数学科における授業設計・再考

―　２次方程式の利用の授業を通して　―

東京学芸大学附属小金井中学校　　松　尾　吉　陽
東京学芸大学Ｂ類数学科４年生　　野　島　淳　司

目　　　次

数学科における授業設計・再考

― 2次方程式の利用の授業を通して ―

松　尾　吉　陽*　　野　島　淳　司**

附属学校の使命の 1 つに教育実地研究がある。教育実地研究生が数学の授業設計を行うとき、どのような視点が重要なのかを明らかにするのが本稿のねらいである。

B 類数学専攻の学生は、3 年次に初めての教育実地研究を行う。その数学専攻の学生が、数学の授業設計をするときの教材研究、問題解決型の授業展開、多様な解決方法のある問題設定等々、1 時間の数学の授業を構築するまでの過程を考察する。そして、その授業設計をもとに授業を実践した。授業の実際から、生徒の反応を中心として、授業の分析・考察を行う。

初めての教育実地研究であるため、授業展開における未熟な点、改善すべき課題もあるが、授業の考察を通して、数学科の授業設計における 4 つの視点が重要であるという知見を得た。

キーワード：2 次方程式の利用、教材研究、数学的コミュニケーション、教育実地研究

1．教材研究

1．1．導入場面の重要性

野島実習生が 2 次方程式の利用の授業で考えた題材は、「長方形の畑に直交する道の幅を求める問題」「対角線の本数から多角形を求める問題」「動く図形の面積に着目する問題」の 3 つである。その中で、研究授業では、「対角線の本数から多角形を求める問題」を扱った。

数学の授業の導入では、一般的に次のような 5 つの観点が重要である。[1)]

①　生徒の疑問や葛藤を引き出す導入

②　生徒一人ひとりが解答を出せる導入

③　生徒が既習事項をもとに考えられる導入

④　生徒が体を通して学ぶ導入

⑤　生徒の考えを広げ、満足感をもたせる導入

野島実習生が 1 回目に提出した指導案には、まず最初に「対角線とは何ですか？」という教師の発問が書かれていた。

予想される生徒の反応としては、

・四角形の斜めの線

・多角形の斜めの線

・多角形上の頂点を結ぶ線のうち辺でないもの

を挙げ、その後「多角形上の異なる 2 つの頂点同士を結ぶ線分のうち辺を除く線分のことである」という対角線の定義を指導することになっていた。

定義を指導した後、具体的に四角形、五角形、六角形の対角線をかかせる導入である。これでは、生徒は教

＊　東京学芸大学附属小金井中学校
＊＊　東京学芸大学 B 類数学専攻 4 年生

師の言われたことをやっていくという展開となってしまう。

この導入を、生徒の「今日の学習はどんなことをするのだろうか」という学習に対する興味関心を高め、授業に対して「ワクワクとした期待感をもたせる導入にできないだろうか」というのが第１の視点である。

１．２．問題解決型の展開

野島実習生は、問題解決型の授業展開となるように授業設計をした。

第１番目は、「n 角形の対角線の本数を求める場面」

第２番目は、「対角線の本数が90本の多角形を考える場面」

第３番目は、「対角線の本数が919本の多角形を考える場面」

問題を段階的に難しくしていく過程をとって問題解決にあたらせた。このように、対角線の公式を求め、基本的な問題を解決し、発展的な問題に挑戦するという授業設計をしている。

問題解決型の学習は、このような問題の与え方だけではない。このことについても、１つの視点として考察していかなければならない。

１．３．教材研究の観点

数学の問題に対する教材研究では、次の６つの観点を重要に考えている。[2)]

