数学を見いだす活動を促す指導に関する研究（１年次）

―　教材開発を中心として　―

鈴木　　誠（代表者）※3
矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田　辰一朗※2　永山　香織※2　羽住　邦男※3
傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　青山　久美子※4　井上　哲明※4　大谷　晋※4　佐藤　亮太※4
菅原　幹雄※4　祖慶　良謙※4　西川　史恵※4　田中　満城子※4　間　慎介※4　花園　隼人※4
吉岡　雄一※4　岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター
※２　東京学芸大学附属世田谷小学校
※３　東京学芸大学附属世田谷中学校
※４　東京学芸大学附属高等学校
※５　文京区立第六中学校
※６　荒川区立尾久八幡中学校

目　　　次

数学を見いだす活動を促す指導に関する研究（１年次）

―　教材開発を中心として　―

鈴木　　誠（代表者）※3

矢嶋　昭雄※1　稲垣　悦子※2　越後　佳宏※2　栗田　辰一朗※2　永山　香織※2　羽住　邦男※3

傍士　輝彦※3　峰野　宏祐※3　青山　久美子※4　井上　哲明※4　大谷　　晋※4　佐藤　亮太※4

菅原　幹雄※4　祖慶　良謙※4　西川　史恵※4　田中　満城子※4　間　　慎介※4　花園　隼人※4

吉岡　雄一※4　岡田　春彦※5　蓮沼　喜春※6

※１　東京学芸大学教育実践研究支援センター

※２　東京学芸大学附属世田谷小学校

※３　東京学芸大学附属世田谷中学校

※４　東京学芸大学附属高等学校

※５　文京区立第六中学校

※６　荒川区立尾久八幡中学校

１．研究の目的

平成22年度～平成24年度の 3 年計画でプロジェクト研究として、「算数・数学的活動を促す教材開発と指導法に関する研究」に取り組んできた。そこでは、あらたな教材開発を行うとともに、数学的活動を促す課題や指導に内在する条件について実践授業を通して具体的に示してきた。そして、研究の成果の一部を各学校で実施された現職研修において公表し、教員養成に対しても貢献し、学会発表も行なってきた。本研究はこの研究に続く研究として位置づけられるものである。

過去3年の研究では算数・数学的活動を促す教材や指導についていくつもの実践授業を通して算数・数学的活動を外延的に捉え研究を進めてきた。小学校では平成23年度、中学校では24年度から新学習指導要領による指導が行われ、高等学校においても平成24年度より学年進行に合わせて実施されている（数学・理科は先行実施）。各校種において、数学的活動がこれまで以上に重視され、算数・数学的活動を通した指導について具体的に明らかにしていくことは算数・数学教育において現代的な課題である。

本研究では、算数・数学的活動の中でも特に数学を見いだす活動に焦点をあてて研究を進める。見いだす活動に焦点を当てることとしたのは、見いだす活動に焦点を当てた授業を行なっていくことで、日本の子どもたちの数学に対する情意面の課題を改善し得るのではないかと考えたからである。日本の子どもたちは、数学の成績はよいが、数学が好きではなく、数学を公式の集まりとみており、解き方を覚えるものだと考えている傾向があることは過去の国際調査でも指摘されている。そして、そのような実態は現在も教室において指導する中で感じることもある。数学を見いだす活動に焦点を当てた授業を適切にカリキュラムに位置づけ指導することにより、数学は自分たちで作ることができるという意識へと変化させる一助となり、数学に対する情意面における課題を改善する方向へと向けることができるものと考える。

このような背景と課題意識のもと、本研究において次のことを明らかにすることを目的として研究を進めることとした。

＜研究の目的＞

１．数学を見いだす活動を促す教材開発を行い、その成果を蓄積すること。また、授業実践を振り返ることにより、数学を見いだす活動とはどのような活動であるかを、授業の中で子どもたちが行う具体的な活動をもと

にして事例的に明らかにすること。

2．小・中・高等学校における授業研究を通して、各学校段階における数学を見いだす活動の違いや共通点は何かについて知見を得ること。そして、その知見をもとにして、よりよい算数・数学の授業のあり方や小4～中～高1までの6年を見通したカリキュラムを検討すること。

3．研究を通して得られた知見について、各附属学校で行っている現職研修セミナーなどの機会を通して、教員養成や現職教員研修に資すること。

2．研究の方法

(1) 目的1に対しては、文献による研究やこれまで扱ってきた課題を数学を見いだす活動を視点として再検討することを通して、算数・数学的活動を促す指導において扱うことができるような課題を開発する。そして、開発した課題をもとに、授業研究を通して教材開発を行い、その成果を蓄積する。蓄積された授業実践を検討することにより、数学を見いだす活動がどのような活動であるかを授業の中で子どもたちが行う活動をもとにして明らかにする。

(2) 目的2に対しては、小・中・高等学校における授業研究や毎月の附属研究会を通して知見を得る。授業研究においては、同一の課題を異なった学校段階において扱うことや、同種の活動（帰納的に調べるなど）を行った際にどのような活動の違いや共通点があるかに目を向け検討し知見を得る。

(3) 目的3に対しては、各附属学校が行っている現職研修セミナーを研究の成果をもとにして実施する。また、各学校で実施される公開研究会で成果を公開したり、教育実践研究支援センターの教育実習部門と連携をとり、教員養成において本研究で得られた知見をどのような形で生かしていくかを検討し、教員養成の充実に役割を果たす。

3．研究計画

本研究は3年計画で実施することを念頭に置き、進めてきている。その計画は次のようにまとめられる。

平成25年度（1年次…本年度）

<u>数学を見いだす活動を取り入れた授業づくりと教材収集のための基礎的研究</u>

教材や題材の収集（4月～3月）および授業研究（10月、11月、1月、2月）を通しての授業記録の収集。各月の附属学校研究会での研究討議。

8月に行われた、日本数学教育学会全国大会において、附属世田谷小から4名（稲垣　悦子、越後　佳宏、栗田　辰一朗、永山　香織)、附属世田谷中から2名（鈴木　　誠、峰野　宏祐)、附属高校から2名（佐藤　亮太、花園　隼人、吉岡　雄一）が成果の一部を発表した。

