

## これからの高校数学の指導内容のあり方を求めて — 本校生徒の理解度の現状について —

井上 哲明・中村 和子・室田 敏夫

現在、数学の指導内容は、2次関数、三角比、個数の処理が数学Ⅰに、数と式、数列が数学Aに、图形と方程式、三角関数、対数・指数関数、微分・積分が数学Ⅱに、ベクトル、複素数平面が数学Bに、微分・積分の応用が数学Ⅲに、行列、いろいろな曲線が数学Cに配列されている。これらの内容に対する生徒の理解の状況を調査し、その視点から数学の内容を配列してみることが必要ではないか、そこから適切な指導の時期を考えていこうということになった。そこで、今回は数学Ⅰ、A、数学Ⅱの一部の内容に対して調査を行った。

<キーワード>調査、理解、深まり、つまずき、2次関数、三角比、三角関数  
個数の処理、確率、数列

### 1. 始めに

現指導要領が導入されて三年が経過し、本校においては、全校生徒が同じ内容を学習している。複素数平面など新しい内容が加えられ、従来扱ってきた内容も配列の面で大きく変わり、数学全体を通しての内容の配列をどう考えたら良いのか、我々も戸惑いを感じながら、前年度までの実施内容についての反省を踏まえながら、指導計画を作成してきた。

その内容の配列、指導時期を再検討していく上で、生徒の数学の内容に対する理解の状況をまず視点に置く必要があると考え、今回は数学Ⅰ、Ⅱ、Aで扱われている「2次関数」、「個数の処理」、「三角比」、「三角関数」、「数列」を取り上げ、生徒の理解の状況を調査した。それぞれの内容に対して、生徒の理解を困難にしている内容はないか（内容の取り扱い時期の適切性）、理解を助けたり、深めていくために必要な内容はないかを、この調査結果から考察した。尚、本稿は本年度の公開研究会で発表した内容をまとめたものである。

### 2. 本調査の内容と方法

上記の目的で、生徒の理解度の現状を調査することになった。「理解した」という状況は、学習時点においては調査対象の概念を利用して問題を解決できるということで定義した。また、「理解」の変容については、学習時点で理解した概念を利用する場面をいろいろと学習する中で、その概念に対する理解が深まるこことを○○（理解の「深まり」）で、学習時点では理解できなかったがその後の学習で理解が助けられたという状態を×○（理解の「克服」）で、また、学習時点でも現時点

でも理解ができていない状態を××（理解の「つまずき」）と定義した。

学習時点での理解の状況が、1年間の異なった学習経験（異なったカリキュラム）によりどのように影響されるのかを見るために、2、3年生の同一問題に対する比較調査を行った。また、その後の学習経験で理解の状況がどのように変わったかを見るために、3年生に対して変容の理由を調査した。

①時期： 平成9年9月

②対象： 2年生 2クラス (90名)

3年生 理系選択者 45名

文系選択者 80名

③調査問題：2次関数、個数の処理、三角比（以上、数学Ⅰ）、数列（数学A）、三角関数（数学Ⅱ）の各々について、具体的な観点別の問題を11題ずつ用意し、その解答例を合わせて提示した。その内容と解決方法および、その内容に関わる性質について、学習時点と現時点での理解度を次の2段階で回答させた。

○・・・よく理解できた（できる）・理解できた（できる）

×・・・まったく分からぬ・よく分からぬ

次に、各調査問題に対する回答結果、すなわち、○○、×○、××のそれぞれに対してその主な理由を回答させた。理解の変容の理由を調査するためである。

#### <調査問題>

#### 数学調査問題

次項からの1-①から4-⑩までの各問題について、次の<設問1>及び<設問2>に回答して下さい。回答用紙は別にあります。

<設問1>各問題の内容及びその解法・用いる考え方について聞きます。

それを学習した時点、現時点のそれぞれにおいて、理解度がどうであったかを次を自安に回答して下さい。

よく理解できた（る）・理解できた（る）・・・○を記入  
まったく分からぬ・よく分からぬ・・・×を記入

<設問2>設問1で、○○と記入した問題については、○○用の問。

×○と記入した問題については、×○用の問。

××と記入した問題については、××用の問

について、該当する番号を回答用紙に記入して下さい。ただし、問の中に（ ）に番号を埋める指示のある場合は、回答用紙の（ ）に、回答用紙の表紙にある数学項目一覧の中から番号を選び、記入して下さい。

これからの中高数学の指導内容のあり方を求めて

\* \* ○○の人間に聞きます。該当する番号を回答用紙に記入して下さい。

1. 特に学習時点と現在とで理解の仕方に変化はない。
2. 高校以前に学んでおり、あるいは、類似の問題を学んでおり、内容として易しい。
3. ( ) で、発展的な内容（類似の問題、その考え方を利用する問題）を数学の中で学習して、よりその考え方（内容）の理解が深まった。( ) に項目の番号を記入。
4. 他分野で、その内容や考え方の利用を知ってから、理解が深まった。

\* \* ×○の人間に聞きます。該当する番号を回答用紙に記入して下さい。

1. 学習時点では理解できなかったので、何回もやり直した結果、理解できるようになった。
2. ( ) を学んでから、その必要性を知り、学習後に理解した。( ) に項目の番号を記入。
3. ( ) でこの内容やその考え方を利用されていることを知り、理解できるようになった。( ) に項目の番号を記入。
4. 他分野で、その内容や考え方を利用されていることを知り理解できるようになった。

\* \* ××の人間に聞きます。どういった点がわからないのか、なぜ理解にくいのか、該当の番号を回答用紙に記入して下さい。  
(複数回答可)

1. とにかく難しくてわからない。
2. 中学時代からこの分野は苦手であった。
3. 現実感が持てない。
4. なぜそうなるのか、なぜそう考えるのか、必要性・必然性が持てない。
5. 答えがユニークであり、多様性がない。

<回答の記入例>

問題番号	学習時点	現時点	○○	×○	××
1 - ①	○	○	2 ( )	( )	
1 - ②	×	○	( )	2 (7)	

<数学項目一覧>

1. 二次関数のグラフ	19. 軌跡と領域
2. 二次方程式・不等式	20. 三角関数のグラフ
3. 二次関数の応用問題	21. 加法定理
4. 規則性の発見	22. 三角関数の応用問題
5. 順列	23. 指数法則
6. 組み合わせ	24. 指数関数のグラフ
7. 確率の基本性質	25. 対数関数のグラフ
8. 確率の現実問題	26. 指数・対数の応用問題
9. 正弦・余弦定理	27. 微分係数
10. 三角比を用いた応用問題	28. 導関数
11. 数の拡大	29. 微分の応用
12. 整式の計算	30. 不定積分
13. 等式・不等式の証明	31. 定積分
14. 命題	32. 積分の応用
15. 等差・等比数列	33. 平面ベクトルと図形
16. 減算式	34. 空間ベクトルと図形
17. 数学的帰納法	35. 複素数と方程式の解
18. 直線・円の方程式	36. 複素数平面と図形

次項からの回答用紙に記入して下さい。では、ご協力をお願いします。

## 1-①(2次関数のグラフ)

放物線:  $y = 2x^2 + 4x$  のグラフを描きたい。(解)  $y = 2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$  と平方完成できる。  
よって、この放物線の頂点は  $(-1, -2)$  であるから、放物線:  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$ ,  $y$  軸それぞれの方向に  $-1$ ,  $-2$  平行移動したグラフを描けばよい。

## 1-②(放物線の方程式の決定)

頂点  $(-2, 0)$  で、 $A(-3, -1)$  を通る放物線の方程式を求めたい。  
(解) 方程式を、 $y = a(x+2)^2$  とおく。点  $A$  を通るから、その座標を代入して、 $a = -1$ 

