数学の問題解決活動における Situation に関する考察

― 問いの設定による Situation の分析 ―

井　上　哲　明

解決しなければならない問題状況に直面したとき、その状況をどういう視点で考察していくかを設定することは重要なことであり、それゆえに困難なことである。数学の学習においては既習の学習事項を視点として状況を眺め、そこに仮説を設定することで活動が開始される。その仮説を設定し、状況を分析していく過程を具体例の中で、特に「問いの設定」という視点で分析し論じた。

＜キーワード＞　課題、問題、Situation、問題解決、問い

1.　はじめに

数学の授業では、数学の課題を解決するという活動が中心となる。筆者が課題の解法を解説し終えると、時に生徒が「自分はこの視点で課題を解いてみたが、どうしても答が得られない。いったいどこが悪いのか教えて欲しい。」と質問してくる。その中には、単なる計算まちがいであることもあるが、こちらが思いもつかない新鮮な視点で課題をとらえていることに驚くことがある。

一つの課題に対しても、生徒それぞれが自分の視点でそれをとらえ、考えていることを知ったとき、一つの解法のパターーに固執し、生徒のいろいろな視点を授業に生かしきれていない自分を反省せざるを得ない。用意されている課題に対して問題と感ずる点は生徒によって異なっているのであり、問題を作るのは生徒自身であるという、あたりまえのことを再考する必要性を今になって感じている。

問題を作るとは、生徒が自らで問いを発するということである。その行為を自然なものとして生徒に行わせるために教師が準備することは、問いを発する状況をどのような形で課題として設定するかを考えることであり、さらに、その状況の中で生徒がどのような問いを、いつ、どのようにして発していくかを考察していき、そのモデルを作っていくことが必要である。

そこで本稿では、上記の状況の設定（状況はSituationの略語であり、以降、Situationは原語のまま用いる）に関して示唆となる先行研究を調べ、特に「問いの設定」という視点で、Situationを分析する方法を、具体例を通して考察していく。

本稿で鍵となる用語をここで定義しておく。「課題」とは、あらかじめ教師によって準備される教

材である。それは、文章で表現されたもの、映像で表現されたもの、日常世界の諸現象、単なる具体物と、その表現形態はさまざまである。次に、「問題」とは、その課題に対して主体が自らの「問い」を設定することにより、その主体が解決しなければならない困難さのことである。「Situation」とは、課題とそれを問題に作りかえる主体の両者が交互に作用する場である。

2. Situationを扱った先行研究の考察

教師が準備した課題と直面したとき、主体の取り組む姿勢が存在すれば、そこにはその課題と主体との間に交流が生まれる。それが、Situationである。主体が課題を意識して始めて主体の活動が始まる。たとえば、円板があって、ある特定の円板と主体が関係を持つことができ、その円板に対して主体が「丸い」という性質に着眼したり、あるいは、何らかの操作（回転させるなど）を行おうとすると、そこに主体（生徒）と客体（円板）のみが共有するSituationが設定される。そのSituationの中で、主体自らが合目的的に問いを設定し、客体に働きかけることにより、単に関係を持ったという意味でのSituationがProblematic Situation（問題状況）に生まれかわる。

数学教育において、このSituationという概念を取り上げるとき、まず示唆となるのがPollak, H.O.である。氏は、次のように述べる。

『"Here is a situation, Think about it." ここに、一つのSituationがあります。それについて考えてみなさい。ここで、数学を応用するという立場に立てば、そのSituationは、「そこに何らかの数学を見い出し理解を図る」ための行為とは異なった行為をとることで眺められるのである。もし、Situationを数学の外で理解しようと、そこでの問題に対するならば、その行為は応用数学者のとるものである。また、数学的な問題として、Situationに対処し、数学自体のために行為するのであれば、それは純粋数学者のとる行為に値するものである。いずれにしても、先のテーゼは共通した姿勢である。』(1)

つまり、あるSituationが数学の知識を獲得するための場か、既制の数学の知識を利用して数学の外の世界の問題を解決するための場であるかの違いがあるにせよ、それは主体の問題とする観点の違いから生まれるにすぎない、ということである。必要なことは、Situationに数学がどのような形でかかわるかということを考えることである。

2－1 Dienes, Z.P.の研究

数学の概念（構造）をいかにして生徒に構成させるかを考え、それを学習の6段階として設定した。その各段階にあわせて教具（ゲーム）を準備し、学習場面を構成している。(2)

段階1：自由な遊び

ある特定の数学的構造がそこから引き出されるように特に人工的に作った環境の中に主体を置く。この環境へ適応するための始めての活動が、自由な遊びと呼ばれるものであり、そこに予備的なゲーム（Preliminary games）が準備される。そのゲームは、学習する数学的構造の構成要素を遊びの対象にしており、主体はそのゲームに習熟して始めて次の段階に移行できる。