① 素材の中にいくつもの性質が入っているような期待感を抱くもの。

② からくりを徐々に解き明かしていく際のわくわく感を抱くもの。

③ 対称性やパターンの繰り返しを美しいなあと感じるもの。

④ ある観点からみれば同じことや類似したことなんだと感じるもの。

⑤ 公式を適用すれば思考を節約して、公式は便利なものであると感じるもの。

⑥ １つのことを実に多くの人が考え追求してきたんだなあ、よくこんなことを発見できたなあと感じることができるもの。

研究授業を実践してみて、観点との関連性についても考察できれば授業設計の１つの視点となる。

１．４．課題提示

生徒に具体的な課題を提示するとき、その課題をどのように生徒に与えるかによって授業展開が変わってくる。具体的な課題提示には、次のような方法がある。

① 生徒の実態に合わせた提示をする。

② 数値を□のように未知数にして提示する。

③ 条件不足、条件過多の問題として提示する。

④ 問題の連続性を図る提示とする。

⑤ 逆転の発想で問題を提示する。

⑥ ゲーム化して問題を提示する。

課題提示の方法を考察していくことは、授業設計の1つの視点となる。

〈引用・参考文献〉

１）松尾吉陽：「導入で勝負する」算数重要単元の指導、明治図書、1996

２）東京学芸大学附属小金井中学校「研究紀要」第44号pp121-134、2008

（松尾　吉陽）

２．授業設計

２．１．　２次方程式とその利用について

２．１．１．他の単元との関連

方程式の学習については中学校 1 年生で 1 次方程式、2 年生で連立方程式を学んでいる。学年を追って複雑になっていく方程式の単元を学ぶことにより、生徒の数理的な能力が向上し、その活用範囲が広がっていくことが期待される。中学校 3 年生で新たに 2 次式の展開や因数分解を学習し 2 次式についての扱いができるようになったことと、平方根について学習し既知の数の範囲が有理数から根号を含む数に拡張されたことに対応して、2 次方程式の指導を行うことは自然な流れである。また 2 次方程式を学ぶことにより、相似な図形の面積や三平方の定理が扱えるようになるなど、これからの学習に向けての応用範囲が飛躍的に広がる。

２．１．２．なぜ方程式を使うか

問題を解決する際に方程式を使う最大の利点は、正確に式を立てられれば、あとはその式を代数的に解いていくだけで答えが「確実に」求まるという点である。方程式を解く過程は、基本的に“if and only if”(「必要十分条件」の意；以下iff）の形で進んでいくから、正しく文字の設定をし、問題の条件を全て式に表せれば、それを解いた解と問題の答えは必ず一致する。つまり方程式を使った解法は普遍的である。

時には方程式など使わずにイメージや直感、帰納的な方法などにより答えを出せることもある。しかしこれらの方法では答えを「確実に」出すことはできない。ごく簡単な例を出すと、「ある数とそれより 1 大きい数をかけた積が12となる。ある数はいくつか」という問題がある。この問題に対して、$3\times4=12$だからある数は 3 だと答えたとしよう。確かに 3 は答えの一部であるが、これでは正しい答えとはならない。正しくは 3 と-4であり、方程式を用いて解けばこれらの答えが出ることは言うまでもない。

２．１．３．解の吟味について

2. 1. 2. で、正しく文字の設定をし、条件を漏れなく方程式に表せればその解と問題の答えは必ず一致することを述べた。例えば、「ある 1 桁の正の整数とそれより 1 大きい整数をかけた積が12になる。ある整数はいくつか」という問に対し、この考え方を用いて解くと以下のようになる。

解）求める整数を n とすると、与えられた条件は「$n(n+1)=12,\ 1\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数」…（＊）となる。

（＊）⇔ $n^2+n-12=0,\ 1\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数 ⇔ $(n-3)(n+4)=0,\ 1\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数

⇔ $n=-4,\ 3,\ 1\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数

⇔ $n=3$　　　よって、求める整数は 3

このように条件を全て式に反映させることができれば、それを解く過程は iff で進んでいるのだから、正しい答えが求まることは言うまでもない。しかし、この例からもわかるように「条件を全て式に反映する」という作業は非常にわずらわしい。(「$1\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数」といったことを気にかけるのは面倒である）

しかし条件を全て式に反映できないと、それが原因で方程式を解いた解に問題の答えでないものが含まれる可能性がある。そこで方程式を解いた解が問題に適しているかを判断すること、いわゆる「解の吟味」をすることが必要になる。条件を全て式に反映できないということは、式を解いて求めた解の集合が問題の答えの集合よりも大きくなるのだから、解の吟味により不要な解を除けば正しい答えになる。実際に、「条件を全て式に表し、iff の形で進めて答えを出す」というよりも「わかりやすい条件を方程式に表し、その解を求めた上で解の吟味により適当な答えのみを抽出する」というほうがはるかに実用的である。特に 2 次方程式の利用ではその解は通常 2 つあり、2 つの解がそのまま答えとはならないことも多い。したがって多

