1 次関数の活用における授業設計

― 多様な解決方法に着目した授業を通して ―

東京学芸大学附属小金井中学校　松　尾　吉　陽
東京学芸大学Ｂ類数学科４年生　木　部　慎　也

目　　　次

1次関数の活用における授業設計

― 多様な解決方法に着目した授業を通して ―

松尾吉陽* 木部慎也**

附属学校の使命の1つに教育実地研究がある。本稿は教育実地研究生との共同研究である。教育実地研究生が多様な解決方法に着目した授業設計をした。その時、どのようなことに留意すれば有効な学習となるのかを明らかにすることが本稿のねらいである。

B類数学科の学生が、1次関数の活用の学習で3直線で囲まれた三角形の面積を求める課題を提示した。数学の学習で重視する問題解決学習の授業設計である。そして、その授業設計をもとに授業実践をした。授業の実際から、生徒の反応、授業の学習感想の2つの観点から授業の分析・考察を行った。

授業の分析・考察を行った結果、1次関数の活用の学習において三角形の面積を求める授業の有効性と課題を明らかにすることができた。

キーワード：1次関数の活用、教材研究、問題解決、教育実地研究

1．共同研究

1．1．教育実地研究

木部実地研究生は、B類数学科の学生である。B類数学科の学生は、3年次に附属中学校で教育実地研究を行う。初めての教育実地研究であるため、発問、板書等授業展開における未熟な点、改善すべき課題も多いが、授業を通して、数学科の授業設計を考察していく。

1．2．1次関数の課題と多様性について

1次関数の活用の学習では、「日常事象の問題場面」「グラフを利用して解決する問題」「図形における動点の問題」等がある。本実践は、木部実地研究生が教材研究した「1次関数の直線で囲まれた三角形の求積問題」である。本稿では「多様な解決方法」に焦点を当てて考察していく。

数学の授業に見られる多様性とそのまとめ方については、古藤怜が次のように述べている。[1)]

① 多様な考えの重視される理由として、4点を挙げている。

ア）数学の本質から

イ）個性尊重の視座から

ウ）学習意欲振興の視座から

エ）練り合いの場の構成のために

② 多様な考え方の分類とその指導については、4つに分類している。

Ⅰ．独立的な多様性　：それぞれの考えの妥当性に着目して

Ⅱ．序列化可能な多様性　：それぞれの考えの効率性に着目して

＊ 東京学芸大学附属小金井中学校
＊＊ 東京学芸大学B類数学科4年生

Ⅲ．統合化可能な多様性　：それぞれの考えの共通性に着目して

Ⅳ．構造化可能な多様性　：それぞれの考えの相互関係に着目して

多様性について考察していくのが第１の視点である。

２．授業展開と評価

２．１．課題提示

生徒に具体的な課題を提示するとき、その課題をどのように生徒に与えるかによって授業展開が変わってくる。具体的な課題提示には、次のような方法がある。[2)]

①　生徒の実態に合わせた提示をする。

②　数値を□のように未知数にして提示する。

③　条件不足、条件過多の問題として提示する。

④　問題の連続性を図る提示とする。

⑤　逆転の発想で問題を提示する。

⑥　ゲーム化して問題を提示する。

本実践において、課題提示の方法を考察していくことは、授業設計の１つの視点となる。

２．２．問題解決の展開

木部実地研究生は、生徒の多様な解決方法に焦点をあてた授業設計をした。それは、発表した解決方法や考え方を比較することによって理解が深まっていくからである。考え方の表現方法の１つとして式があるが、グラフを利用した視覚的な理解も大切にしたいものである。