段階2：ゲーム

ある期間、自由に遊ぶと主体は環境の中に、ある種の拘束があることに気付き始め、人為的に設けられた規則に従ってゲームをすることができるようになる。

段階3：共通性の探究（抽象化）

この段階においては、自由な遊びに比べ方向づけがなされ合目的的であるが、求めていることを何らかの形で明確には表現できない。そこで、学習する数学的構造を具現化したいくつかのゲームが準備される。それが構造化されたゲーム（Structured games）である。その中に、共通した構造を理解する。

段階4：表現

抽象化された構造を自由に使いこなしていくことが必要である。そこで、その構造を念頭に定着させるために、まず図式を用いるなど自分にあった形で表現する。

段階5：記号化

1つの表現が完成したら、その表現の方法を調べ直すことが可能となる。この検討の目的は、抽象化された構造が持つ種々の性質を理解することにある。そこで表現した図式の上で、ゲームの規則を自分のことばに直して、自分のここまでのプロセスを記述してみる。

段階6：形式化

段階5で、数学的構造の持つ性質をいくつか記述できたら、その最小限の記述したことを公理として他の記述を導く方法を考え出すことになる。それが証明であり、その証明によって到達した記述は定理と呼ばれる。ここで、形成された構造の定着、応用を図るために適用、分析のゲーム（Practice and／or analytical games）が準備される。

数学それ自体のために、つまり数学の知識（構造）の獲得を目的として Situation を構成する理論である。ここで特徴的なことの1つは、Situation を設定する客体がゲームであり、そのゲームを運用する規則が学習すべき数学の構造であるという点である。主体は、段階1では無目的的であり、その主体の活動を始動させるのが予備的ゲームの役割である。そのゲームで作られる Situation は、主体にとって漠たるものであるが、教師に準備された規則に束縛を受けていることに主体が気付くと、Situation が変容する。つまり、その規則そのものが主体にとって問題になるので規則、さらには規則が持つ性質の探究が目的となり、主体の活動が活性化される。その Situation を作るのが知覚的に多様に、特定の構造が具現化されたゲームである。そのゲームを通して獲得した構造の持つ性質が、段階5，6の学習の対象となり、そのために適用、分析のゲームによって、Situation が作りかえられる。主体にとって、Situation が更に異なった目的、つまり構造の理解という目的のために変容する。主体が合目的的に客体（ゲーム）を操作していくことにより Situation が構成され、数学の知識（構造）を獲得していくことになるが、ここで得た知識が次の学習のための題材となり、学習の6つの段階が連鎖する。

特徴の2つめは、主体が目的を持つために規則が学習の6段階ごとに準備されていることである。つまり、教師自らが規則を作り、生徒主体の活動を合目的的たらしめるわけで、生徒にとっては数学の知識を再発見するという意味を持つということである。教科書にある公理、定理、適用問題をどのような形で生徒の数学的活動を通して構成させていくかに示唆的である。

2－2 Gattegno, C. の研究

2－1で考察したDienesの理論では、学習すべき数学の構造（知識）がゲームの規則として具現化されているのに対して、Gattegnoはその点で異なっている。

“子どもに、ギズネールの色棒で遊ぶ”ことを許してやると実に彼らは、すぐさま現代数学の3つの基本的な多価構造に気づくのである。それらは

(ⅰ)等価性の関係

同じ色は同じ長さである。色が異なれば長さも異なる。商集合の認識。

(ⅱ)順序の関係

$^{\forall}a, {}^{\forall}b \in {}^{\exists}S$（a，bは棒）$\Rightarrow \ell(a)=\ell(b),\ \ell(a)>\ell(b),\ \ell(a)<\ell(b)$

のいずれかが成立つ。（$\ell(a)$とは棒aの長さ）

$\ell(a)<\ell(b),\ \ell(b)<\ell(c) \Rightarrow \ell(a)<\ell(c)$

が理解できた。

(ⅲ)代数的関係

長さの違う棒をつなげたり、離したりする操作を通して理解した。〃[(3)]

一つの素材から、この3つの構造を作り出すことを見て、数学の構造が知識の構造として子どもの中に既に存在することを確信したのである。そのことを、子どもに気付かせればよいわけであるからこそ、我々は、そのためのSituationを設定してやればよいと結論する。従って、主体の学習を教師が合目的的に誘導しなくとも、主体自身が自身の目的、視点で考えることができるという発見だったのである。そこで、シラバス通りに従わず、自らの経験がいかにして数学的になるかを自問自答し、Situationによるカリキュラムの例を構成している。

あるSituationを作る客体そのものが学習の対象とならないことはDienesと同様である。その客体の持ついろいろな属性に着目してその関係を眺めることによって学習活動が開始される。関係を抽出することが数学的とみなせる唯一つの観点である。いろいろな属性があれば、主体の見る観点によって幾通りもの関係を抽出することができる。その結果、実にさまざまな数学的な事実が構成できることになり、それらを一つの体系としてまとめ上げることが可能となる。そための要件として、Situationを作る客体の持つ「多価性」をあげる。