くの生徒がここで初めて解の吟味の必要性を意識するはずであり、その指導をするには最適な機会である。

２．１．４．文章題を学ぶ意義

数学におけるほとんどの単元で、新たな内容を学んだ際にはその利用として具体的な文章題を解く。文章題を解くことを通して、それまでに学んできた数学的なスキルが様々な問題を解決するのに利用できることを知り、数学への関心が深まるとともに数学を学ぶ際の有効な動機付けとなることが期待される。また文章題を通して、例えば方程式でいえば文字の設定や、解の吟味など今までには必要でなかった作業が必要であるということを学ぶことができる。さらに 2 次方程式では、具体的な文章題を解くことを通して因数分解や平方完成、解の公式を用いた 2 次方程式の解法などについてまとめて学習することができ、2 次方程式そのものについての理解が深められる。

２．２．本時の指導について

２．２．１．本時の主題　　対角線の本数から多角形を求める

２．２．２．本時の目標

（関心・意欲・態度）

n 角形の対角線の本数を文字を用いて表そうとする。またその式を用いて対角線の本数から多角形を求めようとする。

（数学的な見方や考え方）

演繹的に見出した公式を応用して問題の解決をしようとする。また根号の入った値を整数値で近似し、整数の範囲で答えを出すことができる。

（表現・処理）

文字を用いて立式し、その 2 次方程式を解くことにより答えを出すことができる。またその考えた過程を説明することができる。

（知識・理解）

2 次方程式を用いて様々な問題が解決できることを理解し、その有用性を知る。

２．２．３．本時の課題について

前時で 2 次方程式の文章題の代表的といえる問題 2 題を取り上げ、その基本的な解法を習得させた。本時ではそのことを受けて、計算や解の考察がやや難しく、かつ一見すると 2 次方程式とは関連がなさそうであるために生徒が 2 次方程式の応用範囲の広さを確認できるような課題を提示する。

具体的には、

「n 角形の対角線の本数を求める」

「対角線の本数が90本である多角形を求める」

「対角線の本数が919本に最も近い多角形を求める」

という課題を自力解決の時間を取りながら順番に提示していく。

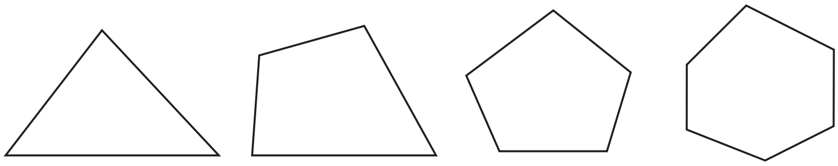
３．研究授業の実際

上記した授業設計を基に研究授業を行ったが、実際の授業を通して授業設計時のねらいがうまく達成された点、うまくいかなかった点、そもそも授業設計の段階で問題があった点などがはっきりした。以下ではこの研究授業における授業展開や生徒の反応についてできる限り詳細に記述し、あとの考察への材料とする。

1 本時の学習の導入：対角線について学ぶという意識付け

T：まずは今から黒板に書くことをノートに写してください。

板書



T：これは何ですか。（三角形から順に図形を指し示す）

S：三角形、四角形、五角形、六角形

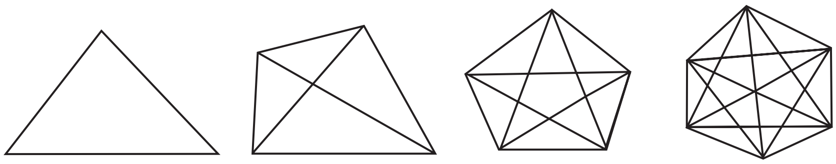
T：ではここで突然ですがクイズです。この中で三角形にはなくて他の図形にはあるものは何でしょう？

S：対角線

T：正解です。今日は対角線について勉強します。まずはこの三角形から六角形に対角線をすべて書き入れてください。対角線を書いたらその下に本数を書き入れてください。（三角形の下には 0 本と書き入れる）

