東京学芸大学附属高等学校紀要　44　pp.13～26，2007

生徒の理解度の現状調査と今後の指導のあり方を求めて

Current research of student's understanding level. And for the ideal way of the guidance in the future

――三角関数のグラフと漸化式の指導に焦点をあてて――

田中　満城子・祖慶　良謙・菅原　幹雄

＜キーワード＞　理解　調査　三角比　三角関数　グラフ　数列　漸化式　指導要領

1．始めに

1．1　理解度の現状調査について

現行の学習指導要領が導入されて3年が経過しようとしている。数学においては、「数学基礎」という科目が加わり、従来からあったＩＡⅡＢⅢＣにおいても、中学校から移行してきた内容が含まれるなどの大きな変化があった。

本校においては、旧学習指導要領を導入してから3年後（平成9年度）に、当時の3年生を対象に学習内容の理解度についての調査を行った。今回も同様の調査を行い、現行の学習指導要領を導入したことで、生徒の理解度についてどのような変化があったかを、前回の調査結果と比較することで考察したい。特に今回の調査では、普段授業をしていて生徒の理解が不十分であると感じる三角関数のグラフと漸化式の内容について、焦点を絞って考察することとした。尚、本稿は本年度の公開研究会で発表した内容をまとめたものである。

1．2　三角比の指導について

本校では、数学Ｉの「三角比」の直後に、数学Ⅱの「三角関数」を学習する。この二つの単元の繋がりを意識させるためである。このような指導計画を立ててはいるが、「三角比」は、鈍角の三角比において概念の拡張が行われる際に生徒のつまずきが顕著な単元である。また、その後における「三角関数」では、より抽象的な単元となる為か、さらにつまずきが顕著となる。「三角比」は固定された三角形を扱うという意味で静的であるが、「三角関数」は関数という意味（運動を記述する道具としても）で動的であると言える。そこで「三角関数」の導入として、動的であることの特徴的な題材としてグラフを選択し、「三角比」と「三角関数」の自然な橋渡しを目標とした。その際、次のことに注意していく。

・生活に関連したものから、三角関数を使って表すことのできるものを取り上げ、それを教材化して三角関数を導入する。

・自然な形で一般角を考えられるようにする。最終的には単位円によって三角関数を定義することも視野に入れて、円運動する身近なものという観点から、観覧車を取り上げ、三角関数とはどういうものかを学べるよう配慮する。

・本教材では三角関数の変数を時間 t で与えているが、それは同時に変数を角 θ としてもよいこと、つまり角 θ の関数であることを理解させる。

・任意の角に対して三角関数の値が存在することを認識させる。

・周期的に同じ状況を繰り返す、つまり周期関数であることを認識させ、それが円運動と密接に関連していることを意識させる。

1．3　数列の指導について

旧学習指導要領では数学Ａで指導されてきた「数列」が、現行の学習指導要領では数学Ｂで指導されるようになった。本校の数学Ｂでは、「ベクトル」→「数列」という順序の指導計画を立てている。「数列」は2年生の2学期以降で扱うため、既習事項が以前よりも増えている。そのため生徒は、自ら考えを進めることをより広い範囲で行うことができると考えられる。

「数列」の中の漸化式について、既に学習を終えた生徒の理解の様子は、漸化式から一般項を求められ、漸化式を解くことについては、ある程度形式を理解し、それに当てはめて求めることができるようである。しかし、その一方で、ある場面が与えられてどのような漸化式が成り立つか、漸化式を作成するということに対しては、場面によって様々な式になるため、なかなかつくることができない。漸化式の指導において、与えられた漸化式から形式に従って一般項を求めることを教えるだけでは、どのような意味を持つ式なのか、なぜそのような解き方をするのかなどについて、生徒自ら考えを進めることにはつながらないだろう。漸化式を作成することに焦点をあて、漸化式とはどのようなものであるか、その式

から何がわかるのか、ということを生徒が興味・関心をもって取り組むことができるような教材、および指導を研究していくことが必要だと考える。

2．理解度の現状調査の内容と方法

今回行った理解度の現状調査の方法は、平成９年度に行った調査と同じ方法を用いている。学習内容を「理解した」という状態は、学習時点においては調査対象の概念を利用して問題を解決できるということとし、○で表すこととした。逆に「分からない」という状態は、学習時点においては調査対象の問題を解決できないということとし、×で表すこととした。

また、理解の変容については、学習時点で理解した概念を色々な場面で利用することを学んでいる状態を○○（理解の深まり）で、学習時点では理解できなかったがその後の学習で理解ができた状態を×○（理解の克服）で、学習時点でも現時点でも理解ができていない状態と××（理解のつまずき）で表すこととした。

調査問題は平成９年度に実施したものと同様、普段授業で使っている教科書に載っている例や例題を使用した。その為、前回の調査問題と今回の調査問題は、使用する教科書が違うため、異なるものとなっている。できるだけ比較ができるよう配慮したが、中には難易度がかなり異なる問題となったものもある。

今回の調査では、前回との比較という目的以外に、生徒の理解が不十分だと思われる三角関数と数列に焦点をあて、特にその分野の指導方法についてなんらかの示唆を得たい、という目的がある。そこで、三角比・三角関数の調査問題では、１－② ［三角比の相互関係］ と１－⑥ ［三角不等式］ の問題の解を二つ載せて、それぞれの解法に対する理解度を比較する。おそらく、１－②では三角形を利用する解法の理解度が高く、１－⑥では単位円を利用した解法の理解度が高いと予想される。また、数列の調査問題では、漸化式を作成して解くという一つの問題を、２－⑨ ［漸化式の作成］、2―⑩「漸化式を解く」というように、二段階に分けてその理解度を調査し、漸化式の「作成」と「解く」を比較する。おそらく、形式的に漸化式を「解く」ことはできるが、「作成」することの理解度は比べると低いことが予想される。

これらの予想はまず間違いないと考える。その上で、アンケートの結果から、今後の指導方法に対するなんらかの示唆が得られればと、期待している。

三角比・三角関数と数列に関する調査問題（平成18年度）

<設問１>

各問題の内容、及びその解法・用いる考え方について聞きます。それを学習した時点、現時点のそれぞれにおいて、理解度がどうであったかを次を目安に回答して下さい。また、解法が２つある場合は、それぞれの解法について、回答してください。

よく理解できた，理解できた・・・・・・・○を記入

まったく分からない，よく分からない・・・×を記入

<設問２>

設問１で、○○と記入した問題については、○○用の問、

×○と記入した問題については、×○用の問、

××と記入した問題については、××用の問、

について、該当する番号を回答用紙に記入してください。ただし、問の中に（　）に番号を埋める指示のある場合は、回答用紙の（　）に、回答用紙の表紙にある数学項目一覧の中から番号を選び、記入してください。

⇒○○の人に聞きます。該当する番号を回答用紙に記入してください。

1．特に学習時点と現在とで理解の仕方に変化はない。
2．高校以前に学んでおり、あるいは、類似の問題を学んでおり、内容として易しい。
3．（　）で発展的な内容（類似の問題、その考え方を利用する問題）を数学の中で学習して、よりその考え方（内容）の理解が深まった。（　）に項目の番号を記入。
4．他分野で、その内容や考え方の利用を知ってから、理解が深まった。

⇒×○の人に聞きます。該当する番号を回答用紙に記入してください。

1．学習時点では理解できなかったので、何回もやり直した結果、理解できるようになった。
2．（　）を学んでから、その必要性を知り、学習後に理解した。（　）に項目の番号を記入。
3．（　）でこの内容やその考え方が利用されていることを知り、理解できるようになった。（　）に項目の番号を記入
4．他分野で、その内容や考え方が利用されていることを知り、理解できるようになった。