また、以下のような公開授業研究会を行い、各校からそれぞれ授業を観察し、授業後の研究協議会や附属研究会において意見交換を行った。

小学校　8月21日（水）授業者　越後　佳宏（6年　速さ)、永山　香織（5年　商分数)、
稲垣　悦子（2年　かけ算）
中学校　11月11日（月）授業者　峰野　宏祐（1年　比例・反比例の活用）
高　校　11月30日（土）授業者　大谷　　晋（2年　面積を求める）
祖慶　良謙（2年　3次方程式の解の公式をつくる）

平成26年度（2年次）

<u>数学を見いだす活動の共通点や相違点に関する研究</u>

教材や題材の収集（4月～3月）および授業研究（6月、10月、11月、1月）を通しての授業記録の収集。

これまで得た記録をもとにし、数学を見いだす活動とはどのような活動であるかを子どもが行う活動をしめして明確にする。また、小・中・高等学校において同一の課題を用いたり、同種の活動（帰納的に調べるなど）による授業を行ったりする中でよりよい算数・数学の授業のあり方や小 4 ～中～高 1 までの 6 年を見通したカリキュラムを検討する。

8 月に行われる、日本数学教育学会全国大会において、成果の一部を発表予定。

平成27年度（3年次）

<u>数学を見いだす授業づくりと現職研修および教員養成への貢献</u>

1 年次、2 年次までに得られた知見を現職研修および教員養成においてどのような形で扱っていくかを教育実践研究センターの教育実習部門と連携する中で検討し、実施する。現職研修セミナーについては 8 月と 3 月に実施。8 月に行われる、日本数学教育学会全国大会において、成果の一部を発表予定。　　（文責　鈴木　　誠）

４．研究の実際

４．１．小学校における教材開発

４．１．１．第６学年「速さ」の授業

日　時：平成25年 8 月21日（水）児　童：第 6 学年 1 組26名（男子14名　女子12名）

授業者：越後　佳宏

（1）単元の目標

単位量あたりの考えを基にして、速さを数値化し、求めることができる。また、速さを生活や学習に活用しようとする。

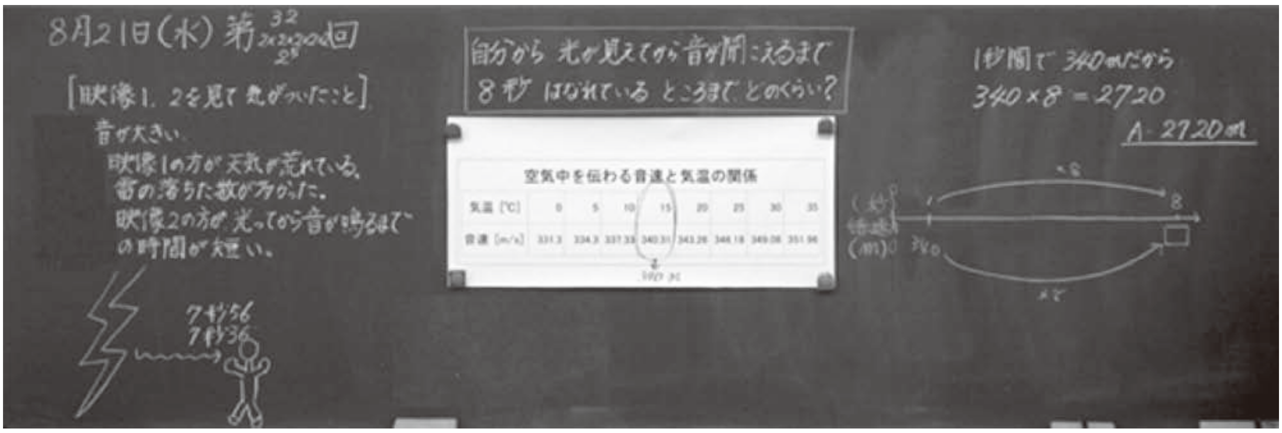
（2）本単元で大切にしたいこと

- *日常生活の事象から問題を見出し、算数の舞台にのせ、問題を解決し、日常生活に活用しようとする過程を大切にする。*
- *「速さ」の問題場面で、速さが分かっていれば、時間が決まれば道のりが決まる、または道のりが決まれば時間が決まる、など「何が決まれば何が決まる」という関数的な見方を養い、そのよさを実感する。*

（3）本時の目標

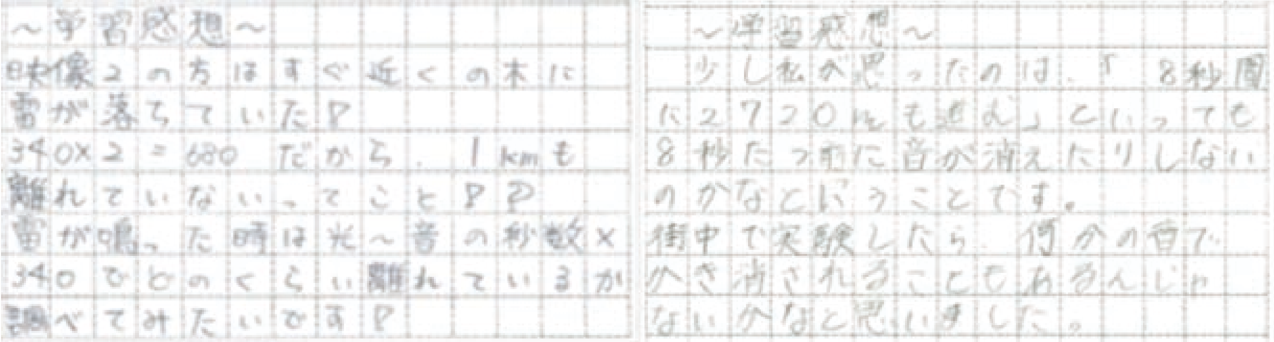
- 2 つの雷の映像の観察を通して、自分と雷との距離を調べるには、何と何が分かればよいのかに気づき、道のりの求め方を考える。
- 算数で解決したことを日常生活でも活用していこうとする。

（4）授業の概要



C(Y.D). 雷が光って、それが目に届くのはすごい速いじゃないですか、だけど音は光に比べて速度 が遅いから、差が開くほど遠くなる。

【子どもの学習感想記述】


〜学習感想〜
映像2の方はすぐ近くの木に雷が落ちていたP
340×2＝680 だから、1kmも離れていないってことPP
雷が鳴った時は光〜音の秒数×340でどのくらい離れているか調べてみたいですP

〜学習感想〜
少し私が思ったのは、「8秒間に2720mも進む」といっても8秒たつ前に音が消えたりしないのかなということです。
街中で実験したら、何かの音でかき消されることもあるんじゃないかなと思いました。

