東京学芸大学附属高等学校紀要　46　pp.1～12, 2009

数学における教材校構成について

On the Construction of Teaching Materials in Mathematics

数学科　岸　谷　正　彦

＜キーワード＞　教材作成、数学的帰納法、四面体、奇跡と方程式

0．はじめに

「なぜ数学を勉強するのか」、直接問われることがなくても、毎日の授業の中で、生徒からは、その問いが無言の中にも常に発せられていることを意識しなければならない。「なぜ学ぶのかは究極の問題であろう」が、「なぜ数学を学習するのか」も即答しかねる難しい問いである。数学を勉強して、「分かると面白いよ」、「後で役にたつから」、「大学入試で使うじゃないか」、「今、目の前にあることをやったら」これらの回答は、数学が分からなくて困窮した生徒には、空しく響くだけであろう。

「なぜ数学を学習するのか」に対し、標語的によく挙げられるのは、「実用的な価値」、「文化的継承または教養的な理解」、「能力を最大限に引き出し育てる陶冶的意味」、「創造的な活動実践」であろう。多くの教師の教育観もそのような観点で数学学習の価値を見いだしていると思われる。私自身も、本校の教師として、気を付けてきたことは、「本質を理解させること」、「数学の創造の営みの体験」である。手を動かして試行錯誤の後で理解したものは、本物の理解であり、それが、数学を身に付けていくための結局は近道と考える。もし分からなくなった生徒にも、少しでも自分で考えることができれば、少しずつではあるが、進歩が見込まれる。その姿勢を授業の中の随所で取り入れた授業が特に大切と考える。このような数学を考えるための方法を意識させる授業を、多く行うことが、探究する心態度が育まれるのではないかと考える。

1．数学を考えるための方法を意識させる授業

例1　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$0 \le a < 1,\ 0 \le b < 1$ のとき　$ab + 1 > a + b$

(2)　$0 \le a < 1,\ 0 \le b < 1,\ 0 \le c < 1$ のとき
　$abc + 1 > a + b + c$

(3)　$0 \le a < 1,\ 0 \le b < 1,\ 0 \le c < 1,\ 0 \le d < 1$
　のとき　$abcd + 1 > a + b + c + d$

(1) は、よく授業で扱う不等式である。使われている文字、a、b の数を増やしていくと、(2) (3) が得られる。

(2) (3) は、(1) をより一般化したものであることは直ぐに分かるが、証明は、証明した不等式を利用する方が易しい。

一般の命題は、次の命題である。

$0 \le a_i < 1\ (i = 1,2 \cdots\cdots n)$ のとき、

$a_1 a_2 \cdots\cdots a_n + 1 > a_1 + a_2 \cdots\cdots + a_n$ が成り立つ。

例2　(1)　関数　$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

の最小値を求めよ。

(2)　関数

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots\cdots\cdots + |x - a_n|$

の最小値を与える実数 x をすべて求めよ。ただし、

$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots,\ a_n$　は、$a_1 < a_2 < \cdots\cdots\cdots < a_n$ を満たす定数である。

絶対値の場合分けの学習で、グラフで表現した方が分かりやすいことが多い。絶対値の付いた項を順次増やしていくことで、絶対値の付いた項の個数が増えた場合を類推し、奇数個と偶数個に分けて考えればよいことから、実際の解答が始まる。このような例は、枚挙の暇がない。等号の記号 = ひとつを考えても、文字式の中での等号の意味と、２つのベクトルや行列どうしが等しいのとでは、意味が異なるのである。多くの学校でも、少なくともこれらを意識した授業は行われているものであるが、ここで使われているのは、「分類、一般化、類比、帰納、推測して考える」という数学の研究でよく使われる概念であり、それを演繹的に正当化する証明と合わせて、このような概念を理解する、実行する授業が必要であると考える。

2．ここで簡単に、分類、一般化、類比、帰納、推測して考えることの内容をまとめておく。

(1) 分類

分類は、数学の発展には欠かせない手法である。同類のものをまとめ分類して考えることは、対象を絞る上で、あるいは物事の本質を知る上で、実社会でのさまざまな場面で活用される手段である。例えば、整数を剰余類で分けて考えることで、無限個の集合をあたかも有限個の代表元で扱うことができる。高校数学では、場合分けと言った方が馴染みやすいが、場合を分けるのは、必然性があるからであり、分類はより整理するための方法であり、同じ対象であっても、一通りではない。どのような視点での分類なのかが重要と考える。3次関数のグラフの分類、分数関数の分類、解の判別など、さまざまな場面で使われている。

(2) 一般化

一般化も授業の中で意識して取り入れたい考え方である。帰納的に推論して一般化することは、数学の研究の手法そのものであり、その体験で、数学を創造する喜びや面白みを体感できると考える。さらに条件を弱めたり強くしたりすることで、特殊化や一般化をはかることができる。これを自分で創作していくことで、自分だけの数学が意識できる。ピタゴラスの定理から余弦定理、三角比から三角関数、さまざまな等式や不等式、展開と二項定理などは、意識させたい内容である。

(3) 類比

類比は、アナロジーと言った方が分かりやすい。1つの方法を別の問題に適応したときアナロジーが成り立っていてハッとすることがある。また同じような構造の数学対象に関して類似した手法が成り立つのは、ごく当たり前のようであるが、数学ではよく使われる研究の手法である。積分での量の和の原理が、面積や体積、表面積などにそれが適用できるのは、アナロジーと言える。同型、準同型である2つの集合において、一方で成り立つことを他の集合で確かめることは茶飯事である。あるいは、図形の問題で重心に関して成り立つ定理において、重心を外心に変えてどのような定理が成り立つかを調べることは、アナロジーを適用していると考える。