⇒××の人に聞きます。どういった点がわからないのか、なぜ理解しにくいのか、該当する番号を回答用紙に記入してください。（複数回答可）

1．とくかく難しくてわからない。
2．中学時代からこの分野は苦手であった。
3．現実感が持てない。
4．なぜそうなるのか、なぜそう考えるのか、必要性・必然性が持てない。

<回答の記入例>

問題番号		設問１		設問２		
		学習時点	現時点	○○	×○	××
１－①		○	○	2 （　）	（　）	（　）
１－②	解１	×	×	（　）	（　）	1，4 （　）
	解２	×	○	（　）	2 （ 30 ）	（　）

<数学項目一覧>

【数学Ⅰ】	【数学A】	【数学Ⅱ】	【数学B】
1．整式	13．集合	25．整式の除法と分数式	38．等差数列・等比数列
2．実数	14．場合の数	26．式の証明	39．いろいろな数列
3．2次方程式	15．順列	27．高次方程式	40．漸化式と数学的帰納法
4．不等式	16．組合せ	28．点と直線	41．ベクトルとその演算
5．関数とグラフ	17．二項定理	29．軌跡と領域	42．ベクトルと図形
6．2次関数の最大・最小	18．確率の意味	30．一般角の三角関数	43．空間座標と空間のベクトル
7．2次関数と2次方程式	19．独立な試行	31．三角関数の加法定理	44．空間ベクトルの応用
8．2次関数と2次不等式	20．確率の計算	32．指数と指数法則	
9．鋭角の三角比	21．期待値	33．対数と対数関数	
10．鈍角の三角比	22．三角形の性質	34．微分係数と導関数	
11．正弦定理と余弦定理	23．円の性質	35．導関数の応用	
12．図形の計量	24．命題と論理	36．積分	
		37．積分の応用	

資料１　調査問題（質問項目）

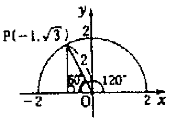
1－① [鈍角の三角比]

120°の三角比

(解)

$r=2$の半円をかくと，点Pの座標は$(-1,\sqrt{3})$となるから，

$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$，$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$



1－② [三角比の相互関係]

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$で，$\tan\theta=-\sqrt{2}$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$の値を求めよ．

(解1)

$\tan\theta=-\sqrt{2}$を$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$に代入して整理すると，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

$\tan\theta<0$より，θは鈍角だから，$\cos\theta<0$で，

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$より，

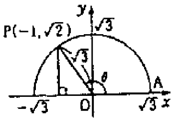
$$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(解2)

$\tan\theta=-\sqrt{2}$だから，右の図のように点$P(-1,\sqrt{2})$をとると，

$\angle AOP=\theta$，$OP=\sqrt{3}$だから，

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$



1－③ [正弦定理]

$\triangle ABC$において，$\angle A=120^\circ$，$\angle B=15^\circ$，$c=10$のとき，

aおよび三角形の外接円の半径Rの値を求めよ．

(解)

$\angle C=180^\circ-(120^\circ+15^\circ)=45^\circ$だから，

正弦定理により，

$$\frac{a}{\sin 120^\circ}=\frac{10}{\sin 45^\circ}$$

よって，

$$a=\frac{10}{\sin 45^\circ}\times\sin 120^\circ=5\sqrt{6}$$

また，$\frac{10}{\sin 45^\circ}=2R$だから，

$$R=\frac{10}{2\sin 45^\circ}=5\sqrt{2}$$

1－④ [余弦定理]

$\triangle ABC$において，$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}-1$，$\angle C=45^\circ$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

(解)

$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$だから，余弦定理より，

$$c^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)\cos 45^\circ=4$$

$c>0$より，$c=2$

また，余弦定理より，

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

よって，$\angle A=120^\circ$

このとき，$\angle B=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

1－⑤ [一般角の三角比]

$\sin\frac{11}{4}\pi$の値

(解)

$$\sin\frac{11}{4}\pi=\sin\left(\frac{3}{4}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

資料2　調査問題（三角比・三角関数問題1—①～1—⑤）

1－⑥ [三角不等式]

$0\leqq x<2\pi$のとき，不等式$\cos x>\frac{1}{\sqrt{2}}$を満たす$x$の値の範囲を求めよ．

(解1)

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$を満たす$x$の値は，

右の図から次のようになる．

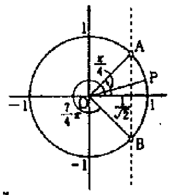
$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

xが$\cos x>\frac{1}{\sqrt{2}}$を満たすとき，右の図で，

xの動径OPは$\angle AOB$の内部にある．

よって，求めるxの値の範囲は，次のようになる．

$$0\leqq x<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<x<2\pi$$



(解2)

$0\leqq x<2\pi$では，$y=\cos x$のグラフは，

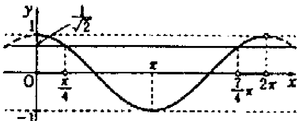
右の図のようになり，

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

のとき，$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

となるから，求めるxの値の範囲は，次のようになる．

$$0\leqq x<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<x<2\pi$$



1－⑦ [三角関数の加法定理]

α，βがともに鋭角で，$\sin\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin\beta=\frac{11}{14}$のとき，$\cos(\alpha+\beta)$の値を求めよ．

(解)

α，βがともに鋭角だから，$\cos\alpha>0$，$\cos\beta>0$で，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

よって，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}-\frac{1}{7}\cdot\frac{11}{14}=\frac{1}{2}$

1－⑧ [2倍角の公式]

$0\leqq x<2\pi$のとき，方程式$\sin 2x-\sin x=0$を満たすxの値を求めよ．

(解)

$\sin 2x=2\sin x\cos x$だから，もとの方程式を変形して，

$$\sin x(2\cos x-1)=0$$

したがって，$\sin x=0$　または　$2\cos x-1=0$

$0\leqq x<2\pi$の範囲で，

$\sin x=0$を満たすxの値は，　$x=0$，π

$2\cos x-1=0$を満たすxの値は，$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

よって，$x=0$，$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$

1－⑨ [三角関数の合成]

関数$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$の最大値と最小値を求めよ．

(解)

$$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$は，$-1$から1までの値をとるから，

最大値は2，最小値は-2

資料2　調査問題（三角比・三角関数問題1—⑥～1—⑨）

2－① [等差数列]

第5項が28，第15項が－2である等差数列の初項と公差を求めよ．また，第100項を求めよ．

(解)

この等差数列の初項をa，公差をd，第n項をa_nとすると，

$a_5 = a + 4d = 28$

$a_{15} = a + 14d = -2$

これから，$d = -3$，$a = 40$

つまり，初項は40，公差は－3　である．

また第100項は，

$a_{100} = 40 + 99 \times (-3) = -257$

2－② [等差数列の和]

2桁の自然数のうち，3で割ると1余る数の和を求めよ．

(考え方)

3で割ると1余る自然数を小さい方から順に並べると，

1，4，7，10，13，16，・・・，94，97，100，103，・・・

のように，公差3の等差数列になる．

(解)

3で割ると1余る2桁の自然数を順に並べた数列$\{a_n\}$は，

初項10，公差3の等差数列となるので，

$a_n = 10 + (n-1) \times 3 = 3n + 7$

$3n + 7 \leqq 99$　を満たす最大の自然数nは，

$n = 30$

よって，求める和をSとすると，$a_1 = 10$，$a_{30} = 3 \times 30 + 7 = 97$　より，

$S = \frac{1}{2} \times 30 \times (10 + 97) = 1605$

2－③ [等比数列]

第2項が6，第4項が24である等比数列の初項と公比を求めよ．また，第9項を求めよ．

(解)