このような展開から「式やグラフの有用性を感じ、問題解決に生かそうとする気持ち」を育むことが教師のねらいである。

問題解決の学習展開について考察することは、授業設計の１つの視点となる。

２．３．授業評価ー生徒の反応と学習感想

木部実地研究生は、授業評価について生徒の反応（プロトコルや自力解決の方法）と学習感想から考察を加えた。次の５つが評価の観点である。

①　課題提示の方法について

②　自力解決の問題としての難易度について

③　多様な解決方法という観点について

④　練り上げの場面において

⑤　学習に対する生徒の意識について

〈引用・参考文献〉

１）古藤　怜：多様な考えの生かし方まとめ方，東洋館出版，1990

２）松尾吉陽：「導入で勝負する」算数重要単元の指導，明治図書，1996

・松尾吉陽：東京学芸大学附属小金井中学校「研究紀要」第45号　pp37-38，2009

・松尾吉陽：東京学芸大学附属学校研究紀要　第36集　pp87-96，2009年６月

・松尾吉陽：東京学芸大学附属学校研究紀要　第37集　pp109-118，2010年６月

（松尾　吉陽）

３．授業設計

３．１．本時の主題

グラフに囲まれた三角形の面積

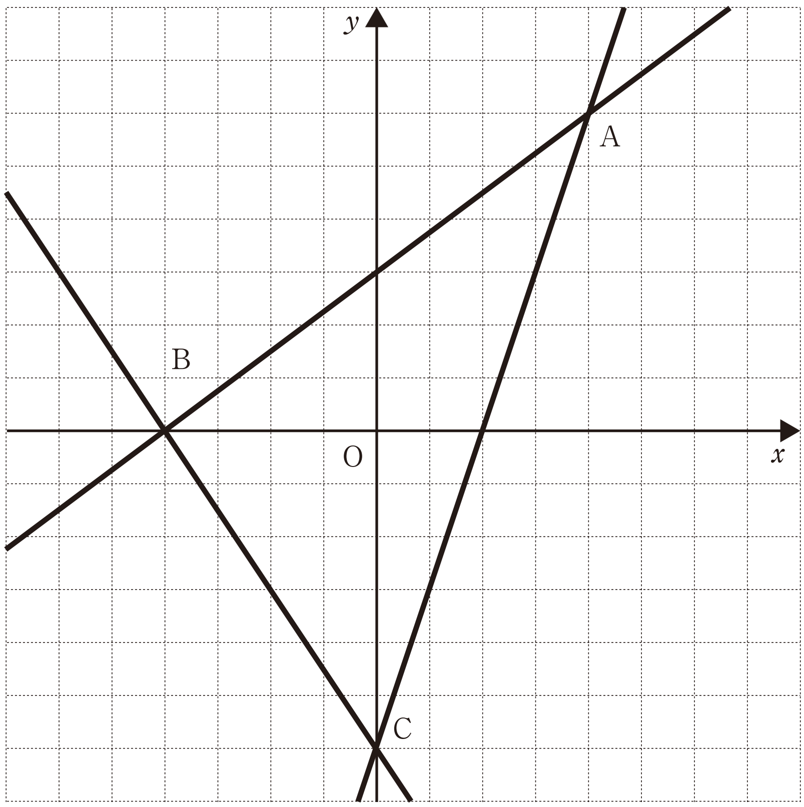
３．２．本時の目標

・三角形の面積に対して、多様な求め方を考えようとする。(関心・意欲・態度)
・グラフで囲まれた三角形の面積を論理的に考え、求め方の根拠を説明できる。(数学的な見方や考え方)
・グラフの交点の座標が求められ、解決方法に合った面積の計算ができる。(表現・処理)
・多様な解決方法の存在とそれぞれの特徴を理解できる。(知識・理解)

３．３．本時の教材について

本時は 1 点で交わらない 3 本のグラフによって囲まれた三角形を教材とする。多様な解決方法を考えることを優先するため交点の座標は整数になるように設定し計算に時間がかからないようにした。また、x 軸で分ける、y 軸で分ける、といった解決方法がとれるよう、交点のうち 1 つを x 軸上に、1 つを y 軸上にした。逆に、単純に公式で解けないよう、残る 1 点はどちらの軸にものらないように設定した。