## 1-③(放物線のグラフと方程式の決定)

2点  $(3, 0)$ ,  $(-1, 0)$  を通り、 $A(0, 1)$  を通る放物線の方程式を求めたい。  
(解) 方程式を、 $y = a(x-3)(x+1)$  とおく。点  $A$  を通るから、その座標を代入して、 $a = -1/3$ 

## 1-④(2次方程式の解の公式)

 $3x^2 - 5x + 1 = 0$  の解を求めたい。  
(解) 解の公式より、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 

## 1-⑤(解の判別)

2次方程式:  $x^2 - 2x + k = 0$  が2個の実数解を持つための定数  $k$  の範囲を求めたい。  
(解) 解の判別式を  $D$  とする。  $D = 4 - 4k$   
 $D > 0$  を解くと、 $k < 1$ 

## 1-⑥(2次方程式の解と2次関数のグラフ)

1-⑤の問は次のようと考えることもできる。

(解)  $y = x^2 - 2x + k$  とおく。  
この放物線の頂点は、 $(1, k-1)$   
よって、 $k-1 < 0$  を解いて、 $k < 1$ 

## 1-⑦(2次不等式の解)

2次不等式:  $x^2 - 4x + 2 > 0$  の解を求めたい。  
(解)  $x^2 - 4x + 2 = 0$  の解は、 $x = 2 + \sqrt{2}$ ,  $2 - \sqrt{2}$   
よって、 $y = x^2 - 4x + 2$  のグラフで、 $y > 0$  となる  $x$  の範囲を求める。 $x < 2 - \sqrt{2}$ ,  $x > 2 + \sqrt{2}$ 

## 2-①(順列)

6個の数字  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  をすべて並べてできる偶数の個数を求めたい。  
(解) 1の位の決め方は3通り。その各々に対して、残りの5の数の決め方は、 $P_5 = 5!$  (通り) あるから、求められる個数は、 $3 \times 5! = 360$ 

## 2-④(円順列)

6個の数字  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  を円周上に並べる並べ方の組数を求める。  
(解) 1を置く所を固定し、残り5個の数字を並べればよいので、 $P_5 = 5!$ 

## 2-⑤(組合せ)

円周上に異なる5個の点がある、これらの中から3点選び、それらを頂点とする三角形を作ると、何種できるかを求めてい。  
(解) 5個の点から、どの3個を取っても同一直線上にないので、5個の点から3個の点を取ってできる組合せの個数だけ三角形が得られる。よって、

$$C_5 = P_5 / 3 = 5!$$

## 2-⑥(同じものを含む順列)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 の7個の数字をすべて並べてできる数の個数を求めてい。  
(解) 異なる7個の順列の数が  $7!$  である。1が3個、2, 3が2個ずつ同じものがあるから、求める数の数を  $x$  とすると、 $x \times 3! \times 2! \times 2! = 7!$   
よって、 $x = 7! / (3! \times 2! \times 2!) = 210$ 

## 2-⑦(確率の基本性質)

次の空欄に適する数、式を下の選択肢より選び、記号で答えなさい。

(1) 任意の事象  $A$  について、 $( ) \leq P(A) \leq ( )$  であり。  
 $P(\emptyset) = ( )$ ,  $P(U) = ( )$  ( $U$  は全集合)(2)  $A, B$  が互反事象のとき、 $P(A \cup B) = ( )$ (3) ①0 ②1/2 ③1 ④1/6 ⑤ $P(A) + P(B)$   
⑥ $P(A) \times P(B)$  ⑦ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 

(解) (1) 順に、①, ②, ③, ④, ⑤

## 2-⑧(確率の計算)

赤玉7個、白玉5個が入っている袋から3個の玉を同時に取り出すとき、少なくとも1個白玉が出る確率を求めたい。

(解) 事象  $A$ : 少なくとも1個白玉ができる。

$$P(A) = C_3 \div C_8 = 21 / 132$$

よって、 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 111 / 132$ 

## 1-⑩(2次関数のグラフと不等式)

不等式:  $x^2 + x + 1 > 0$  が、すべての実数  $x$  にたいして成り立つための定数  $a$  の値の範囲を求めてい。(解)  $y = ax^2 + x + 1$  とおく。まず、 $a > 0$  が必要である。 $y = 0$  の判別式を  $D$  とおくと、 $D < 0$ 

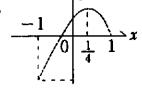
$$D = 1 - 4a \text{より}, a > 1/4$$

ゆえに、 $a > 1/4$ 

## 1-⑪(2次関数の最大・最小)

関数:  $y = -2x^2 + x + 1$  の、 $-1 \leq x \leq 1$  における最大値と最小値を求めてい。(解)  $y = -2(x - 1/4)^2 + 9/8$  と変形できる。

右グラフより、

最大値は、 $x = 1/4$  のときで、 $9/8$ 最小値は、 $x = -1$  のときで、 $-2$ 

## 1-⑫(2次関数の応用)

一定の長さ  $2L$  の針金で長方形を作るとき、その面積が最大となるのは正方形のときである。(解) 長方形の一辺の長さを、 $x$  とおくと、面積  $S$  は、

$$S = x(L-x)$$

 $S = -(x-L/2)^2 + L^2/4$  より、 $x=L/2$  で最大。

## 1-⑬(2次関数の応用)

関数:  $y = x^2 - 2kx$  の  $-1 \leq x \leq 1$  での最小値を求めてい。(解) 放物線:  $y = f(x) = x^2 - 2kx$  の頂点を求めると、

$$(k, k^2)$$
 であるから、

(1)  $k < -1$  のとき

$$f(-1) = 1 + 2k$$

(2)  $-1 \leq k < 1$  のとき

$$f(k) = -k^2$$

(3)  $k \geq 1$  のとき

$$f(1) = 1 - 2k$$

## 2-①(集合の定義)

 $U = \{x | 1 \leq x \leq 10, x \text{は自然数}\}$  とする。また、 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  であるとき、 $A, B$  の共通集合  $A \cap B$ ,  $A, B$  の和集合  $A \cup B$ ,  $A$  の補集合を、それぞれ求めたい。(解)  $A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ 

$$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

## 2-②(ド・モルガンの法則)

次の空欄に適する集合を、下の選択肢より選び、記号で答えなさい。

$$A \cap B = (\quad) \quad \overline{A \cap B} = (\quad)$$

$$\textcircled{1} A \cap B \textcircled{2} A \cup B \textcircled{3} \overline{A} \cap \overline{B} \textcircled{4} \overline{A} \cup \overline{B}$$

(解) 順に、 $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ 

## 2-④(独立試行の確率)

赤玉4個と白玉2個が入っている袋  $S$  と、赤玉3個と白玉2個が入っている袋  $T$  がある。それぞれの袋から1個ずつを取り出すとき、2個とも赤である確率を求めてい。

(解) それぞれの袋から玉を取り出す試行は独立である。

事象A: 袋Sから赤玉を取り出す

事象B: 袋Tから赤玉を取り出す

とする。求める確率は  $P(A \cap B)$  であり、

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= 4/6 \times 3/5 = 2/5$$

## 2-⑩(重複試行の確率)

1つのサイコロを5回投げて投げるとき、1の目が3回出る確率を求めてい。

(解) 各回は独立な試行であり、どの回においても1の目が出る確率は  $1/6$ 、1の目が出ない確率は  $5/6$  であるから、求める確率は、 $C_5 \times (1/6)^3 \times (5/6)^2$ 

$$= 125/3888$$

## 2-⑪(期待値)

2枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数Xの期待値を求めてい。

(解) 表

$$\begin{array}{c|ccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P(X) & 1/4 & 1/2 & 1/4 & & \end{array}$$

上記の表より、求める期待値  $E(X)$  は、

$$E(X) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4$$

$$= 1$$

## 3-①(純角の三角比)

 $\sin 120^\circ$ ,  $\cos 120^\circ$ ,  $\tan 120^\circ$  の値を求めたい。(解) 順に、 $\sqrt{3}/2, -1/2, -\sqrt{3}$ 