“多目的に工夫されたものを多価的（multivalent）と称し、それに対して一つの目的のためだけに工夫されたものを単価的（univalent）と称し”[(4)]区別している。そして、多価的な客体としてギズネールの色棒、フィルムをあげて考察している。前者が前述したような代数的なSituationを設定するための、後者が幾何的なSituationを構成するための道具である。後者について、“フィルムは力

動的なパターンを提示するものであり、生徒はそれによって構成される幾何的Situationから可能なかぎりの事実を感覚的にとらえ、そして自分で自身にあった言語でそれらを形式化できるといった認識を獲得できるのであり、さらにそのように感覚的にとらえる経験を豊富に持つことによって、それらを抽象的な証明によっておえるということを啓発するためのものである。"[5] と述べ、多くの数学的事実をとらえ易く、さらに、一つの事実に着目したとき、その構成過程と証明する手順を目を通して感覚的にとらえることが可能である利用の仕方に意義を認めている。また自らも、この観点で、ジオボードという教具を作製している。ジオボードを授業で用いる方法を①概念の説明　②それが作るSituationにおいて、自分が何をできるかを自分で見つけるために利用する。問題設定のための利用　③含まれる内容の全てを尽くすための組織的な活用の３つに大別し、②、③の視点を強調している。[6] 実際、ジオボードが作るSituationから、オイラーの定理、ピックの定理、多角形の面積、円についての諸性質などを構成する例が数多く報告されている。[7]

以上、Situation に関して２つの研究を考察してきたが、ここで得られた知見を総括しておく。

(1)　Situationを作る客体は学習の目的によって異なる。問題解決活動を通して概念がその問題にどのように関わるか、使われるかを学習することが概念の理解を深めるという視点に立つならば、Gattegnoに示唆を得るところが大きい。小・中学校で学習した数学的概念をもとにして高校で新しい概念を形成することに加えて、その概念を利用して問題を作る学習活動が高校では重要視すべきであると考える。

(2)　Situationを作る客体は、その形態についてはさまざまであるが、最初の設定の段階で数学の関係を数多く定めることができ、さらに定め易いものが望ましい。そのための道具が必要である。

(3)　その道具で一つのSituationを作り、簡単な問題であってもそれを解決したら、そこからより高次な問題を作るために新たなSituationを作り出すことが必要である。

以上のことを踏まえると、一つのSituationから異なるSituationに作りかえていくという、グローバルの意味での変容を考えることが必要であり、そのための「問い」の設定による問題作りの在り方を考察しなければならない。しかし、一つのSituationにおいて展開される問題解決活動の中にも、さまざまな「問い」の設定が必要なはずであり、その「問い」の設定により、Situationが解決に向けて変容していくことになる。本稿では、後者に視点を置き考察を進めていくことにする。

3.　「問い」を設定することの意味

２で考察してきたように、主体と客体によって作られるSituationによって数学的活動が展開されていくためには、主体が客体に対して合目的的に問いを設定することが重要である。そこで、本節において問うという行為を再考する。

人間は世界に開いた存在として問うことができ、また自分の問いに答えることによって自分の世界を広げていくことができる。では、何のために問うのか。問う目的は何か。そのことに関して、ボルノーは、インフォメーションを求める問いと内省の問いの２つに大別し、それぞれの目的に言

及している。[8] インフォメーションを求める問いとは知識を獲得するために発する問いである。たとえば、道にまよっているとき、その行き方を他人に聞いてみることなどがこれになる。答えを与えてくれる対象が外部にあり、外部から主体が情報を受けとると、それを自分の知識の枠組に取り込み、自分自身の知識を増大させることになる。それに対して、内省の問いとは知識の獲得が目的なのではなく、自分の知識の枠組そのものに対して発する問いである。無知を１つの新しい知識によって補うために問うのではなく、疑わしいものであることがはっきりしてしまった現存の理解を吟味するために問うのである。

数学の知識を与えてくれる対象が主体の外部にあり、与えてくれるものがその知識の真偽を決定できるとは考えにくい。というのは、数学の知識の真偽を検証するのが、いわゆる証明という手続きであり、その証明が進められるのは公理であるからである。この公理は、数学の知識を獲得する主体の認識の枠組に組みこまれているものである。また、その公理そのものも何を公理とするかを設定することができる性質のものであるから、あくまでその知識を正しいと判断するための前提に過ぎない。そうすると、主体が持つ認識の枠組にある公理を前提として数学の知識を獲得するための問いが設定されることになる。これは、いわゆる現存への理解、すなわち自己への問いと考えてよい。すなわち、数学の活動においては、内省の問いが中心にすえられることになる。