(5) 考察

授業の子どもの姿から、現実の問題を取り上げることにより、算数の世界で考えたことを、現実の世界に戻し、考察している姿が読み取れる。

このように現実場面を取り上げる学習を積んでいくことで、現実の場面から問題を見つけようとする態度、算数の世界で出した結果を現実の世界に戻して考察しようとする態度、算数で学習したことを活用していこうとする態度を育成していけるのではないかと考えている。

4．1．2． 第5学年「商分数」の授業

日 時：平成25年8月21日（水）児 童：第 5 学年 2 組29名

授業者：永山 香織

(1) 単元の目標

分数の見方や表し方及び分数と小数、整数の関係を理解し、分数についての理解を深める。

(2) 本単元で大切にしたいこと

第 5 学年で学習する割合の学習はその理解が難しく、割合を理解させるためには、その単元だけでどうにかなるものではない。割合分数を理解することは、割合の素地となる。割合の学習に入る前に、割合を分数で表す経験をさせておきたい。その 1 つの場面が商分数の学習である。

商分数の学習は、普通、等分除の場面で考えさせる。わり算の意味を大事にして、あえて包含除の場面も扱い、商を解釈させることで、割合分数の意味を理解させたい。この際、商分数が意味のある場面で扱うことで商を分数で表すことのよさも実感させたい。

(3) 本時の目標

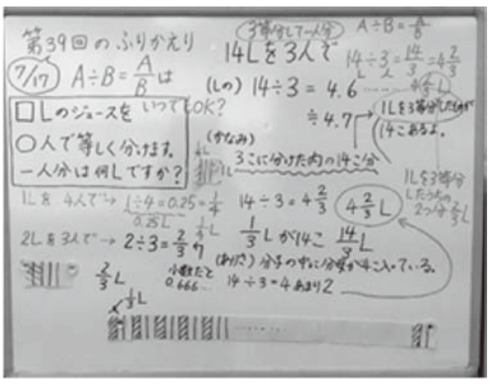
・いつでもわり算の商は分数で表わしたいという思いをもち、包含除の場面で分数で表された商の意味を説明しようとする。

・包含除の場面で、分数で表わされた商の意味とそのよさがわかる。

(4) 授業の概要

① 前時との関連で「14L のジュースを 3 人で等しく分けます。1人分は何 L でしょう。」という等分除場面の問題を考え、商を分数で表わし、答えを求める。

② わり算の意味を大事にし、包含除の意味もあることに気づか



せ、「包含除の場面でもわり算を分数で表わしたい。」という思いをもたせる。

③「スキューバダイビングの問題」で商が表す意味を考えさせる。

④　4と2/3時間の2/3時間は、60分を1とみると40分になることに気づかせ、分数で表わされた商の意味を解釈することで、簡単に何時間何分までわかることを知る。

(5) 考察

①　わり算の意味を大事にして包含除の場面での商を解釈させることについて

スキューバダイビングの問題は、商分数のところで扱わず、5年の単位量当たりの大きさの問題で扱ってもいいのかもしれない。

②　割合指導の意識について

子どもたちのやっていることを振り返り、用いている割合と1時間を60分とみれば、2/3時間にあたる40分がわかるというよさを意識して指導していく必要があった。

4．1．3．　第2学年「かけ算」の授業

日　時：平成25年8月21日（水）児　童：第２学年３組30名

授業者：稲垣　悦子

(1) 単元の目標

・かけ算の意味と立式について理解し、被乗数が２～５のかけ算九九を用いることができるようにする。

(2) 本単元で大切にしたいこと

①　ある具体物について、子ども自身がまとまりをつくり、絵や図で表現し、立式することにより、もとにする量の幾つ分と意識できるようにする。

②　ある一つの具体物を、いろいろなたし算で立式することにより、たし算からかけ算ができていることや、かけ算のよさを実感できるようにする。

(3) 本時の目標

・かけ算をもとにする量（同じ大きさ）の幾つ分と考え、かけ算の式に表し、説明できる。

・かけ算のよさに気づき、使おうとする。

(4) 授業の概要

よくある実物を見せることによって、子どもは、自分たちの分があるのかと考え、教師が何も言わなくても数を数えようとする姿が見られた。ゼリーという題材から、既習事項、図が子どもから自然と出てきて、自力解決につなげることができた。

<12のかたまりを作る方法>　子どもが自分で図を囲みながら、説明をした。

<６のかたまりを作る方法>

教師が発想の根拠を問うことによって、6 のかたまりの場合でも、12のかたまりの場合でも、子どもから式の意味や、図の説明の意見を引き出すことができた。

(5) 考察

『(1) ある具体物について、子ども自身がまとまりをつくり、絵や図で表現し、立式することにより、もとにする量の幾つ分と意識できるようにする。』について

子どもたちから、式、図（絵)、言葉を関連させながら、自然に出すことができた。子どもが、何をもとにするのかと意識しながら図を書いたり、式をかいたりすることができるようになった。そのため、交換法則にもつなげることができた。

『(2) ある一つの具体物を、いろいろなたし算で立式することにより、たし算からかけ算ができていることや、かけ算のよさを実感できるようにする。』について

学習感想『きょう、はじめて新しいかけざんというほうほうがでてきました。むずかしくても
かけざんにすれば一気にかんたんになったからびっくりしました。』
『たとえば 9 ＋ 9 ＋ 9 ＋ 9 を 9 × 4 でかんたんになったよ。』

また、10のかたまりでつくった足し算の式も、子どもたちでかけ算を使う式（10× 3 ＋ 6 ＝36）にすることができた。既習を活かそうとすることにより、新しいものを生み出すことができた。

４．２．中学校における教材開発

ここでは、中学校における本年度の活動について、本年度開発した教材の紹介を中心として記述する。

４．２．１．１年平面図形（作図）における多様な問とその作図方法を見いだす活動

(1) 課題

① ねらい

数学を見いだす活動を通して育成されるべき生徒の姿としては、単発的に事象から数学を見いだすことに留まらず、これまで獲得してきた数学的な知識や概念を総動員させて、自ら連続的に次の問い、次の数学を見いだしていける創造性を持った生徒である。中学校 1 年「平面図形」の単元は、生徒がはじめて学ぶ“幾何学”の萌芽であり、公理をもとに体系的に構成されている幾何学は、そのような生徒を育成するのに有用な数学であろう。幾何学の持つ系統性を活かし、数学を見いだす活動が軸となり指導が展開されていくような平面図形の単元を構築していきたい。

