星形の一筆書き（続）

井 上 哲 明　　室 田 敏 夫　　杉 山 昌 樹

1．はじめに

前年度の本校紀要で，剰余系代数を指導するための一つの素材として星形の一筆書きを取り上げ，その内容の側面について考察した。現在，この剰余系代数は学校数学の教材として直接的に取り上げられていないが，その内容は我々の日常生活においてもよく見受けられるし，それにも増して，その見方，考え方は，数学の問題を解決していく上で生かされることも多く，間接的に学校数学と関連を持っていると言える。

そこで，まずこの素材を教材として取り上げるために，現在の生徒がこの素材に対してどのように関わっていくことができるか，どのようなとらえ方をするかを調査した。その結果を，本稿で報告する。

2．調査方法

2－1　調査目的

正 n 角形を用いて一筆書きが可能な場合を実際に作図することによって求め，その可能性がどのような規則性に基づいて出てくるのかを考えさせる。そのことから，剰余系について，現段階でどの程度とらえ得るかを調査する。

2－2　調査内容および方法

調 査 日：平成元年９月24日，25日（１限50分）

調査対象：本校１年Ａ組，Ｂ組（計92名）

調査問題：以下に示す問題

正５角形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ の各辺の延長が１つおきに交わって星形ができる。図１のように，正５角形の各辺を０，１，２，３，４，星形の尖がった角の頂点を B_0,B_1,B_2,B_3,B_4 と命名する。尖がった角の頂点から頂点へと，

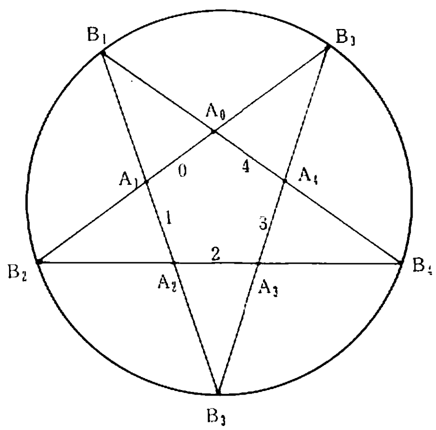
$B_0 \to B_2 \to B_4 \to B_1 \to B_3 \to B_0$

という順序で直進を繰り返せば，星形のいわゆる一筆書きができる。

通過する正５角形の辺の順序は，

$0 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3$

である。

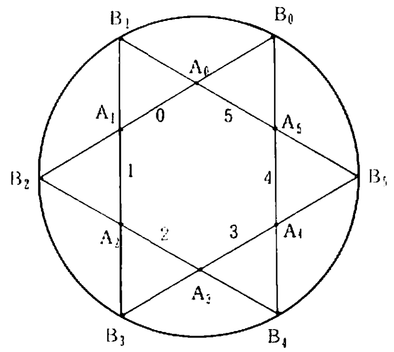


＜図　1＞

正６角形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$についてはどうか。(図２参照)　各辺の延長を１つおきに交わらせてできる星形について，尖がった角の頂点から頂点へと直進しても途中でとぎれてしまう。一筆書きができない。

$B_0 \to B_2 \to B_4 \to B_0$；$0 \to 2 \to 4$

$B_1 \to B_3 \to B_5 \to B_1$；$1 \to 3 \to 5$



＜図　2＞

正７角形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$についてはどうか。(図３参照)　各辺の延長を１つおきに交わらせてできる星形と，２つおきに交わらせてできる星形の２つがある。

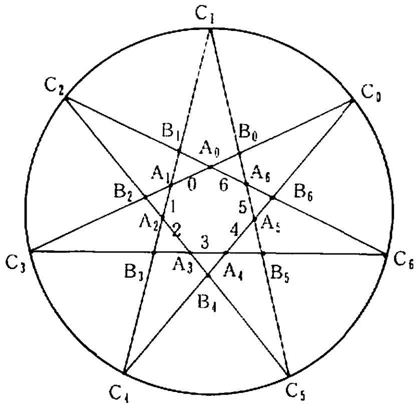
１つおきの場合　$B_0 \to B_2 \to B_4 \to B_6 \to B_1 \to B_3 \to B_5 \to B_0$