この等比数列の初項をa，公比をr，第n項をa_nとすると，

$a_2 = ar = 6$

$a_4 = ar^3 = 24$

これから，$r^2 = 4$　つまり，$r = \pm 2$

$r = 2$のとき，

$ar = 6$ から，$a = 3$

このとき，$a_9 = ar^8 = 3 \times 2^8 = 768$

$r = -2$のとき，

$ar = 6$ から，$a = -3$

このとき，$a_9 = ar^8 = -3 \times (-2)^8 = -768$

よって，初項3，　公比2，　第9項768

または，初項－3，公比－2，第9項－768

2－④ [等比数列の和]

次の数列の一般項a_nを求めよ．

0.3，　0.33，　0.333，　0.3333，　0.33333，・・・・・・

(考え方)

例えば，0.333＝0.3＋0.03＋0.003などと考える．

(解)

この数列の第n項をa_nは，

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots\cdots + \frac{3}{10^n}$$

と表されるので，これは，初項$\frac{3}{10}$，公比$\frac{1}{10}$の等比数列の初項から第n項までの和である．

よって，$a_n = \dfrac{\frac{3}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

資料4　調査問題（数列問題2－①～2－④）

2－⑤ [Σの計算]

次の数列の和S_nを求めよ．

$1 \cdot 3$，　$2 \cdot 4$，　$3 \cdot 5$，・・・・・・・，$n(n+2)$

(解)

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots\cdots + n(n+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) + 6\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \end{aligned}$$

2－⑥ [いろいろな数列の和]

$x \neq 1$のとき，次の和S_nを求めよ．

$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1}$

(考え方)

等比数列の和を導くときに考えた，$S_n - xS_n$を計算する．

(解)

$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1}$　　　・・・①

①の両辺にxを掛けて，

$xS_n = \quad x + 2x^2 + \cdots\cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$　・・・②

①－②より，

$S_n - xS_n = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} - nx^n$

$x \neq 1$だから，

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{1 - x^n - nx^n(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

よって，

$$S_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

2－⑦ [数列の和と一般項]

初項から第n項までの和S_nが$S_n = n^2 + 6n$で与えられる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(解)

$a_1 = S_1 = 1^2 + 6 \times 1 = 7$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 6n) - \{(n-1)^2 + 6(n-1)\} = 2n + 5$

$a_1 = 7 = 2 \times 1 + 5$ だから，この式は$n = 1$のときも成り立つ．

よって，$a_n = 2n + 5$

2－⑧ [階差数列]

次の数列の一般項a_nを求めよ．

2，3，5，9，17，33，・・・

(解)

この数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$は，

1，2，4，8，16，・・・

だから，初項1，公比2の等比数列で，

$b_n = 2^{n-1}$

したがって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$a_1 = 2 = 2^{1-1} + 1$ だから，この式は$n = 1$のときも成り立つ．

よって，$a_n = 2^{n-1} + 1$

資料5　調査問題（数列問題2－⑤～②－⑧）

2－⑨［漸化式の作成］

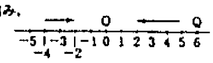
（1）平面上にn本の直線があり，どの2本も平行でなく，どの3本も1点で交わらないとき，これらn本の直線によって平面がa_n個の部分に分けられていたとする．このとき成り立つ漸化式を求めよ．

〔解〕

n本の直線によって平面がa_n個の部分に分けられていたとする．このとき，新たに$n+1$本目の直線lを引くと，lはすでに引かれているn本の直線と，n個の点で交わり，これらの交点によって，lは$n+1$個の部分に分けられる．

この$n+1$個の部分が新しい境界になって，平面の分けられる部分の個数は，$n+1$個だけ増えることになるので，　$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

（2）数直線上の点Qは，さいころを1回投げるごとに，
Qの座標が正のときは，出た目の数だけ，負の向きに進み，
Qの座標が負のときは，出た目の数だけ，正の向きに進み，
Qの座標が0のときは，そのまま原点Oにとどまる
ものとする．



点Qが座標6の点を最初の位置として，さいころをn回投げたとき，原点以外の位置にあるという事象A_nの起こる確率をP_nとする．このとき，P_nとP_{n+1}の関係を式で表せ．

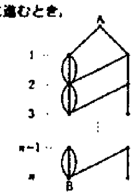
〔解〕

さいころをn回投げたときの点Qの座標をx_nとすると，$-5 \leqq x_n \leqq 5$　$(n=1,2,3,\cdots)$

1回目に事象A_1が起こるのは，1回目に出た目が6以外の場合であるから，　$P_1=\dfrac{5}{6}$

事象A_{n+1}が起こるのは，n回目に事象A_nが起こり，かつ，$n+1$回目に出た目が$|x_n|$と異なる場合であるから，　$P_{n+1}=P_n\times\dfrac{5}{6}$

（3）右図のA地点から出発して，辺に沿って後戻りせずに下方に進むとき，n番目のB地点に行く順路の総数をa_n通りとする．
このとき成り立つ漸化式を求めよ．



〔解〕

B地点の真下の$n+1$番目の地点をCとする.C地点に行くには，Bからは3通りの行き方があるB地点までの順路の総数がa_nであるので,BからC地点に行くためには，$3a_n$通り，また，Bの真横の地点からC地点には1通りの行き方がある．　よって，$a_{n+1}=3a_n+1$

（4）階段を上るのに，一度に1段または2段上ることが許されているとする．n段の階段を上る場合の上り方の総数をa_n通りとしたとき，a_{n+2}をa_{n+1}とa_nを用いて表せ．

〔解〕

最初に上るのが1段である場合と2段である場合に分けると，この2つは同時に起こることはない．

$n+2$段の階段を上るとすると，上り方の総数は，a_{n+2}通りである。このとき，最初に上るのが1段である場合の上り方の総数は，残りの$n+1$段の上り方の総数a_{n+1}　通りである.最初に上るのが2段である場合の上り方の総数は,残りのn段の上り方の総数a_n通りである．　したがって，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

2－⑩［漸化式を解く］

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

（1）　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

（2）　$a_1=\dfrac{5}{6}$，　$a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n$

（3）　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$

（4）　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

〔解〕

（1）$a_{n+1}=a_n+(n+1)$より，数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，
$b_n=a_{n+1}-a_n=n+1$
ここで，$a_1=2$だから，$n \geqq 2$のとき，

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

$a_1=2$だから，この式は$n=1$のときも成り立つ．

よって，　$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$

資料6　調査問題（数列問題2－⑨～②－⑩）

（2）$a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n$より，数列$\{a_n\}$は，初項$a_1=\dfrac{5}{6}$，公比$\dfrac{5}{6}$の等比数列である。

よって，$a_n=\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

（3）　$a_{n+1}=3a_n+1$を変形すると，

$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3(a_n+\dfrac{1}{2})$

したがって，数列$\{a_n+\dfrac{1}{2}\}$は，初項$a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$，公比3の等比数列となり，

$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}$

よって，$a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

（4）$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$を変形すると，

$a_{n+2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right)$　…①

$a_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)$　…②

したがって，①より，

数列$\{a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\}$は，初項$a_2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，公比$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$の

等比数列となり，$a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$　…①′

また，②より，

数列$\{a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\}$は，初項$a_2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，公比$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$の

等比数列となり，$a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$　…②′

①′－②′より，$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

よって，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

2－⑪［数学的帰納法］

数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

（解）与えられた等式を①とおく．

（Ⅰ）$n=1$のとき，
（左辺）$=1^3=1$
（右辺）$=\dfrac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2=1$
よって，①は成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$のとき，①は成り立つと仮定すると，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$n=k+1$のとき①の左辺は，

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3&=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\end{aligned}$$

これは，$n=k+1$のときの①の右辺である．
よって，$n=k+1$のときも①が成り立つ．

（Ⅰ），（Ⅱ）より，①はすべての自然数nについて成り立つ．

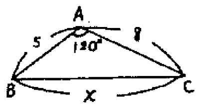
資料7　調査問題（数列問題2－⑩～2－⑪）

3－①（鈍角の三角比）
$\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$の値を求めたい。
（解）順に、$\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $-\sqrt{3}$

