算数・数学的活動を促す教材開発・指導法に関する研究

鈴木　　誠（代表者）[3]

矢嶋　昭雄[1]　越後　佳宏[2]　栗田辰一朗[2]　田中　義久[2]　羽住　邦男[3]　傍士　輝彦[3]　青山久美子[4]
井上　哲明[4]　大谷　　晋[4]　岸谷　正彦[4]　佐藤　亮太[4]　菅原　幹雄[4]　祖慶　良謙[4]　西川　史恵[4]
西村満城子[4]　花園　隼人[4]　吉岡　雄一[4]

1）　東京学芸大学教育実践研究支援センター
2）　東京学芸大学附属世田谷小学校
3）　東京学芸大学附属世田谷中学校
4）　東京学芸大学附属高等学校

目　　　　　次

算数・数学的活動を促す教材開発・指導法に関する研究

鈴木　誠（代表者）[3]
矢嶋　昭雄[1]　越後　佳宏[2]　栗田辰一朗[2]　田中　義久[2]　羽住　邦男[3]　傍士　輝彦[3]　青山久美子[4]
井上　哲明[4]　大谷　晋[4]　岸谷　正彦[4]　佐藤　亮太[4]　菅原　幹雄[4]　祖慶　良謙[4]　西川　史恵[4]
西村満城子[4]　花園　隼人[4]　吉岡　雄一[4]

1）　東京学芸大学教育実践研究支援センター
2）　東京学芸大学附属世田谷小学校
3）　東京学芸大学附属世田谷中学校
4）　東京学芸大学附属高等学校

1．研究の目的

新学習指導要領において強調されていることのひとつとして「算数的活動、数学的活動を通した指導」をあげることができる。それは小・中・高の算数・数学科の目標の文頭に「数学的活動を通して（小学校においては、算数的活動を通して）」と示されていることからもわかる。特に中学校数学科においては、数学的活動が学習指導要領の内容として各学年に位置づけられることとなった。算数・数学的活動を通して学習指導をすることのねらいとしては次のようなことがあげられる。

・基礎的・基本的知識・技能を確実に身につけること
・数学的な思考力・判断力・表現力を育てること
・学ぶ楽しさや意義を実感し意欲を高めること

これらのことは、これまでも算数・数学科の指導のねらいとされてきたことであるが、国内外の教育調査からこれらの力が十分には育っていないことが明らかとなっている。算数・数学的活動はこれまでも学習指導要領の中で示されてきたが、これらの活動を意図した指導が十分に行われてきたとはいえない現状があった。そこで、今回の学習指導要領改訂において算数・数学的活動がより一層充実することとなった。このような現状を考えると、算数・数学的活動を促す教材開発、指導法について研究し、その成果を広めることは有意味なことと考える。

そこで、本プロジェクト研究では、次の３点を目的として研究を進めることとする。

＜研究の目的＞

目的１　算数・数学的活動を促す教材開発を行い、その成果を蓄積すること。また、授業実践を振り返ることにより、算数・数学的活動を促す授業がもつ条件について検討し、知見を得ること。

目的２　小・中・高等学校における授業研究を通して、算数・数学的活動を指導内容としてとらえたときに、各学校段階における違いや共通点は何かについて知見を得ること。そして、その知見をもとにして、よりよい算数・数学の授業のあり方について検討すること。

目的３　研究を通して得られた知見について、各附属学校で行っている現職研修セミナーなどの機会を通して、教員養成や現職教員研修に資すること。

２．研究の方法

⑴　目的 1 に対しては、文献による研究を通して、算数・数学的活動を促す指導において扱うことができるような課題を見いだし、授業研究を通して教材開発を行い、その成果を蓄積する。蓄積された授業実践を検討することを通して算数・数学的活動を促す指導がもつ条件について事例的に明らかにする。

⑵　目的 2 に対しては、小・中・高等学校における授業研究や毎月の附属研究会を通して知見を得る。授業研究においては、同一の課題を異なった学校段階において扱い、どのような扱いの違いや共通点、また子供たちの活動の共通点や相違点に目を向け知見を得る。

⑶　目的 3 に対しては、各附属学校が行っている現職研修セミナーを研究の成果をもとにして実施する。また、教育実践研究センターの教育実習部門と連携をとり、教員養成において本研究で得られた知見をどのような形で生かしていくかを検討し、教員養成の充実に役割を果たす。

３．研究計画

本研究は 3 年計画で実施することを考えており、本年はその 1 年次にあたる。

平成22年度（ 1 年次）

<u>算数・数学的活動を促す授業づくりと教材収集のための基礎的研究</u>

算数・数学の教材や題材の収集（ 4 月～ 3 月）および授業研究（10月、11月、1 月、2 月）を通しての授業記録の収集。特に 6 月、11月、2 月には以下の日程で数学的活動に焦点をあてて授業研究会を実施することを計画している。

6 月21日（月）　公開授業研究会（附属高等学校）
11月10日（水）　公開授業研究会（附属世田谷中学校）
2 月 4 日（金）　公開授業研究会（附属世田谷小学校）

平成23年度（ 2 年次）

<u>算数・数学的活動を促す授業が持つ条件についての研究</u>

算数・数学の教材や題材の収集（ 4 月～ 3 月）および授業研究（ 6 月、10月、11月、1 月）を通しての授業記録の収集。これまで得た記録をもとにし、算数・数学的活動を促す授業が持つ条件について検討する。また、小・中・高等学校において同一の課題を用いて授業を行い、算数・数学的活動を指導する際の留意点について検討を加える。

平成24年度（ 3 年次）

<u>算数・数学的活動を促す授業づくりと現職研修および教員養成への貢献</u>

1 年次、2 年次までに得られた知見を現職研修および教員養成においてどのような形で扱っていくかを教育実践研究センター教育実習部門と連携する中で検討し実施する。現職研修セミナーについては 8 月と 3 月に実施。