## 3-②(三角比の相互関係)

次の空欄に適する数、式を下の選択肢より選び、記号で答えなさい。

(解)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ( )$ ,  $\sin \theta / \cos \theta = ( )$ 

$$1 + \tan^2 \theta = ( )$$

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4)  $\tan \theta$  (5)  $1/\tan \theta$ (6)  $\cos^2 \theta$  (7)  $1/\cos^2 \theta$  (8)  $1/\sin^2 \theta$ (解) 順に、 $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{4}$ ,  $\textcircled{7}$ 

## 3-③(正弦定理)

△ABCで、半径  $r$  の円に内接する△ABCにおいて、角Aの大きさを求めてい。(解) 正弦定理より、 $\sin A = \sqrt{2}/2$ よって、 $A = 45^\circ$  または  $135^\circ$

## これからの高校数学の指導内容のあり方を求めて

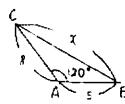
### 3-④(余弦定理)

右図の三角形ABCにおいて、

xの値を求めたい。

(解) 余弦定理より、

$$x = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 120^\circ \\ = 124 \\ \text{よって}, x = \sqrt{124}$$

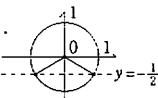


### 3-⑤(-一般角と二角比)

$\sin \theta = -1/2$  のとき、θを一般角で求めたい。

(解) 右図により、

$$\theta = 210^\circ + 360^\circ \times n \\ \theta = -30^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$



### 3-⑥(三角関数の性質)

θを一般角とするとき、次の空間に適する式を下の選択肢より

記号で出しなさい。

- (1)  $\sin(30^\circ - \theta) = (\quad)$  (2)  $\cos(90^\circ + \theta) = (\quad)$   
 (3)  $\tan(180^\circ - \theta) = (\quad)$  (4)  $\cot(-\theta) = (\quad)$   
 (5)  $\sin(\theta \pm 180^\circ) = (\quad)$

- ①  $\cos \theta$  ②  $-\cos \theta$  ③  $\sin \theta$  ④  $-\sin \theta$  ⑤  $\tan \theta$   
 ⑥  $-\tan \theta$  ⑦  $1/\tan \theta$

### 3-⑦(三角関数のグラフ)

関数  $y = -3 \sin(2\theta + 60^\circ)$  のグラフを描きたい。

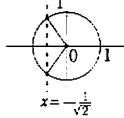
(解) 周期は  $180^\circ$  であり、グラフの振幅は3である。また、この曲線は、曲線  $y = 3 \sin 2\theta$  をx軸に対称に移動させさらに、x軸を方向に  $-30^\circ$  平行移動させたものである。

### 3-⑧(三角不等式の解)

$\cos \theta < -1/\sqrt{2}$  となるθを一般角で求めたい。

(解) 右図より、

$$180^\circ + 360^\circ \times n < \theta < 225^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$



### 3-⑨(加法定理の利用)

$\sin 105^\circ, \cos 105^\circ, \tan 105^\circ$  の値を求めたい。

(解)  $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ \\ = (\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) \\ = \sqrt{6}/4$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2) \\ = 1/2$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= (\tan 60^\circ + \tan 45^\circ) / (1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ) \\ = -2 - \sqrt{3}$$

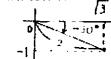
### 3-⑩(重角の公式)

関数  $f(\theta) = \cos 2\theta + 2 \cos \theta - 1$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) の最大値、最小値を求めたい。

(解)  $\cos 2\theta = 2(\cos \theta)^2 - 1$  より、  
 $f(\theta) = 2(\cos \theta)^2 + 2 \cos \theta - 2$

ここで、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  おり、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  よって、最大値は、 $\cos \theta = 1$  すなわち  $\theta = 0^\circ$  のとき、  
 $f(0^\circ) = 2$

また、最小値は、 $\cos \theta = -1$  すなわち  $\theta = 180^\circ$  のとき、  
 $f(180^\circ) = f(240^\circ) = -5/2$



### 3-⑪(三角関数の合成)

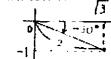
関数  $f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) の最大値、最小値を求めたい。

(解) 右図より、 $f(\theta)$  は  
 $f(\theta) = 2 \sin(\theta - 30^\circ)$

と表せる。ここで、 $-30^\circ < \theta - 30^\circ < 330^\circ$  であるから、  
 $-1 \leq \sin(\theta - 30^\circ) \leq 1$

よって、最大値は、 $\theta - 30^\circ = 90^\circ$  すなわち  $\theta = 120^\circ$  のとき、  
 $f(120^\circ) = 2$

また、最小値は、 $\theta - 30^\circ = 270^\circ$  すなわち  $\theta = 300^\circ$  のとき、  
 $f(300^\circ) = -2$



### 3-⑫(三角関数のグラフ)

関数  $y = -3 \sin(2\theta + 60^\circ)$  のグラフを描きたい。

(解) 周期は  $180^\circ$  であり、グラフの振幅は3である。また、この曲線は、曲線  $y = 3 \sin 2\theta$  をx軸に対称に移動させさらに、x軸を方向に  $-30^\circ$  平行移動させたものである。

### 4-①(等差数列の一般項)

初項  $a_1$ 、公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めたい。

(解)  $a_n = a_1 + d \times (n - 1)$

### 4-②(等比数列の一般項)

初項  $a_1$ 、公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めたい。

(解)  $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

### 4-③(等差数列の和の公式)

初項  $a_1$ 、公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めたい。

(解)  $S_n = n(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) / 2$

### 4-④(等比数列の和の公式)

初項  $a_1$ 、公比  $r$  の等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めたい。

(解)  $S_n = (a_1(1 - r^n)) / (1 - r) \quad (r \neq 1)$

### 4-⑩(数列の漸化式)

数列  $\{a_n\}$  が、 $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n + 3$

で定義されるとき、一般項を求めたい。

(解) 渐化式は、 $a_{n+1} - 3 = 2(a_n + 3)$  と変形できる。

$b_n = a_n + 3$  とおくと、

$b_1 = a_1 + 3 = 2b_1$  となり、これを解いて、

$b_n = 8 \times 2^{n-1} = 2^{n+2}$

よって、 $a_n = -3 + 2^{n+2}$

### 4-⑪(数列の漸化式)

数列  $\{a_n\}$  が、 $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n + 3$

で定義されるとき、一般項を求めたい。

(解) 渐化式は、 $a_{n+1} - 3 = 2(a_n + 3)$  と変形できる。

$b_n = a_n + 3$  とおくと、

$b_1 = a_1 + 3 = 2b_1$  となり、これを解いて、

$b_n = 8 \times 2^{n-1} = 2^{n+2}$

よって、 $a_n = -3 + 2^{n+2}$

### 4-⑫(数列の漸化式)

数列  $\{a_n\}$  の一般項が、 $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n + 3$

で定義されるとき、一般項を求めたい。

(解)  $a_1 = S_1 = 5$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 3n^2 + n - (3(n-1)^2 + (n-1))$

$= 6n - 2 \quad (n \geq 2)$

よって、 $a_n = 6n - 2 \quad (n \geq 1)$

### 4-⑬(Σの計算)

数列  $\{a_n\}$  の一般項が、 $a_n = 2n + 1$  であるとき、この数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めたい。

(解) 求める和を、 $S_n$  とする。

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k + 1)^2 = \sum k^2 + \sum 4k + \sum 1 \\ = 4 \times n(n+1)(2n+1)/6 + 4 \times n(n+1)/2 + n \\ = n(4n^2 + 12n + 11)/3$$

### 4-⑭(数列の和と一般項)

数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が、

$S_n = 3n^2 + n$

で表せるとき、一般項を求めたい。

(解)  $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 3n^2 + n - (3(n-1)^2 + (n-1))$