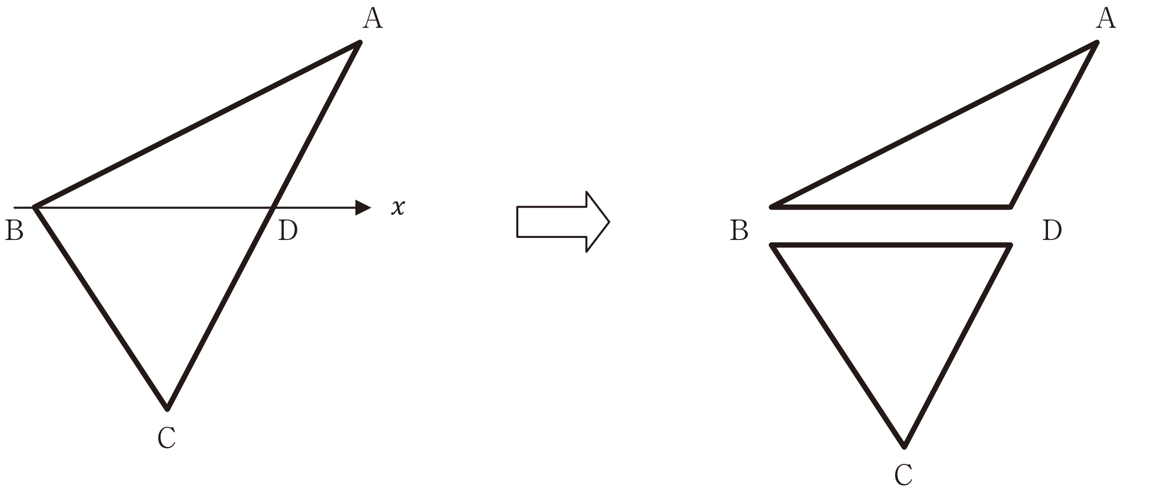
(i) $y = 3x - 6$　(ii) $y = \frac{3}{4}x + 3$　(iii) $y = -\frac{3}{2}x - 6$