次節において、一つの問題解決過程を例にとり、その中で、どのような問いが、何の目的で設定されるかを示し、その意義を考察する。

4.　具体例（座標平面上での点の動き方の分析；一次変換）での「問い」の設定の考察

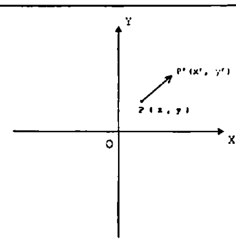
4－1 問題解決活動の展開例

課題（原題）

座標平面上で、点Ｐ（ｘ，ｙ）が点Ｐ'（ｘ'，ｙ'）へ次の規則で移される。

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

このとき、平面上の全ての点の動き方を調べてみよう。



$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ は既習であるとする。

$\boxed{\text{問い１}}$：条件を具体的に定め、単純化してみる。

ａ，ｂ，ｃ，ｄの値によって点の動き方が違ってくるようだ。

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表せる場合が最も簡単だ。今，ここで，a＝d＝1，b＝c＝0として調べてみよう。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

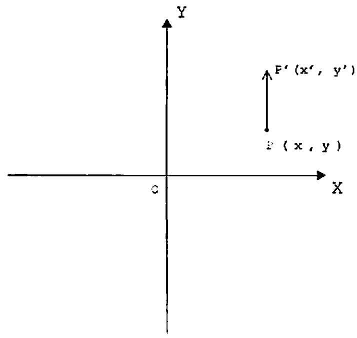
これは，x'＝x，y'＝yであるからまったく点は動いていない。数の1と役割は同じだ。
x，y両軸方向に1倍するということか。

$\boxed{\text{問い2}}$ ：他の例の考察

では、x，y両軸方向にそれぞれ、1倍，2倍として考えてみよう。

[解決活動]

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



という形で動いていくんだ。これはわかる。

つまり、$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ の形で表される場合は、x，y両軸に分解して、両軸方向にそれぞれ相似比a，dで点を動かせばよいことになる。

$\boxed{\text{問い3}}$ ：他の例の考察（b≒0 or c≒0の場合）

では，$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として調べてみよう。

[解決活動]

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

であるから、x座標は変わらないがy座標の動き方に何か規則性があるか。わからない。

$\boxed{\text{問い4}}$ ：規則性を調べる視点を設定するために $\boxed{\text{問い2}}$ を調べ直す。（ふりかえること）

x，y両軸に分解して点を動かすとは，どういうことか。

［解決活動］

$\overrightarrow{OP}=\vec{x}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{OP}'=\vec{x}'=(x',\ y')$とする。

$\vec{x}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\quad(\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1))$

と分解できる。このとき、

$$\begin{aligned}\vec{x}'=A\vec{x}&=xA\vec{e_1}+yA\vec{e_2}\\&=x\vec{e_1}+2y\vec{e_2}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vec{x}+2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}\end{aligned}$$

とできる。$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$はx軸へy軸に平行に射影し、$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$はy軸へx軸に平行に射影することである。そこで、x，y両軸に射影した結果をさらにそれぞれの軸に1倍，2倍する点をとり、それをP'とすればよい。

一般に、$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$に対しては，$\vec{x}'=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vec{x}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}$と表せる。

よって、$\vec{x}=\vec{e_1}$ととれば、$\vec{x}'=A\vec{e_1}=a\vec{e_1}$が成立し、$x=\vec{e_2}$とすれば、$\vec{x}'=A\vec{e_2}=d\vec{e_2}$が成立する。ということは、$\vec{e_1}$で作られる直線（x軸）上の点は、x軸上へ、$\vec{e_2}$で作られる直線（y軸）上の点はy軸上へ移されている。逆に、$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$で作られる原点を通る直線があれば、Aによる点の移動は、その直線への射影で考えればよいといってもよいのではなかろうか。

$\boxed{問い5}$：設定した視点で$\boxed{問い3}$を調べてみる。

> $A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$のとき、$A\vec{x_1}=\lambda_1\vec{x}_1$，$A\vec{x_2}=\lambda_2\vec{x}_2$を満たす$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\lambda_1$，$\lambda_2$
> （$\vec{x_1}$，$\vec{x_2}\fallingdotseq 0$）を求めてみよう。

［解決活動］

$A\vec{x_1}=\lambda_1\vec{x_1}\qquad(A-\lambda_1E)\vec{x_1}=\vec{0}$　同様にして、$(A-\lambda_2E)\vec{x_2}=\vec{0}$　（Eは単位行列）。

よって$(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}\qquad(\vec{x}\fallingdotseq\vec{0})$

$(A-\lambda E)^{-1}$が存在してはいけないから、det$(A-\lambda E)=0$であればよい。

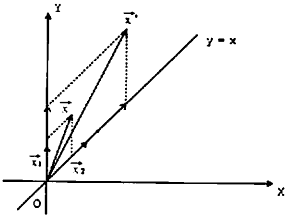
$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3-\lambda&0\\1&2-\lambda\end{pmatrix}$より、