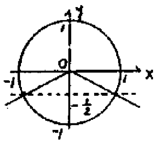
3－②（三角比の相互関係）
次の空欄に適する数，式を下の選択肢より選び、記号で答えなさい。
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\boxed{}$, $\sin\theta/\cos\theta=\boxed{}$
$1+\tan^2\theta=\boxed{}$
（①0　②1　③2　④ $\tan\theta$　⑤ $1/\tan\theta$
⑥ $\cos\theta$　⑦ $1/\cos^2\theta$　⑧ $1/\sin^2\theta$）
（解）順に、②, ④, ⑦

3－③（正弦定理）
$BC=\sqrt{2}$で、半径1の円に内接する△ABCにおいて、角Aの大きさを求めたい。
（解）正弦定理より、$\sin A=\sqrt{2}/2$
よって、$A=45^\circ$または，135°

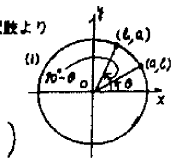
3－④（余弦定理）
右図の三角形ABCにおいて、
xの値を求めたい。
（解）余弦定理より、
$x^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos120^\circ$
$=129$
よって、$x=\sqrt{129}$



3－⑤（一般角と三角比）
$\sin\theta=-1/2$のとき，θを一般角で求めたい。
（解）右図により、
$\theta=210^\circ+360^\circ\times n$,
$\theta=-30^\circ+360^\circ\times n$（nは整数）

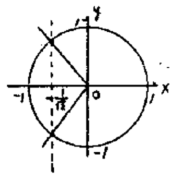


3－⑥（三角関数の性質）
θを一般角とするとき、次の空欄に適する式を下の選択肢より記号で選びなさい。
(1) $\sin(90^\circ-\theta)=\boxed{}$　(2) $\cos(90^\circ+\theta)=\boxed{}$
(3) $\tan(180^\circ-\theta)=\boxed{}$　(4) $\cos(-\theta)=\boxed{}$
(5) $\sin(\theta\pm180^\circ)=\boxed{}$
（① $\cos\theta$　② $-\cos\theta$　③ $\sin\theta$　④ $-\sin\theta$　⑤ $\tan\theta$
⑥ $-\tan\theta$　⑦ $1/\tan\theta$）
（解）(1) ①　(2) ④　(3) ⑥　(4) ①　(5) ④



3－⑦（三角関数のグラフ）
関数：$y=-3\sin(2\theta+60^\circ)$のグラフを描きたい。
（解）周期は180°であり、グラフの振幅は3である。また、この曲線は、曲線$y=3\sin2\theta$をx軸に対称に移動させ、さらに、x軸の方向に-30°平行移動させたものである。

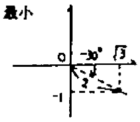
3－⑧（三角不等式の解）
$\cos\theta<-1/\sqrt{2}$となるθを一般角で求めたい。
（解）右図より、
$135^\circ+360^\circ\times n<\theta<225^\circ+360^\circ\times n$（nは整数）



3－⑨（加法定理の利用）
$\sin105^\circ$, $\cos105^\circ$, $\tan105^\circ$の値を求めたい。
（解）$\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$
$=\sin60^\circ\cos45^\circ+\sin45^\circ\cos60^\circ$
$=(\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$
$\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$
$=\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ$
$=(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$
$\tan105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$
$=(\tan60^\circ+\tan45^\circ)/(1-\tan60^\circ\tan45^\circ)$
$=-2-\sqrt{3}$

3－⑩（倍角の公式）
関数：$f(\theta)=\cos2\theta+2\cos\theta-1$（$0^\circ\leq\theta\leq360^\circ$）
の最大値，最小値を求めたい。
（解）$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$より、
$f(\theta)=2\cos^2\theta+2\cos\theta-2$
$=2(\cos\theta+1/2)^2-5/2$
ここで、$0^\circ\leq\theta\leq360^\circ$より、$-1\leq\cos\theta\leq1$
よって、最大値は、$\cos\theta=1$すなわち$\theta=0^\circ$のときで、
$f(0^\circ)=2$
また、最小値は、$\cos\theta=-1/2$すなわち
$\theta=120^\circ$, 240°のときで、
$f(120^\circ)=f(240^\circ)=-5/2$

3－⑪（三角関数の合成）
関数：$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$（$0^\circ\leq\theta\leq360^\circ$）の最大値，最小値を求めたい。
（解）右図より、$f(\theta)$は
$f(\theta)=2\sin(\theta-30^\circ)$
と表せる。
ここで、$-30^\circ\leq\theta\leq330^\circ$であるから、
$-1\leq\sin(\theta-30^\circ)\leq1$
よって、最大値は、$\theta-30^\circ=90^\circ$すなわち$\theta=120^\circ$のときで、$f(120^\circ)=2$
また、最小値は、$\theta-30^\circ=270^\circ$すなわち$\theta=300^\circ$のときで、$f(300^\circ)=-2$



資料8　平成9年度調査問題（三角比・三角関数問題）

4－①（等差数列の一般項）
初項a、公差dの等差数列$\{a_n\}$の一般項を求めたい。
（解）　$a_n=a+d\times(n-1)$

4－②（等比数列の一般項）
初項a、公比rの等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めたい。
（解）　$a_n=a\times r^{n-1}$

4－③（等差数列の和の公式）
初項a、公差dの等差数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めたい。
（解）　$S_n=n\{2a+(n-1)d\}/2$

4－④（等比数列の和の公式）
初項a、公比rの等比数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めたい。
（解）　$S_n=\begin{cases}a(1-r^n)/(1-r) & (r\neq1)\\ an & (r=1)\end{cases}$

4－⑤（階差数列）
数列：4, 7, 12, 19, 28, ・・・・・
の一般項を求めたい。
（解）階差数列は、3, 5, 7, 9, ・・・　で、等差数列である。
よって、その一般項は、$2n+1$
ゆえに、求める数列の一般項a_nは、

$$a_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2+3\quad(n\geq2)$$

$n=1$のとき、$a_1=4$であるから、
$a_n=n^2+3\quad(n\geq1)$

4－⑥（いろいろな数列の和）
数列$\{a_n\}$の一般項が、$a_n=n\times2^n$であるとき、この数列の初項から第n項までの和S_nを求めたい。
（解）
$S_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^n$
$2S_n=\qquad1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$
2式の辺々を引いて、
$-S_n=1\cdot2+1\cdot2^2+1\cdot2^3+1\cdot2^4+\cdots+1\cdot2^n-n\cdot2^{n+1}$
$=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$
よって、$S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

4－⑦（Σの計算）
数列$\{a_n\}$の一般項が、$a_n=(2n+1)^2$であるとき、
初項から第n項までの和を求めたい。
（解）求める和を、S_nとする。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2=\Sigma4k^2+\Sigma4k+\Sigma1$$
$$=4\times n(n+1)(2n+1)/6+4\times n(n+1)/2+n$$
$$=n(4n^2+12n+11)/3$$

4－⑧（数列の和と一般項）
数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが、
$S_n=3n^2+n$
で表せるとき、一般項を求めたい。
（解）$a_1=S_1=4$
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=3n^2+n-\{3(n-1)^2+(n-1)\}$
$=6n-2\ (n\geq2)$
よって、$a_n=6n-2\ (n\geq1)$

4－⑨（数列の漸化式）
数列$\{a_n\}$が、$a_1=5$, $a_{n+1}=2a_n+3$
で定義されるとき、一般項を求めたい。
（解）漸化式は、$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$と変形できる。
$b_n=a_n+3$とおくと、
$b_1=8$, $b_{n+1}=2b_n$より、これを解いて、
$b_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$
よって、$a_n=-3+2^{n+2}$