（文責　鈴木　誠）

４．研究の実際

4－1．小学校における教材開発　～小・中・高の連携を意図した教材の開発～

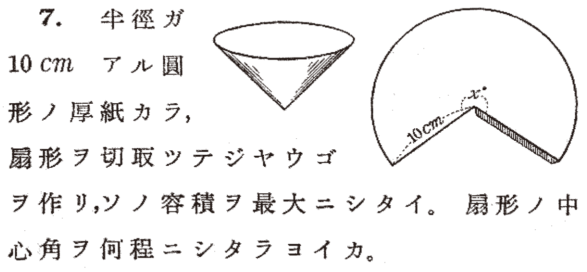
(1) はじめに

世田谷地区では今年度、小学校、中学校、高等学校の各校種間の連携を意図した教材の開発と収集を行っている。小学校の提案は、教科書分析による教材および実践事例を 2 本を提示し、これらの教材を通して、小学校から、中学校、高等学校への連携の可能性を検討することである。

(2) 校種間の連携を意図した教材例～教科書の分析から～

共通な問題場面を用いた教材

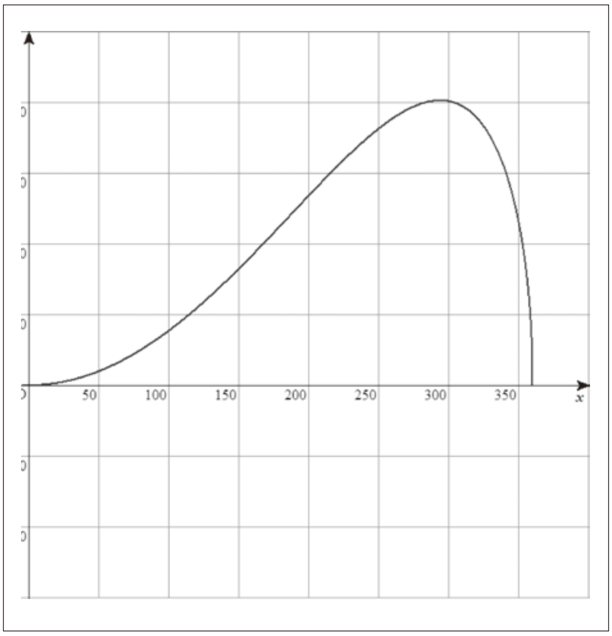
問題. 7. 半径が10 cmある円形の厚紙から、図形を切取つてじやうごを作り、その容積を最大にしたい。 扇形の中心角を何程にしたらよいか。(『数学3 第一類』p.61)



7. 半徑ガ 10 cm アル圓形ノ厚紙カラ，扇形ヲ切取ツテジヤウゴヲ作リ,ソノ容積ヲ最大ニシタイ。扇形ノ中心角ヲ何程ニシタラヨイカ。

この問題は、戦時下に作られた旧制中学校用の数学教科書にある問題である。この問題の特徴は、共通な問題場面を用いながら、複数の学年に位置づけられている。具体的には、小学校 5 年、中学校 1 年、2 年、3 年、4 年の各学年に位置づけられている。この問題を今日の学校数学で用いることを検討したい。

例えば、今日の小学校で、円錐に砂を入れて実測により体積公式を導く活動を中心的に行い、中学校を視野に入れた活動として、中心角を変化させると円錐の形状がどのように変化するかをみせることを行う。その上で、今日の中学校 1 年では、母線が一定である扇形から漏斗を作り、容積が最大となるときの中心角を求める問題を実施し、中心角と容積の関係をグラフに表し、グラフをよむことによって容積が最大となるときの中心角を求める活動が考えられる。なお、グラフは、右の図のようになり、子どもたちの予想とは異なる結果になる面白さがある。なお、中学校 3 年生に課す課題としてもよいと考える。



中学校 3 年では、3 平方の定理を利用すれば、式に表すことはできるはずである。その式に数値を代入して計算で求めることも考えられる。なお、三平方の定理の利用として、「半径が 3 cmで深さ 5 cmの漏斗を作りたい。どんな扇形を切取ればよいか。」を考えさせることもできよう。中心角を x とし、 $2\pi\sqrt{25+9}\times\dfrac{x}{360}=2\times3\times\pi$ から、半径 $\sqrt{34}$ cm、中心角 $\dfrac{1080}{\sqrt{34}}$ ($\fallingdotseq 185°$) と求められる。高等学校では、母線を一定としたときの漏斗の容積が最大となるときの中心角を、微積分によって求めることができる。

中心角を x 、容積を y として、生徒は、円錐の容積を $y=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{x}{36}\right)^2\sqrt{100-\left(\dfrac{x}{36}\right)^2}$ と表し、これを微分して、

$x=\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}\fallingdotseq 294°$ を得るのである。