$\det(A-\lambda E)=(3-\lambda)(2-\lambda)=0\qquad\therefore\lambda=2,\ 3$

$\lambda_1=2$のとき、$\vec{x}_1=(0,\ 1)\,t\quad(t\in R)$

$\lambda_2=3$のとき、$\vec{x}_2=(1,\ 1)\,s\quad(s\in R)$

とできる。よって、2直線$y=x$，y軸上の点は同じ直線上に移される。



このとき、$\vec{x_1}=(0,\ 1)$, $\vec{x_2}=(1,\ 1)$ とし、

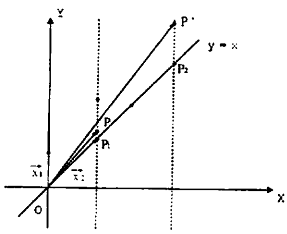
$\vec{x}=m\vec{x_1}+n\vec{x_2}$ $(m,\ n\in R)$

と表せば、

$A\vec{x}=2m\vec{x_1}+3n\vec{x_2}$

となることから、$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ 方向への相似拡大で説明できる。

さて、より鮮明に点の移動がわかるようにするには、どうしたらよいか。



左図のように、点Pを $\vec{x_1}$ に平行で P_1 $(\overrightarrow{OP_1}=\vec{x_2})$を通る直線上にとる。このとき、$\overrightarrow{OP}=\vec{x}$ とすると，

$\vec{x}=\vec{x_2}+m\vec{x_1}$

と表せ、$A\vec{x}=3\vec{x_2}+2m\vec{x_1}$

とできる。つまり、P_2 $(\overrightarrow{OP_2}=3\vec{x_2})$ を通って $\vec{x_1}$ に平行な直線上の点P' に点Pは移されるんだな。

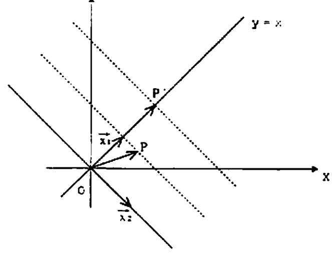
これで整理がつきそうだ。

$\boxed{仮設1}$ ：どのようなAについても、$\vec{x_1}$, $\vec{x_1}$ $(\vec{x_1}\neq\vec{x_2},\ \vec{x_1},\ \vec{x_2}\neq\vec{0})$ が定まり、そのベクトルで作られる原点を通る直線が定まる。その2直線を基本にすれば点の動きが解明できる。

$\boxed{問い6}$ ：他の例の考察

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ の場合を考えてみよう。

［解決活動］



$\det(A-\lambda E)=\lambda(\lambda-2)=0$　　$\therefore\lambda=0,\ 2$

$\lambda_1=2$ のとき、$\vec{x_1}=(1,\ 1)s$　$(s\in R)$

$\lambda_2=0$ のとき、$\vec{x_2}=(1,\ -1)t$　$(t\in R)$

となるから、$y=x$，$y=-x$ が定まる。

このとき、$A\vec{x_1}=2\vec{x_1}$, $A\vec{x_2}=\vec{0}$ である。

$A\vec{x_2}=\vec{0}$ とはどういうことか。$y=-x$ 上に点をとれば全て原点に移されてしまうということだ。平面全体の点の動きを調べてみよう。

$\vec{x}=\vec{x_1}+m\vec{x_2}$ とおくと、$A\vec{x}=2\vec{x_1}+\vec{0}=2\vec{x_1}$ より定点に移ることがわかる。

よって、調べる方法としては仮説は正しい。$\vec{x_2}$ で作られる直線は一点につぶされてしまうが、これは特別の場合として考えればよい。$\det A=0$ である。

$\boxed{\text{問い7}}$ ：他の例の考察

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の場合を考えてみよう。

[解決活動]

$\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)^2=0 \qquad \therefore \lambda=1$

$\lambda_1=1$ のとき、$\vec{x_1}=(1,\ 0)s \quad (s\in R)$

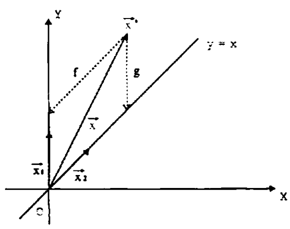
λ は重解であり、$\vec{x}_1$ は1個のみ定まる。直線が2個存在しない。仮説を変更する必要がある。

$\boxed{\text{仮説2}}$ ：Aの中で、$\det(A-\lambda E)=0$ の実数解が $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ であれば、$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ $(\vec{x_1}\neq\vec{x_2},\ \vec{x_1}\neq\vec{0},\ \vec{x_2}\neq\vec{0})$ が求まり、2直線が決定する。その2直線を基本にすれば点の動きが解明できる。