（3 人の生徒を指名し、それぞれ四角形、五角形、六角形に対角線とその本数を書き入れるよう指示）

板書



0 本　　2 本　　5 本　　9 本

T：では黒板に書いてある対角線の本数を見て気づいたことがありますか？ノートに書いてください。

S：対角線の本数は 2 本、3 本、4 本と順に増えていっている。

T：では次の七角形には対角線がいくつ引けるだろう？

S：14 本

T：では八角形は？

S：21 本、いや 20 本

2 本時の課題を解決するための準備：n 角形の対角線の本数を求める

T：では次のステップとして何角形の対角線の本数を求めればよいだろう？

S：n 角形

T：そうだね。じゃあ n 角形の対角線の本数は何本になるかノートに求めてみよう。（自力解決）

T：（机間巡視しながら、筆の進んでいる生徒が少ないのを受けて）じゃあ全然手がつかない人にヒントです。（板書してある六角形の 1 つの頂点を指して）この頂点から何本引けるかなということを考えていくとわかるかもしれません。（しばらく時間が経過したあと、O 君を板書に指名）

板書　（O 君）　$(n-1-2)\times n\times\frac{1}{2}=\frac{n^2-3n}{2}$

O：1 つの頂点からその点と両端の点を除く（$n-3$）本に対角線が引けて、頂点が n 個あるので n 倍して、同じものを 2 回数えてしまっているので 2 で割った。質問ある人？

T：K 君は少し違う考え方でやってくれました。（K 君を板書に指名）

板書　（K君）　$\dfrac{n(n-1)}{2}-n=\dfrac{n^2-3n}{2}$

K：１つの頂点から他の頂点に引ける線分の数は（$n-1$）本で、頂点が n 個あるから n をかけ、2 回数えている分 2 で割った。線分のうち辺は対角線でないから辺の本数である n を引いた。

T：K 君は対角線の定義に基づいて考えてくれましたね。

3　本時の課題①：対角線の本数が90本である多角形を求める

T：ではここからが今日の課題なのですが、どんな問題をやるか予想できる人いますか？

S：対角線の本数が与えられていて多角形を求めるような問題。

T：（「問：対角線の本数が90本の図形を求めよ」）と板書する。では各自ノートにやってください。

（自力解決；机間巡視し、立式ができていない生徒には指導をする。No さん、Na さんを板書に指名。）

板書　（Noさん）

$$\frac{n^2}{2}-\frac{3}{2}n=90$$

$$n^2-3n-180=0$$

$$(n+12)(n-15)=0$$

$$n=-12,\ 15$$

15角形

（Naさん）

$$\frac{n(n-3)}{2}=90$$

$$n^2-3n-180=0$$

$$n=\frac{3\pm\sqrt{9+720}}{2}=\frac{3\pm 27}{2}=15,\ -12$$

$n>0$ なので $n=15$

十五角形

T：今 2 人に板書してもらいましたが、まだできていない人は黒板を見ないで自力で解くようにしてくださいね。終わった人は黒板の 2 人の解答を見て良い点や足りていない点を考えておいてください。

T：では今 No さんが黒板に書いたことを説明してください。（板書した生徒ではない生徒を指名）

S：n 角形の対角線の本数が90本であることから等式を立てて、それを整理して因数分解して解いて、答えを出しました。質問ありますか？

T：Na さんの解法も No さんとほぼ同じですね。Naさんは 2 次方程式を解くときに何を使いましたか？

Na：解の公式。因数分解がすぐには思いつかなかったので…

T：解の公式をきちんと覚えている人はこのように利用しても良いですね。

T：ではこの 2 つの解法を見て、気づいた点や直した方が良い点はありますか？

S：No さんも答えは漢数字とすべきではないですか？

T：みなさんはどちらの方がいいと思いますか？普通、多角形を表すときは漢数字の方がよいですね。他に？

S：No さんも $n>0$ などと書いてなぜ15が答えであるのか書いたほうが良い。

T：その通りですね。他には？

S：対角線について考えるのだから $n>0$ でなくて $n>2$ にした方が良いのでは。

T：多角形が考えられるのは三角形だから $n\geqq 3$ とするのがより良いでしょう。
　　では他に 2 つの解答のどちらにも足りないことに気づいた人はいますか？

S：n は何なのかを最初に書いたほうが良いと思います。

T：その通りですね。2 人ともいきなり n を用いた式を書いていますが、これでは n が何を表しているかわかりません。例えば「求める多角形を n 角形とすると」というように文字の設定を書かないとダメです。

4 本時の課題②：対角線の本数が919本に最も近い多角形を求める

T： 実はここからが今日やりたいメーンの課題です。(「問：対角線の本数が＿＿本」とのみ板書する)