(4) 帰納

G. Polyaは、創造的な活動を支えるのが、帰納であるとしている。それは、科学者が経験したことを整理し、それから抽出した事実をまとめたり、発見したりする過程でする手続きの中で使われるものであるとしている。さらにそれを支える態度として、確かめたり、やり直したりすることを決断する「知的な勇気」、間違いや不十分なところが見つかった場合には、潔く改めることができる「知的な正直さ」、さらに明確な判断がつかない場合でも優柔不断な態度をとらない「賢明な自制」が必要な態度であるとしている。これを授業の中で、生徒自らが学びの中で体験することが大切と考える。今では、具体的な教具を用い、さらには道具としてのコンピュータや電卓などを使って実験や試行錯誤を行うことは、帰納的に推論する上でも、でさまざまな場合でこれを助ける。その姿勢を身に付けることが大切である。

(5) 推測

これは、(1)－(4)　とは、同列には扱わない方がよい。(1)－(4)を使って推測していくのである。しかし教材を通して学ぶ態度として外せないものである。最後に推論して、定式化されたことを、証明することは、当然の態度である。推測しただけでは、正しいのか誤りであるのか、それさえも断定できない。教師は，生徒の要求に対して、対応できる力を必要とする。

3．授業例

(1) 数学的帰納法

具体的な場面から事実を帰納しそれを数学的に証明することは、学習指導の観点からも重要である。その正当性の証明に使われる数学的帰納法は、高校数学の1つのピークになるはずのものである。しかしながら数学的帰納法は、教師にとっても教えにくい厄介な教材であるし、生徒にとっても何となく分ったような、しかし釈然としない題材であることは、確かである。最初から使えれば良いと言う観点から、形式的な証明法のみを扱う授業も多い。

疑問や誤りを生じさせる原因を、村上氏は、” $p(k)$ ならば $p(k+1)$ の証明の意味”、” $p(1)$ の意味”、” $n=k$ のときの意味と意義”の3つが理解できないからとしている。「推論において、 $p \Rightarrow q$ が真を示しただけでは、 p も q も真であるかどうか判断できない」、「もともと p が真の場合のみを扱っているのに、 $p(1)$ の意味、 $p(k)$ ならば $p(k+1)$ の証明の意味は、理解できない」、すなわち論証指導に問題があること。また、「 $p(1)$ の証明、 $n=k$ と置き換えて証明する操作も、教師が考えているほど、単純なものではない」、という指摘をされている。そこでは、具体から一般への推測の過程を重視した指導を推称されている。

これを受けて、ここでは、証明の構造を自分で確かめながら、証明していく授業案を提示する。

指導のねらいは、以下の点である。

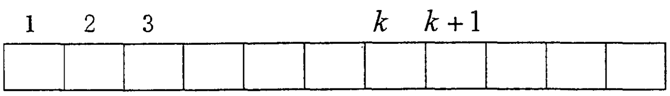
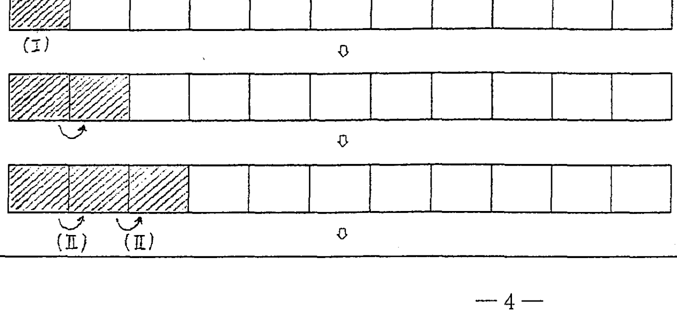
目的(1) 数学的帰納法の構造を理解し、自分で説明できる。

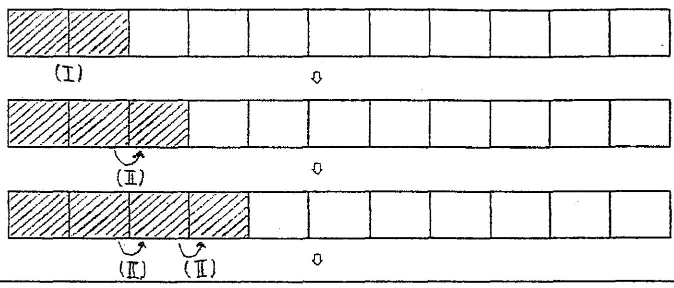
(2) 数学的帰納法の拡張を知ることで、その構造のイメージを広める。さまざまな証明法に拡張できることを自らためすことで、数学的帰納法のよさを知る。