$= 6n - 2 \quad (n \geq 2)$

よって、 $a_n = 6n - 2 \quad (n \geq 1)$

#### ④調査結果の分析の方法：

<設問1>については、「2次関数」、「個数の処理」、「三角比・三角関数」、「数列」のそれぞれの調査問題に対して、学習時点での理解した内容を以下の表のように判断した。

##### ＜数学調査項目における理解度の視点＞

- |   |  |
|---|--|
| 1-① すべての2次関数のグラフを描くことができる。<br>1-② グラフ（満たす条件）から、2次関数の方程式をつくることができる。<br>1-③ 関数のグラフと、軸との交点の意味を、方程式の解と結び付けて理解している。<br>1-④ 解の公式を理解し、活用できる。<br>1-⑤ 2次方程式の解の判別式を理解し、それを判別できる。<br>1-⑩ 2次方程式の解の判別式を、グラフを利用して行うことができる。その意味を理解している。<br>1-⑦ 2次不等式を解くことができる。<br>1-⑧ 2次不等式の解をグラフを利用して求めることができる。また、その意味を理解している。<br>1-⑨ 2次関数の最大値・最小値を求めることができる。<br>1-⑩ 現実問題の解決に応用できる。事象に関数関係を見だし、変数を定め、その問題を解決できる。<br>1-⑪ 複雑な2次関数の問題も、グラフを利用して解決できる。<br>2-① 集合の定義を理解している。<br>2-② フ・モルガンの法則を理解している。<br>2-③ 順列の考え方を適用し、現実問題を解決できる。<br>2-④ 円順列の考え方を適用し、現実問題を解決できる。<br>2-⑤ 組合せの考え方を適用し、現実問題を解決できる。<br>2-⑥ 複雑な問題についても、順列、組合せの考え方を適宜活用し、解決することができる。<br>2-⑦ 確率の意味を理解し、その基本性質を理解している。<br>2-⑧ 簡単な確率の計算ができる。<br>2-⑨ 独立試行の意味を理解し、現実問題の解決にそれを適用することができます。<br>2-⑩ 反復試行の意味、その考え方の原理を理解し、現実問題に適用し解決することができる。<br>2-⑪ 期待値の意味を理解し、簡単な場面で期待値を求めることができる | 3-① 三角比を純角まで拡張し、計算できる。<br>3-② 三角比の相互関係を理解している。<br>3-③ 正弦定理を理解している。<br>3-④ 余弦定理を理解し、適用できる。<br>3-⑤ 一般角で三角方程式の解を求めることができる。<br>3-⑩ 三角関数の性質を理解し、単位円などを利用し、つくることができる。<br>3-⑦ 三角関数のグラフの特徴を理解し、任意の三角関数のグラフを描くことができる。<br>3-⑧ 三角不等式の解を求めることができる。<br>3-⑨ 加法定理を理解し、それを適用し簡単な計算ができる。<br>3-⑩ 倍角の公式を理解し、問題の解決に適用できる。<br>3-⑪ 三角関数の合成を理解し、問題の解決に適用できる。<br>4-① 等差数列の意味を理解し、一般項を式で表現できる。<br>4-② 等比数列の意味を理解し、一般項を式で表現できる。<br>4-③ 等差数列の和の公式を作ることができ、それを活用することができる。<br>4-④ 等比数列の和の公式を作ることができ、それを活用することができる。<br>4-⑤ 階差数列の意味を理解し、それを活用し、問題を解決できる。<br>4-⑥ いろいろな数列の和を簡単な式にまとめることができる。<br>4-⑦ この意味を理解し、それを問題の解決に適用することができる。<br>4-⑧ 数列の和と一般項の式の相互関係を理解し、問題の解決に適用できる。<br>4-⑨ 数列を漸化式による帰納的な定義で表現できることを理解し、漸化式を解いて数列の一般項を求めることができる。<br>4-⑩ 数学的帰納法の原理を理解し、命題の証明に適用することができる。<br>4-⑪ 二項展開と二項係数の関係を理解し、簡単な問題に適用できる。 |
|---|--|

次に、<設問2>の理解の変容の理由については、3年生の調査結果をまとめた。以上により得た結果を、「2次関数」、「個数の処理」、「三角比・三角関数」、「数列」それぞれに分けて次節で考察する。

### 3. 本調査のまとめと考察

#### 3-1. 2次関数について

従来から扱われている内容であるが、現在の扱い方の視点は関数のグラフが描けて、そのグラフを利用して方程式や不等式の解について考えることにある。内容的には、中学校で学習してきたことの発展であり、標準形の2次関数のグラフが描けて、解の公式も知っているだけに、予備調査においても他の内容に比べ、学習時点での理解あるいは難易度について肯定的な回答が多くあった。しかし、調査内容を細分化してみると、なかでも理解しにくく内容があることが分かった。

これからの高校数学の指導内容のあり方を求めて

割合1の表（2年生） (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	95	4.5	98	2.3
②	95	4.5	95	4.5
③	76	24	85	15.3
④	99	0.6	98	2.3
⑤	90	9.6	92	7.9
⑥	68	32	81	20
⑦	91	9	97	2.8
⑧	68	32	80	20
⑨	94	6.2	97	3.4
⑩	84	16	89	11.3
⑪	57	43	71	29

割合1の表（3年生） (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	93	6.1	99	0
②	92	8.3	99	0.8
③	86	14	97	3
④	99	1.5	100	0.8
⑤	91	9.1	99	0.8
⑥	77	23	94	6.1
⑦	90	9.8	99	0.8
⑧	72	28	95	5.3
⑨	94	6.1	99	0.8
⑩	78	22	95	4.5
⑪	67	33	97	3

割合2の表（2年生） (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
	94.4	3.4	1.1	1.1
②	92.7	2.8	1.7	2.8
③	68.9	15.8	7.9	7.3
④	97.7	0	0.6	1.7
⑤	85.3	6.8	2.8	5.1
⑥	63.3	17.5	15.8	4.5
⑦	89.8	7.3	1.7	1.1
⑧	91.5	5.1	1.1	2.3
⑨	79.7	9.0	7.3	4.0
⑩	49.7	21.5	21.5	7.3
⑪	57	43	71	29

割合2の表（3年生） (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
	93.2	6.1	0	0
②	90.9	8.3	0	0.8
③	84.1	12.9	1.5	1.5
④	98.5	1.5	0	0.8
⑤	90.9	8.3	0.8	0
⑥	75.8	18.2	5.3	0.8
⑦	89.4	9.8	0	0.8
⑧	71.2	23.5	4.5	0.8
⑨	93.9	5.3	0.8	0
⑩	78	17.4	4.5	0
⑪	67.4	29.5	3.0	0

2次関数 実容理由 (3年 文系)

問題番号	○ - ○				× - ○				× - ×				(%)	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	
①	66	22	3	1	7	1								
			*1				*2							
②	69	19	1		7		1	1						
				*2				*13						
③	68	16	1		8		1	3	1					
				*3				*1						
④	47	46	1	1	3									
				*12										
⑤	64	24		1	9						1			
⑥	59	12	3	1	14	1		3			5			
			*3			*3								
⑦	65	19	1		9		1	1						
				*3				*13						
⑧	53	9	1	1	24	3		1	3	1	1			
			*3			*3								
⑨	77	12	1	3	7									
					*29									
⑩	58	18			18			5	1		5			
⑪	55	8		1	24	1		7	1		1			

2次関数 実容理由 (3年 理系)

問題番号	○ - ○				× - ○				× - ×				(%)	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	
①	71	21		3	2									
②	74	19				5		2						
③	62	19		2	9	2	3				2			
④	72	24			3									
⑤	69	16	3	5	2		2	2						
					*19			*18						
⑥	64	10	2			14				3	2	2	2	
⑦	78	14	3		5									
⑧	59	10	5	3	16				3	2	2			
						*18								
⑨	79	10	3		2				3	2	2			
⑩	66	12	2	3	9	2			2	2	2	2		
⑪	57	3	5	3	21	2			3	2				

