数学教育における問題作りについての一考察

—Brown, S.I. とWalter, M.I.の研究を視座にして—

数学科　井　上　哲　明

教師は自らの指導目標に沿って、生徒に与える問題を構成する。その一つ一つの問題に対して、時には、別解としていろいろな考え方があることを知らせ、それぞれの良さを生徒に比較検討させることもある。この多面的な見方、考え方を生徒自身が発見的に作り出すことができないであろうか。そのために、Brown とWalterの問題設定の方法論を考察し、その理論で具体例を展開し、最後に問題構成の可能性について検討する。

＜キーワード＞　数学教育　問題設定　Brown, S.I.　Walter, M.I. "What-if-not."

1．はじめに

数学教育において、問題解決、問題作りについての研究が数多く報告されている。いずれの研究においても、まずどのような問題を用意するかが重要であると思われる。実際、個々の授業において教師は、その授業の指導目標に見合った問題を選択し、教材として配列する。たとえば、ある定理の内容の理解を目標とする問題であったり、その定理の適用に主眼を置く問題であったりとか、目標に対応して問題を作り、生徒に与え、考えさせる。ところが、その問題に対する生徒の意識は千差万別であり、教師の意図する目標はなかなか生徒に伝達されにくい。教師と生徒の同じ問題に対する意識のずれが必ず存在する。

この問題に対する生徒の意識の多様さは、一つにその問題に含まれるどの変数（角度、長さなど）に主眼を置いて考えているかの違いによって生じている。この多様さを生かしていくためには、一つの問題をそこに含まれる変数について変形してみて多くの問題を作り出した上で、指導目標に照らしてそれらの問題を構成することで可能になるのでなかろうか。

そこで、この構成の方法についてBrown, S.I. とWalter, M.I.の研究を手掛りとして、考察していく。

2．Brown, S.I. とWalter, M.I.の研究

Brown とWalterは、問題設定の方法として「What-if-not 」と呼ばれる方略を提唱しその方略による具体例を考察している。

その方略は、５つの段階に区分されており、順に、第０水準、第Ｉ水準、第II水準、第III水準、第IV水準と呼ばれ、それぞれの水準が次のように要約されている。[1][2]

第０水準　出発点を選ぶ。素材（定理、具体物など）を選ぶ。

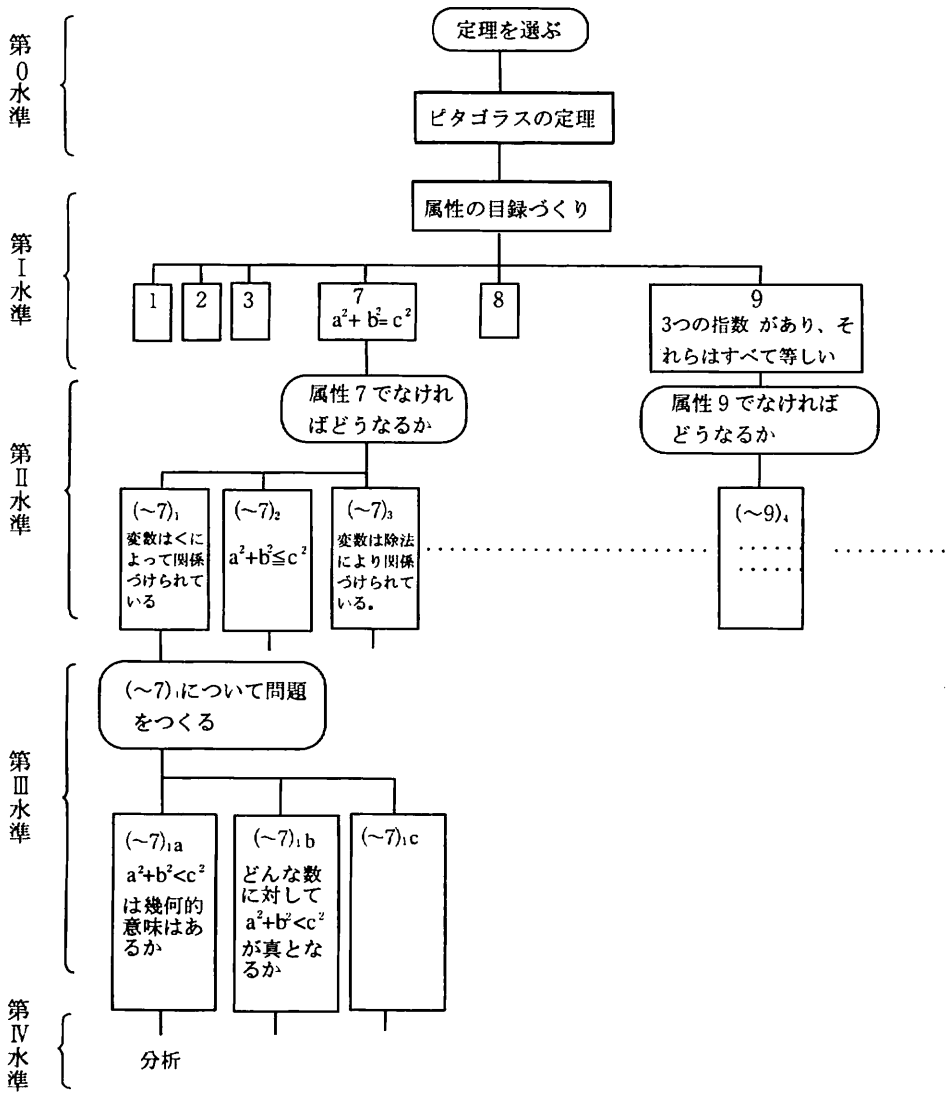
第Ｉ水準　素材の属性の目録づくり

第II水準　属性を、What-if-not 方略により新しい属性に変形する。

第III水準　新しい属性に関する問いを作る。あるいは問題設定をする。

第IV水準　問題分析

この活動を、いくつかの素材を用いて展開しているが、ここで、ピタゴラスの定理の展開例を取り上げ、全体の流れを以下に引用しながら各水準について考察する。(1),(2)