この設定の上で、生徒の反応を①～⑦の 7 通り予想した。

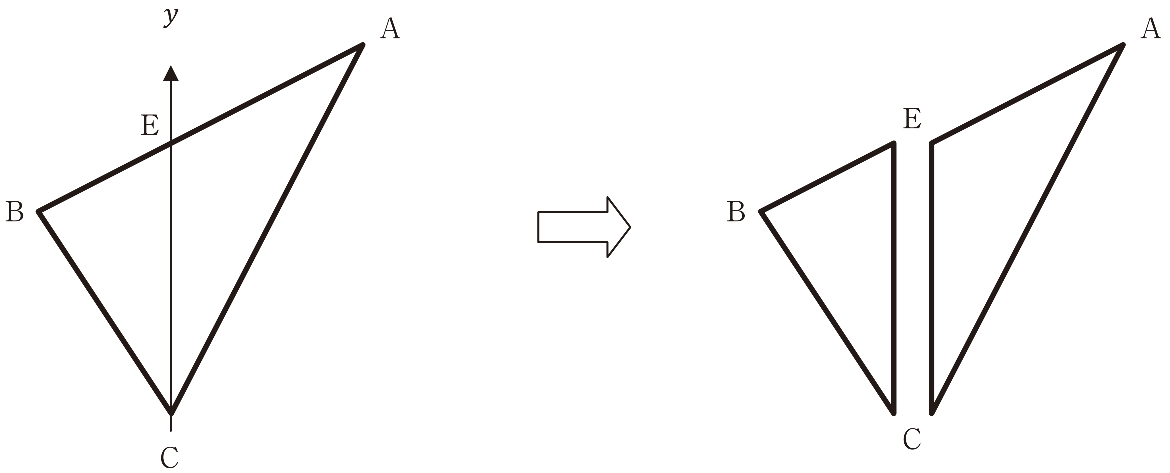
①x 軸で分ける

△ABC＝△ABD+△CDB



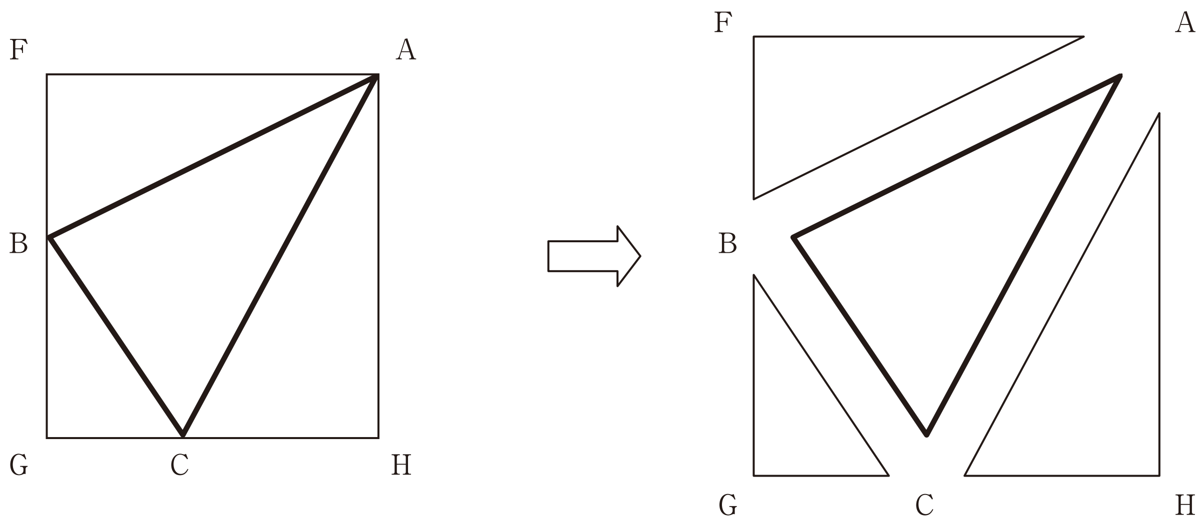
②y 軸で分ける

△ABC＝△AEC+△EBC



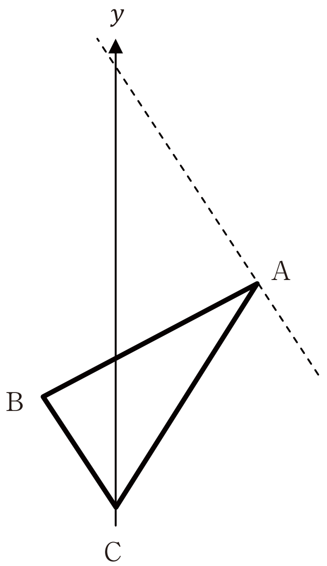
③長方形から引く

△ABC＝長方形AFGH−△AFB−△BGC−△ACH

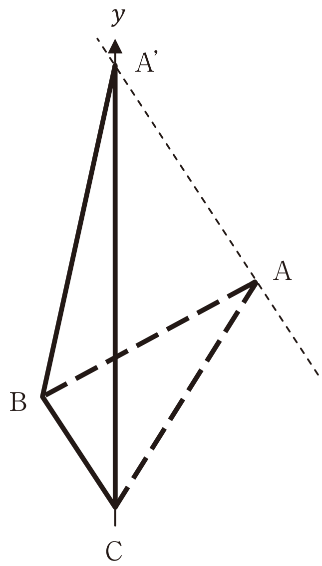


④等積変形（Aをy軸に）

△ABC＝△A’BC