$0 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1 \to 3 \to 5$

２つおきの場合　$C_0 \to C_3 \to C_6 \to C_2 \to C_5 \to C_1 \to C_4 \to C_0$

$0 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 4$

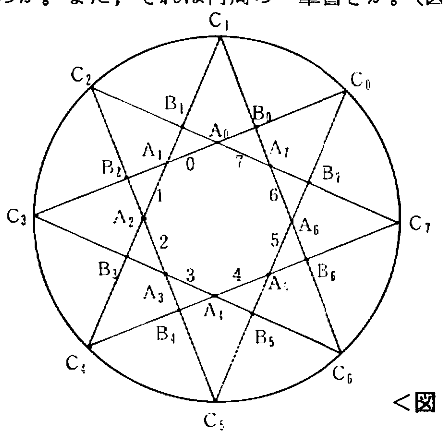
いずれの場合も一筆書きができて，前者の場合は２周の一筆書きで，後者の場合は３周の一筆書きである。



＜図　3＞

これまで述べてきた三つの例にもとづいて，これからの問いに答えなさい。

問１　正８角形の各辺の延長を交わらせてできる星形のうち，一筆書きができるものは何辺おきに交わらせたものか。また，それは何周の一筆書きか。（図４参照）

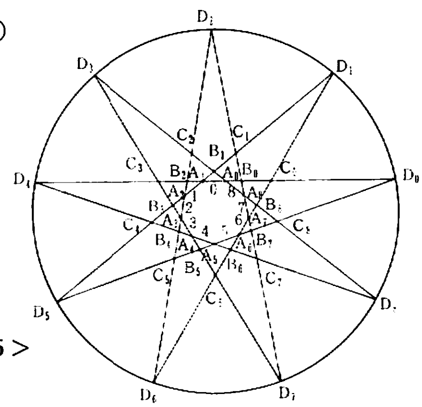


＜図　4＞

［注意］　１辺おきは５辺おきと，２辺おきは４辺おきと同じであるが，それぞれ１辺おき２辺おきとする。以下同じ。

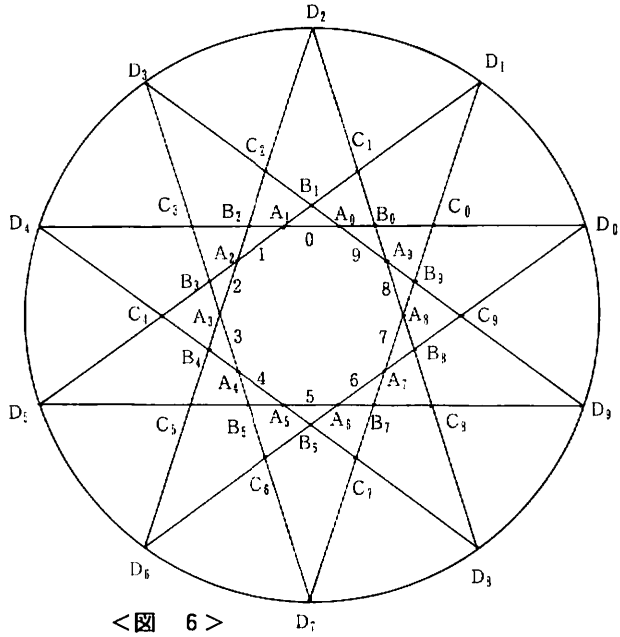
問２　正９角形について問１と同じことを答えなさい。また，一筆書きのさい通過する正９角形の辺の順序を示しなさい。（図５参照）