\* 1 2次関数のグラフ   \* 2 2次方程式・不等式  
 \* 3 2次関数の応用問題   \* 1 2 式の計算  
 \* 1 3 等式・不等式の証明   \* 2 9 微分の応用

\* 2 8 導関数   \* 3 5 槓葉数と方程式   \* 2 8 導関数  
 \* 1 9 軌跡と領域   \* 1 8 直線と円   \* 1 8 直線と円  
 \* 3 2次関数の応用   \* 3 2次関数の応用

1 - ①のグラフを描く問題や、1 - ②の2次方程式を解く問題はほぼ100%と高い理解度を示すが、方程式の実数解と関数のグラフとx軸との交点を結び付けることには、抵抗を示す生徒が少なくない。特に、理解の低い問題について、以下で考察する。

### 1 - ③ (放物線のグラフと方程式の決定)

2点(3, 0), (-1, 0)を通り、A(0, 1)を通る放物線の方程式を求めたい。

<解>方程式を、 $y = a(x-3)(x+1)$ とおく。点Aを通るから、  
その座標を代入して、 $a = -1/3$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	76/24	85/15	68.9	15.8	7.9	7.3
3年生	86/14	97/3	84.1	12.9	1.5	1.5

\* 数はすべて%を表わす。○/○は、前者が理解、後者が不理解者の%を表わす。以後、同様の表記である。

この問題においては、2年生の学習時点での理解が76%、3年生のそれが86%であり、2年生で今なお理解していない者が15%を上回っている。学習時点で、方程式の解を用いて関数の方程式を

表現することは困難なことである。3年生の変容理由をみると、2次関数の応用問題を解いたり、数Ⅱで3次関数のグラフを描くための増減表を作る上で、その必要性を感じ、理解できるようになったようである。

1-⑤(解の判別)

2次方程式： $x^2 - 2x + k = 0$  が2個の実数解を持つための定数  $k$  の値の範囲を求めたい。

<解>解の判別式をDとする。  $D = 4 - 4k$

$D > 0$  を解くと、 $k < 1$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	90/9.6	92/7.9	85.3	6.8	2.8	5.1
3年生	91/9.1	99/0.8	90.9	8.3	0.8	0

1-⑥(2次方程式の解と2次関数のグラフ)

1-⑥の問は次のように考えることもできる。

<解>  $y = x^2 - 2x + k$  とおく。

この放物線の頂点は、(1,  $k-1$ )

よって、 $k-1 < 0$  を解いて、 $k < 1$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	68/32	81/20.3	63.3	17.5	15.8	4.5
3年生	77/23	94/6.1	75.8	18.2	5.3	0.8

1-⑤、⑥は、2次方程式の解の存在についての問題である。⑤の問題に対しては、高い理解を示しているが、⑥の問題に対してはおよそ3割の生徒が学習時点で理解していないことが分かる。方程式の解の存在については、授業でグラフの頂点で調べていけばよいことを学んでいながら、実際には  $b^2 - 4ac$  の符号で調べればよいというまとめた結果に引きずられ、グラフはおきぎりにされていることがこの結果から分かる。この符号で決定されるということは非常に簡潔であり綺麗である。3年生は、この判別式が数Ⅱで扱う軌跡と領域あるいは円と直線で良く使われ、有用であり理解が深まったと言っている。このことは、つぎのことを示唆している。つまり、方程式の解の問題を関数のグラフを利用して考えてきたが、判別式という手段を得た以上はグラフを利用して問題を考える必要はない。したがって、グラフを積極的に利用させるには、方程式の解の分離の問題など

適用場面を多く準備する必要があると言うことである。

1-⑦ (2次不等式の解)

2次不等式： $x^2 - 4x + 2 > 0$  の解を求める。

<解> $x^2 - 4x + 2 = 0$  の解は、 $x = 2 + \sqrt{2}$ ,  $2 - \sqrt{2}$

よって、 $y = x^2 - 4x + 2$  のグラフで、 $y > 0$  となる

$x$  の値の範囲を求めるとき、 $x < 2 - \sqrt{2}$ ,  $x > 2 + \sqrt{2}$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	91/9	97/2.8	89.8	7.3	1.7	1.1
3年生	90/9.8	99/0.8	89.4	9.8	0	0.8

1-⑧ (2次関数のグラフと不等式)

不等式： $ax^2 + x + 1 > 0$  が、すべての実数  $x$  に対して成り立つための定数  $a$  の値の範囲を求める。

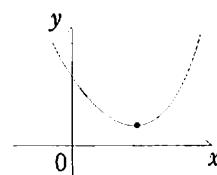
<解>  $y = ax^2 + x + 1$  とおく

まず、 $a > 0$  が必要である

頂点は、 $(-1/2a, 1 - 1/4a)$  であるから

$1 - 1/4a > 0$  よって、 $a > 1/4$

ゆえに、 $a > 1/4$



	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	68/32	80/19.8	61.6	18.6	13.6	6.2
3年生	72/288	95/5.3	71.2	23.5	4.5	0.8

1-⑦、⑧は、2次不等式の解の問題と絶対不等式の問題である。⑦には高い理解を示しているが、⑧の問題では2、3年生ともおよそ3割の生徒が理解を示していないことが分かる。条件をみたす解を持つように、関数のグラフを自分で設定できていない、グラフが使えないものである。

## 1-⑪(2次関数の応用)

関数： $y=x^2-2kx$  の、 $-1 \leq x \leq 1$  での最小値を求める。

<解>放物線： $y=f(x)=x^2-2kx$  の頂点を求める。

$(k, k^2)$  であるから、

$$(1) k \leq -1 \text{ のとき } f(-1) = 1+2k$$

$$(2) -1 < k < 1 \text{ のとき } f(k) = -k^2$$

$$(3) 1 \leq k \text{ のとき } f(1) = 1-2k$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	57/43	71/28.8	49.7	21.5	21.5	7.3
3年生	67/33	97/3	67.4	29.5	3.0	0

1-⑪は、グラフを利用した2次関数の応用問題である。2、3年生ともに約4割の者が学習時点で理解していない。関数をあらわす式に文字が含まれることに対する違和感もあるだろうが、グラフが固定されないと、グラフが利用できない。グラフの特徴：頂点、対称軸、座標軸との交点を理解して、応用の場面に適用できない。

以上のことを考えると、2次関数の内容を考えていく上で、ポイントとなる柱が2本あることが分かる。2次方程式や不等式の具体的な問題をグラフで考えていくことは、確かに方法として説明しやすいが、方程式・不等式問題とグラフの問題それについて、より深く学習する機会を失わせているのではないか。われわれは、日常生活の問題を考えていく中で、分数方程式・不等式、無理方程式・不等式を解かなければならぬ状況にも直面するはずである。そうした場面でこそ分数、無理関数のグラフが有用になってくるにもかかわらず、この内容は文系の生徒は学習しなくても良いことになっている。また、数Ⅰで2次方程式の解とグラフの関係を学習しながら、数Ⅱで3次方程式の解とグラフの関係は個数だけの問題にとどめ、学習しなくても良いことになっており、不自然である。

## (1) グラフの問題

現実の現象を、関数関係でとらえていくとき、2つの変量の間に  $y=f(x)$  を当てはめてみて、その現象を解析していくことは有用であるが、その関数は何も1次、2次関数だけではない。身近では、体積など3次関数になる場合や、反比例など分数関数になる場合や、長さなど無理関数になる場合、あるいは、指数・対数、三角関数などさまざまである。もっと広く、関数のグラフを学習させることが必要である。2次関数のグラフは標準形のグラフの頂点と対称軸の移動（平行移動、対称移動）で説明できる。他の関数のグラフでも、標準形さえ分かれば、主な特徴の移