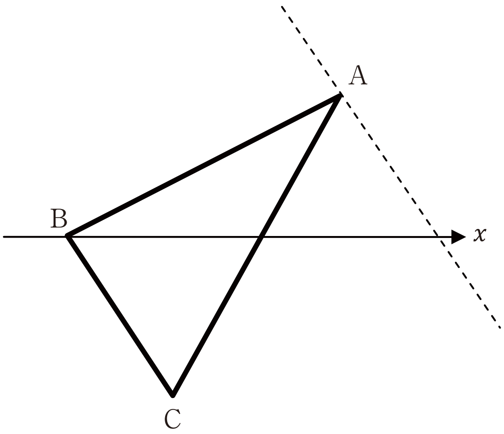


BCに平行な
直線を利用して

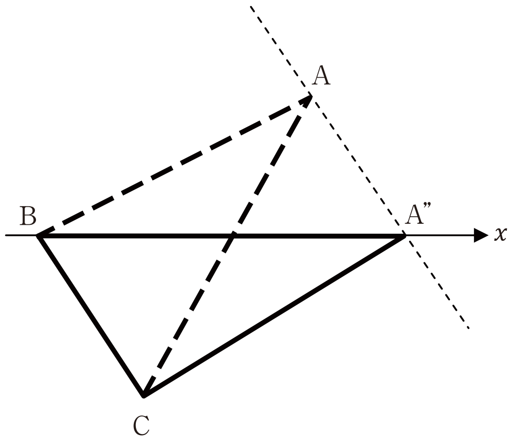


⑤等積変形（Aをx軸に）

△ABC＝△A”BC

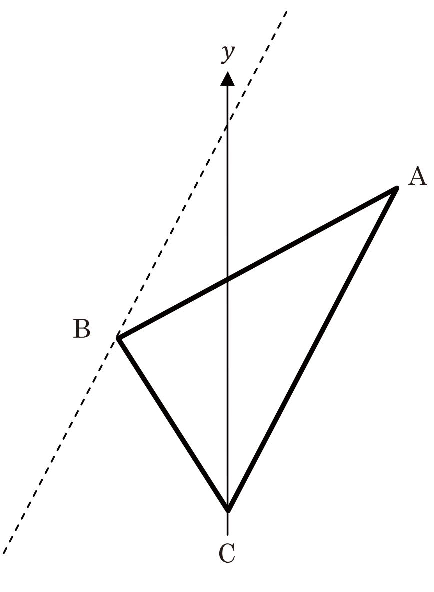


BCに平行な
直線を利用して

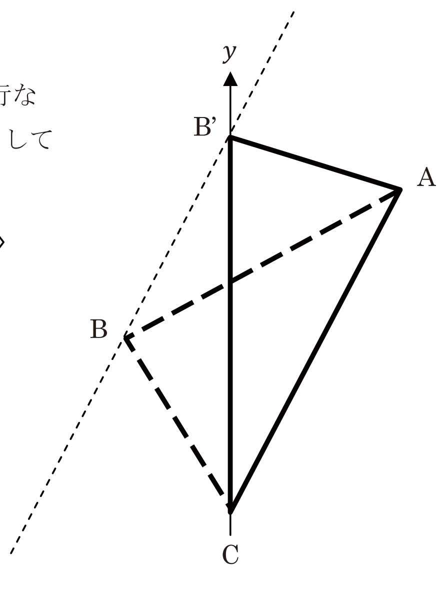


⑥等積変形（Bをy軸に）

△ABC＝△AB’C

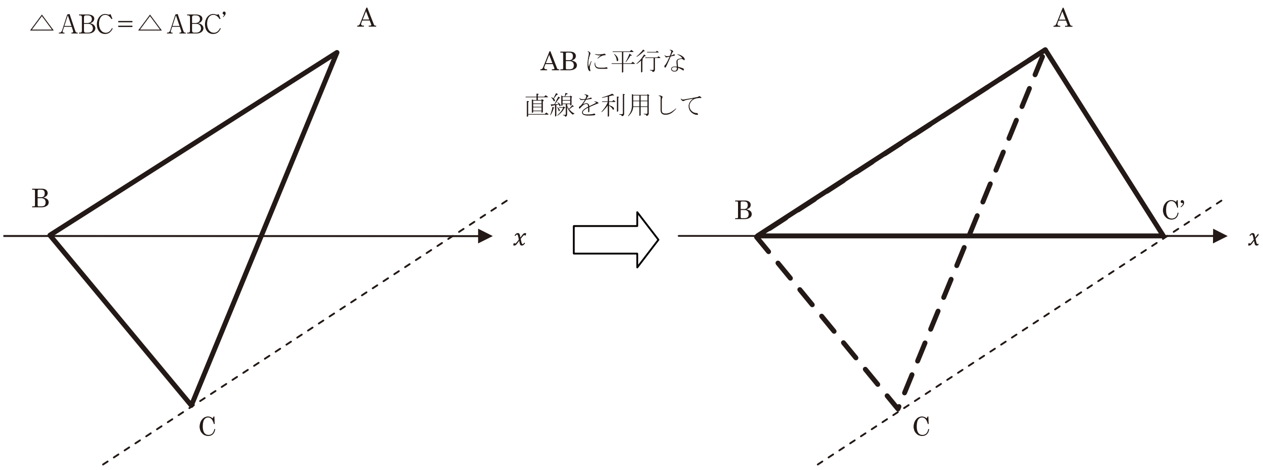


ACに平行な
直線を利用して



⑦等積変形（Cをx軸に）

　△ABC＝△ABC'