［注意］　一筆書きの回り方は左回りとする。

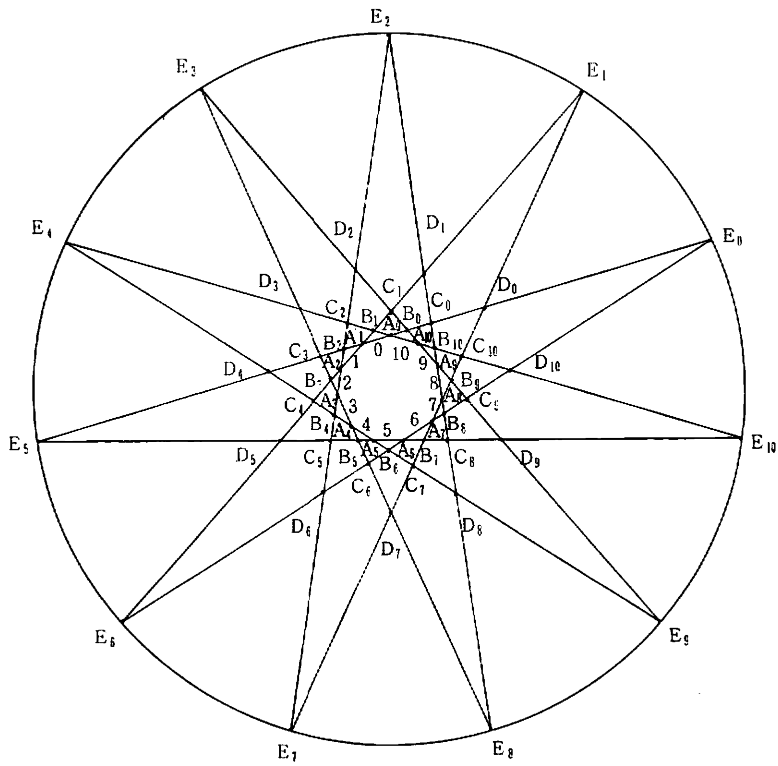


＜図　5＞

問3　正10角形，11角形について，問2と同じことを答えなさい。（図6，7参照）



＜図　6＞



＜図　7＞

問4　次の文章中の空欄 ア，イ を文字式で埋めなさい。

$n > 2l \ (l \geqq 2)$

を満たす，互いに素な整数 n，l について正 n 角形 $A_0A_1 \cdots\cdots A_{n-1}$ の各辺の延長が，$(l-1)$ 辺おきに交わってできる星形は一筆書きができる。

正 n 角形の辺 A_kA_{k+1} $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots n-1)$ に，A_n は A_0 として番号 k をつけて，正 n 角形の辺 A_0A_1 の A_0 を越える延長上にある星形の尖がった角の頂点から出発して，まず辺0を通過する一筆書きの通過する正 n 角形の辺の番号の順序を求めると，それは tl $(t=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ を n で割ったときの余りを順に並べたもので，

$0 \to l \to 2l \to \cdots\cdots \to$ ア

である。そして，イ 周の一筆書きになる。また，一筆書きができる星形の個数は，n と互いに素な l の個数である。

［解答用紙］

解 答 用 紙　　　　　　1年（ ）組（ ）番　氏名（　　　　）

(注) もし（ ）内に答えがないときは、×印を記せ。

問1

①（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

②（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

問2

①（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

②（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

③（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

問3　正10角形のとき、

①（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

②（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

③（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

正11角形のとき、

①（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

②（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

③（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

④（　）辺おき。（　）周の一筆書きである。

このとき、辺の通過順序は、

0→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）→（ ）

問4

$0 \to l \to 2l \to \cdots\cdots\cdots \to$（ア　　　）

（イ　　　）周の一筆書きである。

3．調査結果

3－1　調査結果および考察

2－2の問題についての正答者数および正答率は表1の通りである。各問について，何辺おき，何周，および正 n 角形の辺の通過順序が全て正解できて○，どれか1つ誤答したら△，明らかな誤答を×と判断した。

	問　1		問　2			問　3							問　4	
	正8角形		正9角形			正10角形			正11角形				正 n 角形	
	①	②	①	②	③	①	②	③	①	②	③	④	㋐	㋑
正答者数	82	83	82	78	79	80	81	78	65	72	68	68	34	54
正答率(%)	89	90	89	85	86	87	88	85	71	78	74	74	37	59