いくつかの学年での活動を、島田茂の「数学的活動」(図 1) に照らしてみたい。

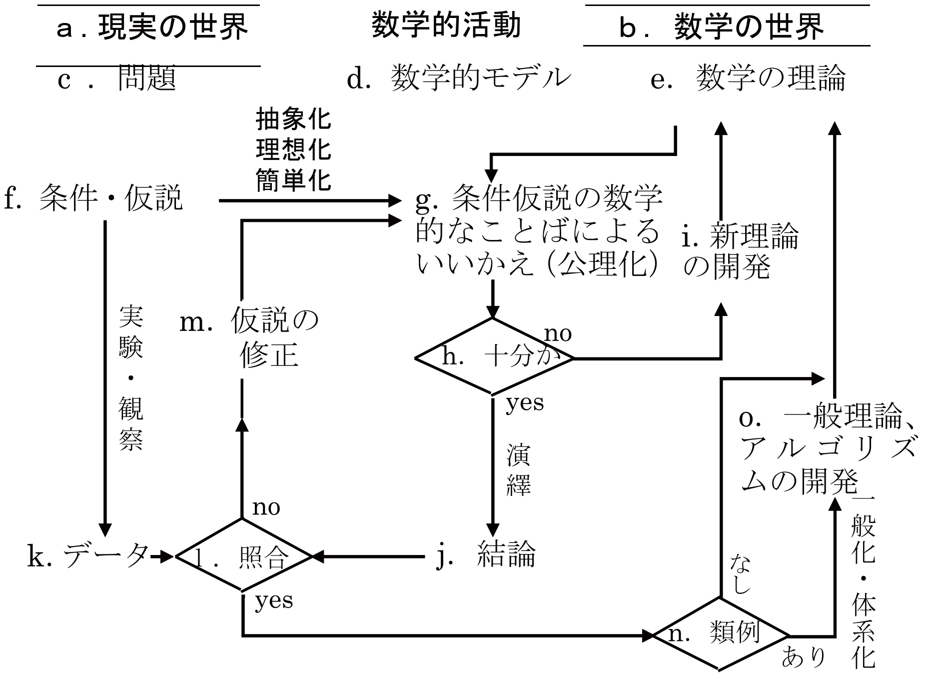
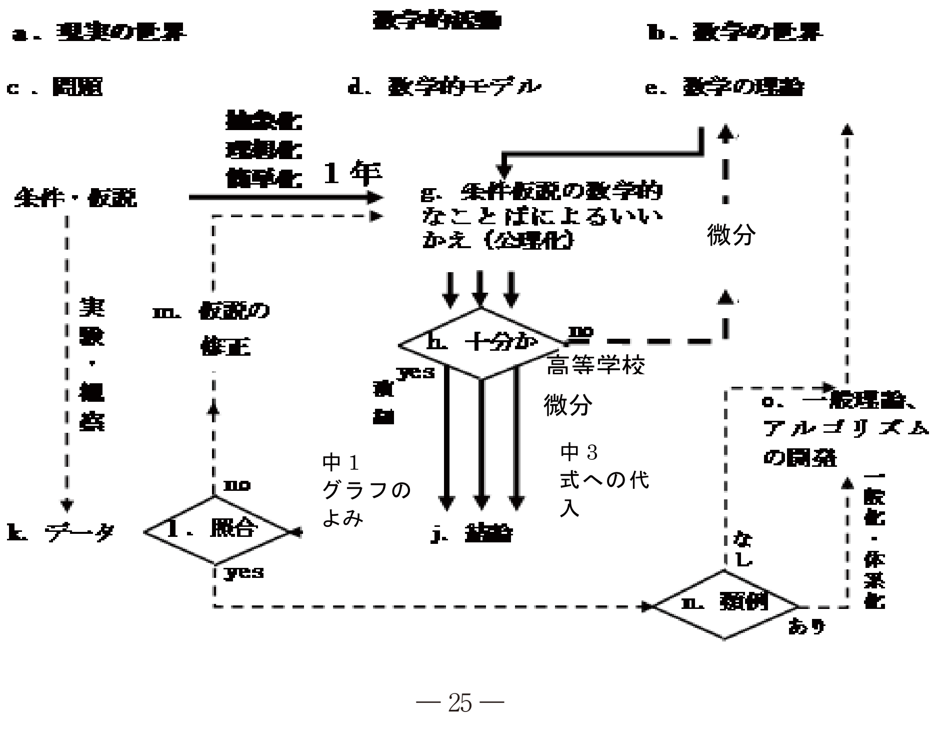


図１．「数学的活動」（島田茂、1977、p.15）

1 年用では、漏斗の作成に基づいて、独立変数に扇形の中心角を選ぶようになっており、「事象の数学化」が行われ、最終的に中心角と容積との関係をグラフに表し、これをよむことによって結論を得る展開になる。これは上図の「f. 条件・仮説」から「g. 条件仮説の数学的なことばによるいいかえ（公理化)」の段階を経て、グラフをよむことから「j. 結論」を得る展開とみることができる。中学校 3 年生の段階では、平方根や三平方の定理の学習がなされるため、数学的表現が洗練され「d. 数学的モデル」を

$$y=\frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{36}\right)^2\sqrt{100-\left(\frac{x}{36}\right)^2}$$

と表現することはできるが、この式に数値を代入して細かく計算していくことでしか解を得られない。中学生の段階では、持っている数学の理論が豊かとはいえないため、「h. 十分か」の



過程から「i. 新理論の開発」へと進展することはできない。しかし、高等学校では、微分を獲得することによって「i. 新理論の開発」の過程を踏むことができ、微分という「e. 新たな数学の理論」を用いた正確な「j. 結論」が得られるのである。

このように、問題場面が共通であることによって、実験実測に基づく素朴な問題解決から、高度な数学を用いた問題解決を行うことができるとともに、徐々に数学的表現を洗練し、数学的結論も精緻化することのよさを感得することができる。

(3) 実践事例にみる校種間の関連性

本年度に公開した授業のうち、2 本の授業に校種間の関連性を見いだすことができる。今後、校種間の連携を深めていく上で、実践して得られた課題を明らかにし、記録して今後に生かすことが大切であると考える。

① 順列・組み合わせに関する実践(6年)

6 年生を対象とした授業で用いた問題は、次の問題である。

問題 4 人(さとし、しょう、まさき、かずなり)が走る順番は、全部で何通りあるか調べる方法を考えよう。

授業では、この問題を用いて、以下の点を重視して学習を進めた。

①名前などを記号化して、端的に表現して考える

②順序よく考えるために、あるものを固定して考える

この学習は、樹形図による方法や、順列の計算方法へと連なる学習になると考えている。この授業を行った結果、次の課題が残っている。

・教師の手だてとして、固定して考える根拠となる既習をどこに求めるか

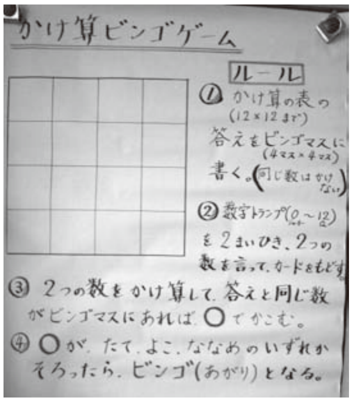
・循環させて考える方法と固定して考える方法との関連づけをどのように行うか

子どもたちは、約数を考える際などに、落ちや重なりがないように順番に考えるという活動を経験してきていると考えていたが、そのこととが本時の学習と結びつかないという実態がみられた。固定して考えるというアイデアを子どもが想起できるような教師の手だてをどうするべきかということが課題として残った。また、子どもたちの実態として、循環して考える方法(①さ、し、ま、か②し、ま、か、さ③ま、か、さ、し)を用いていたが、この方法と固定して考える方法とを関連させて結びつける手だても考えていく必要があった。

② 積一定の事象を用いた約数・素数の素地に関する実践(3年)