4－⑩（数学的帰納法）
$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\{n(n+1)/2\}^2$
が成り立つことを示したい。
（解）①$n=1$のとき、等式が成り立つ。
②$n=k$のとき成り立つことを仮定する。このとき、
$n=k+1$のときも成り立つ。
という二つのことを証明すればよい。

4－⑪（二項展開と二項係数）
$(x+2y)^5$の展開式で、x^3y^2の係数を求めたい。
（解）この展開式の一般項は、
${}_5C_k\times x^k\times(2y)^{5-k}={}_5C_k\times2^{5-k}\times x^ky^{5-k}$
と表される。
求める項の係数は、$k=3$のときであるから、

$${}_5C_3\times2^2=40$$

資料9　平成9年度調査問題（数列問題）

3．調査結果

3．1　三角比・三角関数の理解度調査結果と考察

今回の調査結果と前回の調査結果と並べて載せた。例えば、1－①の問題について、設問1で○、設問2で○をつけた理系の生徒の割合は91％である。また、前回の調査では、○×の項目を設けたため、合計が100％になっていないところがある。

調査対象：3年生2クラス（理系47人，文系29人）

調査時期：10月下旬

1－①［鈍角の三角比］

今回	○○	×○	××
理系	91	9	0
文系	93	7	0

前回	○○	×○	××
理系	90	10	0
文系	90	8	

1－②［三角比の相互関係］（解1）

今回	○○	×○	××
理系	74	21	4
文系	61	36	3

前回	○○	×○	××
理系	81	15	3
文系	85	12	0

1－②［三角比の相互関係］（解2）

今回	○○	×○	××
理系	85	15	0
文系	66	34	0

1－③［正弦定理］

今回	○○	×○	××
理系	79	21	0
文系	72	28	0

前回	○○	×○	××
理系	78	17	2
文系	80	11	9

1－④［余弦定理］

今回	○○	×○	××
理系	77	23	0
文系	83	17	0

前回	○○	×○	××
理系	86	15	3
文系	79	19	2

1－⑤［一般角の三角比］※調査問題に違いがある

今回	○○	×○	××
理系	72	28	0
文系	59	31	10

前回	○○	×○	××
理系	89	11	0
文系	88	10	0

1－⑥［三角不等式］（解1）

今回	○○	×○	××
理系	83	17	0
文系	76	24	0

前回	○○	×○	××
理系	83	2	0
文系	81	19	0

1－⑥［三角不等式］（解2）

今回	○○	×○	××
理系	68	28	4
文系	31	48	20

1－⑦［三角関数の加法定理］

今回	○○	×○	××
理系	70	30	0
文系	62	28	10

前回	○○	×○	××
理系	67	2	3
文系	70	20	8

1－⑧［2倍角の公式］

今回	○○	×○	××
理系	55	38	6
文系	59	28	14

前回	○○	×○	××
理系	64	21	10
文系	55	31	11

1－⑨［三角関数の合成］

今回	○○	×○	××
理系	49	47	4
文系	34	48	10

前回	○○	×○	××
理系	50	29	17
文系	49	28	23

1年次の2学期に、三角比・三角関数と続けて学習してきた内容である。今回の調査結果と、前回の調査結果を比べると、××の割合が1－⑨［三角関数の合成］で減っていることが見て取れる。○○の割合に大きな差はないが、×○の割合が前回よりも増えていることが特徴だろう。この理解の克服を示す生徒の多さは、三角関数の合成に限ったことではなく、三角比・三角関数全般に言えることだろう。数多くの定理が登場するこの単元（特に加法定理以降）は、初めて学習したときには何をやっているのか、いまいち理解できないのだろう。

また今回の調査では、前回の調査に加えて、同じ問題でも異なる解法についての理解度も調査した。1－②［三角比の相互関係］では実際に三角形を描く解法が、三角比の相互関係を用いる解法よりも理解度が高い。1－⑥［三角不等式］では、単位円を用いた解法は○○か×○のどちらかの生徒しかいないが、グラフを用いた解法では、特に文系の生徒の20％が××としている。このことは、理系の生徒は微分・積分において三角関数のグラフの利用や学ぶ機会があるが、文系の生徒にとっては三角関数の利用を学習する場面が少ないことがその理由として考えられる。また○○の割合の少なさから、グラフ自体が生徒にとって難しいことも原因のひとつだと考えることができる。

生徒がそれまでに学んだ関数（1次関数，2次関数）と比べると、三角関数はその変数が弧度法で表された角度であることや、周期関数であることなど、今までにない性質をもっている。それだけに三角関数の、特にそのグラフの指導にあたっては、その必要性や有用性が生徒に伝わるような指導が必要だと考える。そうでなければ、単位円を用いた考え方しかしなくなり、結局は三角関数のグラフに慣れ親しむことがなくなるからである。

しかし、教科書の記述はグラフに親しむよう配慮されているとは考えにくい。例えば三角不等式においては、グラフを利用した解法についての記述は不十分なものではないだろうか。さらに、多少複雑な形の三角不等式になると、単位円を用いた解法しか扱わず、グラフとの関連は参考程度になってしまう。このような記述の仕方では、生徒もグラフを利用して不等式を解いてみようとは考えないだろう。単位円による解法は、2次不等式の場合には容易であった定義域の確認が困難になるなど、グラフを用いた解法よりも理解しやすいとは言い難い。2次不等式ではグラフを利用した解法が一般的であるのだから、三角不等式についてもグラフを利用した解法について、もう少し詳細に扱う必要があるのではないだろうか。同じように、三角方程式や三角関数の合成など、様々な場面においてグラフを利用した説明を充実させる必要も感じる。

なお、調査問題1－⑤の結果は大きな違いがでているが、今回と前回とで調査問題の内容が異なるため、単純な比較はできないと考える。

3．2　三角比・三角関数変容理由と考察

調査問題の設問2の結果を以下のようにまとめた。

問題	理由	○○				×○				××			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
①	理	68	15	9		4	4						
	文	72	3	10	7	3			3				
②1	理	60	6	6	2	15	2	4	1				1
	文	52	3	3		24	7		3			3	
②2	理	72	11		2	6	2	6					
	文	59	3	3		21	10	3					
③	理	64	6	4	2	15	2	4	2				
	文	66		3	3	17	10						
④	理	60	6	6	4	17		2	4				
	文	76		3	3	10	3		3				
⑤	理	60	9	2	2	11		9	6				
	文	52		3		17	10		7	3	3	3	
⑥1	理	72	2	6	2	13	2	2					
	文	66		3	3	14	3	3					
⑥2	理	55	4	6	2	17	2	4	4			2	2
	文	28		3		28	14		7	3		14	3
⑦	理	57	4	4	4	21		4	2				
	文	59	3			14	7		7	3		7	
⑧	理	43	6	2	4	17	2	9	11	2		2	2
	文	48	3	3		17	3	3	3	10		7	
⑨	理	43	4	2	2	32		11	4	2			
	文	45	3			28	3		7	3		3	

例えば、1－①の問題について理解度を○○とつけた理系の生徒で、その理由を1とした者は、解答者中68％であった。また、無回答の者が数名いたため、合計が100％になっていないところがある。

例えば、○○とした理由が3番の場合、数学の学習が進んで、他の分野で学習することで調査問題の理解が深まったことを意味しているべきである。だから、ここでいう他の分野とは、調査問題の内容、つまり三角比・三角関数以外の分野のつもりであった。しかし、調査回答用紙に記されていたのは、調査項目の内容を含む分野がほとんどであった（例えば1－②の調査では、30番の項目「一般角の三角関数」を挙げている）。つまり、生徒にこの設問の意図が正しく伝わらなかったと推測される。その為、変容理由に関しては、集計は取ったもののこちらの意図するような考察を行うことはあまり意味がないと考えられる。つまり、生徒が学習する中で感じた、数学の各分野のつながりを見出すことは、この集計結果からは難しくなってしまったのだ。