またここで扱われる「作図」の学習は、小学校段階における帰納を中心とした考察から、後の「論証」につながる素材としての側面を持っているため、ある程度演繹的な説明を、多様に行える様にしていきたい。このとき、作図方法の基盤となる知識や概念を如何にして見いだすかが、説明をする際の重要な要素になる。多様な作図方法を見いだし、その正当性を説明する活動を通して、論理に触れ、演繹的に考察していくための萌芽としていきたい。

以上のことから本実践では、多様な“数学的な問い”と“その作図の方法”の2本を、数学を見いだす事柄の軸に据えた指導を行った。

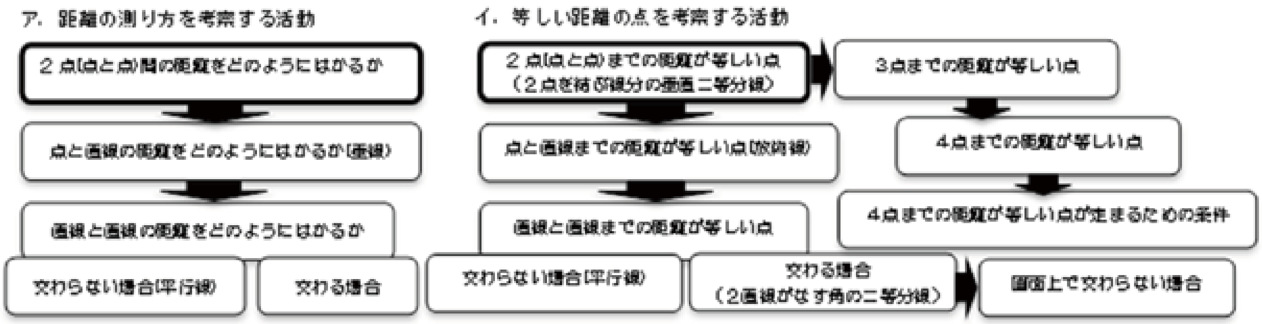
② 指導の実際

幾何学における重要な概念の1つとして“距離”の概念がある。本実践では「距離をどのようにはかるか」という問いを軸に、距離を測る対象（点、直線、その個数等）を変えながら数学的な問いとその作図の方法を見いだす活動を行っていった。

実際の指導では、作図の必然性を縄と杭による距離の測量から見いだし、その代替物として定規とコンパスを導入した。なお , 定規とコンパスによる作図は、厳密には縄と杭による作図と同型ではない（例えば、縄と杭を

用いれば中点の作図はもっと容易に可能である)。

実際の指導の流れとしては、（ｉ）問いを見いだす⇒（ⅱ）その測量する方法及び作図の方法を見いだす⇒（ⅲ）作図方法の正当性を説明する⇒（ｉ）に戻る、といったようなサイクリックな活動を軸に指導を展開していった。実際に生徒とともに考えていった数学的な問いは以下の様になった（太枠は問いの起点)。



4 点までの距離が等しい点が定まるための条件は、言い換えると四角形が円に内接するための条件であり、中学校 2 年で扱われる内容である。また放物線についても、この条件は現行では高等学校数学Ⅲで扱われる内容であるが、両者とも数学的には自然と生じうる問いであり、高度ではあるが是非生徒に考察させたいものである。ここでの解決が望めなかったとしても、後の学習へと繋がる有意義な問いとなるであろう。とにかくここでは、数学的な問いをオープンに見いださせることを目的とした。指導内容として位置づけられている垂直二等分線や角の二等分線の意味や作図方法については、上記の問いから生成される活動の所産として見いだしていった。それぞれに多様な作図方法が見いだされていった。

(2) 何を見いだす活動なのか

1 つは、数学を見いだす活動を長期的に見たときに、次の活動へとつながる“数学的な問い”を生徒が見いだす活動である。特に今回の実践においては、点や直線、その個数等の条件の変更が次の問いへと移るための軸となる発想となった。その他にも、例えば点の個数を増やしていったときに、同一円周上に乗るときのみ 4 点以上の点から等しい距離にある点が 1 つに定まるが、ここで「 4 点が同一円周上にあるのはどのようなときか？」といった問いが生じた。これは作図の方法から図形の性質へと問いが変換していったといえる。また、任意の 2 直線を引いたときに、それが交わる場合はその2つの直線までの距離が等しい点の集まりを作図できたが、ノート上では必ずしも交わるわけではない。このようなときにどうするかといった問いも生じた。これは作図方法に、自ら条件を追加した問いである。以上のように生徒は様々な方法で、様々な問いを見いだしていった。

もう 1 つは、多様な作図方法を見いだす活動である。生徒たちは既習である図形の性質をもとにして、様々な作図方法を見いだしていった。例えば平行線の作図については、多様な作図方法があるが、それらは既習の図形の性質を如何に活用できるかに依存する。平行線の定義から直角を 2 つ使う方法や、幅一定の考えを使う方法、また平行な 2 辺を持つ四角形を作図する方法等が挙げられた。また、これらの作図方法の正当性を説明する中で、例えばある一定の長さでとっていたものが任意の長さでよいことに気付く等、方法を洗練させたり、別の方法を考えたりしていった。

(3) 見いだす活動を促す留意点

数学的な問いを見いだすことに関しては、それぞれの活動を行う際に、その問いや条件を発問・板書等によって明確にした指導を行うことが肝要であろう。また、活動のあとに、どのような視点で問いを見出したかを顕在化し、問いの体系を概念地図の様に生徒にまとめさせる指導も考えられる。多様な作図方法を見いだすことについては、生徒に何を基盤に考察させるかが重要である。本実践では、菱形・凧形の対角線が直角に交わることや、他の既習である図形とその性質（平行四辺形や正方形から平行線を作図する、等）が基盤となり、それらを用いて多様な作図をしていった。このことから、基盤となった事柄を（ⅲ）作図方法の正当性を説明する活動において共有していくことが、多様な作図方法を見いだす活動を促す1つの留意点となるであろう。

（文責　峰野　宏祐）

４．２．２．中学1年生における平均値の意味を見いだす活動

(1) 事例＜平均値が天秤の支点と等価である（平均値を天秤モデルで説明できる）ことを見いだす（中1）＞

・平均値についての通常の形式で理解された知識の中に、別の新たな数学を見いだす学習の事例である。具体的には、「平均値」に関する数学的知識の中に、やはり既習であるところの「天秤」の性質を見いだす、或いはその逆についての例である。思いがけぬ所に予想外の数学が潜んでいることの面白さに、生徒が気が付いてくれるとよい。他教科（この場合は理科）との関連性も見出せる。