＜表　1＞

次に，問1から問3まで全問正解した生徒について，問4の(ｱ)，(ｲ)の正誤答のようすを4つの場合に分けて表2に示す。

問　4			
㋐	㋑	人数	百分率
○	○	27	29
○	×	0	0
×	○	8	9
×	×	4	4
計		39	42

○は正答，×は誤答を表す

＜表　2＞

正5，6，7角形の場合を利用して，星形の一筆書きのようすを例にあげ，そのことにもとづき問1，2，3では，それぞれ正8，9，10，11角形の場合について実際に作図させた。その結果が表1に示した通りであるが，正 n 角形の辺を左回りに通過するところを右回りに通過させた生徒や，何辺おきの意味をとり違えた生徒も少からずおり，この解答を△としてとり扱った。これを正答とみなすとすれば，表1よりさらに高い正答率と考えることができる。この点では，理解を示していると言ってよいであろう。

問1から問3までを完答できた生徒は39名で，全体の42.4％である。そこで，次に，この生徒について問4，正 n 角形で一筆書き可能な場合について一般化してとらえられているかを調べてみた。その結果が表2にまとめたものである。

この表をみると㋐の正答率が29％（問3まで完答していない生徒で正解している生徒も含めると37％）と低い。これは次に起因していると考えられる。

問題4の文中にある，

「$n > 2l$（$l \geqq 2$）を満たす，$\underline{\text{互いに素な整数 } n, l}_{①}$ について正 n 角形 $A_0A_1\cdots\cdots A_{n-1}$ の…………，の通過する正 n 角形の辺の番号の順序を求めると，それは tl（$\underline{t=0, 1, \cdots\cdots, n-1}_{②}$）を n で割った余りを順に並べたもので，

$0 \to l \to 2l \cdots\cdots \to \boxed{\text{ア}}$

そして，$\boxed{\quad イ \quad}$ 周の一筆書きになる。

また，一筆書きできる星形の個数は，$\underbrace{n と互いに素な l}_{③}$ の個数である。」

（傍線①，②，③は筆者記入）

について，傍線部①，③の「互いに素」の理由，および，傍線部②の「0，1，……，$n-1$」となぜ「$n-1$」までなのかの理由の理解の有無が，問4㋐の正誤答に関連しているからであろう。

これに対し，㋑の正答率は，38%（問3まで完答していない生徒で正解している生徒も含めると59%）と比較的高い。これは，問3までの結果より類推している現れであろう。つまり，例えば，正11角形の場合を利用し（x 辺おき，y 周）＝（1，2），（2，3），（3，4），（4，5）より（$l-1$）辺おきでは l 周すると類推しているものと考えられる。

従って，㋑を正答しても㋐を誤答している生徒は，何周するかを類推できても，剰余系のとらえ方に至っては理解できていないと言える。つまり，正11角形で，1辺おき，2周の一筆書きの場合を例にとると，

0 → 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 1 → 3 → 5 → 7 → 9（図7参照）

と実際に通過する辺の順序を出し得ても，その数列の持つ意味，構造を理解できていないということである。

ところが，逆に興味のある結果も読みとれる。㋐，㋑の両方を正解している生徒は全体の29%と低いものの，この表2の対象者の人数に対しては約70%と高い。㋐を正答していれば㋑も正答しているということである。つまり，一筆書きができる必要十分条件である「n と l が互いに素である」ということの理解に至っているのかは判断できないまでも，問3までの結果より正 n 角形の辺の通過順序を表す数列の持つ構造を自分なりの論理で理解できていると考えることができる。問4の次に「自分で発見した規則」を書かせた中で，このことを示す例があるので次節に示す。