①第０水準

定理の中からピタゴラスの定理を選ぶ。

②第Ｉ水準

属性１：定理である。

属性２：３つの辺の長さを扱っている。

属性３：直角三角形を扱っている。

属性４：面積を扱っている。

属性５：正方形を扱っている。

属性６：変数が３つある。

属性７：変数は「等号」で結ばれている。

属性８：２つの変数の間に和の記号がある。

属性９：指数が３つあり、それらはすべて同じ次数である。

属性10：指数は正の指数である。

のように、定理に含まれる属性を可能な限り選択する。

③第II水準

第Ｉ水準で得た属性目録の属性それぞれについて、「もしそうでなければどうなるか？（What-if-not）」の方略を用いることによって新しい属性に変形する。たとえば、属性７についてみるならば、新しい属性を（～７）$_i$で示すとすると、

$(\sim 7)_1$ ：$a^2+b^2<c^2$

$(\sim 7)_2$ ：$a^2+b^2\leqq c^2$

$(\sim 7)_3$ ：a^2+b^2はc^2 を割り切る。

$(\sim 7)_4$ ：$a^2+b^2>c^2$

⋮

など、さまざまである。

④第III水準

第II水準で得た、たとえば（～７）$_i$について、新しい問題を設定する。$(\sim 7)_1$ についてみると、

$(\sim 7)_1$ (a)：$a^2+b^2<c^2$ は何らかの幾何的意味をもつか。

$(\sim 7)_1$ (b)：どんな数に対して、不等式 $a^2+b^2<c^2$ は成り立つか。

$(\sim 7)_1$ (c)：a^2+b^2 が c^2 と特定の定数だけ異なるとき、どのような例があるか。

$(\sim 7)_1$ (d)：$a^2+b^2<c^2$ のグラフはどうなるか。

⑤第IV水準

第III水準で設定した問題の解決を図る。

たとえば、(〜7)ı(a)について見てみると、代数の不等式を幾何の命題に翻訳することであるから、直角三角形の直角をはさむ2辺上の正方形の面積の和は、斜辺上の正方形の面積より小さいと言いかえてよい。しかし、これは直角三角形ではあり得ないことであるから、∠Cが鈍角である場合を調べてみればよいことになる。そこで、鈍角三角形ＡＢＣにおいて、ユークリッドがピタゴラスの定理の証明で用いた等積変形を利用して、$c^2-(a^2+b^2)$が幾何的に何を意味するのかを調べる。

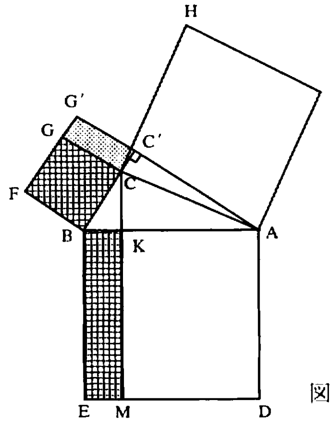


図　1

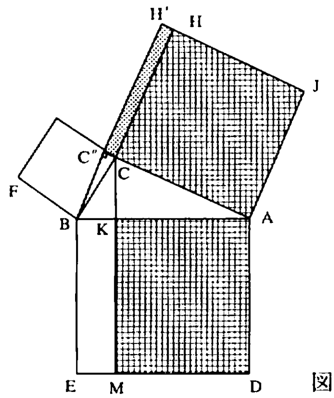


図　2

まず、図1において、四角形ＢＥＭＫの面積は、四角形ＢＣ′Ｇ′Ｆの面積に等しく、図2においては、四角形ＫＭＤＡの面積が四角形ＡＪＨ′Ｃ″の面積に等しい。よって、ＡＢ＝c、ＢＣ＝a、ＣＡ＝bとおくと、

$c^2=a^2$＋四角形ＣＣ′Ｇ′Ｇの面積

＋b^2＋四角形ＣＣ″Ｈ′Ｈの面積

であるから、全体の不足分$c^2-(a^2+b^2)$は、2つの長方形の面積の和に等しいことがわかる。この不足分は∠Cが直角に近づくほど0に近づき、ピタゴラスの定理は、不足分が0のときの特殊な場合である。つまり、直角に代わるものを探究することにより、直角の場合の証明の意味を正しく理解できたということになる。

これは、定理の持つ一つの属性をWhat-if-not の方略により変えることで得られる新たな属性の中の一つを問題の形に定式化し、解決して行く例であり、他にも実に多くの問題を構成することが可能である。このようにしてこの定理を第Ｉ水準で取り上げたさまざまな属性について生まれかわる新しい問題の解決の中で眺めかえしてみることにより、いろいろな観点で定理のもつ深い内容を、定理のもつ異なった側面を、そしてその定理が関わる多くの他の数学的事実を知ることができる。

生徒に何の方略も与えず「ある定理、問題から新しい問題を自由に作ってみなさい」といっても、何をどうすればよいか途方に暮れてしまう。問題の設定の在り方について、Brown とWalterのWhat-if-not 方略は有用である。しかし、新しく作られる属性の数は先に見てきたように非常に多く、一つの授業の中で、まとまりがつかないのは必然である。設定される問題には、教師の指導目標が内在することを考えるならば、このWhat-if-not 方略により得られるさまざまな問題を指導目標に照らし構成してみることが必要である。