(2) 必要と思われる既習事項

・相加平均に関する知識　→　計算方法、等　　　・ 天秤（竿秤さおばかり）に関する知識（理科）

・てこに関する知識（理科）→　支点・力点・作用点、等

(3) 更に既習であればよい内容

・加重平均に関する知識　　　・　重心に関する知識（教師側）・　質量中心に関する知識（教師側）

(4) 数学的活動を通して見いだされるもの

・平均値を天秤モデルで表すことができること

(5) 平均値と天秤モデル

・階級（点数）；目盛り（長さ）・　度数（人数）；重さ

(6) 授業の流れと生徒徒の考えの概要

※　基本的には、多様な流れが考えられる

T1「１問10点で５問のテストがあるんだよ。つまり、50点満点のテストですね。これを８人に実施したら、表のように、10点が３人いて50点満点が５人いた。このときの平均点は何点かな？」

S1「35点。」

T2「計算は？」

SS「(10×３＋50×５）÷（３＋５)」

階級（点）	度数（人）
0	0
10	3
20	0
30	0
40	0
50	5

T3「同じようにして次の場合の平均点を求めよ。」

①　20点が４人いて50点満点が４人いた場合

②　10点が５人いて50点満点が３人いた場合

③　０点が６人いて50点満点が２人いた場合

④　０点が４人いて50点満点が４人いた場合　………

T4「答えは全部求まったが、ここで君たち、何か気が付かないか？」

SS「………………………………………………」

T5「フフフ、そうであろう。じゃ、①から④までそれぞれ50までの数直線を書いて、人数を○印で表してか

ら、平均点の場所を矢印で指せ。目盛りは 5 点刻みでよい。……………………何か気が付かないか？」

(7) 留意事項（ともすれば）副次的に見いだされる、或いは関連する数学的知識

① 等質な測定値が例えば関数 $f(x)$ で連続分布する場合の相加平均

$a \leqq x \leqq b$ で x 軸と曲線で囲まれた図形を幅 $b-a$ の長方形と見なす際の高さ

② 質点系の質量中心（多体問題）が 3 次元離散分布の加重平均値に他ならないこと

等質な質点の場合、相加平均値となる。

③ 剛体の重心が 3 次元連続分布の加重平均値に他ならないこと

密度一定の剛体の場合、やはり相加平均値となる。（文責　傍士　輝彦）

４．２．３．円周角の定理の証明方法を見いだす活動

(1) 円周角の定理について

円周角の定理について学習指導要領では次のように書かれている。

> (2) 観察、操作や実験などの活動を通して、円周角と中心角の関係を見いだして理解し、それを用いて考察することができるようにすること。
>
> ア　円周角と中心角の関係の意味を理解し、それが証明できることをしること。
>
> イ　円周角と中心角の関係を具体的な場面で活用すること。

この記述からも分かるように、円周角の定理の指導では、「円周角と中心角の関係を見いだすこと」と「円周角と中心角の関係を活用すること」が主な学習内容となる。学習指導要領では、円周角の定理については証明できることをしることとかかれていて、生徒たちが証明できることまでは求めていないように読むことができる。しかし、今回の授業では、特殊な場合から円周角の定理を扱うことを通して子どもたち自身が円周角の定理の証明方法の見通しをもち、証明できるのではないかと考え実践を行った。

(2) 見いだす活動について

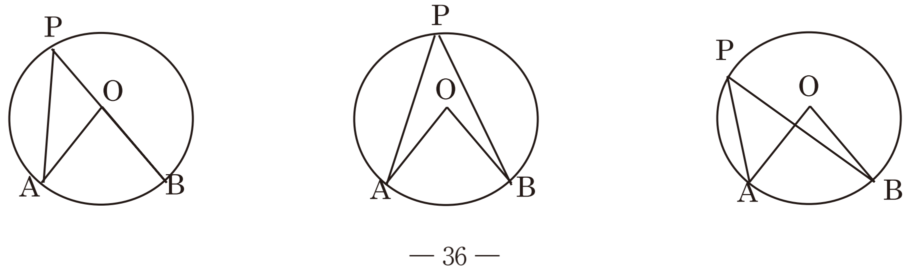
本実践では、子どもたちは 2 つのことを見いだした。ひとつは、同じ弧に対する円周角は等しいこと、もうひとつは、特殊な場合の方法をもとにして、より一般的な問題についての解決の方法を見いだすことである。

① 同じ弧に対する円周角の大きさが等しいことを見いだす

円周角の定理を見いだすことは、次の 2 つの事柄を見いだすことだと考えられる。

> ・等しい弧に対する円周角の大きさは等しいこと。
>
> ・円周角の大きさは中心角の大きさの半分であること。

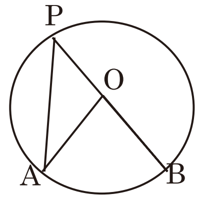
本時では、まず等しい半径の円をかかせ、その円周上に異なる長さの弧をとらせた。そして、その弧に対する円周角をかかせ、その円周角を周囲の子どもたちと観察させることを通して、円周角の大きさが弧の長さによって決まることを感じさせた。そして、弧の長さは中心角によって決まることを確認した。そこで、次に中心角を 60° に固定してそのときの円周角を求めることを考えさせる。そこでは、まず中心角が60° の弧に対する円周角を子どもたちにかかせる。子どもたちがかく円周角の図は下の 3 つの場合に分けられる。



この 3 つの場合の違いに気づくことは、証明を考える上で重要なことである。授業の中では、子どもたちがかいた円周角を取り上げ、どこが本質的に異なるのかを考えさせた。上の 3 つの図の違いを子どもたちに気づかせることは困難なクラスもあった。子どもたちが 3 つの図の違いに気づきにくかったクラスにおいては、こちらから図の違いについて指摘した。中心角が60°の円周角といっても 3 つの場合があるのだということが確認し、その円周角の大きさを 3 つの図について求めた。その結果をもとにして、「中心角の大きさが60°ならば円周角の大きさは、等しい（30°である）」ことを見出していった。