$\boxed{\text{問い8}}$ ：点の移動の定式化

この仮説に基づいて、　問い5　における点の移動を定式化してみよう。

[解決活動]



$\vec{x}=m\vec{x_1}+n\vec{x_2} \quad (m,\ m\in R)$ とおく。

f，gの行列B，Cを $B\vec{x}=m\vec{x_1}$, $C\vec{x}=n\vec{x_2}$

であるように定めることができれば、

$\vec{x}=B\vec{x}+C\vec{x}$

つまり、$B+C=E$ とできる。

$B\vec{x_1}=\vec{x_1}$, $B\vec{x_2}=\vec{0}$, $C\vec{x_1}=\vec{0}$, $C\vec{x_2}=\vec{x_2}$ は図より明らかである。そこで、B，Cを求めてみよう。

$$B\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

より，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,　$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

よって、$A\vec{x}=2m\vec{x_1}+3n\vec{x_2}$ より、$A\vec{x}=2P\vec{x}+3Q\vec{x}$ と表せる。

このB，Cが2直線への射影を表す行列である。

従って、$x=x_1+tx_2 \quad (t\in R)$ に対して、

$$\begin{aligned}A\vec{x}&=2B(\vec{x_1}+t\vec{x_2})+3C(\vec{x_1}+t\vec{x_2})\\&=2B\vec{x_1}+3tC\vec{x_2}\\&=2\vec{x_1}+3t\vec{x_2}\end{aligned}$$

と表せる。

ここで、$A(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\vec{x_1}, \vec{x_2})\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ （$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$は縦ベクトル）

とできる。よって、$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (\vec{x_1}, \vec{x_2})^{-1} A (\vec{x_1}, \vec{x_2})$

が成り立つ。$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$とAは相似である。

つまり、Aは$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$を基底として考えたとき、$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$の相似拡大を表する行列と見做して良いということなんだ。そして、Aを分解した行列BとCは、図で考察したように、それぞれが問い6で見た例と同じ点の移動を作る。$\det B = \det C = 0$であり、特殊な場合であった問い6の例はここでその役割が明らかになり、この関係を一般的な考察の対称になる。

さらには、$\det(A - \lambda E) = 0$の解が重解、虚数解の場合の点の動き方の調べ方（三角化，回転等の例）、空間ベトルの場合への拡張、あるいは、固有ベクトルそのものに関する考察（原点以外に不動点が存在する場合、$\det(A - \lambda E) = 0$の1つの解が$\lambda = 1$等）等、目的によってさまざまな新たな問いが設定され、異なる Situation が作られることになる。

4－2．本例における「問い」の分析

客体が座標平面と課題で与えられている。平面上の点の動き方を調べるという目的は定められているので学習の指向性はあるが、ここで問題解決を困難にしていることの一つは、その目的に対して下位の目標をなかなか定められないことである。つまり、a，b，c，dと4個の変数があるので調べ方の視点を設定しにくいことに起因している。課題に対して、解決するとっかかりがないと何も始まらない。

そこで、まず問い1として、具体例で調べようとする。ここで定める具体例が調べ方の視点を決定するのに、大きな影響を及ぼす。$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$の形で与えられるときの点の移動は、いままで経験のある相似拡大の概念に結びつき、解決の糸口になり、主体の認識の枠組に組み込まれ易い。

さて、その視点で他の例を考察する。新たな問いを設定することになる。相似拡大の視点で調べるには、$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$を射影ととらえてみることが必要であり、そのために、先の問いに戻って考え直してみなければならないことになる。そこで見直しができれば、問い3に再び戻って考察をしていくことができる。そのとき、射影すべき原点を通る2本の直線を捜すことに目標が設定される。任意のベクトルをその直線の方向ベクトルの和に分解することで、相似拡大で調べた方法により点の移動が解明できるという視点を持つことになる。これが問い5へと連がっていく。その解決を通して、点の移動の仕方を調べる方法を仮説として設定することができるようになる。こうして、主体の認識の枠組が作られる。これは、正しければ証明の手続きをとるし、誤っていれば反例が存在

する。証明の前に、反例がないかどうかを調べてみる。そこで、問い6、7である。問い6の例は特殊な場合として仮説を認める例であるが、問い7の例は明らかに仮説の変更を要求する。主体の認識の枠組に変更がせまられる。反例となるのは、何が原因かを調べ、そして、仮説を作り変えなければならない。それが、仮説2として設定される。絶えず仮説は棄却される危機に迫られている。そうであるからこそ、問いを続けることによってより確かな仮説を作り続けていくわけで、認識の枠組もさらに高次なものに発達していくことに連がっていくことになる。そして、問い8として、この仮説に基づいて点の動きを定式化してみることが必要である。自分自身の表現形式で定式化することによって論の展開に矛盾がないか、そして、その論理に基づいて仮説が正しいかどうかを確認する作業を行うことになる。ここで、主体の認識の枠組が安定したものになり、Situationは変容したことになる。ここまでの活動の過程を見直してみると、最終的なSituationに到達するまでには、主体の問いの設定によって漠たるSituationがいくつもの変容したSituationを経ていることがわかる。認識の過程とはそのようなものである。そして、その結果得た知識が新たな問いを設定するための素材となり、問題のあるSituationに生まれかわっていく。学習とはこの活動の連鎖である。その連鎖を可能にする新たな問いの設定の仕方の例として、いくつか掲げたが、要はSituationにおける主体の客体へ向けて行為する、その目標、問う目的の違いによってさまざまにSituationが変容するということである。