そこで、次節以降で、簡単な例を取り上げ、実際にWhat-if-not 方略により、問題を構成してみたい。

3． What-if-not 方略による問題の展開

まず指導目標にとらわれず、次の問題を例にその展開例の可能性を考察する。

平面上で、2定点から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

1. 問題文中の属性をリストアップする。

$\boxed{1}$ 平面上である。

$\boxed{2}$ 定点が2個与えられている。

$\boxed{3}$ 距離を扱っている。

$\boxed{4}$ 点Pは、等式PA＝PBを満たしている。

$\boxed{5}$ 軌跡を求める問題である。

⋮　　　　⋮

2. 上の各属性をWhat-if-not の方略により新しい属性に変更する。

$\sim\boxed{1}$：$\sim\boxed{1}_1$ 直線上である。

$\sim\boxed{1}_2$ 空間内である。

$\sim\boxed{2}$：$\sim\boxed{2}_1$ 定点が n （$n \neq 2$）個、与えられている。

$\sim\boxed{2}_2$ 定点が1個と定直線が与えられている。

$\sim\boxed{2}_3$ 定点が1個と他の固定された図形が与えられている。

$\sim\boxed{2}_4$ 2本の定直線が与えられている。

$\sim\boxed{2}_5$ 2点を結ぶ線分が固定されていない。

$\sim\boxed{3}$：$\sim\boxed{3}_1$ 角の大きさを扱う。

$\sim\boxed{3}_2$ 面積、体積を扱う。

$\sim\boxed{4}$：$\sim\boxed{4}_1$ 2点をA、Bとするとき、$PA = nPB$ （$n \neq 1$ の定数）

$\sim\boxed{4}_2$ $PA^2 = PB^2 + k$ （k は定数）

$\sim\boxed{4}_3$ $PA^2 + PB^2 = k$ （k は定数）

$\sim\boxed{4}_4$ $PA + PB = k$ （k は定数）

$\sim\boxed{4}_5$ $PA - PB = k$ （k は定数）

$\sim\boxed{4}_6$ $PA \cdot PB = k$ （k は定数）

$\sim\boxed{4}_7$ $PA \geqq PB$

$\sim\boxed{4}_8$ $PA \geqq nPB$ （$n \neq 0$ の定数）など、$\sim\boxed{4}_1$ から $\sim\boxed{4}_6$ の等号を不等号に変える。

$\sim\boxed{4}_9$ 3定点をA、B、Cとするとき、$PA^2 + PB^2 = PC^2$

$\sim\boxed{4}_{10}$ 4定点をA、B、C、Dとするとき、$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

⋮　⋮

$\sim\boxed{5}$：$\sim\boxed{5}_1$　計量の問題である。

　　$\sim\boxed{5}_2$　証明の問題である。

⋮　⋮

3．２の新しい属性に関する問題をつくる。

4．作った問題の解決をはかる。

この3、４について、以下で考察する。

［1］距離に着目して、問題を展開した例

> Pr. 1 （$\sim\boxed{1}_1$）
>
> 直線上で、２定点Ａ、Ｂから等距離にある点Ｐを求めよ。

［解］線分ＡＢの中点である。

> Pr. 2 （$\sim\boxed{1}_1+\sim\boxed{4}_1$）
>
> 直線上で、２定点Ａ、Ｂに対して、$PA=nPB$（$n\neq 1$の定数）を満たす点Ｐを求めよ。

［解］$0<n<1$、$n>1$のとき、線分ＡＢを$n:1$の比に内分する点および外分する点である。

> Pr. 3 （$\sim\boxed{4}_1$）
>
> 平面上で、２定点Ａ、Ｂに対して、$PA=2PB$を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

［解］Pr. 2より、直線ＡＢ上で題意を満たす点は２点あり、線分ＡＢを２：１の比に内分する点Ｃと同じ比に外分する点Ｄである。

そこで、右図のように直線上にない点Ｐを、$PA=2PB$を満たすようにとる。

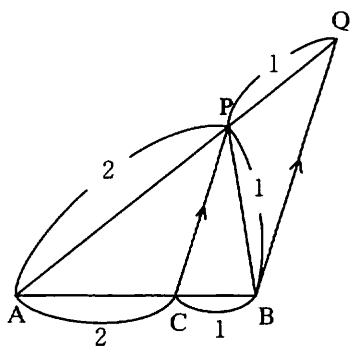
このとき、$\angle APC=\angle BPC$が成り立つ。

なぜならば、直線ＡＰ上に点Ｑを、$CP \parallel BQ$となるようにとると、

$AP:PQ=AC:CB=2:1$

よって、$PB=PQ$

ゆえに、$\angle PBQ=\angle PQB$……①



また、CP // BQより　∠PBQ＝∠BPC……②

∠APC＝∠PQB……③

①、②、③より　∠APC＝∠BPC

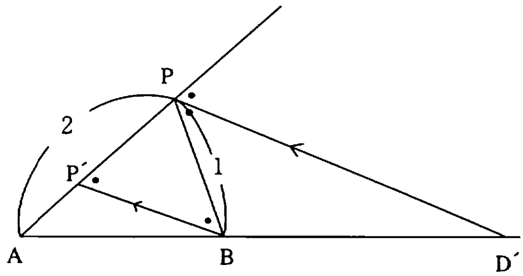
次に、右図において、∠APBの外角の二等分線を引き、直線ABとの交点をD′とすると、∠PP′B＝∠PBP′

よって、PP′＝PB

ゆえに、AD′：BD′＝AP：P′P

＝AP：BP

＝2：1



したがって、D＝D′

以上のことから、∠CPB＋∠DPB＝90°であることがわかるから、点Pは、点C、Dを直径の両端とする円周上の点である。

一般に、PA＝nPB（$n\neq 1$）を満たす点Pの軌跡は、線分ABをn：1の比に内分および外分する2点を直径の両端とする円周となる。

Pr. 4 （〜$\boxed{4}_4$）

平面上で、2定点A、Bからの距離の和が一定である点Pの軌跡を求めよ。

［解］2定点A、Bを焦点とするだ円になる。（これを、だ円の定義として扱っている教科書が多い）

Pr. 5 （〜$\boxed{4}_5$）

平面上で、2定点A、Bからの距離の差が一定である点Pの軌跡を求めよ。

［解］2定点A、Bを焦点とする双曲線になる。（これを、双曲線の定義として扱っている教科書が多い）

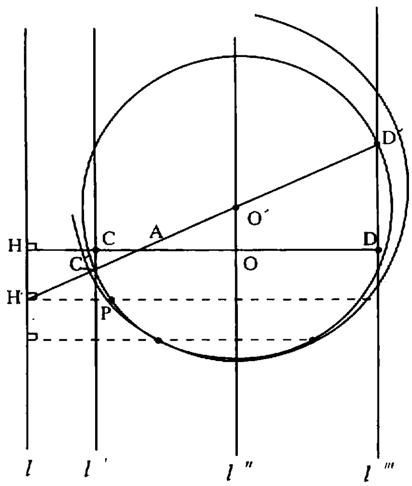
Pr. 6 （〜$\boxed{2}_2$）

平面上で、定点Aと定直線lから等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

[解] 定点Aが焦点で、l が準線の放物線になる。(これを、放物線の定義として扱っている教科書が多い)