動で説明がつくはずである。 $y = f(x)$  のグラフと、 $y = f(ax)$ 、 $y = f(x-p)+q$  のグラフの関係など、一般的な学習が必要である。

## (2) 数学Ⅰと数学Bの内容の関連の問題

数Bの2次方程式の虚数解、判別式、解と係数の関係は複素数平面で扱う図形の問題と切り離して、数Ⅰの2次方程式の問題に含めて扱ったほうが良い。また、その発展として、数Bで同じく扱うことになっている因数定理、3次方程式、4次方程式の解も扱っていくのが自然である。その内容を、数Ⅱの微分で扱う3次関数、4次関数のグラフで捉え直しながら、グラフと $x$ 軸との交点との関係や実数解の判別の問題、解の分離の問題を発展的に扱うことが可能であり、指導の流れとしては自然であると考える。

## 3-2. 個数の処理

割合1の表（2年生） (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	95	4.5	94	6.2
②	90	10	86	14
③	94	5.6	93	6.8
④	82	18	86	14
⑤	88	12	88	12
⑥	75	25	77	23
⑦	63	37	58	42
⑧	82	18	82	18
⑨	81	19	84	16
⑩	71	29	71	29
⑪	73	27	71	29

割合1の表（3年生） (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	94	5.3	92	7.6
②	77	23	78	22
③	91	9.1	99	0.8
④	78	22	91	9.1
⑤	86	14	92	8
⑥	73	27	86	14
⑦	61	40	62	38
⑧	85	15	92	8.3
⑨	81	19	92	8.3
⑩	76	25	86	14
⑪	80	20	83	17

これからの中学校数学の指導内容のあり方を求めて

割合2の表（2年生） (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
①	90	3.4	1.1	5.1
②	78	8.5	1.7	12
③	89	4	1.7	5.1
④	74	12	5.6	8.5
⑤	80	7.9	4.5	7.3
⑥	66	11	14	9
⑦	50	8.5	28	14
⑧	72	10	7.3	10
⑨	73	11	7.9	8.5
⑩	56	15	14	15
⑪	62	9	18	11

割合2の表（3年生） (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
①	90	1.5	3.8	3.8
②	68	9.8	13	9.1
③	90	9.1	0	0.8
④	73	17	4.5	4.5
⑤	83	9.1	6.1	3.8
⑥	70	15	13	2.3
⑦	54	8.3	32	7.6
⑧	82	9.8	5.3	3
⑨	78	14	5.3	3
⑩	73	13	12	2.3
⑪	76	7.6	13	3.8

確率の処理 実容理由（3年 文系）

(%)

問題番号	○ - ○				× - ○				× - ×			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
①	74	12	1	3				1	1	3		
②	53	7	3		8			3	1	8	5	
③	65	19	3		9	1	1					
		*5			*7							
④	62	11	3		14	1			3	1		
		*6										
⑤	61	16	4		5	1	3		1	1	3	
		*5										
⑥	58	7	3	1	12			3	3	7	4	
		*6										
⑦	31	4			8			9	12	8	7	0
⑧	58	16	1		8	1	1	3	1	4		
⑨	54	14	3		15	1		1	1	5		
		*7			*7							
⑩	58	11	1		14	1		1	3	3	5	
					*7							
⑪	59	8	1	3	7			5	1	3	7	

確率の処理 実容理由（3年 理系）

(%)

問題番号	○ - ○				× - ○				× - ×			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
①	82	7	2									
②	69	2	2	2					4	2		
③	80	16				2			2			
④	64	7				18			2	2	2	
⑤	67	16				11				2	2	
⑥	71	4				13	4		2	2	2	
⑦	51	9				7			2	7	2	9
⑧	78	13				7						
⑨	80	13				7						
⑩	71	9				9			2	7	2	
⑪	80	4				7			2	2	2	

● 5 場列 ● 6 組合せ ● 7 確率の基本性質

● 6 組合せ ● 7 確率の基本性質 ● 8 確率の現実問題

中学校でも学習してきており、一年次の数学Ⅰで学習することに抵抗感を持つ生徒は少なく、概ね高い理解を示す。予備調査でも、現実の問題としてとらえやすい内容と考える生徒が多かった。内容が他と比べ、身近であり現実的に考えることができ、生徒の直観やイメージに結びつき易いからであろう。それゆえに、記号や記号を用いた抽象的な法則・性質の表記には抵抗を示す。順列や組合せの考え方や確率の考え方を用いて、具体的な問題を解決することには高い理解を示す反面、以下の問題については、必ずしもそうではないことから分かる。

## 2-⑦(確率の基本性質)

次の空欄に適する数、式を下の選択肢より選び、記号で答えなさい

(1) 任意の事象Aについて、 $(\quad) \leq P(A) \leq (\quad)$ であり、

$$P(\emptyset) = (\quad), P(U) = (\quad) \quad (U \text{は全体集合})$$

(2) A, Bが排反事象のとき、 $P(A \cup B) = (\quad)$

①0 ②1/2 ③1 ④10 ⑤ $P(A) + P(B)$

⑥ $P(A) \times P(B)$  ⑦ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	63/37	58/42	50	8.5	28	14
3年生	60/40	62/39	54	8.3	32	7.6
理系	69/31	67/33	60	7	24	9
文系	56/44	43/57	35	8	36	21

2-⑦の問題は、確率の基本性質をまとめたものである。3年生の文系の生徒の40%弱の者が現時点でも理解していない。しかし、具体的な場面、たとえば2-⑧(余事象の確率を用いた確率の計算)、2-⑨(積事象の確率の計算)においては、文系の生徒で「現時点でよく分からない」と回答した者は、それぞれ15%、13%であり、2-⑦の示す内容については、多くの生徒が正しく理解し適用できていると思われる。

## 2-⑧(ド・モルガンの法則)

次の空欄に適する集合を、下の選択肢より選び、記号で答えなさい

$$\overline{A \cup B} = (\quad) \quad \overline{A \cap B} = (\quad)$$

① $A \cap B$  ② $A \cup B$  ③ $\overline{A} \cap \overline{B}$  ④ $\overline{A} \cup \overline{B}$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	90/10	86/14	78	8.5	1.7	12
3年生	77/23	78/22	68	9.8	13	9.1
理系	83/17	84/16	73	11	6	10
文系	75/25	71/29	63	8	17	12

2-②の問題は、ド・モルガンの法則についての問題である。文系の生徒の30%弱が現時点でも理解していない。しかし、これも2-⑦と同様に次のような具体的な場面では、おそらく理解できるのではないかと思われる。

＜問題＞ 2-⑨の試行において、少なくとも1つは白である確率を求めよ。

2-⑪（期待値）

2枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数の期待値を求めたい

<解>	X	0	1	2
	P(x)	1/4	1/2	1/4

上記の表より、求める期待値  $E(x)$  は、

$$E(x) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 \\ = 1$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	73/27	71/29	62	9	18	11
3年生	80/20	83/17	76	7.6	13	3.8
理系	87/13	91/9	84	7	6	3
文系	77/23	78/22	71	7	16	6

2-⑪の問題は、期待値を求める問題である。文系の生徒の20%強の生徒が現時点でも理解していない。「平均」という言葉ではなく、「期待値」と言葉を使用し、さらに  $E(x_i) = \sum x_i \times p_i$  と確率を使用して再定義が行われているところに、抵抗があると考えられる。

2-⑩（反復試行の確率）

1つのサイコロを5回投げるとき、1の目が3回出る確率を求めたい

＜解＞各回は独立な試行であり、どの回においても1の目が出る

確率は  $1/6$ 、1の目が出ない確率は  $5/6$  であるから、

求める確率は、

$$5C_3 \times (1/6)^3 \times (5/6)^2 = 125/3888$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	81/29	84/16	56	15	14	15
3年生	76/24	86/14	73	13	12	2.3
理系	80/20	91/9	80	11	9	0
文系	73/27	85/15	70	15	12	3