3 年生を対象とした授業で用いた問題は、次の問題である。

問題 12×12の数表の中の数を使ってビンゴゲームをします。 どんな数を使ったら、ビンゴケームに勝つことができるか考えよう。



この問題で使用した数表は、座標平面を意識して 0 から12までの数を並べたものであった。このゲームは、まず、これらの数から好きな数を16個選び、自分のビンゴゲームのマス(右図)にかく。そして、その数が、トランプ(0 から12) 2 枚による数のかけ算でできた数と合っていたら、○で囲み、縦、横、斜めで○がそろったらビンゴ(あがり)というゲームである。

子どもたちは、はじめは、16個の数を適当に選びマスに入れてゲームを行っていた。しかし、どのような数を入れたら勝ちやすいかを考えるようになった。そこで、トランプを 2 枚引いたときに、出にくい数は何か、出やすい数は何かを考える授業を設定した。

子どもたちは、まず、出にくい数が数表の対角線上に該当する数、すなわち、平方数に着目した。確かに、例えば、49は、この表では 7×7 だけである。しかし、36のように、6×6 だけでなく、3×12、4×9、9×4 、12×3 のように、表の中には複数個あり、そのことも 1 つの数を 2 つの数の積として捉える活動に

よって求めることができた。また、数表を用いていることによって、平方数が位置付いている対角線に対して対称の位置に同じ数があることを見つけていく活動がなされた。このように座標平面を意識して並べた数表をみせておくことで、今後の座標平面を用いた学習において数の広がりをとらえやすくなると考えられる。また、出にくい数や出やすい数を考えて、それが数表のどこにあるかを考えたことは、反比例の学習の素地となると考えられる。

課題は、約数の個数を考える上で、数表が制限になっているので、この制限から離れて約数の個数を考える場面を意図的に作って考えさせることである。例えば、この数表で考えると、60は、5×12、6×10、10×6 、12×5 という 4 つの位置に現れるが、数表の制限から離れることによって、それ以外の数の組み合わせがあること、および、すべての約数を考えることができる。

(4) おわりに

小学校段階では、特に、実験や実測による活動、数を具体的に操作する活動などにより、作業が大変になったとしても、何とか問題を解決できたという経験を積ませたい。この経験をふまえて、中学校、高等学校において、新たな数学の理論が構築されたときに、手間のかかる作業によって解決していた部分にその数学の理論を使うことができれば、その理論が強力な道具であることを実感できるのではないだろうか。そのような教材を開発し実践してその教材の価値を検証するとともに、カリキュラム上に教材をどのように位置づけていくかを検討することが今後の課題である。

＜引用文献＞

島田　茂（編著）、『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』、みずうみ書房、1977、p.15

（文責　田中　義久）

4－2．中学校における教材開発　～数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動～
数学的活動のある授業～ 1 組の三角定規を組み合わせて15° を作る

ここでは、数学的活動として、中 1 年次の生徒が数学的な表現を用いて自分なりに説明し伝え合う活動のある授業のための教材と授業展開、生徒の反応例について述べる。

⑴ テーマ　・数学的活動のある 1 年『平面図形』の授業
　～数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動
・数学的な表現を用いて、自分なりに工夫して説明し伝え合う活動
　～平面図形における基礎的・基本的事項として、「平面図形」の最初で学習した角について習熟する。
　～使い慣れた道具である三角定規について習熟し、代表的な三角形について復習する。

※　本授業に関連する主たる数学的活動は、上記　ウ）説明し伝え合う活動　である。三角定規についての課題の解決について、自分の考えを説明する。

⑵ 日　時　　平成22年11月10日　水曜日

⑶ 場所・対象学級　　東京学芸大学附属世田谷中学校　 1 年Ｂ組（40名）

⑷ 単　元　　中学校 1 年　第 5 章『平面図形』

(5) 単元の目的

① 平面図形の基本について理解を深める。

② 角の二等分線などの基本的な作図について理解し、更にそれらを用いて、見通しを持っていろいろな作図ができるようになるとともに、定規やコンパス、分度器といった道具の扱いに慣れる。

③ 移動について理解する。

④ 多角形、円と扇形など、いろいろな平面図形の様々な性質について、作図も利用しながら調べる。

(6) 中1『平面図形』指導計画（※ 本時は課題学習的な扱い）

Ⅰ 基本事項 ……………………………………………………………………………… 3時間

○ 角・直線・線分、等

○ 交点の意味

○ 点と直線との距離、平行な2直線の距離の意味

○ 三角形を記号△を使って表すこと

○ 分度器・三角定規・定規・コンパスについて ← 本時

○ 円や扇形とその名称、特徴

○ 円と点対称 ← 小6に移動、移行措置の内容（中学校では未習）

Ⅱ 基本の作図 ……………………………………………………………………………… 5時間

Ⅲ 作図の利用 ……………………………………………………………………………… 6時間

Ⅳ 問題演習 ……………………………………………………………………………… 2時間

(7) 本時のねらい

① 見慣れた30° 60° 90°の直角三角形（以下、半正三角形）と直角二等辺三角形について復習し、今後の平面図形に関する学習の数学的準備とする。

② 課題を解決し解決について数学的な表現を用いて自分なりに説明すると同時に、友人の考えを理解する。

(8) 解決課題

『2枚1組の三角定規を使って、15°の角を作りなさい。』

(9) 本時の評価規準B

関心・意欲・態度	見方・考え方	表現・処理	知識・理解
○課題に関心を持つ。 ○課題を、積極的に解決しようとする。	○三角形や角に関わる既習事項を根拠として課題について考察することができる。	○自分が見い出した重ね方について、その理由を自分なりに説明することができる。	○友人の発表を理解する。

(10) 本授業の位置付け

授業者は、中1「平面図形」の単元において、作図の前に円や扇形について学習し、更に円や扇形の学習の前にこの授業を行う。中1「平面図形」の単元の最初で学習したばかりの「角」について習熟することがねらいである。同時に、数学に関わる道具に対する習熟も兼ねている。定規やコンパスといった作図に必要な道具については、この後の円の学習において習熟することになる。

そこで、本授業ではこの三角定規を教材として利用し、2枚1組の三角定規を使って、15°を作る。15°のい

ろいろな作り方について考えるものである。

(11) 教材；三角定規について

三角定規は、直角二等辺三角形と30° 60°の直角三角形（以下　ここでは便宜上「半正三角形」と称する）が 1 枚ずつ 1 組になった物である（図 1 ）。一昔前では、三角比や三角関数などで直角三角形に着目する際、直角でない内角θを形成する斜辺でない辺を隣辺といい、隣辺でも斜辺でもない辺を対辺というが、ここでは単に便宜上、図のように直角二等辺三角形の 2 隣辺、半正三角形の長隣辺、短隣辺などと称することにする。通常、三角定規は直角二等辺三角形の斜辺と半正三角形の長隣辺が等しく作られている