3－2　生徒の感想

(1)「規則の発見」

まず，正 n 角形の各点を結び星形を表そうとすると，1辺おきから順に考え，もし n が奇数なら $\left(\dfrac{n-3}{2}\right)$ 辺おきまで，n が偶数なら $\left(\dfrac{n-4}{2}\right)$ 辺おきまで考えることができる。このとき，k 辺おきで星形を書くとすると，その線は（$k+1$）周する。また，一筆書きができるかどうかについて，起点の0から（$k+1$）ずつ足していき，その足していった数が n を超えると n を引くという手順をくり返し，

(i)通過した点が n 個に達し，最後の点に（$k+1$）を足し，それが n になったら一筆書きができる。

(ii) n 個の点を通過する前に足していった数が n になったら一筆書きはできない。

（例）正11角形で３辺おき，$\frac{11-3}{2}=4$ で可能である。

（３＋１）＝４を足していく

11点に達する
①０＋４＝４
②４＋４＝８
③８＋４＝12・・・・11を引く　12－11＝１
④１＋４＝５
⑤５＋４＝９
⑥９＋４＝13・・・・11を引く　13－11＝２
⑦２＋４＝６
⑧６＋４＝10
⑨10＋４＝14・・・・11を引く　14－11＝３
⑩３＋４＝７
⑪７＋４＝11・・・・到達した

ここで，３＋１＝４周すると考えられる。以上より，一筆書き可能である。

（例）正６角形で１辺おき　$\frac{6-4}{2}=1$ で可能である。

（１＋１）＝２を足していく

６点に達しない
①０＋２＝２
②２＋２＝４
③４＋２＝６

一筆書きが不可能である。（生徒の原文のまま）

(2)問４の結果は類推でしかないので，その証明を試みたい。

(3)正 n 角形でなくとも，この規則は成立する。

(4)中心にできる形が n 角形（n は合成数）のときに，一筆書きできないことがある。

このように，その規則性について，ばく然とはわかっているが，その証明をしてみないと整然としないとか，(4)のように，n と l が互いに素であるかどうかが一筆書きの可能性を決定する条件であることを自分なりに認めている例がいくつか見受けられた。

４．今後の課題

(1)　この素材の持つ内容の発展性を調べることである。高校の段階で考えると，平成６年度より実施される「指導要領」に示されている「数Ｂ」の「複素数と複素平面」に例えば見出せる。「方程式　$x^n=1$ の解の一つを α としたとき，$\{\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots\cdots\}=\{x \mid x^n=1\}$ となるか」という「１の原始 n 乗根」の問題に関連する話題があげられる。すなわち，複素数の間の積が，複素平面上の回転移動の合成，つまり回転角の和として表される「ド・モアブルの定理」により，α^k は回転角 θ の k 倍：$k\theta$ に関連づけられ，

＜整　数＞	＜回転角＞
整数 l の t 倍の n による剰余 r， すなわち， $tl=nq+r$（$0\leqq r<n$）	角 θ の k 倍の 2π による剰余 θ_0， すなわち， $k\theta=2q\pi+\theta_0$（$0\leqq\theta_0<2\pi$）

と対応づけられていく。この意味で，「方程式　$x^n=1$ の解を複素平面で考察する」中には，剰余系の考えが必ず含まれるものであり，剰余系については，何らかの形で指導する必要がある。この調査問題は，この円分方程式への示唆になる。

このように，高校の段階でも剰余系をテーマとして関連づけられる話題があり，その関連図を作製してみることが必要である。また，小学校でも円周を等分して，ある分点から出発して他の分点へと一筆で書いて得られる図形の作図を通して考えさせる素材がある（生徒の感想の中にも，小学校でやったことがあると書いているものがあった。）ので，小－中－高を通して，グローバルにこのテーマで関連づけられる話題を収集していくことも課題としたい。

(2)　(1)と関連してくるが，この星形の一筆書きの問題を小－中－高の各段階において調査してみることである。それは，この問題の持つ構造を理解する論理の差異を調べ，各段階における特徴を調べるためである。今回の調査では「一筆書きが可能な必要十分条件は n と l が互いに素である」ことを理解させるための問いが不足していたことが，３の結果より明らかである。その検討を行い小，中学校へと根をおろせる問題を構成してみることが必要である。