2-⑩の問題は、反復試行の確率の問題である。この問題を解く上で、場合の数を数えるところは、2-⑥（同じものを含む順列）と同じ内容を持ち、確率を考える面では、2-⑨（独立試行の確率）とほぼ同じ内容を持っている。2-⑥, ⑨, ⑩の現時点での○／×は、以下の結果である。

	理系	文系
2-⑥	92/8	81/19
2-⑨	100/0	87/13
2-⑩	91/9	85/15

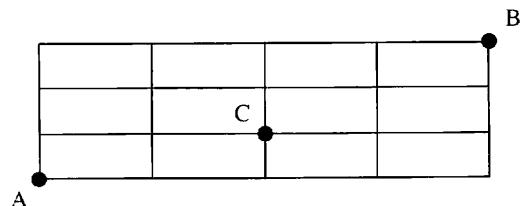
のことから、2-⑥, ⑨の理解に2-⑩の理解が関連していることが分かる。

2-⑦は、確率の理論を構成する上では大きな意味があるが（確率の公理になる）、「根元事象が同様に確からしい」と仮定して、確率を決めた場面では、生徒の持つ見方、考え方、イメージを集合や記号を使用してまとめたものに過ぎない。「まとめ」（定理）として意味があるが、この時点ではそれ以上にものになっていない。このことを、理解の割合の低さが物語っていると思われる。

数学Ⅰの確率については、前半部で仮説「根元事象は同様に確からしい」を使用し、後半部で仮説「試行は独立」を使用し、仮説が変化し、仮説「試行は独立」を使用している部分で、仮説「根元事象が同様に確からしい」が成立しない試行が扱われている。この仮説の移行を前面に出すには、2-⑦を確率の公理とする必要が生じ、2-⑦の意義は増すと思われるが、生徒が理解しづらくなる部分が増えるかもしれない。しかし、現実の場面から理論の構成の場面へという面を強調し、学習する意味では良い教材になりうるのではないだろうか。

(例1) 右図で、A地点からB地点へ最短経路で進む。各分岐点では、確率1/2で進む時、C地点を経由して行く確率を求めよ。

$$<\text{誤答例}> \quad \frac{3C_1 \cdot 4C_2}{7C_3} = \frac{18}{35}$$



(例 2) 黒 2 個、白 1 個の球が入った袋から 1 個の球を取り、もとに戻す。この試行を繰り返し、3 回白球を取り出した時点でやめる。5 回以内で止める確率を求めよ。

<解>

$$(1/3)^3 + {}_3C_2 \cdot 2/3 \cdot (1/3)^2 \cdot 1/3 + {}_4C_2 \cdot (2/3)^2 \cdot (1/3)^2 \cdot 1/3 = 17/31$$

例 1 は、いわゆる「同様に確からしくない」確率の問題であるが、どこが誤っているか、生徒には理解できない。それを確かめる前提が意識がない。例 2 は、直観的に求めたが、なぜ 3 つの場合の確率を加えて良いかがじつは分かっていない。確信が持てないでいる。②あるいは⑦の問題が確率を求めていく前提として必要な「考え方」、「見方」、「取り決め」への意識がないといえる。今まで抽象的な記号での扱いをせず、⑦の性質も「同様に確からしい」場合のモデルであり、生徒にとってここでは適用できない。言ってみれば、直観的にとらえてきた自分の理解の枠組みの変更が要求されることになる。こうした場面で始めて、公理を見直し、再構成していく経験をもたせ、抽象的な概念の有用性を意識させることが重要であると考える。「個数の処理」は、具体的で生徒の直観に働きかけ易い内容であり、他の内容に比べ、ともすると飽き易いところである。しかし、具体的であるがゆえに、素材として抽象的な記号、概念の取り扱いをじっくり経験させることができる。

また、数学 B で、「乗法定理」、「分散」、「離散型分布」などの内容が取り扱われているが、本校では選択させていない。「個数の処理」の内容の発展として数学 A で扱っていくことも可能である。今回の調査で、「現時点で分からない」割合は、①から⑪までの単純平均で他の内容に比べ一番高く、生徒に定着しにくい内容であると言えるが、確率の抽象的な記号、性質の意味の理解が生徒に得られないまま終わってしまう。「こうした場面で利用するのか」「この状況を解析するために、この考え方が必要なのか。」といった経験を数多く持たせ、今まで理解できなかった概念に対する理解を促したり、深めたりすることが必要となろう。

## 3-3. 三角比・三角関数

割合1の表 (2年生) (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	98	2.3	99	0.6
②	94	5.6	91	9
③	86	14	70	30
④	90	10	89	11
⑤	89	11	92	7.9
⑥	75	25	77	23
⑦	64	36	62	38
⑧	80	20	84	16
⑨	87	13	81	19
⑩	62	38	57	43
⑪	54	46	53	47

割合1の表 (3年生) (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	92	7.6	100	0
②	86	14	97	3
③	80	20	92	7.6
④	80	20	98	2.3
⑤	90	9.8	99	0.8
⑥	66	34	91	9.1
⑦	57	43	70	30
⑧	77	23	94	6.1
⑨	72	28	91	9.1
⑩	64	36	86	14
⑪	51	49	78	22

割合2の表 (2年生) (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
	○○	×○	××	○×
①	98	1.7	0.6	0
②	87	4	1.7	7.3
③	64	6.2	7.3	23
④	81	7.9	2.3	8.5
⑤	84	8.5	2.8	5.1
⑥	62	16	9	14
⑦	46	16	19	19
⑧	75	9.6	10	5.6
⑨	71	9.6	3.4	16
⑩	41	16	22	21
⑪	36	18	28	19

割合2の表 (3年生) (%)

問題番号	○○	×○	××	○×
	○○	×○	××	○×
①	92	7.6	0	0
②	85	12	1.5	1.5
③	79	14	6.1	1.5
④	80	17	2.3	0
⑤	89	9.8	0	0.8
⑥	62	29	5.3	3.8
⑦	52	18	25	5.3
⑧	77	17	6.1	0
⑨	69	22	6.1	3
⑩	59	27	11	5.3
⑪	49	29	20	1.5

これからの中高数学の指導内容のあり方を求めて

三角比・三角関数 実容理山(3年 文系)

(%)

問題番号	O-O				X-O				X-X				
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5
①	81	8	1	7		1							
				+33				+16					
②	78	7			11	1							
							+10						
③	70	5	1	3	9				1	1	4	3	1
④	68	7		4	18	1					1	1	
⑤	78	7	3		8	1	1						
				+36		+36	+20						
⑥	66	7	1		19	4	3	1	3	1	1	4	
				+36		+22	+36	+20					
⑦	41	1	1		22				5	4	11	11	
⑧	61	7	3		19	1			5			4	
				+10			+36						
⑨	60	7			14	1	1	4	1			3	
							+10						
⑩	49	5	3		30				5	1	4		
				+22									
⑪	39	5	4		26	1			11	1	1	9	
				+10			+36						

- 1.0 三角比の応用問題
- 2.2 三角関数の応用問題
- 2.0 三角関数のグラフ
- 3.3 平面ベクトルと図形
- 3.5 指数関数と方程式
- 3.6 指数関数と図形

三角比・三角関数 実容理山(3年 理系)

(%)

問題番号	O-O				X-O				X-X				
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5
①	81	3	3	3	10								
				+20									
②	78	3			9	3	3		3				
							+9						
③	78	3			14	3	3						
				+33		+18							
④	83		3	9	3	3			3				
							+10						
⑤	89				11								
⑥	63		23	6	3								
				+35									
⑦	58		3	13	3	3	7	3	7	3			
							+36						
⑧	80		3	13	3			3					
⑨	62				18	6	3			6			
							+303						
⑩	58		3	18	3	7	7	7	3				
							+303						
⑪	45		3	25	3			7	3	9	7		
							+22						