３．４．本時の指導について

　面積を求める解決方法だけに焦点を当てるならば最初からグラフや交点も与えてしまっても構わないが、グラフをかく活動や交点を求める計算処理の確認も時間内に十分に行えると判断し、生徒に最初に与える情報は3直線の式のみとした。式の提示と同時に方眼紙を配布し、グラフをかいたり、交点を求めたりする学習で既習事項の確認を行う。ここから本題の面積を求める方法を考える活動に入る。解決方法①から③までは多くの生徒が挙げるが、逆に等積変形を使う生徒はごく少数であると考える。そこで、生徒の様子を見ながら「等積変形」というヒントを与える。基本となる考え方自体は既習事項なので、このヒントによって解決方法が増える生徒は多い。

３．５．多様な解決方法について

　今回の問題は単純に公式を使用し（底辺）×（高さ）÷ 2 で面積が求められないため、多様な解決方法が考えられる。現時点では三平方の定理を学習していないので、x軸もしくはy軸に平行な長さのみで工夫して面積を求めなくてはいけないことがこの問題の特徴である。この特徴を生かし、さらに「できるだけたくさんの解決方法を考えよう」という発問によって、本来ただ問題を解くだけなら考えないであろう解決方法も考えさせる。

前述の①～⑦の解法にはその性質上、適応するための条件がある。以下にその条件と特徴を述べる。

①：1点がx軸上にあり、残りの2点のy座標の符号が異なること。

②：1点がy軸上にあり、残りの2点のx座標の符号が異なること。

　①と②は本質的には同様の解決方法である。

③：三角形であること。

　図のように『長方形から直角三角形3つを引く』という解法がとれるのは3直線の傾きの符号がすべて同じではないときである。直線の中にx軸やy軸に平行な直線が含まれる場合、引く三角形の数が変わる。そして3直線の傾きの符号がすべて同じであるとき、長方形から引く図形は直角三角形と凹四角形になる。この凹四角形も分割すれば面積を求められる。

　どの場合であっても面積を求める図形が増えるため計算量が増える。

　頂点の位置を問わない。

④から⑦：三角形であること。

　あらゆる三角形に対応可能である上、非常に多くの解決方法が考えられるため強調したい解決方法である。3辺のうち任意の辺を底辺とし、底辺に平行で頂点を通る直線上で頂点を移動させ、どちらかの軸上に移動させるか、1辺がどちらかの軸に平行になるように変形する。

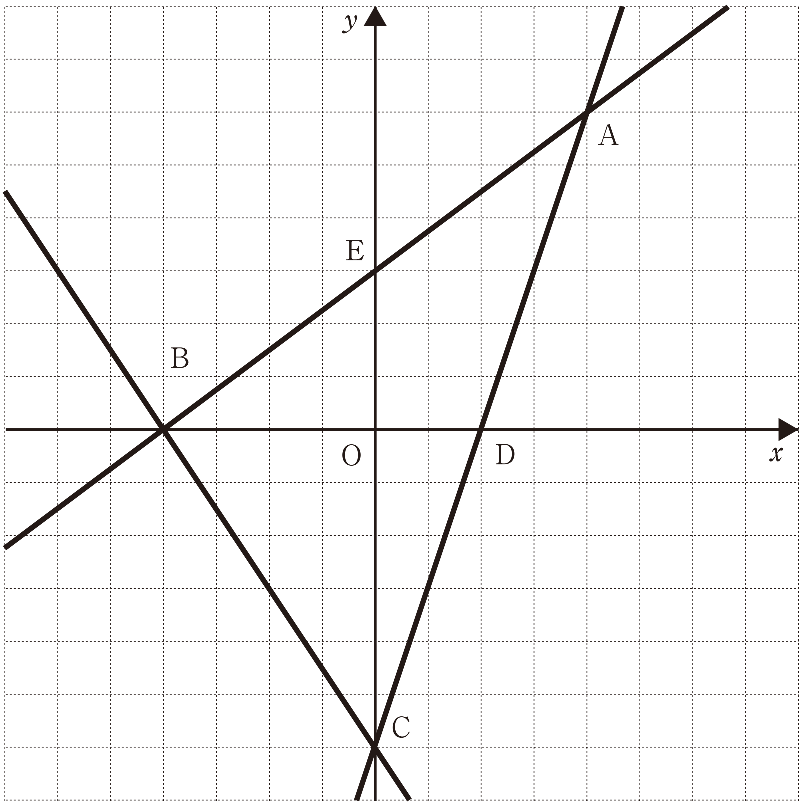
4．授業の実際

4．1　導入

T：「(i) $y=3x-6$　(ii) $y=\frac{3}{4}x+3$　(iii) $y=-\frac{3}{2}x-6$ のグラフをかき、交点の座標を求めよう。」