Pr. 7 (〜 2₂)
平面上で、定点Aと定直線 l からの距離の比が、$n:1$ $(n \neq 1)$ のとき、点Pの軌跡を求めよ。

[解] ① $0 < n < 1$ のとき



左図において、定点Aからl に垂直AHを下ろす。線分AHを $n:1$ の比に内分、外分する点をそれぞれC、Dとし、線分CDの中点をOとする。

次に、l 上の点H′ に対して、直線AH′と直線 l'、l''、l''' の交点をそれぞれC′、O′、D′ とすると、

AC′ : C′H′ = AD′ : AH′ = $n:1$

であるから、O′ を中心として直径C′D′の円を書き、この円とH′ を通りl に垂直な直線との交点が点Pとなる。(Pr. 3)

点Pの軌跡の方程式を求める。点Aとl の距離を d とし、$a = \dfrac{nd}{1-n^2}$、A $(-an, 0)$
l : $x = -\dfrac{a}{n}$ とし、P (x, y) とすると、

$$\sqrt{(x+an)^2+y^2} = n\left|x+\frac{a}{n}\right| \cdots\cdots ①$$

$$\Leftrightarrow (x+an)^2+y^2 = n^2\left(x+\frac{a}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow (1-n^2)x^2+y^2 = a^2(1-n^2) \quad b = a\sqrt{1-n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

図でわかるように、点Pは l'' に関して対称であり、A′ $(an, 0)$、l : $x = \dfrac{a}{n}$ としても、同じ結果を得る。

そこで、2定点A $(-an, 0)$、A′ $(an, 0)$ と点P (x, y) について、

AP＋A′ Pを求めてみると、①より、

$$\mathrm{AP} = n\left|x+\frac{a}{n}\right| = a+nx \left(\because |x| \leqq a, 0<n<1\right)$$