対象および既習事項

ある程度、数学的帰納法が使える、使ったことがある方が望ましい。また、数列や漸化式の処理、等式、不等式の証明方法なども既習事項としたい。

指導内容	学習活動（◎：説明、○：指示・発問、●：活動）	指導上の留意点・評価
導入	○次の不等式を証明して下さい。 $0<a<1,\ 0<b<1$ のとき、 不等式 $(1-a)(1-b)>1-(a+b)$ が成り立つ。	大小の比較は差をとる。 実際は、$0<a,\ 0<b$ で成り立つ。
	○これを拡張して考えたいと思います。どのような拡張が考えられますか。それは、どのような不等式の形で表現されますか。 例えば，次のような不等式が成り立つ。 $0<a<1,\ 0<b<1\ ,\ 0<c<1$ のとき、 不等式 $(1-a)(1-b)(1-c)>1-(a+b+c)$.	拡張って何？にも答える。今回は文字の個数を増やす（左辺の積の個数を増やす）しかないか。 あくまでも予想でよい。
	●では、これを証明してみましょう。 ○では、どのようにして証明したか。	
	証明１　左辺$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$ $=1-(a+b+c)+abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1)$ $>1-(a+b+c)$	証明 1 は、直接　左辺−右辺>0 を直接変型して示す。意外に難しい。
	証明２　左辺$>(1-(a+b))(1-c)>1-((a+b)+c)$ $=1-(a+b+c)$	証明２は、上の問いを利用する方法である。
	○どの証明がいいと感じますか。 ○左辺の積が４つの場合は、どうだろう。文字が３つの場合をうまく使えば、より簡単にできるね。 ○では、文字の数が、n 個の場合は、どうだろう。どんな不等式が成り立ちますか。さらに証明はどうするのかな。	いいというのは、主観的な言葉である。 感覚的には，一般性がある、証明がしやすい、分かりやすいなどが混在していて、そこからの各自の判断を期待している。
	以下、$0<a_i<1$ とする $(i=2,3\cdots\cdots n)$。命題に名前をつけて、 $P(i)\ :\ (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$	無数の不等式ができることを理解させ、 それが、一般的に $P(n)$ の形で書かれる ことを理解させる。
	● 証明したいことは，なんですか。 答　自然数 n について、$n\geq 2$ であれば、$P(n)$ が真である。 「すなわち　$P(2)\ ,P(3)\ ,\cdots\cdots,\ P(99)\ ,P(100)\ ,\cdots\cdots$　が	記号を導入することで，問題を体系的に言い表すことができるのだが。 これは、重要な質問である。

指導内容	学習活動（◎：説明、：○指示・発問、●：活動）	指導上の留意点・評価
展開	◎すべて真である」という事ですね。 ○さっきは、どうやって証明しましたか。例えば$P(100)$を示すには, ○　$P(99)$は正しいですか。答　それは、$P(98)$を使って示します。 ◎　これを次のようにいいかえましょう。 $P(k)$を使って、$P(k+1)$　が成り立つことを示すことは、必要ですよね。これが示せたとしましょう。もし$P(k)$が真ならば、$P(k+1)$　が真になります。 ○$P(k)$が真であることを ○　$P(k-1)$が真であることを言うには　答　$P(k-2)$が真であれば良くて、結局$P(2)$　か　$P(3)$が真であればいいのでは。 今回は，$n \geq 2$ですから、$P(2)$が真であれば良いですね. この証明の、証明の手順を言える人は、いませんか。 （Ⅰ）$P(2)$が真であることを示す。 （Ⅱ）$P(k)$ならば$P(k+1)$とい命題が真であることを示す。 （Ⅰ）（Ⅱ）が成り立つことが示せたら、$n \geq 2$の自然数nについて　、$P(n)$が成り立つ。 ○これを、次のように、イメージとして捉えておきましょう。 図のように、四角の箱が無数にあり、上に番号がついている。  （Ⅰ）どこか一ケ所に斜線を入れる。 （Ⅱ）つねに（Ⅰ）の場所の右側にある箱が斜線ならば、隣も斜線を入れてもよい　という約束をする。 そこで、次々と、四角形に斜線が入っていく。 	答　$P(99)$を使います。 $P \Rightarrow Q$が成り立つとき、Pが真ならば、Qも真である。ここで強調する。 答　$P(k-1)$が真であれば良い。 （Ⅱ）の部分が命題なのか常に成り立つのかが曖昧であるから、何となく不思議になる。 説明してもらう。 $P(2)$と（Ⅱ）から$P(3)$が正しい。 以下$P(3)$と（Ⅱ）から$P(3)$が正しい。 以下これを繰り替えして、$n \geq 2$の自然数nについて　、$P(n)$が成り立つことが言える。 石谷茂氏のアイデアである。 $n=1$でなくてもよい。 将棋倒しの原理である。ただし、これは、本質を理解させているのではない。あくまでもイメージ。

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（◎：説明、○：指示・発問、●：活動）</th><th>指導上の留意点・評価</th></tr>
<tr><td></td><td>○次を数学的帰納法を用いて証明してみよう。
$F_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ ， $t = x + \frac{1}{x}$ とするとき、F_n は、 t の n 次の整式であることを証明せよ。
●（Ⅰ），（Ⅱ）に、対応するものとして、何を考えれば良いか。
（Ⅰ）$n=1$，$n=2$ のときが成り立つことを示す。
（Ⅱ）$n=k$，$n=k+1$ のとき成り立つことを使って、$n=k+2$ のときを証明する。このイメージは，どのように考えるか。

</td><td>$F_{k+2} = x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$
$= (x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}})(x + \frac{1}{x}) - (x^k + \frac{1}{x^k})$

いろいろやってみる。$n=1, 2, 3$
$n=2$ と $n=3$ のときを用いて $n=4$ のときを示す。

証明のイメージを書いてもらう。</td></tr>
</table>

補足１　さらに、帰納法を拡張することができる。

問　整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n$　$(n = 1,2 \cdots\cdots)$ によって定める。