三角定規そのものについては普段特に気にも止めないが、実は、三角定規として用いられる 2 種の三角形は、中等教育数学教程において非常に重要度が高い。中 3「三平方の定理」を経て高 1「三角比」や高 2「三角関数」に至る学習の基礎になっている。三角定規は、2 つの三角形があらかじめ持つ 4 種類の角以外に、多くの大きさの角を工夫して作り出すことができる。それぞれ単独で30°、45°、60°、90°の 4 通りの角が得られる他、15°、30°、45°、60°、75°、90°、105°、120°、135°、150°、165°など、くっつけたり重ねたりすることで15°刻みに角度があらわれる。正式な作図ではないが、この 2 枚で平行線が簡単に描け、同位角や錯角の学習にも役立つ。

(12) 課題、その簡単なルール

課題は、

2 枚 1 組の三角定規を使って、15°を作りなさい。その理由も書きましょう。

というものである。同じ直角二等辺三角形の定規を 2 枚使ったり、2 種類取り混ぜて 3 枚以上使ってはならない。

(13) 考え方（反応）の例

15°は、「くっつけてできる」足し算の考え方では作れない。重ね合わせて引き算の考え方で得る。生徒が直ちに思いつく方法は図 1 や図 5 などの方法であり、これらがおそらく最も簡単なものである。

図 1 の重ね方からだけでも、図 2 、3 、4 のバリエーションが得られる。これらは、それぞれ異なった方法と考える。

(14) 授業の流れ

① 授業者が課題を提示する（ワークシートを配布する)。

② 解決の段階。机間指導しながら、生徒の反応を伺う。机間指導しながら、重ね合わせ方について全体に助言することもある

③ 発表　全てをまとめて最後に発表する授業展開だけではなく、教室の実態に応じて、考える活動の中で、 発表しながら考え方の例を示すことで、それを解決のヒントとする進め方も考えられる。発表が、新たな考え方のヒントとなり、発表の際の説明や板書が自分なりの説明の方法や書き方のヒントとなることから、実際の授業は、後者の方法で行った。

（15）指導略案

	学習内容	生徒の活動	留　意　点
導入	・課題の理解 2 枚 1 組の三角定規を使って、15° を作りなさい。 その理由も書きましょう。	△課題理解	・三角定規を机上に出すよう指示。 ・ワークシートを配布する ・重ね方について質問が出た場合は、全体に紹介する。 **＜関心・意欲・態度＞**
展開	・課題の解決 ～　説明し…　～	△課題を解決する ・課題を解決しようとする。 ・見当のつかない生徒も出てくる。 ・ただの 2 種類や 3 種類ではなく、多くの方法がありそうだ…	・机間指導しながら、 1）2、3 種類ではないことを示唆する 2）思考が止まっている生徒に対しては、実例を示すなどして、考え方について具体的に示す 3）教師側は、いろいろな考え方について左に示すような形に整理しておくのも、一方法である。 4）ワークシートは複数枚用意しておき、枠が不足する生徒には追加配布する。　**＜見方・考え方＞**
展開Ⅱ	・発　表 ～ 伝え合う活動 ～	△ 15° を作り出す考え方を発表する。	・前で説明させる。 ・生徒には、図示し考え方を説明するようにする。考え方は、角度の計算式を示すことでもよい。 ・板書しながら、説明するようにしたい。 ・いろいろな複数の考え方を提示させたい。 ・今回は教室の都合で白板が狭いので、説明の際の図示用の道具を用意しておくと重宝する。 **発表者＜表現・処理＞／聴視者＜知識・理解＞**
まとめ	・まとめる。 ・2 枚の三角定規を重ねるなど工夫することによって、15° を表現できる。 ・いくつも方法がありそうだ。 ・次回は分類について考える。		

（16）生徒発表の例（図）

① 授業開始後は、図 1 や図 5 のように単純に頂点を頂点上に重ねることによって15° を作っていた。ワークシートへの説明も、45° − 30° = 15° といった計算式によるものがほとんどである。この計算式は、例えば図 1 のように30° の頂点と45° の頂点を重ねたときの差として得られた15° を表す。

② 机間指導の中で図 5 の図を図 6 の様に動かしてみせることで、発想が大きく広がった。

③ 半正三角形の長隣辺と直角二等辺三角形の斜辺が直交するように配置する図 7 の置き方は、重ねることによる減算あるいは密着させることによる加算のどちらでもない作り方として、非常におもしろいものである。図 6 の様に頂点同士を必ずしも重ねる必要のないことが知識として加わったことで、柔軟な発想が出てきたことによるものである。

④ 図 8 の重ね方は、2 つの直角三角形の斜辺を重ねたものである。この考え方を示す生徒が斜辺を底辺としたときの 2 つの直角三角形の高さが等しいことを知らない場合、このことは暗黙の前提となるが、中 1 の段階では、このことについての厳密性は問わない。また、同時に15° が 2 カ所できることについても、