② 解決の方法を見いだすこと

本時では、中心角が60°の場合の円周角の大きさを求めることを課題とした。円周角をつくる辺が円の中心を通る場合については比較的容易に円周角の大きさを求めることができるとともに、求めることができなかった子どもについても、その方法を理解することはできるのではないかと考えてまず最初にこの場合を扱った。これを解決する際にどのように考えたのかを授業の中で取り上げ、これをもとにして、円周角の内部に中心がある場合や円周角の外部に中心がある場合の円周角の大きさを求める方法を考えた。その際には、「同じような方法で考えることができないか」と発問をした。その結果、特殊な場合の解法をもとにして、似ている場合の解法を多くの子どもが方法の見通しをもち、問題を解決していくことができた。



（文責　鈴木　　誠）

４．３．　高等学校における教材開発

小学校、中学校と比べると、高等学校では、見いだす数学が高度になってくるため、数学を見いだすことの困難性が高まる。そのため、見いだすための手だてとともに、見いだす活動を促す手だてがよりいっそう必要となるであろう。そこで今年度は、数学における概念の誕生に着目し、見いだすことが自然となるように、また、見いだすための手だてを与えるように単元計画と授業展開を工夫し、見いだす活動を促すことを意図した。そして、附属高等学校公開教育研究大会において、以下の2つの授業を行った。

（文責　佐藤　亮太）

４．３．１．面積を求める計算から、微分と積分の関係を見いだす活動

授業の概要

曲線で囲まれた図形の面積を区分求積法の考えによって求める授業の一例を提案した。この授業では、曲線で囲まれた図形を微小な長方形に分割し、その総和の極限として面積を定義し、その面積が微分の逆演算によって計算できることを生徒に見いださせることをねらいとした。

「微分の考え」の授業では、導関数から増減表を作り、もとの関数のグラフを作成することを学習している。グラフを描くことについて、増減表の情報だけではなく導関数のグラフの情報を用いて描くことを指導している（増減表の情報だけでは、どのように増加あるいは減少するのかはっきりとは分からないので、正確にグラフを描くことが困難である。そこで、各点における微分係数を用いてグラフを作成する。）。このことと、面積を求める計算がつながるように指導したい。

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ の下の区間 $[0,1]$ の面積を求める課題を与え、極限計算ではない方法で、面積を求められないかを考えさせた。区分求積法では、積分区間を n 等分するが、この授業では、$n = 10$ として考えた。1 番目の微小長方形の面積 $f(0) \times 0.1$ を、微分する前の関数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ の $x = 0$ における微分係数に x 軸方向の増分0.1をかけたものと見ることができるか、すなわち $f(0) \times 0.1 = F'(0) \times 0.1$ と見ることができるかが焦点であった。以前に関数 $F(x)$ のグラフを描いた問題において、関数 $f(x)$ が $F(x)$ の導関数であったことをヒントとして与えたところ、何人かの生徒が、$f(0) \times 0.1 = F'(0) \times 0.1$ という見方ができたようであった。

研究授業と協議会を終えて

研究協議会では、最初の極限計算に時間がかかりすぎて、生徒が微分と積分の関係を見いだすための時間が少なかったという指摘をいただいた。1 時間を微分と積分の関係を見いだすための時間として設定してもよかった。また、長方形の面積の「縦×横」を「微分係数× x の増分」とみなおし、見方を変えるところでは、サポートとしての教師の手だては、導関数の情報からグラフを描くときのことを思い出させるくらいしかなかった。課題を速度と変位の関係にすれば、生徒も理解しやすかったかもしれない。しかし、過去に生徒自身が作成した 3 次関数のグラフを見ながらではあったが、関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ の下の面積を極限の計算によらず、微分する前の関数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ の値の差（$F(1) - F(0)$）を計算することで求めることができると見いだしたということの意義は大きい。

単元計画

微分・積分の考え（21 時間）

回	学習内容
1	ふたのない箱の容積の最大値 1
2	ふたのない箱の容積の最大値 2
3	ふたのない箱の容積の最大値 3
4	微分係数，極限
5	導関数，接線の方程式
6	関数の増減，極値
7	3 次関数のグラフを描く 1
8	3 次関数のグラフを描く 2
9	微分の応用 1
10	微分の応用 2
11	面積とは何か？

12	アルキメデスの放物線の求積 1
13	アルキメデスの放物線の求積 2
14	放物線下の面積 1
15	放物線下の面積 2（本時）
16	定積分 1
17	定積分 2
18	パフォーマンス評価
19	積分の応用
20	微分・積分の応用
21	期末考査

「面積を求める」学習指導案

平成 25 年 11 月 30 日

数学科教諭　　大谷　晋

単元：微分・積分の考え　積分

単元の目標

微分・積分の考えについて理解し，それらの有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

単元計画　別紙

面積を求める 2（本時）　　1 時間

本時のねらい

放物線の下の図形の面積（$\int_0^1 x^2 dx$）を極限の計算によって求めた前時の授業を踏まえ，本時では放物線の下の図形の面積（$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx$）を微分の逆演算によって求めることができることを理解する。そのために、微分の授業で，導関数のグラフからもとの関数のグラフをつくったことを思い出させる。

本時の展開

時間	指導内容	生徒の学習活動	指導上の留意点
15 分	放物線 $y=x^2-4x+3$ と x 軸，y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよう。	各自で極限の計算をする。 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{(\frac{k-1}{n})^2-4\frac{k-1}{n}+3\}\cdot\frac{1-0}{n}$ 計算結果を周りの人と確認する。	極限計算によって正しく求められるよう援助する。 必要に応じてノートに図を書くよう指示する。
25 分	面積を別の方法で計算できないかをグループで考える。	区分求積の考えを再確認し，グラフ用紙に長方形を描く（10 等分）。$f(x)=x^2-4x+3$ とし，この記号を用いて 10 個の長方形の面積の和を表す。 $f(0)\cdot\frac{1}{10}+f(\frac{1}{10})\cdot\frac{1}{10}+f(\frac{2}{10})\cdot\frac{1}{10}+\cdots+f(\frac{9}{10})\cdot\frac{1}{10}$	導関数（$g'(x)=x^2-4x+3$）のグラフからもとの関数（$g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$）のグラフを作ったことを思い出させる。(グラフを持っていない生徒にはコピーを配付する)
10 分	まとめ	他の関数についても同様のことがいえることを確認する	

備考　「3 次関数のグラフを描く 1，2」の授業の概要

$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ のグラフを描け.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ とおく.