方眼紙を配布し、グラフをかくように指示する。

S：グラフを座標黒板にかく。



T：「(i)と(ii)の交点をA、(ii)と(iii)の交点をB、(iii)と(i)の交点をCとしたとき、A、B、Cの座標は。」

S：「A（４，６）B（−４，０）C（０，−６）。」

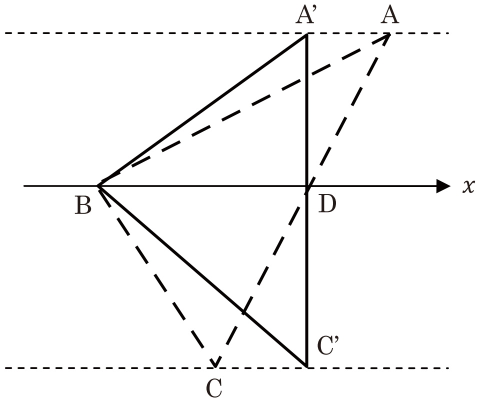
4．2　展開

T：「△ABCの面積をできるだけたくさんの方法で求めてみましょう。」

Sa：x 軸で分ける解決方法①をとる。

Sb：長方形から余分な三角形を引く解決方法③をとる。

Sc：等積変形を使うが、Aを（２，６）にCを（２，−６）に移動させ底辺と高さが求められる三角形にして面積を求める解決方法をとる。



T：上記の３人の生徒に解決方法を黒板に書かせる。
「それぞれの解き方を説明してもらいます。」
Sa：「△ABCを x 軸で切って△ABDと△CDBに分けます。あとはそれぞれの面積を求めて足します。」
Sb：「△ABCを長方形で囲んで余分な部分を引きます。」
Sc：「AをBDに平行に移動させて（２，６）に、CをBDに平行に移動させて（２，-６）に持ってくれば底辺も高さもわかるので面積が求められます。」

４．３　まとめ
T：「今回取り上げた解法にはそれぞれ特徴、利点があります。皆さん考えてみてください。」

５．授業の考察と評価
５．１．課題提示
グラフと交点の処理を生徒にさせる目的で式のみの提示にしたがほとんどの生徒がグラフはかけていた。間違えている生徒も符号違いや読み違いなどで、本質的な誤答は見当たらなかった。交点はかいたグラフから読みとる生徒と連立方程式で出す生徒が半々という状況だった。本来であれば連立方程式で求める方法が厳密であるので望ましいが、本時では方眼紙を使用したことと、発問の時点で「グラフをかき、交点を求めよう。」としたことでグラフから読みとる生徒が多かったと考えられる。「交点を求め、グラフをかこう。」と発問していればグラフの交点が整数になることは予想しがたいので連立方程式で交点を求める生徒が多かったと思われる。

５．２．自力解決の時間の保障
本時では、導入時に10分、本題に20分程度自力解決の時間をとった。教師主導で解法を説明していけばより多くの解法を授業で取り扱えるが、生徒が自力で解決方法を考える力を育てるため出来る限り生徒自身に考えさせる展開とした。基本となる解法①、②、③を考えている間に上位の子は等積変形まで考えられるなど、生徒間の個人差に対応できることもこの問題の特徴である。ある程度自分で問題解決をする時間をとったことで友達の解答が理解しやすかったという意見が学習感想に見られた。

５．３．生徒の解決方法
机間巡視では約７割の生徒が①から③の解決方法をとっており、６人の生徒が等積変形の考え方を使っていた。中でも等積変形に関しては予想通り１点を移動させたもの以外にも２点を移動させたものがあった。