演繹的な思考による考え方の通りに重ねた、というよりもむしろ、重ねた後に角度を求めたら15°であったとする方が妥当であろう。

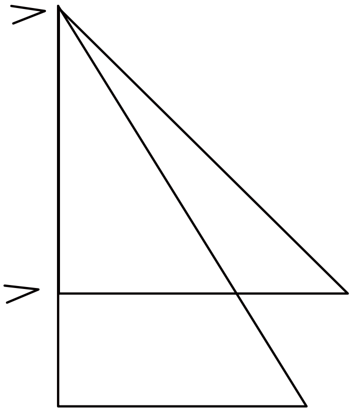


図１

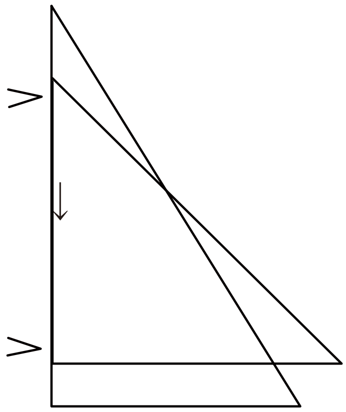


図２

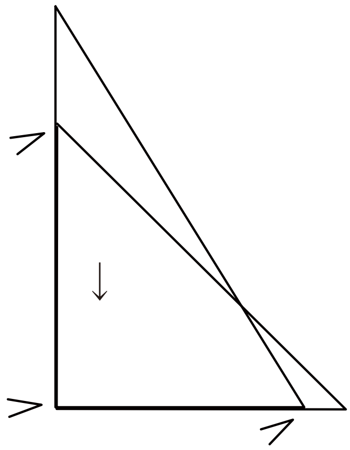


図３

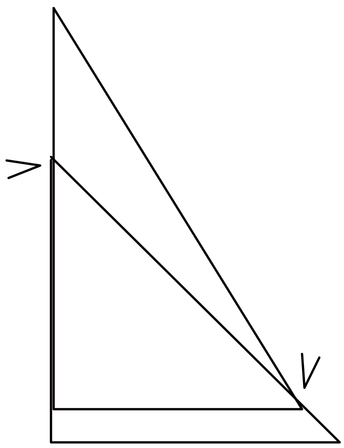


図４

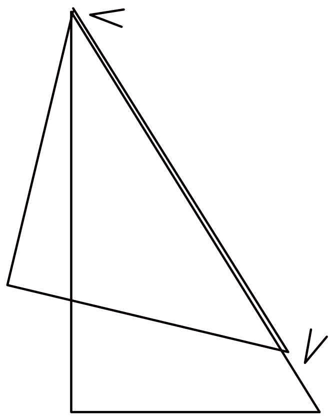


図５

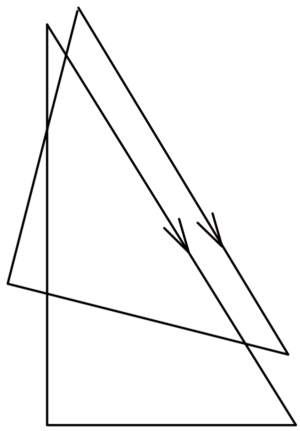


図６

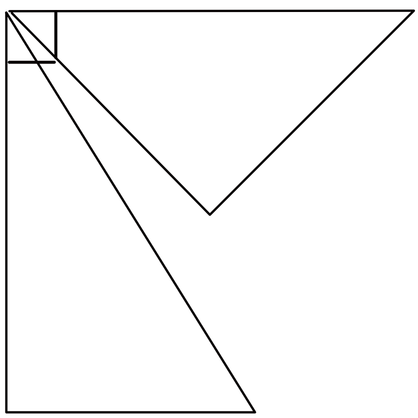


図７

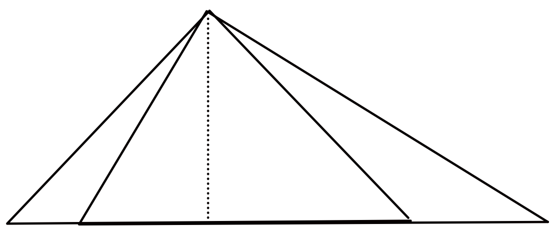


図８

＜参考文献＞

中学校数学研究会　編・著　『おもしろかった授業』　明治図書．2001.

（文責　傍士輝彦）

4-3．高等学校における教材開発

(1) ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法は、歴史的にも意味があり（例えば、素因数分解)、実用上の価値は現代でも色あせない。そして証明にも特徴があり、整数、剰余の理解がより深まると考えられる。

まず、ランダムな大きさの図 1 のようなマス目の入った長方形（図 1 は 4×10）を、生徒一人ずつに配る。その長方形の中にできる最大の正方形（図 1 では 4×4 ）を切り取る（図 2)。残った図形（図 2 右）が正方形でないならば、またその中にできる最大の正方形を切り取る（図 3)。以下、同様に続け、残った図形が正方形になるまで続ける（図 4)。できた最小の正方形の一辺の長さを比べ、「最初の長方形に対し、残る最小の正方形はどんな正方形か」を課題とする。

課題に対し、生徒は、具体的にもう一度やってみたり、図をかいたり、式にする等を通し、やがて、多くの生徒は、最初の長方形の 2 辺の長さの最大公約数を 1 辺とする正方形が残るという性質を発見する。そして、自ら、発見した性質を証明しようとすることを期待する。「この操作で、最初の長方形に対し、残る最小の正方形は、長方形の 2 辺の長さの最大公約数を 1 辺とする正方形である」ことを証明することを課題とする。その際、割り算に気づくことはできるが、なかなか難しいようである。その理由は、数学的帰納法にも見られる、直接的ではなく部分に注目し証明するところにあり、ユークリッドの互除法の証明の特徴の一つである。最初の長方形の 2 辺を a、bとし、「$a = bq + r$（ a、b、q、r は自然数、$a > b > r$ ）のとき、a と b の公約数が、b と r の公約数と等しいこと」を示すことを次の課題とする。数学的帰納法と異なる点は、その条件（ $b > r$ ）から、どこかで止まるところであり、このこともこの証明の特徴の一つである。

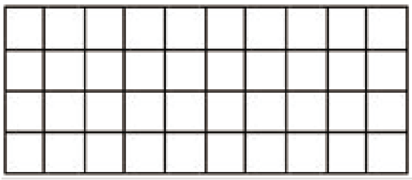


図1

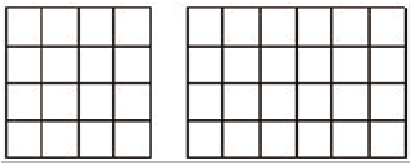


図2

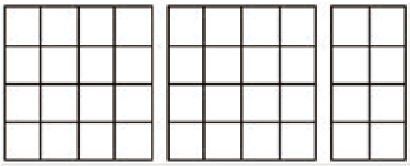


図3

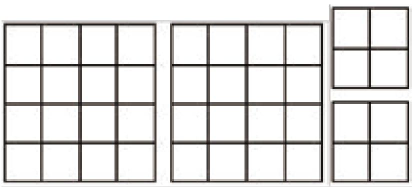


図4

上記の一連の課題による数学的活動を通して、ユークリッドの互除法の仕組み、手続きを理解するとともに、整数、剰余の理解がより深まると考えられる。本校の場合、ユークリッドの互除法の手続きを知っている生徒はいるが、どうしてこれで最大公約数を求めることができるのかは知らないようである。また、一連の活動を通して、知識として、ユークリッドの互除法を学ぶだけでなく、証明の大切さや文化としての数学にも触れることができると考える。