T： 何本だと思いますか？

S： 1000本、10000本、x本

T： 残念。今日は何月何日でしょう？

S： 9月19日。まさか919本？

T： 当たりです。(「919本」と板書する) この続きの問題文が予想できる人いますか？

S： 919本の多角形を求めよ。

T： ではなくて919本に…

S： 最も近い多角形を求めよ。

T： (「対角線の本数が919本に最も近い多角形を求めよ」と板書する) では各自ノートにやってください。
(自力解決； 机間巡視をし、しばらく時間が経ってから)

T： 終わった人は他にもっと良い解法がないか考えてみてください。(Su君、Aさん、Naさんを板書に指名)

板書

(Su君)

$$\frac{n(n-3)}{2}=919$$

$$n^2-3n-1838=0$$

$$\frac{3\pm\sqrt{9+7352}}{2}=0$$

$$\frac{3\pm\sqrt{7361}}{2}=0$$

$$85\times85=7225,\ 86\times86=7396$$

$$85<\sqrt{7361}<86$$

$$85.5\times85.5=7310.25$$

$$\frac{3+85.5}{2}=44.25$$

よって 四十四角形

(Aさん)

対角線が919本引けると仮定して、その多角形をn角形とする。

$$\frac{n^2-3n}{2}=919$$

$$n^2-3n=1838$$

$$n^2-3n+\frac{9}{4}=1838+\frac{9}{4}$$

$$\left(n-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7361}{4}$$

$$n-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{7361}}{2}$$

$$n=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7361}}{2}$$

$n>0$ より $n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{7361}}{2}$

$84<\sqrt{7361}<85$ なので

$$n=\frac{3}{2}+\frac{84}{2}=43.5$$

四十四角形

(Naさん)

とりあえず数を代入して計算してみる。

四十五角形 → 945本

四十四角形 → 902本

$945-919=26$

$919-902=17$

四十四角形

T： では黒板を見て下さい。3人に板書してもらいましたが、答えはみな同じになっていますね。
それぞれの解法を説明してもらいましょう。ではSu君。

Su：文字の設定はまた書き忘れたんですけど、とりあえず919本と等しいということで等式を立てて、それを解いていってルートが出るところまでいきました。そこから計算して$\sqrt{7361}$が85と86の間にあるこ

とがわかり、間の85.5を代入して計算したら44.25となったので四十四角形としました。質問ある人？

S：解の公式を使ったところは「=0」じゃなくて「= n」では？

Su：間違えました。他には？

T：ありがとう。それでは次にAさん、説明してください。

A：Su君とほとんど同じなんですが、解の公式を使わずに平方完成を使って2次方程式を解きました。最後のところは、$\sqrt{7361}$ を84として考えて四十四角形にしたんですが…

T：Aさんは出だしの文字の設定の部分が素晴らしいですね。2人とも $85<\sqrt{7361}<86$ が出ています。あ、Aさんは1つずれてるけどこれは計算ミスでしょう。その先をわかりやすく説明できる人いますか？

S：$85<\sqrt{7361}<86$ を n の式に代入したら $\frac{3+85}{2}<\frac{3+\sqrt{7361}}{2}<\frac{3+86}{2}$ だから、$44<\frac{3+\sqrt{7361}}{2}<44.5$

T：これだとかなりわかりやすいですね。じゃあ最後にNaさん、黒板に書いた解法を説明してください。

Na：対角線の式に適当に数を代入していったら一番近いのが見つかったから答えとしました。

T：適当というのはどうやって？

Na：勘です。

T：じゃあ勘で思いつかない場合はどうしよう？

S：$40^2=1600, 50^2=2500$ だからその間の45くらいを計算していくといいんじゃないですか。

T：そうですね。Naさんは方程式を使わないで解いてくれたけど、この問題はこのように解いた方が楽かもしれません。残りの時間で3つの解法のよいところや気がついたことをノートに書いてください。

4．授業設計の考察―実践を通して―

4．1．導入について

本時の導入は、三角形から六角形の図形を板書し、「この中で三角形にはなくて他の図形にあるものは何でしょう？」という問を発し、生徒に「対角線」と気づかせた上で対角線についての学習をしていくことを知らせるというものであった。この問を発することにより、生徒に「これからどういう勉強をしていくんだろう」といった期待感を抱かせ学習への意欲を高めることができた。