よって、図において、 $AP = a + nx$

$= n\,PH'$

同様にして、H' P と直線 $x = \dfrac{a}{n}$ との交点を H″ とすると、

$$A'P = n\left|x - \frac{a}{n}\right|$$

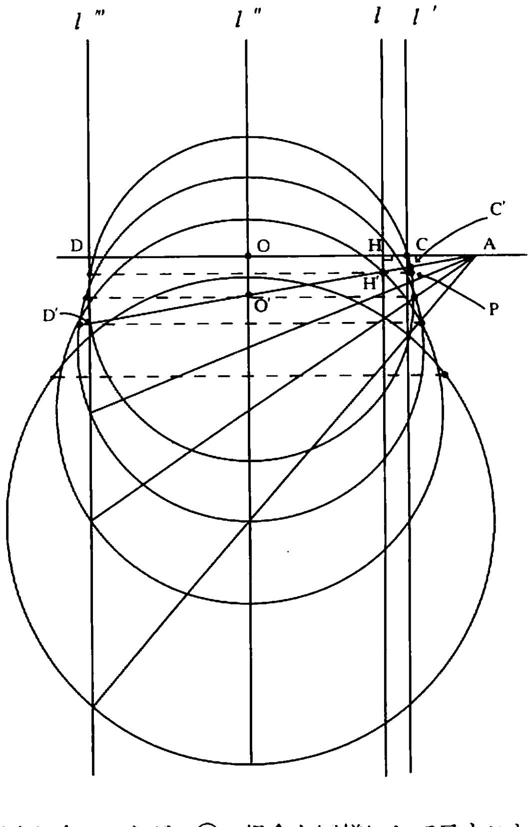
$$= a - nx$$

$$= n\,PH''$$

ゆえに、 $AP + A'P = n\,(PH' + PH'') = 2a$ （定数）

したがって、Pr. 4 に一致することがわかる。

② $n > 1$ のとき、



左図において、①と同様にして、点 P を作図していくとよい。

点 P (x, y)、 $a = \dfrac{nd}{n^2 - 1}$

$$A(an, o),\ l: x = \frac{a}{n}$$

$$b = a\sqrt{n^2 - 1}$$

とすると、点 P の軌跡の方程式は、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表される。

図でもわかるように、A′ $(-an, O)$ $l: x = -\dfrac{e}{n}$ としても同じ結果を得る。

ここで、2 定点 A (an, O) A′ $(-an, O)$ と P (x, y) について、

$$|PA - PA'| = 2a$$

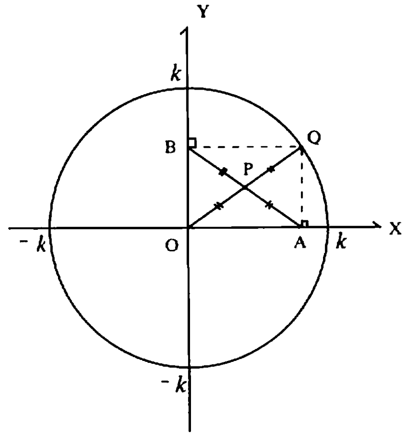
が成り立つことが、①の場合と同様にして示すことができる。

したがって、Pr. 5 に一致することがわかる。

Pr.　8（～$\boxed{2}_5$）

x 軸、y 軸上に２点Ａ、Ｂを、ＡＢ＝k（kは定数）となるようにとるとき、ＡＢの中点Ｐの軌跡を求めよ。

［解］



右図において、半径kの円周上に点Ｑをとると、ＡＢ＝ＯＱ＝k

そこで、ＯＱとＡＢの交点をＰとすると、

ＡＰ＝ＢＰ

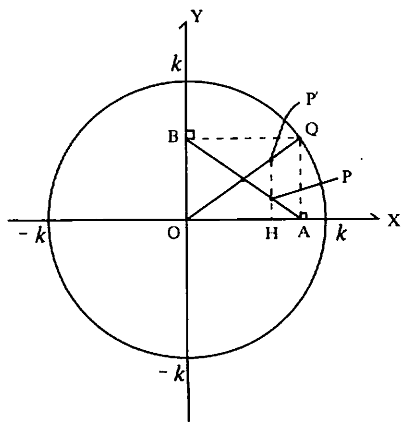
であり、ＯＰ＝$\frac{1}{2}$ＯＱ＝$\frac{1}{2}k$

が成り立つから、点Ｐは原点Ｏが中心で半径$\frac{1}{2}k$の円周上にある。

Pr.　9（～$\boxed{2}_5$＋～$\boxed{4}_1$）

x 軸、y 軸上に２点Ａ、Ｂを、ＡＢ＝k（kは定数）となるようにとるとき、線分ＡＢを１：３の比に内分する点Ｐの軌跡を求めよ。

［解］



Pr.　８と同様に、右図において、ＡＢ＝ＯＱ＝k

そこで、線分ＡＢを１：３の比に内分する点Ｐをとり、点Ｐを通りy軸に平行な直線とＯＱとの交点をＰ′とする。

このとき、点Ｑを動かすと、点Ｐ′は半径$\frac{3}{4}k$の円周上を動く。すなわち、点Ｐ′の軌跡の方程式は、$x^2+y^2=\left(\frac{3}{4}k\right)^2$………①と表せる。

ところで、ＰＨ：ＰＰ′＝１：２であることから、点Ｐは点Ｐ′をy軸方向に$\frac{1}{3}$に縮小した点となるから、

①より、$x^2+9y^2=\left(\frac{3}{4}k\right)^2$が点Ｐの軌跡の方程式であり、だ円を表す。

一般に、線分ＡＢをm：n（$m \neq n$）の比に内分する点Ｐの軌跡は、

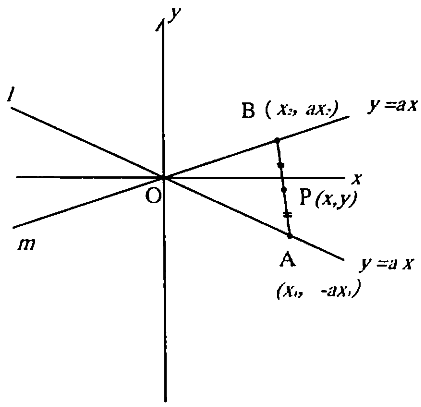
$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{nk}{m+n}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{mk}{m+n}\right)^2} = 1$$

と表され、$m < n$のときは、x軸上に焦点を持つだ円、$m > n$のときは、y軸上に焦点を持つだ円となる。

点Ｏで交わる２直線l、mがある。l、m上にそれぞれ点Ａ、ＢをＡＢ＝k（kは定数）であるようにとるとき、線分ＡＢの中点Ｐの軌跡を求めよ。

[解] 右図において、ｌ：$y = -ax$、m：$y = ax$
とおけるから、Ａ（x_1、$-ax_1$）、Ｂ（x_2、ax_2）
に対して、Ｐ（x、y）は、

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{a(-x_1 + x_2)}{2} \quad \cdots\cdots①$$



とできる。ここで、$AB^2 = k^2$より、

$$(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 + x_1) = k^2$$

よって、①を代入して、

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{k}{2a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{ak}{2}\right)^2} = 1$$

ゆえに、$a = \pm 1$のとき、原点中心、半径$\frac{k}{2}$の円を表し、(Pr. 8)、
$-1 < a < 1$のとき、焦点 $\left(\pm \dfrac{k\sqrt{1-a^4}}{2a},\ 0\right)$ のだ円を、$a < -1$、$a > 1$のとき、