この後の展開としては「二元一次不定方程式」を経て、応用として「百五減算（中国式剰余定理)」、「RSA暗号（への入門)」等を紹介することで、数学的考察を深め、数学のよさを認識できるような指導につなげていく。

(2) $\sqrt{2}$の近似値を求めよう

① 連分数展開

$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$ とできる。ここで $0<\sqrt{2}-1<1$ より $\sqrt{2}$ を

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{2+0}}}} \quad と \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{2+1}}}}$$

で近似できる。

② 級数展開

xが十分小さいとき

$\sqrt{1+x}=1+a$ とおくと （aは十分小さい）

$1+x=1+2a+a^2$ （a^2 は高次の微小量）

$2a \fallingdotseq x$ $\therefore\ a \fallingdotseq \dfrac{x}{2}$ よって $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{x}{2}$

これをつづける $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+\beta$ とおくと

$1+x=1+x+\dfrac{1}{4}x^2+2\beta+\beta^2+\beta x$ β^2 と βx は高次の微小量なので

$\dfrac{1}{4}x^2+2\beta \fallingdotseq 0$ $\therefore\ \beta \fallingdotseq -\dfrac{1}{8}x^2$ よって $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$

くりかえすと $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{5}{128}x^4+\cdots$ → Newtonの二項定理へ

これに、$x=1$を代入しても収束が悪い。工夫して $\sqrt{2}$ の近似値を求めたい。以下、その例である。

(i) $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入 $\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より

$$\sqrt{2}=2\times\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\cdots\right\}$$

$$\sqrt{2}\fallingdotseq 2\times\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}=1.421875$$

(ii) $\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2+x}$ の展開を作る

$\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2+x}=\dfrac{7}{5}+\dfrac{5}{2\cdot7}x-\left(\dfrac{5}{2\cdot7}\right)^3x^2+\cdots$ に $x=\dfrac{1}{25}$ を代入する

$$\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\fallingdotseq\frac{7}{5}+\frac{5}{2\cdot7}\frac{1}{25}-\left(\frac{5}{2\cdot7}\right)^3\left(\frac{1}{25}\right)^2=1.4142128\cdots$$

(3) パスカルの三角形

生徒は、パスカルの三角形を10～15段ほど書くと、パスカルの三角形に関する発見をすることができる。例えば、以下である。

① 外側は 1 が並ぶ（$_nC_0 = {}_nC_n = 1$）

② 両隣を足すと下の数になる（$_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$）

③ 左右対称（$_nC_r = {}_nC_{n-r}$）

④ 外側から 2 列目は自然数が並ぶ（$_nC_1 = {}_nC_{n-1} = n$）

⑤ 偶数が多い

これらを自分で見いだし、見いだしたことを自ら式化し、既習事項等を用いて自力で証明することを期待する。⑤について、奇数に色を塗って行くと右下図のようになり、フラクタル図形が浮かび上がる。①～④については、$_nC_r = \dfrac{_nP_r}{r\,!} = \dfrac{n\,!}{r\,!(n-r)!}$ を用いて解決することができる。

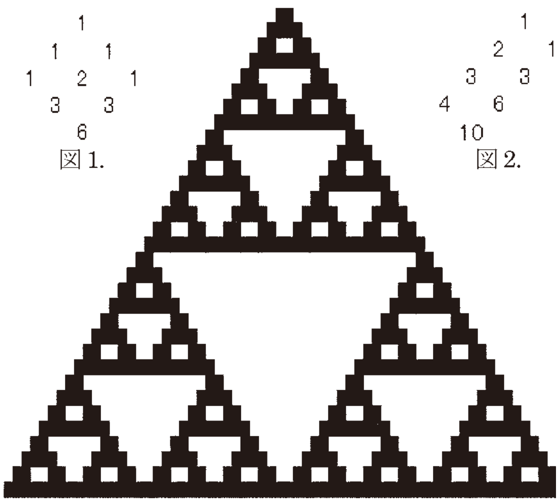
④の発展として、「外側から 3 列目（ 1 、3 、6 、10、…）はどのように数が並んでいるか」という課題から、パスカルの三角形の美しさに触れさせたい。2 、3 、4 、5 、…と増える（$_{n+1}C_2 - {}_nC_2 = n$）や、$10 = 1+2+3+4$（$_{n+1}C_2 = {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_nC_1$　※）を見いだし、自力で証明することを期待する。これらをとおして、自ら、4 列目はどのように数が並んでいるか、さらに、列目はどのように数が並んでいるか（$_{n+1}C_{r+1} - {}_nC_{r+1} = {}_nC_r$、$_{n+1}C_{r+1} = {}_rC_r + {}_{r+1}C_r + {}_{r+2}C_r + \cdots + {}_nC_r$）と、自分で発展させて問題を見つけ、再び式化、解決することを期待する。

次に、r 列目の考察から、r 列目の先頭 $_rC_r$ から $_nC_r$ の和は $_{n+1}C_{r+1}$ になることがわかるが、パスカルの三角形には、他にも和に関する性質がある。例えば、$1+3+3+1=8=2^3$ のように、横 1 列の和は 2 の累乗になる（$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$）。他にも、正方形に囲った数の和、例えば、図 1 のように正方形に囲った数の和は、$19 = 20 - 1 = {}_6C_3 - {}_3C_0$ となることは、※式から簡単に説明できる。このことは、正方形の 1 つの頂点が $_0C_0$ でなくても、また、正方形ではなく長方形に囲っても、似たことが成り立つ。他にも、図 2 のように長方形に囲った数において、$1\times4+3\times3+6\times2+10\times1=35$（$_2C_2\times{}_4C_1 + {}_3C_2\times{}_3C_1 + {}_4C_2\times{}_2C_1 + {}_5C_2\times{}_1C_1 = {}_7C_4$）という性質もある。このような性質を、具体的に提示をするなどしてから、生徒自身で一般法則を見つけ、式化し、解決し、さらに発展することを期待する。

上記のような活動を通して、発展のさせ方を学ぶとともに、発展させたことによってパスカルの三角形の美し

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1
1 1
1 2 1
3 3
6
図 1.