しかしその後に、七角形・八角形の対角線の本数を帰納的に考えさせたのは失敗であった。帰納的に考えさせたことが、n 角形の対角線の本数を求める公式を演繹的に導出する際の妨げとなってしまった。もしそれを行うのであれば n 角形の対角線の本数を帰納的に導出する方法も授業内で扱うべきであった。

生徒の学習への意欲を高め、主体的な学びの雰囲気を創るとともに、授業の本題へと有機的につながるように導入を工夫することは、授業設計の際の大切な視点の1つであるという知見が得られた。

4．2．授業展開について

この授業では、「対角線の本数が919本に最も近い多角形を求めよ」という最終的な課題に至るまでに「n 角形の対角線の本数を求める」、「対角線の本数が90本の多角形を求める」という課題を順番に提示した。最終課題を解くために必要な道具を準備し、最終課題の前段階としての基礎的な問題を提示し、その後最終課題を提示するという授業設計である。全ての生徒が最終課題に取り組めるように段階的な問題提示をしたわけだが、このような段階的な問題の提示の仕方が良かったのかは疑問である。

もし初めから最終課題、つまり「対角線の本数が919本に最も近い多角形を求めよ」という問を提示したらどうなっていたであろうか。このような問題提示の仕方であると、1つの問題で生徒自身が n 角形の対角線の本数を導く必要性を感じ、2次方程式の解法も確認しながらルートの近似まで考えなくてはならない。問題を

解決するための道具を与えられていないため、生徒一人ひとりが見通しをもって多様な考え方により解決していくことになるであろう。生徒の「見通しをもって問題を解決する力」を育てようとするならばこのような問題提示の仕方をとるべきであった。

授業の目標と照らし合わせ、どのような問題提示の方法を取ればよいのかを考えることも、授業設計の際の大切な視点であるという知見を得た。

４．３．教材研究について

本時の最終課題は立式された２次方程式の値が非常に大きく複雑で、整数の範囲で因数分解できないことから平方完成や解の公式を用いて解かなければならない。さらに、根号を含んだ解を整数になおして答えなければならないという点も考慮しなければならない。これらのことから発展問題として扱うレベルとしては適切であったと考えている。また基礎問題はその立式された2次方程式の定数項が90とやや大きく因数分解が考えづらく、教科書よりもややレベルの高い課題であるが、生徒の実態を考えれば全員が解くことをめざす基礎問題としては適切であったと考えている。

しかし本時の授業の目標の一つとして、方程式を使うよさを感じてもらうということがあったがそれは達成されなかった。最終課題は方程式を使わない解法のほうが楽に解けてしまう。これでは方程式を使うよさを感じてもらうどころか逆効果でさえあったかもしれない。

十分な教材研究をし、授業のねらいを実現できるような課題を見つけることも、授業設計の際の不可欠な視点であるという知見が得られた。

４．４．課題提示について

本時では課題提示の際に、ただ教師から一方的に「この問題を解きなさい」といったような提示をせず、問題を与える際にどんな問題だと予想できるかを尋ねたり、数値を書かず空欄にしておいてどんな数字が入るかを考えさせたりすることで、生徒の問題への関心を高めることができた。

一方、最終課題を「対角線の本数が919本に最も近い多角形を求めよ」という数学的に不自然な問としてしまったことは反省点である。最終的にこの問題を解かせるにせよ、提示の仕方は「最も近い」ではなく「919本である多角形を求めよ」にすべきであった。このようにすれば生徒がこれでは問題は解くことができないことに気づき、それを受けて最も近い多角形を求めさせるという流れができ、また一歩生徒主体の授業へ向けて前進することができた。

このように生徒が問題を「与えられている」という意識をもつことがないように課題提示の仕方を工夫することも、授業設計の際の重要な視点であるという知見を得た。

５．今後の課題

・正解を書いた生徒だけでなく、答えまでたどり着いていない生徒や間違いを書いている生徒にも板書・発表をさせ、どこで行き詰っているのかなどをクラス全体で共有できるようにする。
・生徒の意欲と本題へのつながりを意識して導入を工夫する。
・初めから目標とする課題を提示するような授業展開を取ることにより、生徒の個人差が顕著に出ても、それに対応できるだけの机間指導力をつける。
・教材研究を進め、方程式を使うよさを感じてもらえるような課題を作成する。
・生徒が主体的に考えられるように課題提示の仕方を工夫する。

（野島　淳司）