このとき、a_n が偶数であるならば n が3の倍数である

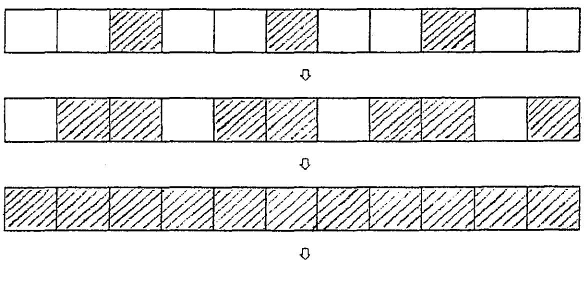
、a_n が奇数であるならば n が3の倍数でないことを示せ。

略解　$a_{3l+3} = 2a_{3l+1} - 21a_{3l}$，$a_{3l+2} = 2a_{3l} - 21a_{3l-1}$

から、$l = 1,2 \cdots\cdots$ について、a_{3l} が偶数，a_{3l-1} が奇数

であることを帰納法で示し、さらに、a_{3l+1} が奇数である

ことを帰納法で示す。この帰納法のイメージは、次の様である。



このように、数学的帰納法の拡張が考えられる。次は、数学的二重帰納法と呼ばれるものである。

問　　自然数 m，n に対し，関数　$f(1,1) = 1$，

$f(1,2) = 3$，$f(2,1) = 4$，

$f(m+1, n+1) = f(m+1, n) + f(m, n+1)$ で定める。このとき、 $f(m,n)$ を m，n で表し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

この問題のイメージは、下の表のようである。

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

補足２　普通 $P(k)$ はもともと真であるがために、生徒はその必要性を感じていないと言われる。そのため、次のような例があるが、これは、指導者のみ知っておくことでよいであろう。$P(k)$ が偽であり、$P(k)$ ならば $P(k+1)$ は、真の命題である例。

$1 + 2 + \cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$　ならば、

$1 + 2 + \cdots\cdots + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$　は、真である。実際　$P(k)$ ならば $P(k+1)$ を証明するのに、$P(k)$ の真偽は、問わないことが分かる。

(2) 四面体を用いた補助線と類比の授業

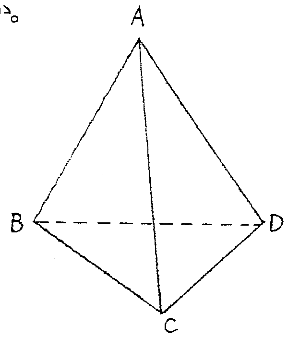
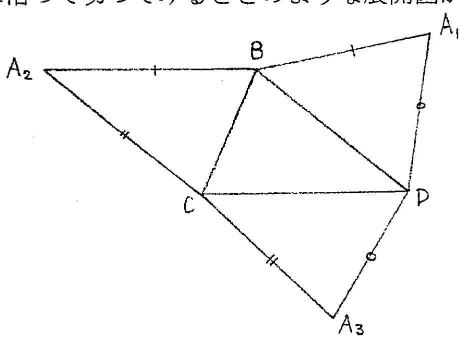
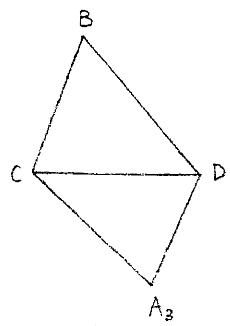
我々は、３次元の世界に住んでいながら、空間を認識することが苦手である。例えば、空間図形(立体)を前にしたとき、一つの視点から全体を把握することは当然困難である。視点を変えて観察しても、全体を結び付けて考えることは容易ではない。

空間認識の一つの具体的なアプローチとして、立体については、展開図や断面図を考え、回転体であれば回転軸と回転させる面を考える。あるいは、模型(モデル)を作ることにより、その立体のもつ特徴を捉えたりする。実際、空間に慣れ親しむためにも、モデルを作ることもかなり有効な空間理解につながる。さらに、平面で成り立つ事柄を、空間でも拡張できないかを考える。その考え方で類比を思い出させる。

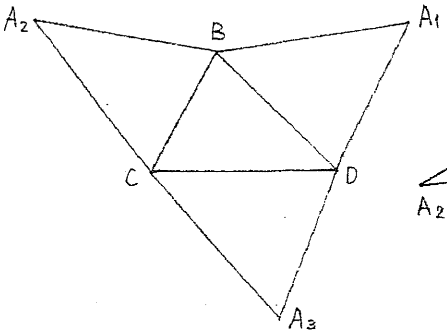
指導のねらいは、以下の点である。

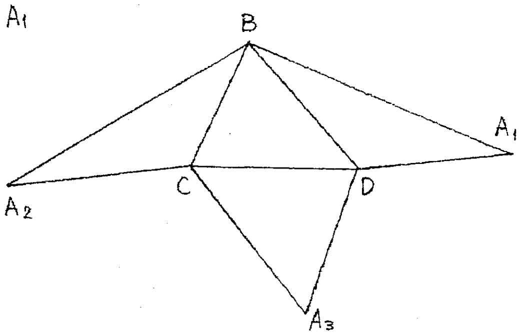
1) 四面体作りの実験をしながら、正しい予測をたて確かめる。実証していく過程で、なぜそうなるのかを考えさせる。四面体を作る過程で、どのような場合に作れるのか、どのような場合に作れないのかを、実際に作図し、工作用紙を使って調べる活動である。さらに問題を明らかにするために条件を簡潔化し、可能な条件を推測し検証する。

2) 常に作れる四面体として等面四面体に着目する。単に一つの立体にのみ着目させるのではなく、それに外接する直方体との関係から、等面四面体の性質を調べてみる。平面図形の類比が成り立つことを気づかせる。等面四面体の模型をみて、成り立つ性質を類推する。そのとき、正四面体の性質や、平面図形で学んだことが裏付けになる。さらに等面四面体を含む直方体を考えることの有用性を感じさせたい。