焦点 $\left(0,\ \pm \dfrac{k\sqrt{a^4-1}}{2a}\right)$ のだ円を表す。

［２］角度に着目して、問題を展開した例

Pr. 10（～$\boxed{3}_1$）
平面上の２定点Ａ、Ｂに対して、線分ＡＢを見込む角が一定である点Ｐの軌跡を求めよ。

［解］

①∠ＡＰＢ＝90°のとき

図１の△ＡＰＢにおいて、

$AP^2+BP^2=AB^2$であることから

点ＰはＡＢを直径とする円周上にある。

ただし、点Ａ、Ｂは除く。

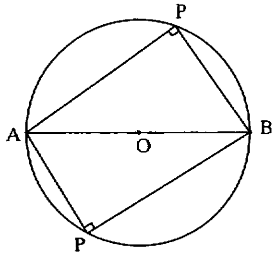


図１

そこで、２定点Ａ、Ｂを、図１の円周上に、直径の両端にならないようにとると、図２において、

$\angle AP_1B=\angle AP_2B<90^\circ$

$\angle AQ_1B=\angle AQ_2B>90^\circ$

であるから、

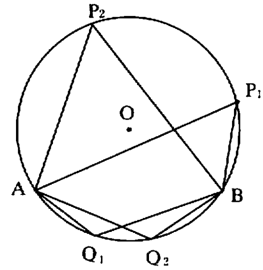


図２

②0°＜∠ＡＰＢ＜90°のとき

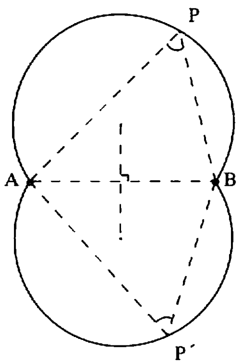


図３

点Ｐは、図３の実線部

③∠ＡＰＢ＞90°のとき

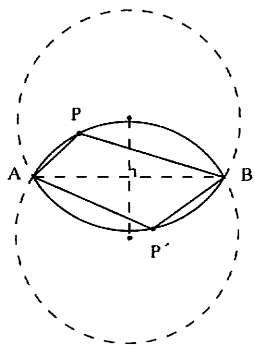


図４

点Ｐは、図４の実線部

Pr. 11（～$\boxed{3}_2$＋～$\boxed{2}_1$）

平面上の直線 l 上にある３点Ａ、Ｂ、Ｃについて、ＡＣ、ＣＢを見込む角が等しくなる点Ｐの軌跡を求めよ。ただし、l 上でＡ、Ｃ、Ｂの順にこの３点があるとする。

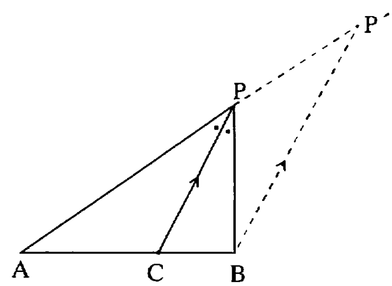
［解］点Ｃを線分ＡＢに対して定めればよい。

右図において、∠ＡＰＣ＝∠ＢＰＣ……①

辺ＡＰ上に、点Ｐ′をＣＰ∥ＢＰ′となるようにとると、∠ＡＰＣ＝∠ＰＰ′Ｂ、∠ＣＰＢ＝∠ＰＢＰ′…②

①、②より、∠ＰＰ′Ｂ＝∠ＰＢＰ′ゆえ、

ＰＢ＝ＰＰ′



ゆえに、ＡＣ：ＣＢ＝ＡＰ：ＰＰ′＝ＡＰ：ＰＢ

したがって、ＡＣ：ＣＢ＝n：１（$n\neq1$）とすると、ＡＰ：ＰＢ＝n：１であるから

点Ｐの軌跡は、Pr. ３より、線分ＡＢを n ：１に内分、外分する点Ｃ、Ｄを直径の両端とする円周である。ただし、点Ｃ、Ｄは除く。

特に、 $n=1$ のときは、原題と同値で、線分ＡＢの垂直二等分線となる。

> pr. 12（～$\boxed{3}_1$ ＋～$\boxed{2}_1$）
> 平面上の△ＡＢＣを同一平面で三角形の外側の点Ｐで見るとき、△ＡＢＣを含む最小の角が90°のとき、点Ｐの軌跡を求めよ。また、45°のときはどうか。

90°のとき

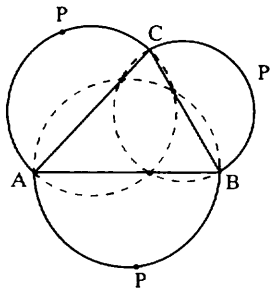


図 1

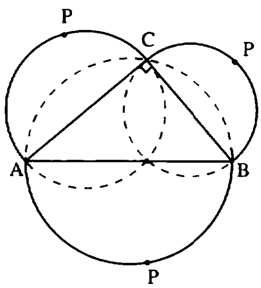


図 2

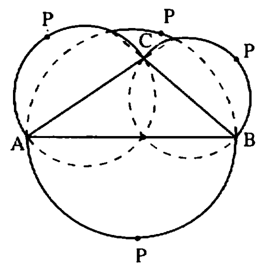


図 3

Pr. 10より、△ＡＢＣの各辺を直径とする円を描けばよい。そこで、各辺の対頂角が鋭角、直角、鈍角のときで、点Ｐの軌跡が異なることは、上の図１（鋭角三角形）、図２（直角三角形）、図３（鈍角三角形）に示す通りである。

45°のとき

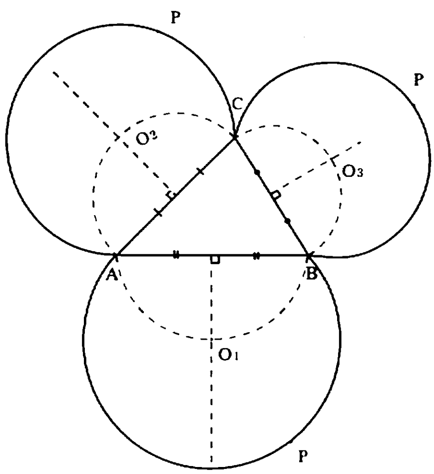


図 4

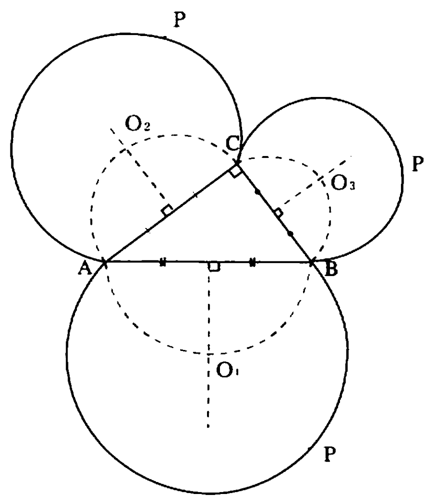


図 5

図1、2、3に対応して、図4、5、6の実線部が求める点Pの軌跡となる。

たとえば、図4においては、辺ABの垂直二等分線と、ABを直径とする円との交点をO_1とし、O_1を中心とし半径O_1Aの円を描くと、中心角と円周角の関係により題意を満たす点Pが、この円周上に得られる。辺BC、CAについても同様である。

