{ij} \in \mathbb{F}_1 \right\}$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in {\mathbb{F}_1}^n \text{ に対して，} \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が ${\mathbb{F}_1}^n$ の元として意味を持たなければならない。一元体 $\mathbb{F}_1$ において「和」という演算は考えられないので，第 k 行 $m_{k1}x_1 + m_{k2}x_2 + \cdots + m_{kn}x_n$ は単項式にならなければならない。したがって行列 m の第 k 行の成分 $m_{k1}, m_{k2}, \cdots, m_{kn}$ のうち，全てが 0，またはどこか 1 つのみが 1 で残りは全て 0 でなければならない。他の行についても同様である。したがって，

$$M_n(\mathbb{F}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \middle| m_{ij} \in \mathbb{F}_1, \right.$$
$$\left. \text{ただし各行の成分は高々 1 つのみが 1 で残りは 0} \right\}$$

となる。

$GL_n(\mathbb{F}_1) = \{x \in M_n(\mathbb{F}_1) \,|\, x \text{ は逆元をもつ}\}$ であるから，x の第 1 行から第 n 行が一次独立ならばよい。すなわち，$GL_n(\mathbb{F}_1)$ は，各行各列に 1 つだけ 1 を成分にもち残りは全て 0 であるような行列からなる。これはまさに

2.2 で紹介した GL_n の Weyl 群（すなわち n 次対称群 $\mathcal{S}_n$）そのものである。

5　C_n 型

またもや，[黒川・小山] からの引用で申し訳ないが，同書 p.125 に「絶対数学という新天地の数学の場合に何より大切なことは，他から与えられる情報を知る姿勢ではなく，自ら進んで研究を行う態度である。（中略）この新天地では向こうへ行くと遭難するかもしれない。そっちへ行けば沈没するかもしれない。そこが面白いところだ。」とある。この言葉に勇気づけられて A 型以外の $\mathbb{F}_1$ 上の代数群を計算してみようと思いついた。以下ではその計算結果について述べる。なお，同書では $\mathbb{F}_1$ 上の数学を絶対数学と呼んでいる。

まずは $n=1$ のときの C_n 型，すなわち Sp_2 を考える。一般的には

$$Sp_2 = \left\{ x \in GL_2 \,|\, {}^t xJx = J,\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

と定義するところであるが，標数 2 の体でも $-1=1$ と考えるように，$\mathbb{F}_1$ 上でも $-1=1$ として，考察を進める。すなわち，$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき，$GL_2(\mathbb{F}_1)$ の元 x が ${}^t xJx = J$ をみたすかどうか確かめればよい。実際，$GL_2(\mathbb{F}_1)$ の元（2 つしかない）はすべて ${}^t xJx = J$ をみたす。つまり，$Sp_2(\mathbb{F}_1) = GL_2(\mathbb{F}_1) \cong \mathcal{S}_2$ であり，一般的な代数群と同様に $Sp_2 \cong GL_2$ が成立することがわかる。

次に $n=2$，すなわち Sp_4 を考える。

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} j & \\ & j \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{F}_1),\ \text{とおき,}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とする。}$$

このとき，${}^t xJx = J$ をみたす $GL_4(\mathbb{F}_1)$ の元は，次の 8 つである。

$$\begin{pmatrix} I_2 & \\ & I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & \\ & I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & \\ & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & \\ & j \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & j \\ j & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & j \\ I_2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & I_2 \\ j & \end{pmatrix}$$

これらは $s_1 = \begin{pmatrix} & I_2 \\ I_2 & \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & j \end{pmatrix}$ で生成され，$s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}$, $(s_1 s_2)^4 = \mathrm{id}$ を基本関係式にもつ群，すなわち Sp_4 の Weyl 群となる。つまり，$Sp_4(\mathbb{F}_1)$ と Sp_4 の Weyl 群は一致する。

一般の n　$(n \geqq 2)$ についても，

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j & & \\ & & \ddots & \\ & & & j \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{F}_1),$$

とおくと，

Sp_{2n} は次の元で生成されることがわかる。

$$s_1 = \begin{pmatrix} & I_2 & & & & \\ I_2 & & & & & \\ & & I_2 & & & \\ & & & I_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_2 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} I_2 & & & & & \\ & & I_2 & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & & I_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_2 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} I_2 & & & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & I_2 & & \\ & & & & & I_2 \\ & & & & I_2 & \end{pmatrix},$$

$$s_n = \begin{pmatrix} I_2 & & & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & I_2 & & \\ & & & & I_2 & \\ & & & & & j \end{pmatrix}$$

またこの群が
$$\begin{cases} s_i^2 = \mathrm{id} & i = 1, 2, \cdots n \\ (s_i s_{i+1})^3 = \mathrm{id} & i = 1, 2, \cdots n-2 \\ (s_{n-1} s_n)^4 = \mathrm{id} & \\ s_i s_j = s_j s_i & |\,i - j\,| \geqq 2 \end{cases}$$