$f'(x)=x^2-4x+3$

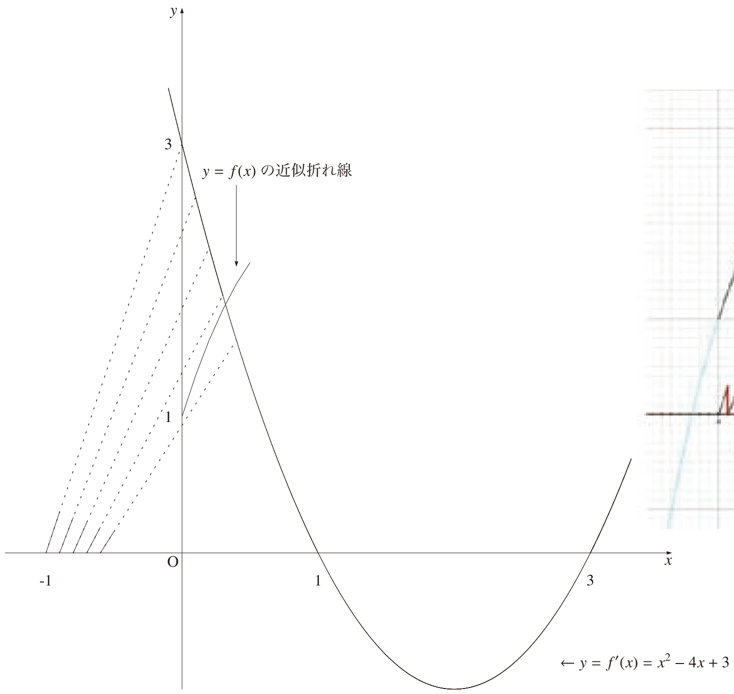
$f'(x)=(x-1)(x-3)$

増減表は次のようになる.

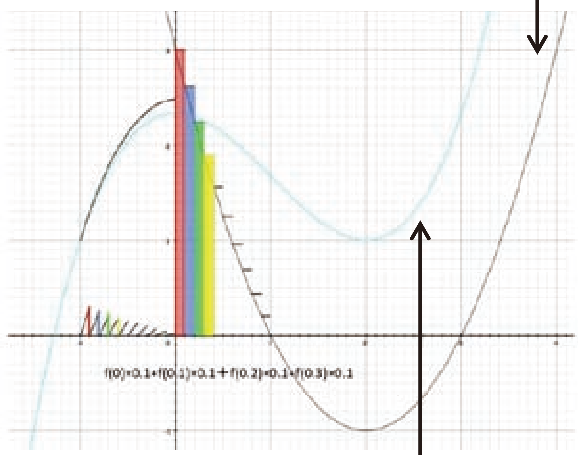
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗

増減表では、増加かするか、減少するかはわかるが、どのような増加・減少かということはわからない。

そこで，$y=f'(x)$ のグラフを利用して，x を 0.1 ずつ変化させたときの微分係数を求め，その微分係数を傾きとする短い線分 (x の増分は 0.1 とする) を定規を用いて作図する。$h=0.1$ とすると，$f'(nh)$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ は $y=f(x)$ のグラフの $x=nh$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きである。したがって，この短い線分は $x=nh$ における $y=f(x)$ のグラフの接線と平行である。したがって，この短い線分をたくさん作図して，平行移動して順番に始点を終点につなぐことにより，$y=f(x)$ のグラフの近似折れ線をつくることができる（オイラー法)。

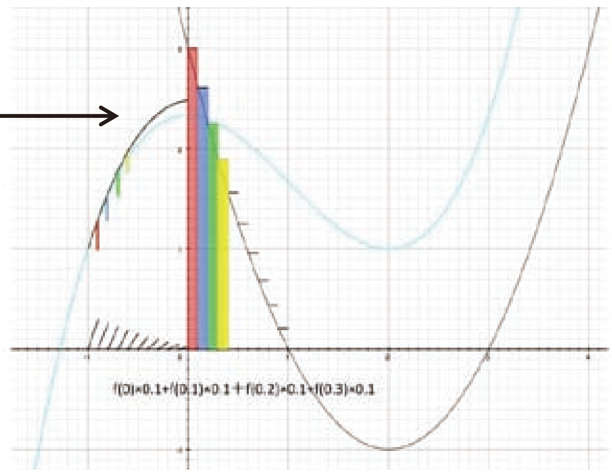


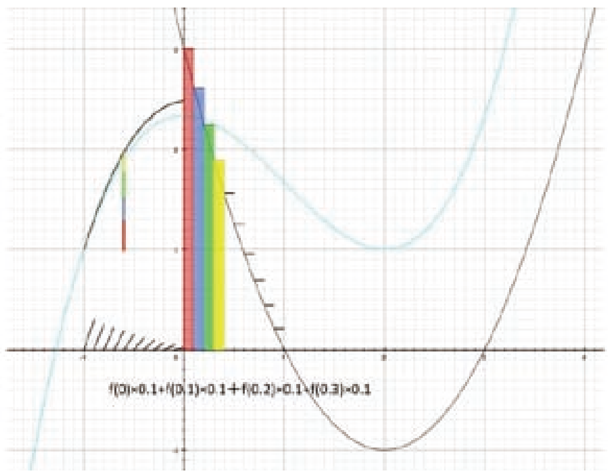
$y = f(x) = x^2 - 4x + 3$のグラフ



$y = F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$のグラフ
をx軸方向に-1平行移動したもの

$y = F(x)$の近似折れ線をx軸方向に-1平行移動したもの





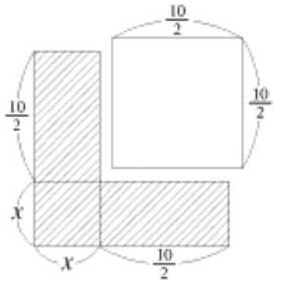
（文責　大谷　　晋）

４．３．２．３次方程式の解の公式から、虚数を見いだす活動

2 次方程式においてその判別式が負になるとき ,『数学 I』においては、「解なし」と表現し ,『数学 II』においては、「虚数解をもつ」と表現する。それは「2乗して -1になる数」を新たな数 —すなわち、虚数— を導入したための言い換えに過ぎない。その導入過程は唐突であり、2次方程式がいつでも「解をもつ」ために導入された感覚を拭えない。「空想上の虚しい数」と言葉通りの数感覚から脱却しない、脱却する機会を与えられないと思う。歴史的には 3 次方程式を解く過程において、必然的に導入された数であった。負数ですら「ありえない数」として避けていた時代に「負数の平方根」が認められる過程に数学の魅力と威力を感じてしまう。先人たちも「空想上の虚しい数」と言葉通りの数感覚を持っていたはずであり、それを認めざるを得なかった数学史のエポックは数学を見いだす授業の教材になると思う。