三角形を四角形に変えて、同じことを調べると、四角形の内角に鈍角が存在するか否かで場合を分けて考えればよいことがわかる。

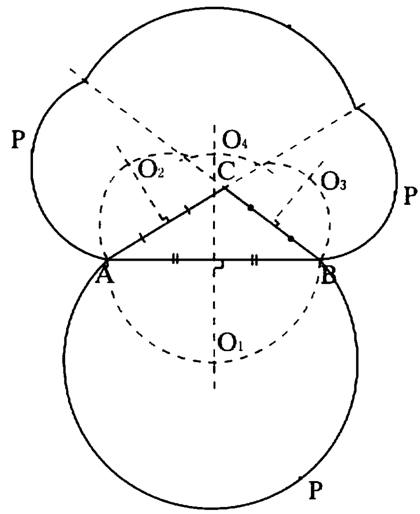


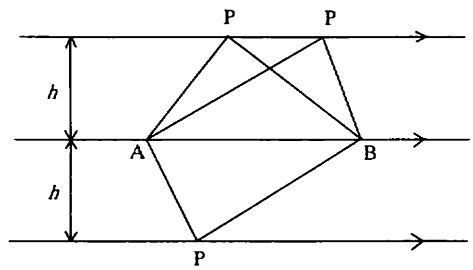
図6

［3］面積に着目して、問題を展開した例

Pr. 13（～$\boxed{3}_2$） 平面上の2定点A、Bに対して、△ABPの面積が一定のとき、点Pの軌跡を求めよ。

［解］

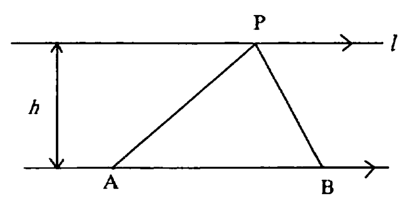
右図において、直線ABとの距離がh（定数）の2直線が求める軌跡となる。



Pr. 14（～$\boxed{3}_2$） 平面上の2定点A、Bに対して、△ABPの面積が一定のとき、AP＋BPが最小となる△ABPはどのような三角形であるか。

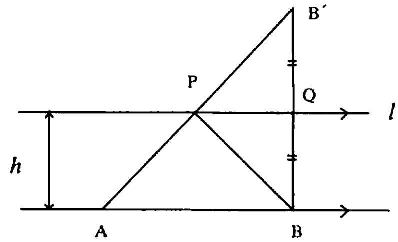
［解］

Pr. 13より、右図において、直線ABとの距離がh（定数）の直線上の点Pについて考え



ればよい。もし、点Bが直線lの上側にあるとすると、AP＋BPが最小となるのは、3点A、P、Bが一直線上にあるときであるから、そのことを用いて考えれば、右図において、点Bのlに関する対称点B′をとり、AB′とlとの交点Pをとればよい。

ゆえに、$PQ=\frac{1}{2}AB$より、△APBは二等辺三角形となる。



> Pr. 15（～3 2)）
>
> 平面上の2定点A、Bに対して、直線ABをはさんで2点P、Qを四角形APBQの面積が一定であるようにとる。AP＋PB＋BQ＋QAが最小になるとき、四角形APBQはどのような四角形であるか。

［解］直線ABとの距離がh_1、h_2である2 直線l、mを図1のようにとる。l、m上に点P、Qを、Pr. 14により、△APB、△ABQが共に二等辺三角形となるようにとると題意を満たす。よって、たこ形である。

ここで、上の2点P、Qに対して、四角形APBQと同じ面積の四角形の中で周の長さの和が最小になるときを考えると、Pr. 14より、図2において、A′P＝A′Q＝B′P＝B′Qを満たす2点A′、B′をとるときである。すなわち四角形が、菱形になるときである。

さらに、この菱形と同じ面積を持ち、周の長さの和が最小になるときを調べる。

今、$A'B'=x$、$PQ=y$とおくと、この四角形の面積Sは、$S=\frac{1}{2}xy$（＝定数）であるから、xyが定数である。このとき

$$PA'=\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y)^2-2xy}$$

について、PA′が最小となるのは、$x+y$が最小のときである。

$x+y \geqq 2\sqrt{xy}$　（＝定数）

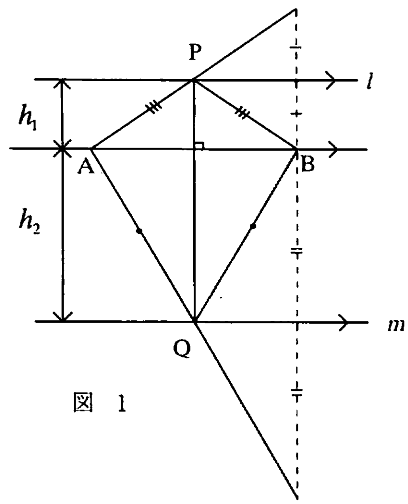


図 1

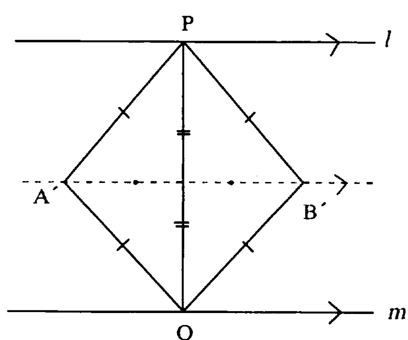


図 1

であるから、$x+y$ が最小となるのは、$x=y$ のときに限る。
したがって、四角形が正方形のときである。つまり、面積が一定の四角形ＡＰＢＱについて、ＡＰ＋ＰＢ＋ＢＱ＋ＱＡが最小になるのは、四角形が正方形のときであることがわかる。

さらに、その他の例としては、以下のものが掲げられるであろう。

～$\boxed{1}_2$：空間でＰＡ＝ＰＢを満たす点Ｐの軌跡

～$\boxed{2}_1$：平面で、定点Ａから等距離にある点Ｐの軌跡

～$\boxed{4}_2$：平面上で、$PA^2-PB^2=k$（kは定数）を満たす点Ｐの軌跡

～$\boxed{4}_3$：平面上で、$PA^2+PB^2=k$（kは定数）を満たす点Ｐの軌跡

～$\boxed{4}_8$：平面上で、$PA+PB \geqq k$（kは定数）を満たす点Ｐの軌跡

～$\boxed{2}_2$＋～$\boxed{4}_4$：平面上に定直線 l がある。l に関して定点Ａと同じ側にあって、l と点Ｆへの距離の和が一定となる点Ｐの軌跡