指導内容	学習活動（◎：説明、○：指示・発問、●：活動）	指導上の留意点・評価
導入	○ここに四面体があります。稜線に沿って切ってみるとどのような展開図が得られますか。   ○四面体を稜線 AB, AC, AD で切ると、三角形 BCD の周りに、三つの三角形が付いた平面図（展開図）が得られます。 ◎今後は、この展開図が得られる切り方の場合のみ扱います ○ これは、どのような条件で特徴付けられますか。 答 $A_1B = A_2B$, $A_2C = A_3C$ ， $A_3D = A_1D$ という辺の長さの条件で特徴付けられる。	四面体を４つ程度用意し、実際に切ってもらう。全て切り離すのではない 特に、一般性は失わない。その理由も確認する。 この条件は、丁寧に導き出す必要がある
主題	○ それでは、任意に与えられた、三角形 BCD の周りに上の条件を満たすような三つの三角形を付けて、それらを折り返したとき、いつでも四面体は作れると思いますか。	前半のメインテーマ 逆の設問であるが、分かりづらいであろう。
展開1	●実際に調べてみよう。 まず、三角形 BCD を与えます。さらに A_3 を任意にとり固定すると三角形 CDA_3 が得られます。このとき、四面体の展開図になるような、A_1 と A_2 は必ず、とれるでしょうか。  	これを言い換える 疑問を持たせる。 これは、点がとれるかという問題になる。

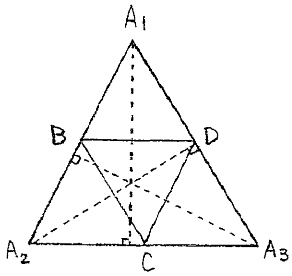
<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（◎：説明、○：指示・発問、●：活動）</th><th>指導上の留意点・評価</th></tr>
<tr><td>展開
2

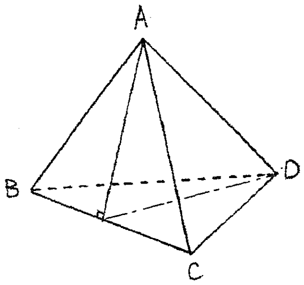
展開
3</td><td>●ここに三角形BCDと三角形CDA_3を与えた工作用紙がありますから、各自、残りの２面を付けた展開図を描き、それを切って、四面体を作ってみよう。


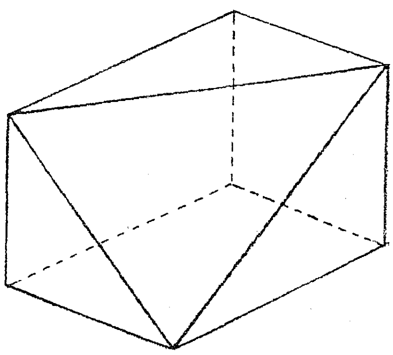
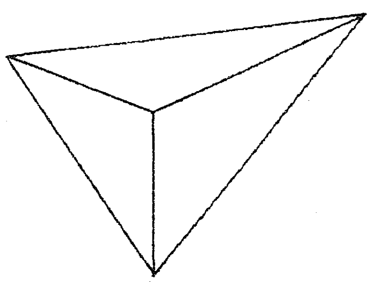


○一般的に作れないとしたら、どのような場合だと作れるのでしょうか。
答は、補足１に示した。
○ 正四面体（全ての面が正三角形）を、稜線で切ると展開図が得られます。これは、正三角形の各辺の中点P, Q, Rをとり、線分PQ, QR, RPで折り返して四面体を作ると、正四面体が得られることを示しています。

○ 実は、鋭角三角形からは、いつでも四面体が作られます。この４つの面は、すべて合同で、この四面体を特に<u>等面四面体</u>といいます。等面四面体について調べてみましょう。模型があります。

◎等面四面体を頂点から見ると、頂点から対辺に下ろした垂線の足は、展開図の三角形の垂心であることが分かる。なぜか？
答




○等面四面体は、外接する直方体の存在が示せる。模型があります。直方体の輪ゴムをはずすと、等面四面体が現れます。


◎直方体と内接する等面四面体の模型から、どのような性質が等面四面体にあるでしょうか。考えてみよう。</td><td>１人３－４枚渡す
コンパスが必要

作れた人はいますか。

作れない場合も考えさせる。

任意の三角形の３辺の中点を結んだ３本の線分PQ, QR, RPで折り返して、四面体は作られるでしょうか。鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形の種類に分けて調べてみましょう。
鋭角三角形からはいつでも作れる。直角三角形、鈍角三角形からは作れない。
いくつかの方向から等面四面体を見せる。展開図と立体をうまく結び付けないと考えられない。</td></tr>
</table>

指導内容	学習活動（○：説明、●：指示・発問、◎：活動）	指導上の留意点・評価
	<解答例> 1）対辺の長さは、一致する。 2）対辺はねじれの位置にある。 3）体積は、直方体の体積の$\frac{1}{3}$である。 4）対辺の中点を結ぶ線分（対辺中線）と対辺は直交する。 5）対辺中線は、1点で互いに直交する。 6）各頂点における面角の和は180°である。 ●性質を証明してみよう。	この模型を各自で作ることは有用である。 直方体の性質は、何だろう。それを使って、内接している等面四面体の性質が言えないだろうか。 正四面体の性質のうちいくつかは保存される。

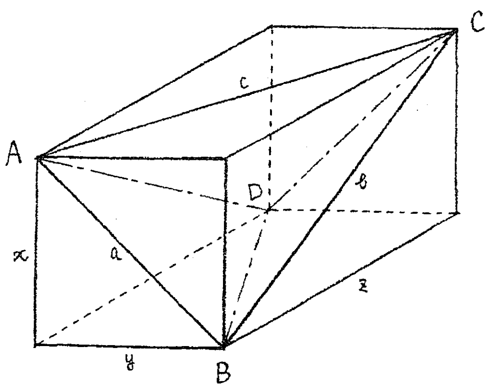
補足１　三角形BCDを与える。さらにA_3を任意にとり固定すると三角形CDA_3が得られる。このとき、四面体の展開図になるような、A_1とA_2は必ずとれるか。