そこで、この調査項目に関しては、○○、×○、××と回答した人それぞれの1～4に対して、

○○とした人の理解の状況
　1…学習時点と変化なし
　2…高校以前に学んでいて、易しかった
　3…その後、演習などを通して理解が深まった
　4…その後、他の分野を通して、理解が深まった
×○とした人の理解の状況
　1…復習して理解できた
　2…必要性を知り、理解できた。
　3…その考えを利用することを知り、理解できた
　4…他分野で利用されることを知り、理解できた
××とした人の理解の状況
　1…難しい
　2…苦手
　3…現実感がもてない
　4…必要性・必然性がもてない

というように、回答を解釈するにとどめておくこととする。

そのようにしてこの集計結果を見直すと、1－②（解2）と1－⑥（解2）で、特に×○の理由が2番と答えた生徒の多さが目立つ。これは、後になって、それぞれの解法の必要性を感じたということなのだろう。つまりは、一つの問題に対して、その場ではあまり別解の必要性を

感じていないのではないだろうか。直接そのような調査をしたわけではないので断言はできない。しかし、「もっと簡単な方法はありますか？」という質問を受けることが、多々ある。この調査結果とそういった質問をしてくる状況を合わせて考えると、生徒にとって価値ある別解とは、より手早く簡単な解法なのかもしれない。そうだとすると、問題演習を通して数学の内容の理解を深めようとする姿勢は見て取れない。問題を解くことが数学を学ぶ目的となってしまっているとしたら、残念だ。

3．3　数列の理解度調査結果と考察

2－① ［等差数列］

今回	○○	×○	××
理系	87	13	0
文系	90	10	0

前回	○○	×○	××
理系	93	2	0
文系	89	8	2

2－② ［等差数列の和］ ※調査問題に違いがある

今回	○○	×○	××
理系	74	26	0
文系	76	10	14

前回	○○	×○	××
理系	87	11	0
文系	87	11	3

2－③ ［等比数列］

今回	○○	×○	××
理系	74	26	0
文系	72	24	3

前回	○○	×○	××
理系	93	3	0
文系	90	8	1

2－④ ［等比数列の和］ ※調査問題に違いがある

今回	○○	×○	××
理系	60	38	2
文系	41	41	17

前回	○○	×○	××
理系	74	17	8
文系	77	16	5

2－⑤ ［Σの計算］

今回	○○	×○	××
理系	62	34	2
文系	62	38	0

前回	○○	×○	××
理系	53	32	9
文系	55	28	14

2－⑥ ［いろいろな数列の和］

今回	○○	×○	××
理系	47	43	11
文系	28	52	21

前回	○○	×○	××
理系	45	43	10
文系	24	35	38

2－⑦ ［数列の和と一般項］

今回	○○	×○	××
理系	60	34	6
文系	55	34	10

前回	○○	×○	××
理系	45	33	2
文系	50	27	20

2－⑧ ［階差数列］

今回	○○	×○	××
理系	55	32	9
文系	2	2	2

前回	○○	×○	××
理系	47	41	9
文系	43	41	14

2－⑨ (1) ［漸化式の作成］

今回	○○	×○	××
理系	43	40	17
文系	41	21	31

2－⑨ (2) ［漸化式の作成］

今回	○○	×○	××
理系	47	36	15
文系	45	21	34

2－⑨ (3) ［漸化式の作成］

今回	○○	×○	××
理系	36	36	26
文系	48	31	21

2－⑨ (4) ［漸化式の作成］

今回	○○	×○	××
理系	49	34	15
文系	41	17	41

2－⑩ (1) ［漸化式を解く］

今回	○○	×○	××
理系	55	34	9
文系	41	45	10

2－⑩ (2) ［漸化式を解く］

今回	○○	×○	××
理系	68	28	4
文系	55	31	10

2－⑩ (3) ［漸化式を解く］

今回	○○	×○	××
理系	57	38	4
文系	2	2	10

前回	○○	×○	××
理系	2	36	26
文系	31	32	35

2－⑩ (4) ［漸化式を解く］

今回	○○	×○	××
理系	47	40	13
文系	41	31	24

2－⑪ ［数学的帰納法］

今回	○○	×○	××
理系	60	34	6
文系	66	28	7

前回	○○	×○	××
理系	55	16	2
文系	46	27	27

前回の調査を行ったときは、数列が数学Aの内容だったので、生徒は1年次の2学期に学習していた。現在は数学Bの内容なので、2年次の2学期に学習している。この学習時期の違いから、当然現在のほうが理解度が高いことが予想される。実際××の割合を見てみると、2－⑤［Σの計算］，2－⑥［いろいろな数列の和］，2－⑦［数列の和と一般項］，2－⑩（3）［漸化式を解く］，2－⑪［数学的帰納法］といった項目で、××の割合が減っていることが見て取れる。数列の学習時期を遅らせた効果は確かにあったといえる。

数列の指導の際、困難を感じることのひとつに、漸化式の指導が挙げられるだろう。そこで今回は、漸化式を作る、漸化式を解く、という二つの段階にわけて生徒の理解度を調査した。その結果を見てみると、与えられた場面から漸化式を作ることはできないが、与えられた漸化式から一般項を求めることができるという、生徒の理解の状況が見て取れる。この原因として考えられるのは、それまでの数列の学習が一般項と和を求めることが主だったためだと考えられる。であるから当然、漸化式を用いて表された数列を見た生徒は、その一般項を求めようとするのだろうし、一般項を求められるようになろうと努力するのだろう。漸化式を学ぶ段階になって、「漸化式を作れるようになろう」と発想する生徒は少ないのは当然で、そのことが、変容理由にも表れるだろう。

そうは言っても、このような理解の状況は、漸化式をよく理解できている、とは言い難いだろう。まるで計算練習のように与えられた漸化式を解くばかりでは、決して漸化式の有用性や必要性を感じることはないだろう。今後、漸化式の指導においては、漸化式の作成に重点をおいた指導も必要だと考える。

そして、漸化式の作成の指導をスムーズに行うためには、それ以前の数列の指導において、一般項と和を求めることにのみ重点をおいた指導を行っていてはいけないだろう。等差数列、等比数列の段階で、漸化式という言葉とともに、2項間、3項間の関係について、色々と調べるような学習がのぞまれるのではないだろうか。そうすれば、わざわざ"漸化式"という単元を設けることなく、数列全般にわたって漸化式について学べるようになるのではないかと考える。

3．4　数列変容理由と考察

問題	理由	○○				×○				××			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
①	理	70	6	6	2	6	4		4				
	文	69	7	10	3	10							
②	理	53	11	6	6	15	4	2	2				
	文	55	10	3	3	14				14			
③	理	60	4	8	4	17	4		2				
	文	59	7	7		17	3		3	3			
④	理	49	4	4	4	26	4	2	4	2			
	文	38		3		24	3		10	17			
⑤	理	53	4	4		23	2		9			2	
	文	59	3			21	10		7				
⑥	理	45	2	4		28	2		9	6		2	
	文	24	3			38	7			10			7
⑦	理	49	2	6	2	26	2		6	4		2	
	文	48	3	3		24	3	3	3	10			
⑧	理	47	4	4		30			6	2		2	
	文	48	7			24	7		3	7		3	
⑨	理	36	2	4	2	23	6	4	4	6		2	4
1	文	41				10	7		3	14		3	14
⑨	理	33	2	4	2	23	6	4	4	6		2	4
2	文	41	3			14	3	3		24		7	10
⑨	理	30	2	4		32	2	4	2	6		6	11
3	文	41	3	3		17		3	10	14		3	7
⑨	理	38	4	4		23	4	4	4	9		4	4
4	文	38	3	3		7		10	3	24		7	10
⑩	理	45	2	4	2	23	2		4			2	2
1	文	41				34	3	3		10		3	
⑩	理	57	2	4	2	23	2		4			2	2
2	文	48	3			17	3	3	3	7		3	
⑩	理	49	4	2	2	32		2	4			2	2
3	文	52	3	7		14		3	3	7		3	
⑩	理	32	4	6	4	34		2	4	6		2	2
4	文	34	3	3		28		3		10		3	7
⑪	理	43	6	6	2	32	2		2	2		2	2
	文	55	3	3		24	3					3	3