こうした数学的な活動を進めていく上で、主体によって設定される問いは単に情報（知識）を獲得するためのものというよりは、自分自身の認識の枠組に向けて発せられるものである。その問いは、

(1)　Situationを作る主体の目的を設定するための問い
(2)　Situationを、どのような方向に展開していくかを決定するための問い
(3)　特定の目的達成のための解決の方策を求める問い

の3つの観点で考察することができる。

(1)　目的の設定

この例でもそうであるが、課題として目的が設定されることが多い。まず、学習活動の指向性が与えられなければ活動が展開されにくい。その目的が達成されれば新たな目的を設定することになるので、この経験を豊富に持つことによってその態度は習慣化してくるものと考える。それに加えて重要なことは、その目的達成のために、より具体的な自分自身の目標を立てることが掲げられる。目標を段階的に設定して自己活動を積み重ねていくことによって、目的が達成されることはこの例で考察してきたとおりである。

(2)　解決活動の見通しを持つ

本来、主体が目的を持つとは“目的がまずあって”ということではなく、客体に何か働きかけて

いく活動を経験していく中で、「こんなことをしてみたい」という欲求が生まれてくることが前提である。その前提の下で、ある目的を主体が持つならばその目的達成のために客体にどのような条件を賦与すればよいかを決定しなければならない。いわゆる、最初の Situation を作る客体を設定することである。その結果得られる結論の見通しを持たなければならない。さらに、本例でも考察してきたように、「相似拡大」の場合に帰着させること、そのためにはさらに「2本の直線への射影に分解する」という視点を持つことが、目的を達成のための要件として設定することができる。勿論、他の視点も可能なわけであるが、要するに、自分自身の視点を設定するための問いが必要であるということである。

(3) 解決のための方法の設定

方向性を持つことができれば、その方向で解決活動を展開するためにどのような方法をとればよいかを決定するための問いを設定しなければならない。現在もよく議論されており、古くは、R，チャールズ、F，レスターが問題解決のための方法としてストラテジーを上げ、それを分類し、その役割を考察している。一般的ストラテジーと補助的ストラテジーの2つである。[9]

<一般的ストラテジー>	<補助的ストラテジー>
○パターンを捜す。一般化する。 ○演繹（帰納）する。 ○もとにもどって考える。（ひとつの結論がどこから得られるのか等） ○推測してチェックする。 ○似た問題を解く，単純化する。 ○方程式を書く。	○問題を読みかえす。 ○鍵となる言葉や語句を探す。 ○重要な情報を書きとめる。 ○整理して目録，表，図表を作る。 ○さし絵，教具，グラフを用いたり作ったりする。 ○実験したりする。 ○もっと簡単な数を用いてみる。

上表のようにまとめることができる。

本例においては、a，b，c，dを具体的に定め、課題を単純化することで活動が展開する。これは一般的ストラテジーを求める問いである。そして、点を具体的に動かしていく中で、その動きのパターンを見つけるために、まず相似拡大に着眼点を置くこともこのストラテジーに属するものである。さらには、もとにもどるというストラテジーとしては、