<解答例>今、平面上で考えた四角形BCA_3DにおいてA_3を対角線CDを折り目にして、三角形CA_3Dを折り返した点をA_3'とすると、折り返す途中の立体が四面体$ABCD$になる。このことから、$A_1C = A_1D = l$とすると、$A_3'B < l < A_3B$であれば、展開図から四面体が得られる。

補足２　「任意の等面四面体は，ある一つの直方体に内接する」は、成り立つ。［略証明］等面四面体の４つの合同な面は，鋭角三角形である。それを底面とする三直角三角形（他の３つの面がすべて直角三角形）は、ただ一つ存在する。よって、任意に等面四面体を与えたとき、一つの三角形の辺の長さをa，b，cとすると（鋭角三角形であるから$a^2+b^2-c^2>0$，$b^2+c^2-a^2>0$，$c^2+a^2-b^2>0$）が成り立っている。このとき，$x^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$，

$y^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$，$z^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

となる正の数x、y、zが存在する。このとき$y^2+z^2=c^2$，$z^2+x^2=a^2$，$x^2+y^2=b^2$であるから、次の図のような直方体が、存在する。



補足３　　等面四面体で見つかる性質として，

a) 等面四面体の重心、外心、垂心は、一致する。ここで、四面体$ABCD$の重心Gは

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$ で定められる点である。外心は，４つの頂点を通る球面の中心、内心は，４つの面に接する球面の中心で定義する。

これは、平面において、三角形の重心、外心、内心、垂心のうち２つが一致する三角形は，正三角形であるのアナロジーである。

b) 外心、内心、重心のうち２つが一致する四面体は，等面四面体である。

c) 四面体において、各面の面積が等しいならば、各面は合同である。すなわち、各面の面積が等しい四面体は，等面四面体である。

d) 等面四面体の体積は、一つの面の三角形の辺の長さをa，b，cとすると、

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

で与えられる。これは、三角形の面積のヘロンの公式のアナロジーである。

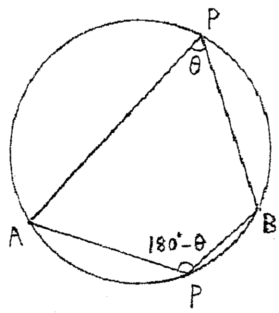
(3) 軌跡の方程式と2次曲線

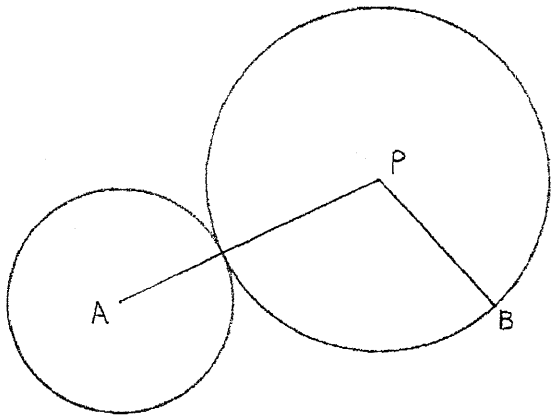
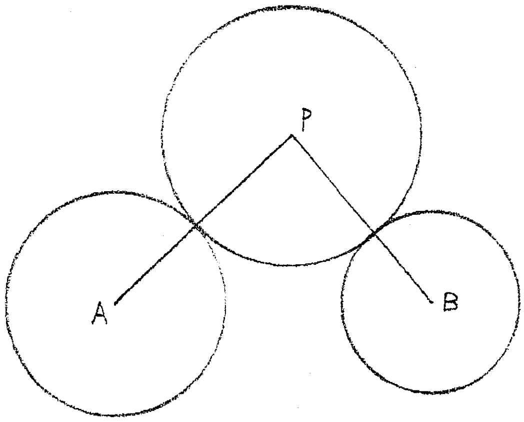
図形を対象にした幾何全般の学習は、図形の性質や証明方法を学ぶことに重点を置いてきた。そこにも軸足を置きながら、現在では、図形を通して数学的な考え方や問題解決をしていく過程の中で、数学の面白さやよさを理解させることにシフトしている。さらに高校では、図形を表現するのに解析的な手法やベクトルなどを用いて、同じ対象でもその取り組みの手法が異なることで、数学の考え方の深さを学ぶことができる。また、コンピュータを使って図形を変換させることや、さまざまな指導法の変化とともに、図形を通して何を学ばせるのかも必然的に変わらざるを得ない状況である。

「数学C」で学ぶ2次曲線の学習とその意義は次のように考える。まず数学IIで、直線や円などの基本図形を、ある条件を満たす点の集まり(軌跡)と考える。すなわち領域も含めて、図形をある条件を満たす点の集まりとする考え方を理解させる。さらに方程式の次数に着目させ2次曲線につなげる。数学Cでは、2次曲線を定義した後、2次曲線の持つさまざまな性質の類似性とその違いを学びながら、2変数の2次方程式の表す図形の分類を最後に行う。高校で2変数の2次方程式をすべて分類できることにその到達点はあると考える。

この授業案のねらいは、以下の点である。

1) より簡単な条件を与え、軌跡が2次曲線であるような条件の与え方に至る。さらに、定点を定円などにかえることによってさまざまな軌跡があることがわかる。
2) それがどのような図形であるかを理解するために、2次曲線の定義を思い出すことになる。必要ならば、軌跡の方程式を作る。与えられた条件によって、だ円、双曲線、放物線に分類する。
3) そのような操作を通して、一般化の手順を学ぶ。それらを発表して報告する。