授業の概要

2 次方程式 $x^2 + 10x - 39 = 0$ を「面積図」を用いて解く過程を導入とした。これは「平方完成」の仕方を図示したものであり、「2次方程式の解の公式」を導く過程そのものである。



3 次方程式 $x^3 + 6x - 20 = 0$ を「体積図」を用いて解くことができるか」を提起。「3次方程式の解の公式」を作ることになる。「カルダノの解法」を模型を使って提示した。

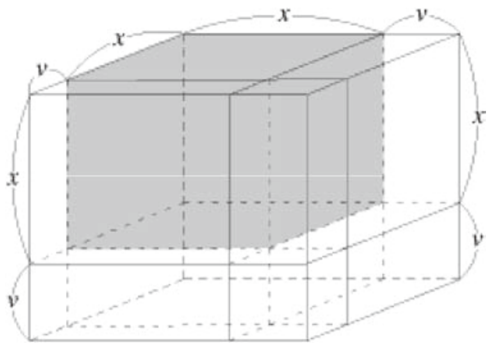
$u = x + v$ とおく。図の立体をバラバラにして集め直すと $x + 3uvx + (v^3 - u^3) = 0$

もとの方程式と比較して

$uv = 2$ かつ $v^3 - u^3 = -20$

$u^3 = X$、$v^3 = Y$ とおくと

$XY = 8$ かつ $X - Y = 20$



$XY = (Y + 20)Y$ と変形できて、面積 8 の長方形から正方形をつくる。

この正方形の面積は $\left(\frac{6}{3}\right)^3 + \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 108$

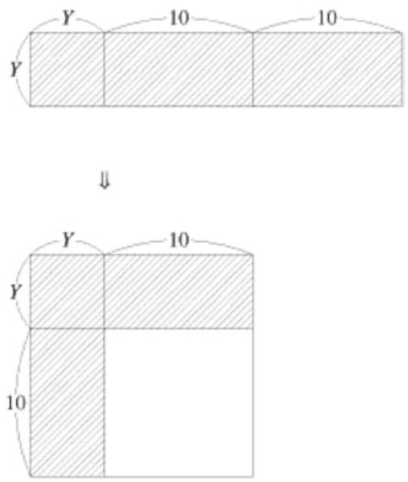
$Y = v^3 = \sqrt{108} - 10$ かつ $X = u^3 = \sqrt{108} + 10$

したがって

$v = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ かつ $u = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$

ゆえに

$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ …（＊）



一方で、因数定理をつかえば、この 3 次方程式は $x = 2$ の実数解をもつことがわかる。

$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ であることから、$\sqrt{108} \pm 10 = (\sqrt{3} \pm 1)^3$（複号同順）

したがって（＊）は確かに $x = 2$ となる。

カルダノの解法を一般化する。「3次方程式の解の公式」を得る。

3 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解は $x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$

3 次方程式 $x^2 - x = 0$ を「３次方程式の解の公式」をつかって解くと

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{-27}}}-\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{-27}}}=0$$

3 次方程式 $x^2-x=0$ の解はすべて実数解であるが、「 3 次方程式の解の公式」をつかって解くと途中に「虚数」が出てくる。これは避けられない。

以下は、次時以降の内容である。

3 次方程式 $x^3+px+q=0$ において $u=x+v$ とし、$u^3=X$、$v^3=Y$ とおくと、2 次方程式 $(Y+20)Y=\frac{p^3}{27}$ をつくる。

3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の異なる 3 実数解をもつ必要十分条件を求めるには、曲線 $f(x)=x^3+px$ と直線 $y=-q$ の共有点が 3 点ある場合を調べればよい。「曲線 $f(x)=x^3+px$ の（極大値）×（極小値）＜ 0 」なればよいが、この条件は「 2 次方程式 $(Y+20)Y=\frac{p^3}{27}$ の判別式が負」と同値になる。したがって、「虚数」を認めざる得ないことが理解できる。

（文責　祖慶　良謙）

５．主な成果

(1) 主な成果

小学校における教材開発としては、現実の問題を取り上げることにより、算数の世界で考えたことを、現実の世界に戻し、考察している子どもの姿が読み取れることから、子どもにとって必然性のある現実場面から見いだす活動をつくることが重要であることが明らかとなった。このように現実場面を取り上げる学習を積んでいくことで、現実の場面から問題を見つけようとする態度、算数の世界で出した結果を現実の世界に戻して考察しようとする態度、算数で学習したことを活用していこうとする態度を育成することができると考える。

中学校での成果としては主に次のようなことがあげられる。1つ目は、見いだす活動を授業の中で行う際には、どのようにして見いだしたのかをふり返ることが子どもたちが見いだす活動の質を高めていくことへとつながりそうである。2つ目は、見いだす活動の基盤となる既習事項をどのように扱うかが見いだす活動を考える上で重要であること。3つ目は、見いだすものには、内容は勿論だが、証明方法や具体と数学の関係なども含まれることがあることが実践を通して明らかとなった。

高等学校においては、数学における概念の誕生に着目して単元計画と授業展開を構成し、見いだす必然性を与え、見いだす活動を促すことを意図した。そして、その評価として、評価問題とルーブリックを作成した。また、数学における概念の誕生に着目したことにより、数学の文化的価値を感じることができるだろう。

(2) 今後の課題

小学校では、数の見方や考え方を見いだす活動が開発された。高学年では、数量の関係や数の解釈を見いだす活動も可能である。ただ、それらがどのような手立てで、どのようなつながりをもって見いだすに至ったのかについて、今後明らかにしていくことが課題である。

見いだす活動とはどのようなものであるかが、今年度の実践で少しずつ明らかになってきた。来年度も継続して実践を積み上げ、帰納的に見いだす活動、そして、見いだすための方法について検討を加えていくことが必要である。

高等学校では、見いだす活動の評価として、評価問題とルーブリックを作成したが、その分析はまだできていない。見いだす活動を評価し、その評価を指導に生かし、活動を促す支援をすることが課題である。

（文責　栗田　辰一朗、鈴木　　誠、佐藤　亮太）