５．４．集団解決
指導案段階では自力解決の時間の後に集団解決の時間を用意していた。集団になることによって自分が見落としていた解決方法に気付いたり、遅れている生徒に生徒同士で教え合ったりすることができる。また、教える側の生徒はより理解を深めることができる。またこうして仲間とともに学んでいけることが学校教育の強みであり、重視すべき点であると考える。しかし今回の授業では予想よりも各生徒が自力解決に熱中していたのと、解法が１つもわからない、遅れている生徒は見られなかったので、自力解決の時間をとることを優先し、解決方法の発表は３つにとどめた。

６．学習感想をうけての成果と今後の課題

生徒が授業後に書いた学習感想から、本時のねらいの達成度を確認し、今後の課題を考察する。

グラフを平面図形としてみる

生徒Ａ：「グラフというのは式を座標軸に表しただけのものだと思っていたけれど、グラフを図形の辺として考えることで図形の問題になることが分かった。」

三角形の面積を求めるということで多くの生徒は無意識に平面図形として扱っているが「グラフを平面図形として見ることができる。」という事実を認識できることは非常に重要な力である。中学生の現段階では感覚的に問題の解法が浮かぶという生徒も少なくないが、高校以降の数学においては定理の特徴を理解し、論理的に解答を組み立てていかなければならないので一つ一つの事実を整理していく作業を今のうちから習慣化させたい。

生徒Ｂ：「座標から長さを出すということは、なんだか不思議だなぁと思いました。今までの授業でグラフをたくさんかいてきたけれど、こうやって１つの図形としてとらえたことはなかったからです。」

グラフを平面図形と見ることが不慣れなため、違和感をもった。この違和感は「理解したい。」という好奇心に発展すると考える。生徒Ａのようにはっきりと理解することも良いが、このように関心へ繋がる違和感をもつことも成果ととらえる。今後、関数と図形の関連をより深めていきたい。

多様な解決方法の意義の理解

生徒Ｃ：「いろいろな考え方をすることはできるが無駄に遠まわりをするよりも、シンプルで簡単に解ける解法があれば、それを見つけたいと思った。しかし、いろいろな方法を合わせることで答えの確認になるとも思った。」

一番簡単な方法さえわかればよいと考えているがどの方法が最も簡単なのかまでは判断できていない。複数の解決方法を“答えの確認”と位置付けていることからそれぞれの解決方法の条件や特徴などについてはあまり意識していない。今後の展開として、それぞれの解決方法がもつ条件、利点、数学的な意味を生徒に考察させ、より良い解決方法を学び合うことが重要であると考えるが教育実地研究のため授業を実施することはできなかった。

生徒Ｄ：「私は似たようなものもありましたが７つの方法を見つけました。実際に様々な方法で面積を求めましたが方法によっては面倒くさいものもあったので、三角形の形から『どんな方法で求めると簡単か。』ということをいかに考えるかが大切だと思いました。」

全員がこの感想を書けることが理想である。この生徒は当初私が予想した形の等積変形を行っていた。解決方法を一つに絞らず問題によって使い分けようとしていることから、それぞれの方法に適した状況があることを理解している。

等積変形の強調

生徒Ｅ：「『たくさん考えて。』と言われ、たくさん考えたつもりだったがScの等積変形パターンはすごいなと思った。少し説明しづらく難しいやり方だが一番美しいと思った。」

数学の解法を“美しい”と表現していることは今後数学への関心を深める大きな要因であると思われる。数学的美的センスというと曖昧な表現になってしまうが、数学を美しいと思える感性を育てることも数学教育の目標の１つである。

このほかの感想にも「等積変形が印象に残った。」という感想が多くあった。今まで等積変形にあまり触れなかったことも理由だが、変形のパターンが多く、場合によっては非常にきれいな形に変形できることから関心をもった生徒が多かった。ただし、今回の問題は実際は等積変形以外の解決方法を使うほうが一般的であるため、「等積変形は面白いがやはり簡単な方法が良い。」という感想もあった。等積変形の特徴は汎用性にある

ことを実感できるような展開も考えていきたい。

　また、三角形 2 つに分けたときに面積を求める式が同じになることに注目した生徒がいた。今回の問題設定時に意識したことをすべて踏まえたうえで、面積を求める式が異なる式になるように設定することはできるが、その場合、非常に鋭角な角を持つ三角形になってしまうため、生徒が多様な解決方法を考える際に障害となってしまう欠点がある。

（木部　慎也）