指導内容	学習活動（◎：発問、○：説明、●：活動）	指導上の留意点・評価
導入	◎ まず、1点Aを与えよう。この点から等距離にある点の集まりは、どんな図形になるか。　答　点Aを中心とする円 このようなある条件を満たす点の集まりを、その条件を満たす軌跡と言いましょう。 ◎ では、2点A、Bを与えよう。この2点から等距離にある点の軌跡は。 答　線分ABの垂直二等分線 ◎ では、3点A、B、Cを与えよう。この3点から等距離にある点の軌跡は。答　3点A、B、C を通る円 ○このように与えられた条件を、いろいろ変えていくとどのような図形があらわれるかを調べていきましょう。 ところで、条件を4点にする人はもういませんね。では点ではなくて直線にしよう。 ◎ 直線lを与えよう。この直線から等距離にある点の集まりは、どんな図形になるか。　答　直線lに平行な2直線 ◎ さてこのあと、どのような条件の代え方があるでしょうか。考えてみよう。 2直線(平行な、交わる) 例　2直線に平行な直線、交わる2直線で作られる角の二等分線 ◎ 等距離と言う言葉を変えよう。2点A、Bを与えて$\angle APB$が一定であるような点Pの軌跡は、 答　$\angle APB = 90^\circ$のときは、線分ABを直径とする円、一般に$\angle APB = \theta$または、$\angle APB = 180^\circ - \theta$のときは、図のような円になる。	少しずつ、目的を理解してもらう。 軌跡の復習 4点を通る円である。 自然な変化であること。 

指導内容	学習活動（◎：発問、○：説明、●：活動）	指導上の留意点・評価
本時の目標の示唆 展開 展開 発展	◎このように、条件を少しずつ変えていくことによって、軌跡が直線や円になることがあります。その他に軌跡が円になる条件はありますか。 　答　アポロニウスの円 説明すると 　2点A、Bを与える。この2点から等距離にない点の軌跡は？ ◎「等距離にない」は、正確な言い方ではありません。でも条件の代えかたとして、面白いが、正しくは、距離の比が一定といいます。 ◎2点A、Bを与える。この2点からの距離の比が一定(ただし等しくない)の軌跡は、$PA:PB=k:1$とすると。 　答　線分ABを$k:1$に内分する点と外分する点を直径の両端とする円 この軌跡を表す方程式の作り方は、大丈夫ですか。略 ●2定点A、Bからの距離の比が一定である点Pの軌跡は、円であた。この場合1つの定点を1つの定円に置き換えたらどうなるだろうか。だれか。 　答　例えば、半径rの定円Aに接し、定点Bを通る円の中心Pの軌跡  ●図を書いて、条件を満たす点Pをいくつか探してみよう。 答は、円ではない。さらに直線でもない。どんな図形か、さらになぜか。 　答　双曲線になりそうだ。 ◎なぜか。 ●それでは、今から、条件を各自で変えて、それを満たす軌跡がどのような図形になるか調べてみよう。 ○1つだけ例　2つの定円に外接する円の中心Pの軌跡を求めてみよう。  ◎さまざまな、条件の書き換えと、そのときの軌跡はどのような図形かを調べよ。	アポロニウスの円である。$PA=PB$ときは、直線であることは、確認 図を書いて、確かめる必要ならば、具体的に軌跡の方程式を求める問題が合った方がよい。 $P(x,y)$と置いて、距離の式を用いて、条件を書き換える。 メインテーマである。条件はどのように置き換わるのか、発言させる。 距離が等しいという条件を、点を通るまたは、円に接する円の条件で替える。 点Pの位置を作図させる。 条件を言ってみよう。 $PA-PB=r=$一定が言えるか。 半径をそれぞれ、r，r'とする定円A，B その他、必要ならば、2つの定円に内接する円の中心Pの軌跡を求めてもよい。

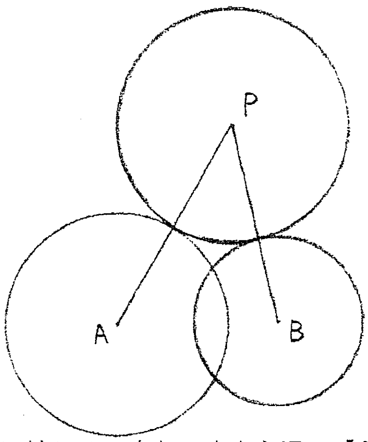
指導内容	学習活動（◎：発問、○：説明、●：活動）	指導上の留意点・評価
	◎では、発表してもらいましょう。 　答は、補足１ ◎この中で、軌跡が、だ円、双曲線、放物線である場合に分類してみよう。 だ円、双曲線、放物線 ◎ 特徴も分かるかな。補足２	補足２ 定円と直線の場合が、放物線、２ つの定円の内部の場合が、だ円、外部の場合が、双曲線になる。