2－⑨(1)～(4)の問題について、××の理由として1番の「とくかく難しい」と4番の「必然性・必要性がもてない」が多いことが目立つ。漸化式を作ることの難しさはともかく、先ほども述べたが、漸化式の必要性や必然性は、数列の独立した一分野のように扱うのではなく、数列の表し方の一つとして、一般項と同じ位の頻度で扱うことで解消できるのではないかと考える。

4．実施した授業について

4．1　三角関数のグラフの授業の概要

①単元数学Ⅱ（東京書籍）
第３章三角関数第１節三角関数

②単元所授業計画
数学Ⅰ「三角比」
数学Ⅱ第１節三角関数６時間
・・・本時は１時間目

③実施クラス
１年Ｇ組
授業中の雰囲気は静かで、積極的、意欲的に取り組む生徒が多い。

④本時までの指導内容
数学Ⅰにおける「三角比」の指導において、の範囲におけるのグラフは書ける。

⑤本時の指導目標
グラフを通して、三角関数とはどういうものかを理解させる。

⑥本時の授業内容
生徒にプリントを配布し、提示する課題をプリントで作業させる。

〔課題１〕
「Ｇ遊園地には半径50ｍの観覧車があり、36分で１周する。また、この観覧車はちょっと変わっており、出発地点がＳの位置です。その観覧車にＡさんが乗っている。時間ｔとＡさんが乗ったゴンドラの高さｙの関係をグラフにしてみよう」

・１周で終わらずに、２周、３周、・・・、ｎ周とするとき、グラフの形がどうなるかを考えさせる。そのことより、得られたグラフが周期関数のグラフであることを実感させる。
・課題の性質上、時間ｔを変数とするような関数のグラフを作成することとなる。そこで時間に対応したゴンドラの回転角度について考えさせる。必要に応じて、グラフの横軸に角度を記入させる。
・ゴンドラの出発地点を、現実の観覧車と同じく一番下の地点にした場合のグラフと比較させて、その違いについて考えさせる。

〔課題２〕
「この観覧車の速さを変えて、18分で１周するとしたとき、Ａさんのゴンドラの高さｙをグラフで表してみよう」

・課題１のグラフと比較させ、グラフの違いから二つのグラフの周期の違いを考えさせる。
・周期の違いが、どのようにグラフに表れるかを考えさせる。

〔課題３〕
「この遊園地にはもうひとつ観覧車があり、半径25ｍで36分で１周する。その観覧車にＡさんが乗っている。Ａさんのゴンドラの高さｙをグラフに表してみよう」

・課題１のグラフと比較させ、グラフの違いから関数の値域の違いを考えさせる。

〔課題４〕
「同じ観覧車にＡさんとＢくんが乗っている。Ｂくんのゴンドラは、Ａさんのゴンドラより３分早く出発した。Ａさんのゴンドラの高さｙのグラフと、Ｂくんのゴンドラの高さのグラフの関係はどうなっているか。」

・二つのグラフを比較させ、グラフの違いから位相の違いを考えさせる。
・グラフの平行移動について触れる。

〔課題５〕
「(a)ＡさんとＢくんが同じ高さになるのは、Ａさんが出発してから何分後ですか。
(b)30ｍになると富士山が見えます。この観覧車に乗ると富士山は何分間みることができますか。」

・(a)三角方程式をグラフを利用して解く。
・(b)三角不等式をグラフを利用して解く。
・どちらも正確は値や範囲は求められないので、グラフより読み取った値から、教科書巻末の三角関数の表を利用して概算値を求める。
・グラフを利用して三角方程式、三角不等式を解く態度を育てる。

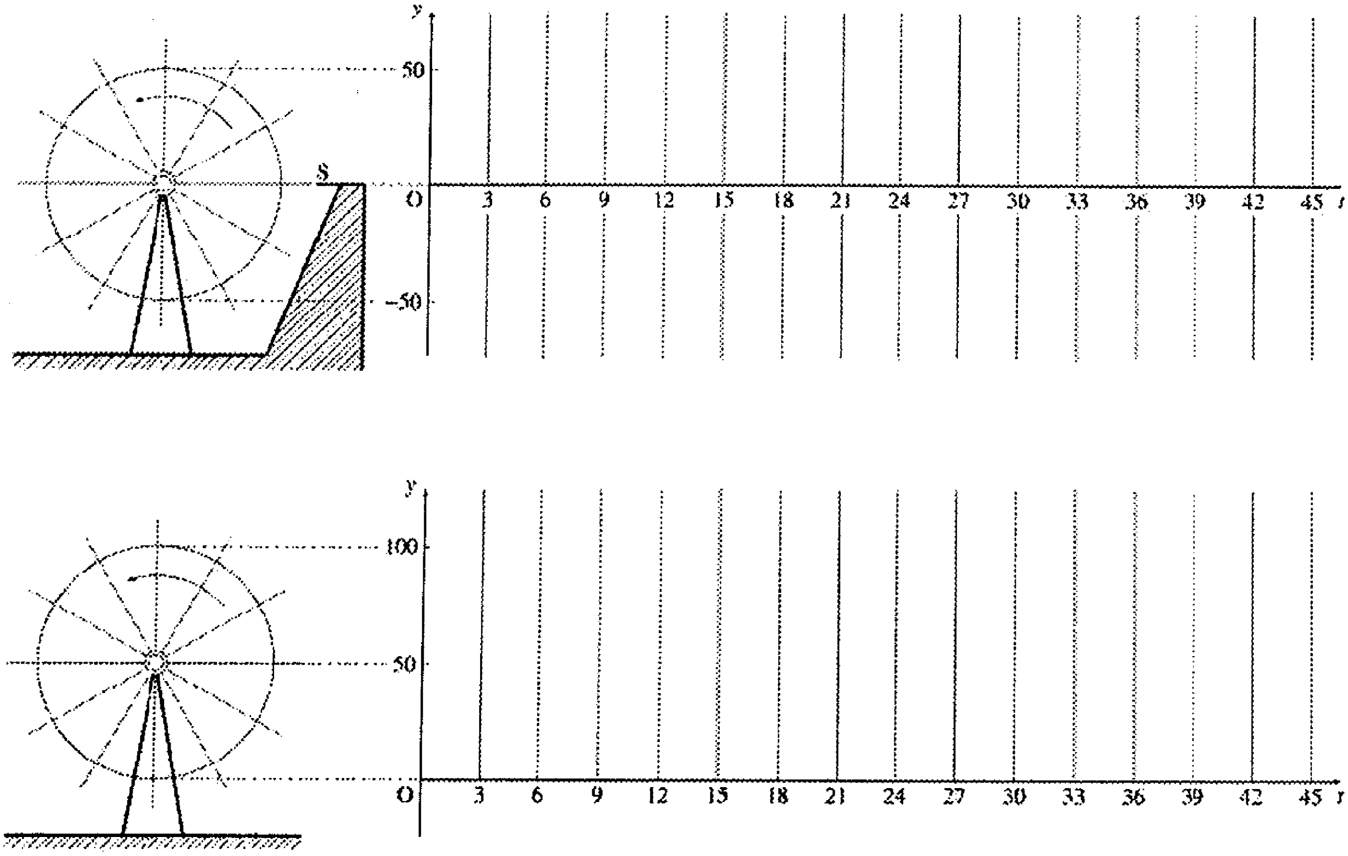


図１ 三角関数の授業で生徒が使用したプリントの一部

4．２漸化式の授業

①単元数学Ｂ（文英堂）

第１章数列第３節漸化式と数学的帰納法

②単元所授業計画

第１節等差数列と等比数列	４時間
第２節いろいろな数列	５時間
第３節漸化式と数学的帰納法	８時間

…本時は３時間目

③実施クラス

２年Ｂ組

授業中の雰囲気は静かで、真面目に取り組む生徒が多いが、自ら積極的に考えを進めていく様子があまり見られない。

④本時までの指導内容

等差数列、等比数列、または階差数列などの基本的な数列の指導を終え、数学的帰納法についても既習のため、簡単なものについては数学的帰納法を用いて証明することができる。