1
2 1
3 3
4 6
10
図 2.

さを触れることができたことを実感し、自ら数学的活動に取り組む姿勢を伸ばしたい。

(4) ファニャーノの問題

ファニャーノの問題の前に、次の 4 つの問いを解決する。①は中学 1 年生の教科書にもある問いであり、生徒は、解決しやすい問いであると考えられる。

① 定点A、Bと直線m上の点Pについて、AP+PBが最小となる点Pを定めよ。

② 定点A、Bと 2 直線m、n上の点P、Qについて、AP+PQ+QBが最小となる点P、Qを定めよ。

③ 定点Aと 2 直線m、n上の点P、Qについて、AP+PQが最小となる点P、Qを定めよ。

④ 定点Aと 2 直線m、n上の点P、Qについて、AP+PQ+QAが最小となる点P、Qを定めよ。

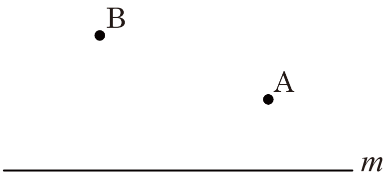


図 1

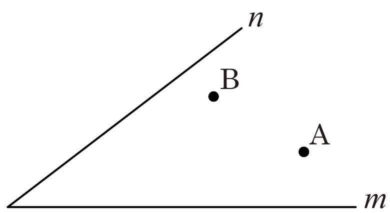


図 2

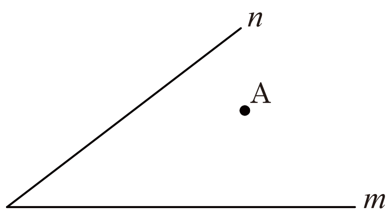
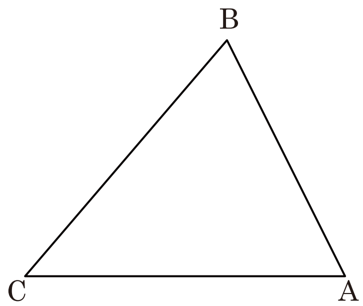
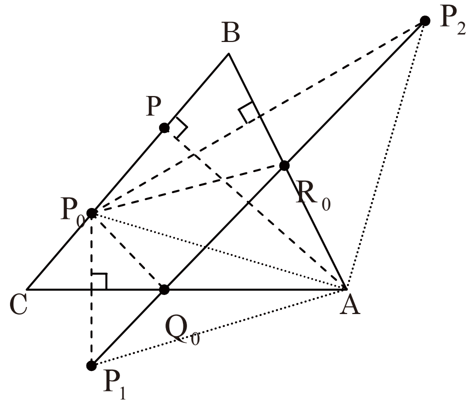


図 3

⑤ 図の辺BC、CA、AB上の点P、Q、Rについて、PQ+QR+RPが最小となる点P、Q、Rを定めよ。





⑤が「ファニャーノの問題」と呼ばれる問題であり、教育的価値のある問である。

④より、P、Q、Rのうち 1 点が定点であれば、残り 2 点を定めることができる。例えば、 P_0 をBC上にとり、CA、ABに関して P_0 と対称な点 P_1 、 P_2 とすると、P_1P_2とCA、ABとの交点 Q_0、 R_0 が、$P_0Q_0+Q_0R_0+R_0P_0$ が最小となる点である。ここで P_1 、 P_2 、は、CA、ABに関して P_0 と対称な点であるので、以下のことがわかる；(i) $P_0Q_0+Q_0R_0+R_0P_0=P_1P_2$ 、(ii) $P_0A=P_1A=P_2A$ 、(iii) $\angle P_0AC=\angle P_1AC,\ \angle P_0AB=\angle P_2AB$。(iii) より、 P_0 をBC上のどこにとっても $\angle P_1AP_2=2A$ である。これと (i) より、 $P_0Q_0+Q_0R_0+R_0P_0$ を最小にするためには、P_1P_2を最小にすればよいので、P_1A、P_2Aを最小にすればよい。さらに、これと (ii) より、P_0Aを最小にすればよいので、PはAからBCへの垂線の足である。

これら一連の問いを通して、問題を自分でつくる方法を感得し、また、問題を固定的なものではなく自分で発展できるものと見る見方を伸ばすことを期待する。また、ファニャーノの問題の答えの△PQRは、△ABCの各頂点から対辺に下ろした垂線の足を頂点とする△ABCのorthic triangle（本稿では、垂心三角形と訳す）と呼ばれるものである。垂心三角形に関する問題は教科書や問題集の中にもあり、ファニャーノの問題は、問題同士の関連もみることができ、平面幾何に関する理解を深めるとともに、数学の美しさを実感し、関連を意識するきっかけを得ることを期待する。 （文責　佐藤　亮太）

５．主な成果と次年度の課題

(1) 主な成果

①　算数・数学的活動を促す教材開発

附属世田谷小学校においては、見つける活動や算数・数学を学習していく上での素地的な活動を目的とした算数的活動の教材開発を中心として行った。附属世田谷中学校においては、見いだす活動や伝えあう活動を目的とした数学的活動の教材開発を中心として行った。附属高等学校においては、学習内容の仕組みを理解することを目的とした活動や、数学を見つける活動を中心として教材開発を行った。そして、その成果の一部を各校の公開授業研究会において発表するとともに、本稿にまとめることができた。

②　現職研修への成果の還元

各校において現職研修セミナーを 8 月に実施した。特に中学校では矢嶋昭雄（東京学芸大学教育実践研究支援センター）も参加し、数学的活動の実践報告と講演を行った。また、府中市教育研究会数学部からの依頼を受け、12月に研修会を府中第九中学校において行った。そこでは、実践報告とともに、本年度取り組んだ教材開発の成果の一部を府中市の中学校の先生方と共有し、ご意見をいただくことができた。

(2) 今後の課題

今後の課題としては、小中高においてより一層の教材開発を行っていくことが必要であると考える。そして、実践授業を行う中で各学校段階における、児童・生徒が行う算数・数学的活動の特徴、共通点、違いを明らかにし、算数・数学的活動を促す授業のあり方について事例的に明らかにしていきたいと考える。

（文責　鈴木　誠）