補足１　定円 A の半径を r 、定円 B の半径を r' 、点 P から直線に引いた垂線の足を H とする。

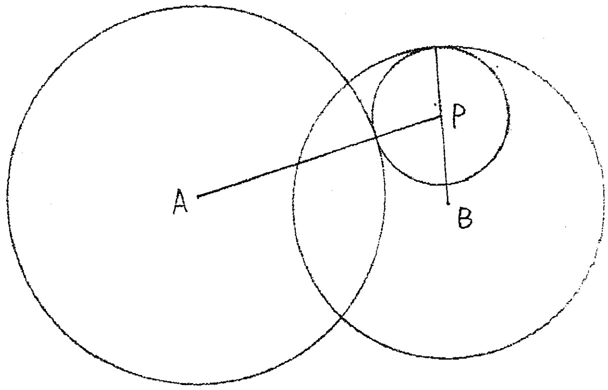
(1)　１つの定円と１つの定点(既出)【双曲線】

(2)　共有点のない２つの定円(既出)【双曲線】

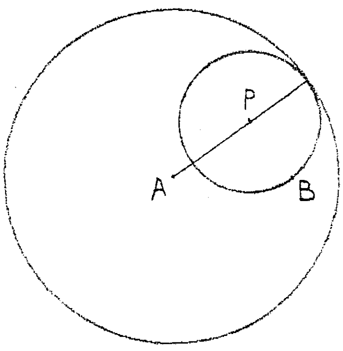
(3)　共有点のある２つの定円に外接する【双曲線】



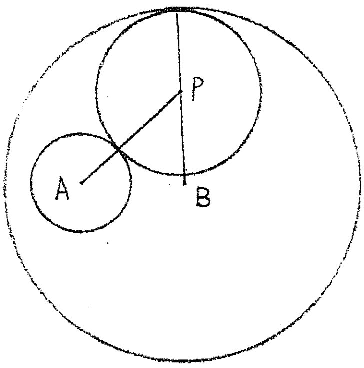
(4)　共有点のある２つの定円の一方に内接し他方に外接する【だ円】



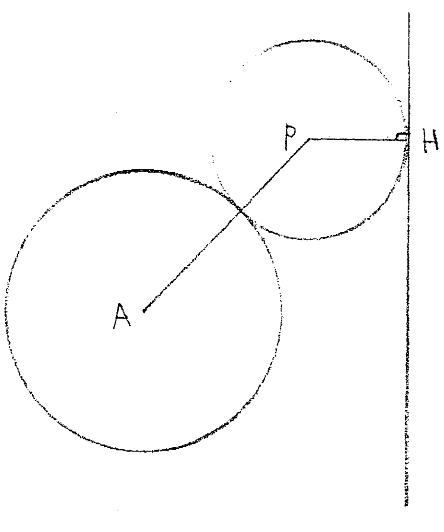
(5)　定点に接しその内部の定点を通る【だ円】



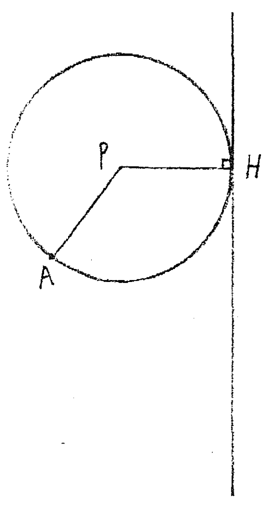
(6)　共有点のない２つの円の一方に内接し、他方に外接する【だ円】



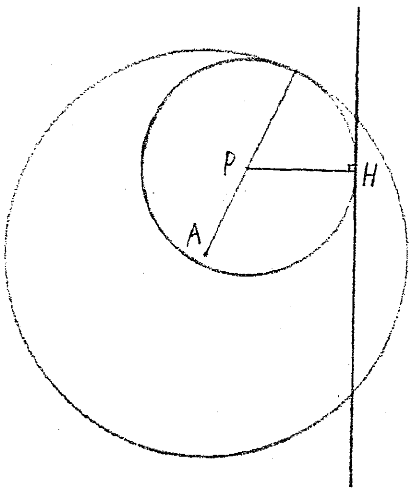
(7)　定円とそれに交わらない定直線【放物線】



(8)　定点とそれを通らない定直線【放物線】



(9) 定円とそれと交わる定直線【放物線】



(10) ２つの定点(既出)アポロニウスの円または、直線

４．おわりに

授業は、教師と生徒と教材の３つの構成要素があって成立する。しかしその構成要素が存在しても、必ずしも授業が成立するわけではない。教師が教材を通して伝えたい内容や、生徒が教材を通して何を学ぶのかを明確にした教師自身の綿密な計画、さらにメンタルな面として教師と生徒との教室内での信頼の関係も、授業成立の重要な要素となり、それらが相互に関係しあって初めて、安定した心地よい授業になる。

私が授業の組み立てを考えるとき、特に気を付けているのは、以下の点である。

(1) 生徒の反応、同僚教師の意見、自分の到達目標を合い照らし、無理のない計画で授業が行われているか。生徒の理解の過程を充分配慮した構成であるか。

(2) 自分達で作りあげていく授業、表現する授業、試行錯誤する授業、分ったという実感が持てる授業が随所に取り入れられているか。主体的に学習に取り組むことができる授業であるか。教師の一方的な説明で終始していないか。形式で終わらせていないか。本質の理解を求めているか。

(3) 基礎的・基本的な知識や技術の定着にも充分配慮されているか。

多くの教師は、各々の数学観に従って、授業を行っているが、私は、毎日の授業そのものが、「なぜ数学を勉強するのか」に対して、教師としての解答でなければならないと常々思っている。

＜参考文献＞

1) 長崎　栄三他　高校新数学科の在り方　明治図書　2004年12月
2) 清水　静海　人間力の向上に資する算数数学教育を探る　日数教東京大会講習会資料　2006年7月
3) 村上　一三　数学的帰納法の理解の困難点について　日本数学教育学会誌　1990第72巻　第11号
4) G．Polya(柴垣和三雄訳)　帰納と類比　丸善　1959年
5) 岸谷　正彦　数学ⅢCの現状と課題　日本数学教育学会発表資料　2006年8月
6) 栗田　稔　入門現代の数学［7］具象から幾何学へ　数学セミナー増刊　1980年
7) 岩田至康　幾何学大辞典　槙書店　1992年
8) 村崎　武明　等面四面体から等面六面体へ　数学セミナー　2004年3月号
9) 石谷　茂　大学入試数学の五面相(上)　現代数学社　1990年