⑤本時の指導目標

「ハノイの塔」の問題の解決を通し、漸化式とはどのようなものか、それによって何がわかるかを理解させる。

⑥本時の授業内容

〔導入〕（課題提示）

「３本の柱Ａ、Ｂ、Ｃのうち１本（Ａ）に、大小の区別のつく円板が上から小さい順に重ねられている。その円板を以下の規則に従って、そのまま別の柱に移動させなさい。

(i)一度に動かすことのできる円板は１枚のみ

(ii)小さい円板の上に大きい円板は乗せられない

(iii)柱以外のところに円板を置くことはできない

ｎ枚の円板を移動させるためには、最小で何回の移動をさせればよいか」

〔展開１〕

生徒に色も大きさも異なる長方形に切った紙を５枚ずつ配布して、それを円板に見立てて、

円板が１枚のとき、２枚のとき、３枚のとき、・・・、と順に作業させて、最小の回数を調べる。

・実際に調べていくと、円板の数と最小の移動回数は、次の表のようにまとめられる。

円板の数	1	2	3	4	5	・・・
移動回数	1	3	7	15	31	・・・

この表より、
「階差数列が、等比数列になっている」
という点に気づくと予想される。そして、そのような規則性がいつまでも続けば、n 枚のときの回数がわかる。つまり、円板の枚数が n 枚のときその最小の移動回数は、階差数列の一般項を求めて、

$$a_n = 2^n - 1$$

と求めることができる。
※あるいは、表の数値からいきなり上記の一般項を求める生徒もいると予想される。
そこで、以下の疑問を生徒に投げかける。
＊本当にその表の移動回数は、最小なのか？
＊その規則性はいつまでも続くのか？
＊なぜそのような規則性が出てくるのか？

〔展開2〕
上記の疑問を解決するために、円板の動かし方を、その枚数と関連させて細かく考える。

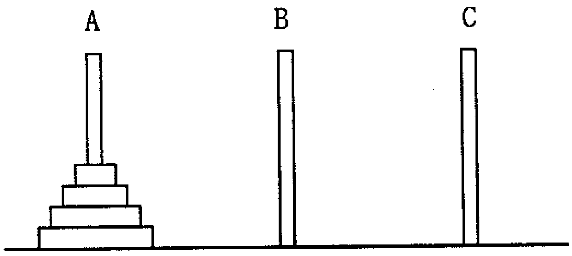


図2ハノイの塔

・円板の枚数が4枚のときの動かし方
(i)上の3枚を何らかの方法で、A→Bに動かす。
(ii)残った一番下の1枚をA→Cに動かす。
(iii)Bにある3枚を、何らかの方法でB→Cに動かす。
このように考えれば、最小の回数で動かすことできることに気づかせる。このように考えれば、
・円板の枚数が5枚のときの動かし方
(i)′上の4枚を何らかの方法で、A→Bに動かす。
(ii)′残った一番下の1枚をA→Cに動かす。
(iii)′Bにある4枚を、何らかの方法でB→Cに動かす。
というように、5枚の円板の動かし方がわかる。

〔展開3〕
4枚を動かす回数を用いて、5枚を動かす回数を表すことを考える。そこで、
5枚を動かす最小の回数を、a_5 回
4枚を動かす最小の回数を、a_4 回
とおく。すると円板の動かし方から、
(i)′は a_4 回、(ii)′は1回、(iii)′は a_4 回なので、

$$a_5 = a_4 + 1 + a_4 = 2a_4 + 1$$

と表せる。
このことより、
・円板の枚数が $n+1$ 枚のときの動かし方
(i)上の n 枚を何らかの方法で、A→Bに動かす。
(ii)残った一番下の1枚をA→Cに動かす。
(iii)Bにある n 枚を、何らかの方法でB→Cに動かす。
と考えて、
n 枚を動かす最小の回数を、a_n 回とすると、

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$$

という漸化式が得られる。

［展開4］
得られた漸化式

$$a_n + 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$$

より、予想されている最小の移動回数の一般項
$a_n = 2^n - 1$ を求める方法を考える。次の3通りの方法を考えるだろうと予想できる。
①数学的帰納法を用いる
(証明)
(i) $n=1$ のとき，$a_1 = 2^1 - 1 = 1$ より成立
(ii) $n=k$ のとき $a_k = 2^k - 1$ を仮定すると，
$n=k+1$ のとき，漸化式より

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

となるので、$n=k+1$ のときも成立
(i)と(ii)より，$a_n = 2^n - 1$ が示された.

②最小の移動回数が階差数列らしい、という予想に基づいて、$\{a_{n+1} - a_n\}$ 階差数列を考える
(解)
$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$ と $a_{n+1} = 2a_n + 1$
の2式の差を考えて、

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2(a_{n+1} - a_n)$$

となる。
ここで，$\{a_n\}$ 数列の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，
$\{b_n\}$ は初項1，公比2の等比数列である。

よって，$b_n=2^n$

したがって，$n\geqq 2$のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=2^n-1$$

この式は$n=1$のときも成立。

よって，$a_n=2^n-1$

③表の最小の移動回数の値から、

a_n+1

という数列を考えてみる

(解)

a_n+1を並べてみると，

n	1	2	3	4	5	・・・
a_n	1	3	7	15	31	・・・
a_n+1	2	4	8	16	32	・・・

このとき，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$である．

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$は変形すると，

$a_{n+1}=2a_n+1$となり、もとの漸化式となる．

$c_n=a_n+1$とすると，$c_{n+1}=2c_n$

また，$c_1=a_1+1=2$より，

c_nは初項2，公比2の等比数列。

よって，$c_n=2^n$

つまり，$a_n=c_n-1=2^n-1$

以上の3つの解法を適宜指導する。

5．今後の課題

今回の調査結果から確認できた生徒理解状況に対する一つの解決案として、実際に三角関数のグラフと漸化式に関する授業を行った。当然、たった1回の授業によって、三角関数のグラフに親しむことはできないし、漸化式を作れるようにもなれない。今後、その単元全体を通してどのような指導計画を立てる必要があるのかを考えていかなければならない。

また今回の調査では、現行の学習指導要領のポイントであった“中学校から移行してきた内容”について触れてはいない。例えば、三角比では「相似図形の面積比・体積比」と「球の表面積・体積比」が移行してきている。数学Aの平面図形には、多くの内容が中学校から移行し、さらには必修の内容となった。もともと高校の内容だった部分でも、数列に関しては「2項定理」が数列の分野から、場合の数の分野に移行した。こういった内容についての理解度の調査も今後行っていきたい。また、来年度から教科書に発展的な内容がもりこまれることとなった。それにより、どのように生徒の理解度が変化していくのかも調査したい。