①視点を見つけるためにもとに戻る。問い3から問い2へ戻り、問い4を設定する。

②反例の発見により、もとに戻る。問い7から仮説1へ戻る。

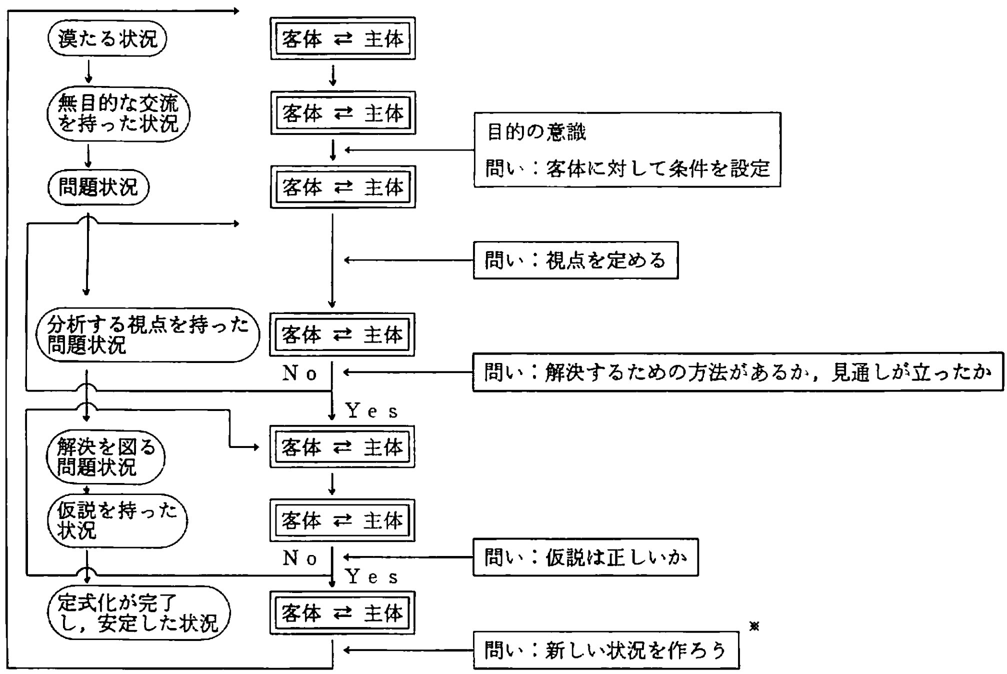
③定式化して結論が結局どこから得られるのかをふりかえってみる。問い8の設定。

の3つのタイプがある。

そして、問い8が解決できて新たに問いを設定するとき、客体の条件を変えてみる。これには、同じ対象に対する一般化と、客体そのものの変化がある。それを、本例の最後に触れた。

ここまで考察してきた問いは、問題解決活動の展開、単純化して問題意識を持つ、解決のための視点を持つ、解決活動をふりかえって仮説を作りかえる、定式化してみるという流れそのものに関わり、それゆえ文脈に支配されない解決活動の一般的な方法を求めるためのものであると言える。それに対して、文脈に関わる方法として、座標平面上で実際に点を移動させるなど、客体の持つ性質に依存するものも個々に考えられなくてはならない。

①②③の考察の結果を視点に、ここで一つの課題に対する問題解決活動を通して「問い」の設定によって、Situation がどのように変容していくかを示す。



5. 今後の課題

他の例についても、「問い」の設定という視点で解決活動を分析する必要がある。その中で、問いの分類、役割をより明確にしていきたい。また、本稿では、主に一つの課題を解決していく活動を分析したが、一つの解決した結果が定式化されるとき、次の状況をどのような問いによって作り変えていくかを詳細に検討することも必要である、つまり、一つの解決活動の展開に現れるSituationの変容の過程と、それに続く解決活動の展開のそれとをつなぐための問いの設定の在り方を探ることが必要である。このような巨視的なSituationの変容過程には主体にとって学習活動の高まりがあるはずである。最後に示したモデルで新しいSituationに作り変えて学習活動を高める（※の問い）ためには、同じ課題に対して視点を変え別の角度から調べて見る、得た結論を一般化する、客体の条件を変えて他の内容を作り出すなど、さまざまな観点を設定することができる。その観点を明確化するために、たとえば、Walter, M. &. Brown, S. の研究『The Art of Problem Posing』あるいは、Gattegno の哲学を視座にして、氏の方法論を考察していきたい。

［引用文献］

(1) Pollak, H. O. 『On some of the problems of teaching／Application of Mathematics』
Educational Studies in Maths. 1968 vol. 1 no.1／2 May pp.24〜30

(2) Dienes 選集 2 「算数・数学の学習過程」吉田耕作，赤摂也監修 1976 pp.115〜121
Dienes, Z. P. 『Building Up Maths.』 pp.18〜40
を筆者がまとめた。尚、この中で、具体例が考察されている。pp.115〜121

(3) Gattegno, C 『For the teaching of mathematics』 vol.3 1963 pp.28〜29

(4) 前出(3)　p．91

(5) Gattegno, 『For the teaching of mathematics』 vol.2 1963 p.107
また、pp.109〜122 において、Nicolet, J. L. のフイルムによる幾何的な situation の構成例（三点を通る円）を考察している。

(6) 前出(3)　p．91

(7) Walter. M. & Brown. S. が What-if-not strategy により、Geoboard から展開される Situation の考察を行っている。また、片桐重男、古藤怜、小高俊雄編著「算しい算数・数学指導法の創造」学研 1981 pp.237〜244 でも扱われている。

(8) Bollnow. O. F. 『問いへの教育』森田孝　他訳　川島書店　1978 pp.181〜187

(9) Ｒ．チャールズ／Ｆ．レスター　『算数の問題解決の指導』中島健三訳　金子書房
1983 p.41

［参考文献］

(1) 平林一栄　「算数・数学教育のシツエーション」　広島大学出版研究会　1975