～$\boxed{2}_4$＋～$\boxed{4}_1$：平面上で、２直線 l、mとの距離の比が、ＰＡ＝nＰＢとなる点Ｐの軌跡、Ａは l 上の、Ｂのm上の点である。

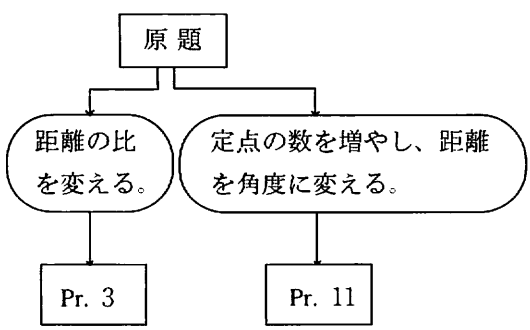
～$\boxed{2}_4$＋～$\boxed{4}_6$：平面上で、２直線 l、mとの距離の積ＰＡ・ＰＢが一定であるときの点Ｐの軌跡、Ａは l 上の、Ｂはm上の点である。

４．３の展開例の分析と、問題構成の例の考察

３において、原問題の主要な属性は距離を扱っているということである。そこで、この問題をまず距離を角度、面積に変えてどのような問題を作り得るかを考えてみた。それぞれについて、その属性を中心に据えながら他の属性も変えていくと、さまざまな新しい問題が得られることがわかった。それが、３の［１］、［２］、［３］での考察である。

そこで、これらの問題の中から、ある指導目標に照らしていくつかの問題を取り上げ構成するとたとえば、次のような可能性があげられる。

(1)　２定点Ａ、Ｂからの距離の比が、ＰＡ＝nＰＢである点Ｐの軌跡を求める問題として、$n=1$のときが原題、$n \neq 1$のときが、問題３である。それに対して、一直線上に、Ａ、Ｃ、Ｂの順にある３点に対して線分ＡＣ、ＣＢを見込む角が等しくなる点Ｐの軌跡を求める問題として新たに得られたのが、問題11である。これらの問題はそ

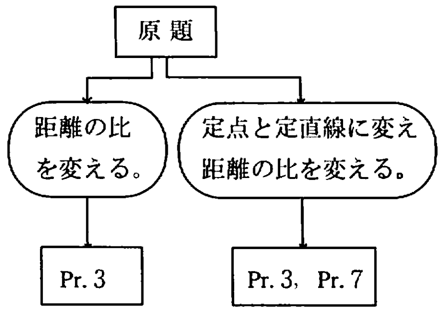


は、Whst-if-not方略により変える属性を表す。（以下の図でも同様）

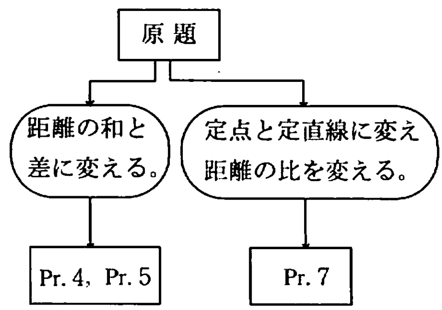
の結果として同じであり、数学の一つの内容を２側面から見ることが可能であることを意味している。

(2)　同じ距離の比を扱った問題である。

２定点の一方の点を定直線に変えただけであるから、原題の内容が問題６に、問題３の内容が問題７に、その作図の方法として利用していくことができる。



(3)　２次曲線の定義として、教科書では、問題４の形で与えられている。その定義の方法として、問題７もあり得ることが知られているが、What-if-not 方略で問題として定式化できる。



(4)　原題をWhat-if-not により角度に着目して得られる問題10を、新たに学習の出発点に据え、これを問題12に、さらにはｎ角形の問題として作りかえ考察していくことにより、円周角と中心角、鋭角、直角、鈍角三角形と円の関係など関連したテーマを学習することができる。

(5)　３で考察してきたように、距離という視点が与えられれば、What-if-not 方略によって得た一つの問題をもとにしながら、単に直線を平面に、平面を空間に次元を拡張して問題を作り変えるだけに終わらず、新たな属性を加えながら新しい問題を構成していく可能性も秘めている。

これらの構成の例の中で、(1)、(3)は、一つの図形を多面的に考察するという指導目標を具体化した例である。授業の中で一つの問題に対する生徒の着眼点は多様であり、教師は自分の意識にはないものであっても取り上げ、それらの異なった着眼点を一つのものにまとめ上げていく必要があろう。一つの問題を生徒自身がWhat-if-not 方略を用いて、着眼点だけが異なる問題に変え、解決していくことができれば、一つの問題を多面的に考察し、そこに同じ内容を発見させることが可能となるのではなかろうか。

また、(4)、(5)においては、教師の指導する数学の内容を体系的にまとめることができることを示唆している。これには、一単元を通して扱う内容をこの方略によりどう体系化していくかという広い観点が必要になってくる。

5．おわりに

構成した例の数が少なく、その一つ一つについてもより深い内容にまで踏みこんだ考察が必要である。今後、他の問題、具体物などを出発点として多くの構成の例を作り、指導目標に照らし分類整理していきたい。また、生徒がこの方略をどのように用いていけばよいのかを指導目標に関連させて、考えていく必要もある。この指導方法の研究も今後の課題としたい。

[参考文献]

1．"The Art of Problem Posing"　Brown, S.I. Walter. M.I. The Franklin Institute Press 1983.

2．『いかにして問題をつくるか　問題設定の技術』S.I.ブラウン／M.I.ワルター著、平林一榮監訳　東洋館出版　1990. PP.58 ～79

3．『いかにして問題をとくか』G.ポリア著　柿内賢信訳　丸善　1981

4．"For The Teaching of Mathematics"　Vol.1 Gattegno, C 1963　PP.32 ～38.