という基本関係式をもつことも確かめることができる。

つまり，$Sp_{2n}(\mathbb{F}_1)$ と Sp_{2n} の Weyl 群が一致することがわかる。

6 B_n 型

$SO_{2n-1}(\mathbb{F}_1)$ $(n \geqq 2)$ については，

$$s_1 = \begin{pmatrix} & I_2 &&&&& \\ I_2 &&&&&& \\ && I_2 &&&& \\ &&& I_2 &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& I_2 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} I_2 &&&&&& \\ && I_2 &&&& \\ & I_2 &&&&& \\ &&& I_2 &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& I_2 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} I_2 &&&&&& \\ & I_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& I_2 &&& \\ &&&&& I_2 & \\ &&&& I_2 && \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

$$s_n = \begin{pmatrix} I_2 &&&&&& \\ & I_2 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& I_2 &&& \\ &&&& I_2 && \\ &&&&& j & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

で生成される群と同型になることがわかる。したがって，$SO_{2n-1}(\mathbb{F}_1)$ は Sp_{2n} の Weyl 群，すなわち SO_{2n-1} の Weyl 群と同型である。

7 D_n 型

$SO_{2n}(\mathbb{F}_1)$ $(n \geqq 4)$ については，

$$s_1 = \begin{pmatrix} & I_2 &&&& \\ I_2 &&&&& \\ && I_2 &&& \\ &&& I_2 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& I_2 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} I_2 &&&&& \\ && I_2 &&& \\ & I_2 &&&& \\ &&& I_2 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& I_2 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} I_2 &&&&& \\ & I_2 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& I_2 && \\ &&&&& I_2 \\ &&&& I_2 & \end{pmatrix},$$

$$s_n = \begin{pmatrix} I_2 &&&&& \\ & I_2 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& I_2 && \\ &&&&& j \\ &&&& j & \end{pmatrix}$$

を生成元としてとることができる。これは SO_{2n} の Weyl 群と同じ基本関係式をもつことが確かめられる。

8 今後の課題

[黒川・小山] を読んで，$\mathbb{F}_1$ 上の数学に興味をもったことは既に記した。もともと代数的な考察が性分にあうので，“$\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体” について考えてみよう，そのためには “よい”$\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体の典型例を作ってみてはどうだろう，GL_n は [黒川・小山] で求められているし，Sp_{2n} 型なら試金石にうってつけではないか，こうい

う思惑があったのも事実である。もちろん，[Tits] の記述の検証をしてみたいという思いも大きい。しかし今回のように「条件をみたす元をとりだして構成する」方法では，かなり効率が悪く，たとえば G_2 型程度ならば計算機に頼れば何とかなりそうであるが，E_8 型は計算させる気にもならない。

別の反省として，こういった構成で得られた $\mathbb{F}_1$ 上の代数群の閉部分群をすべて “代数群” と見なしてよいのか，という問題が発生する。勝手な有限群は適当な n をとれば，n 次対称群 S_n の部分群として埋め込むことができる。有限集合なのだから（$\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体に適切な位相はよくわからないけれど）閉集合と考えるのが無難である。したがって，GL_n の閉部分群ということになり，どこの馬の骨ともわからない有限群も “高貴” であるはずの（線形）代数群と見なさなければならなくなってしまう。これは具合が悪い。

つまり，この骨組みに肉（“体”）を与えるともともとの代数群に戻れる仕組みなどといった，幾何学的な何らかの考察を得たいと考えている。その暁には “Weyl 群になれなかった（有限）Coxeter 群たち”–例えば位数 10 の二面体群などにも肉づけを与えてみたいのであるけれど…。

参考文献

[Tits] J.Tits: Sur les analogues algebriques des groupes semi-simple complexes, Colloque d'algebre superieure, tenu a Bruxelles du 19 au 22 decembre 1956, Centre Belge de Recherches Math., Gauthier-Villar, Paris 1957, 261-289

[岩堀] 岩堀長慶: 対称群と一般線形群の表現論, 岩波書店, 1978

[Spr] T.A.Springer: Linear Algebraic Groups, Second Edition, , Birkhäuser, 1998

[庄司] 庄司俊明: ドリーニュ–ルスティック指標を訪ねて —有限シュバレー群の表現論—, 堀田・渡辺・庄司・三町「群論の進化」第 3 章, 朝倉書店, 2004

[Dei] A.Deitomar: Schemes over F_1, arXiv:math/0404185v7 math.NT, 2006

[CoCoMa] A.Connes, C.Consani, M Marcolli: Fun with $\mathbb{F}_1$, arXiv:0806.2401v1 math.AG, 2008

[CoCo] A.Connes, C.Consani: On The Notation of Geometry over $\mathbb{F}_1$, arXiv:0809.2926v2 math.AG, 2009

[LoLo] J.López Peña, O.Lorscheid: Mapping $\mathbb{F}_1$-land: An Overview of Geometries over The Field with One Element, arXiv:0909.0069v1 math.AG, 2009

[黒川・小山] 黒川信重・小山伸也: 絶対数学, 日本評論社, 2010

[MaTe] G.Malle, D.Testerman: Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 133, 2011