- 9 正弦・余弦定理
- 10 三角比の応用
- 18 円と直線
- 20 三角関数のグラフ
- 22 三角関数の応用
- 3.0・3.1 不定・定積分
- 3.3 平面ベクトルと図形
- 3.5 指数関数と方程式
- 3.6 指数関数と図形

2、3年生ともに一年次の2、3学期に三角比、三角関数と続けて学習してきた。2、3年生の調査結果を見てみると、学習時点における理解の状況については、ほとんど同じである。鋭角、鈍角に対する三角比については、図形と結びついており、具体的でイメージし易いためか、高い理解を示す。正弦定理については、不思議と約2割の生徒が学習時点で理解していないが、三角比全般については、特に問題点はないと言って良い。ところが、角を拡張して三角比を再定義していくところから、生徒はイメージを持てなくなっていくようである。暗記する公式が多く、すぐ忘れてしまう内容と回答する生徒が多く、実際、2年生の理解の○から×への変容の数値が他の内容に比べ高い。さらに、×から×、つまり、相変わらず理解できない生徒の割合も多いこともこの内容の特徴と言えるであろう。特に、理解の状況が良くない問題を取り上げ、加えて理解の変容について考察する。

3-⑪(三角関数の合成)

$$\text{関数: } f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

の最大値、最小値を求めたい

<解>右図より、 $f(\theta)$  は

$$f(\theta) = 2 \sin(\theta - 30^\circ)$$

と表わせる。ここで、 $-30^\circ \leq \theta - 30^\circ < 330^\circ$  より

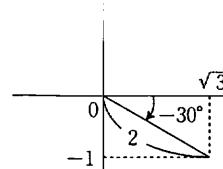
$$-1 \leq \sin(\theta - 30^\circ) \leq 1$$

よって、最大値は  $\theta - 30^\circ = 90^\circ$  すなわち、 $\theta = 120^\circ$

のときで、 $f(120^\circ) = 2$

また、最小値は、 $\theta - 30^\circ = 270^\circ$  すなわち、 $\theta = 300^\circ$

のときで、 $f(300^\circ) = -2$



	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	54/46	53/47	36	18	28	19
3年生	51/49	78/22	49	29	20	1.5
理系	53/47	79/21	50	29	17	3.4
文系	49/51	77/23	49	28	23	0

3-⑪の問題は、三角関数の合成の問題である。学習時点での理解の状況がほぼ50%と、良くない。3年生の2割が今だに理解していない。理解の「克服」は、合成を用いて問題を解決する場面の多さが主な理由である。また特に数値の高い理解の「つまずき」を示す生徒にとっては、合成のために便宜上利用する図が意味を持たず、加えて、その背景にある加法定理で自分で作ることができない状況にある。

### 3-⑩(倍角の公式)

$$\text{関数: } f(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos \theta - 1 \quad (0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

の最大値、最小値を求めたい

<解>  $\cos 2\theta = 2(\cos \theta)^2 - 1$  より

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2(\cos \theta)^2 + 2\cos \theta - 2 \\ &= 2(\cos \theta + 1/2)^2 - 5/2 \end{aligned}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  より、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

よって、最大値は、 $\cos \theta = 1$  すなわち  $\theta = 0^\circ$  のときで、

$$f(0^\circ) = 2$$

また、最小値は、 $\cos \theta = -1/2$  すなわち  $\theta = 120^\circ, 240^\circ$

$$\text{のときで, } f(120^\circ) = f(240^\circ) = -5/2$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	62/38	57/43	41	16	22	21
3年生	64/36	86/14	59	27	11	3.2
理系	69/31	85/15	64	21	10	5
文系	58/42	86/14	55	31	11	3

3-⑩の問題は、関数の値域が倍角の公式を利用していくことで求めることができるという問題であるが、2年生も約4割の生徒が学習時点で理解していない。問題を考える必然性がないことであろうか、グラフがまずイメージできないことが大きな原因と考えられる。2次関数では、グラフが前面にあり、すべてそれで考えることができたがここではそれができない。倍角の公式を利用する必然性が生徒にはないと言ってよさそうである。文系の生徒は、何度も繰り返し学習することで利用の仕方を覚え、その意味で理解したと回答しており、理系の生徒は微分でグラフが描けてその実態を知り、さらには積分での利用を知って理解できるようになったと回答している。

## 3-⑦(三角関数)

関数： $y = -3\sin(2\theta + 60^\circ)$  のグラフを描きたい

<解>周期は $180^\circ$ であり、グラフの振幅は3である。また、この曲線は、曲線  $y = 3\sin 2\theta$  を  $x$  軸に対称に移動させ、さらに  $x$  方向に $-30^\circ$ 平行移動させたものである。

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	64/36	62/38	46	16	19	19
3年生	57/43	70/30	52	18	25	5.3
理系	69/31	76/24	62	14	17	7
文系	47/53	65/35	43	22	31	4

3-⑦の問題は、三角関数のグラフについての問題であるが、学習時点での理解度の低さもあるが、3年生の理解の「つまずき」の割合が25%と非常に高いのが特徴である。2次関数のところでも述べたが、三角関数のグラフの特徴をとらえることは難しい。加えて、グラフの移動について的一般的な話もこの時点まで生徒にはないので、余計その理解は困難である。3年生の理解の変容を見ても、特に文系の生徒の3割強の者が理解に到っていない。これを学習した以後のことを考えると、三角関数のグラフを利用して考える場面がほとんどないからである。また、2次関数と違い、方程式や不等式を解くにあたっても、実際にはグラフより単位円という補助道具を利用することが多い。

## 3-⑥(三角関数の性質)

$\theta$ を一般角とするとき、次の空欄に適する式を

下の選択肢より記号で選びなさい

(1)  $\sin(90^\circ - \theta) = (\quad)$  (2)  $\cos(90^\circ + \theta) = (\quad)$

(3)  $\tan(180^\circ - \theta) = (\quad)$  (4)  $\cos(-\theta) = (\quad)$

(5)  $\sin(\theta \pm 180^\circ) = (\quad)$

① $\cos\theta$  ② $-\cos\theta$  ③ $\sin\theta$  ④ $-\sin\theta$  ⑤ $\tan\theta$

⑥ $-\tan\theta$  ⑦ $1/\tan\theta$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	75/25	77/23	62	16	9	14
3年生	66/34	91/9	62	29	5.3	3.8
理系	71/29	93/7	64	29	0	7
文系	62/38	89/11	61	28	10	1

3-⑥の問題は、三角関数の性質についての問題である。学習時点では、およそ3割の生徒が理解を示していないが、3年生についてはほとんどの生徒が理解できるようになっている。理解の「克服」、「深まり」の理由として興味があるのは、加法定理を学習してからという意見と複素数平面、複素数と方程式を学習してからという意見である。前者は、加法定理で展開すればすべての場合で確認できること、後者は極形式での利用の学習での「三角関数」の外延的な意味の確認と言って良い。

三角比・三角関数は本来、実用性に富む内容であるが、生徒の意識としては、覚えることの多い内容といった印象がかなり強い。三角比までは、図形の問題に関わって考え易いものの、鈍角に拡張し関数への準備が始まつてからは、定義は知っていても、実用性という面が生徒の意識から薄れていく。確かに、三角比は本来図形から生まれてきたもので、生徒にとっては、平面・空間図形の問題を考える上で新しい見方が加わり、図形領域の問題を数多く解決する中で理解を深めていくことが可能である。一方で、三角関数は定義を三角比に委ねながらも、数学Bの複素数での利用を始め、数学の中でさまざまな形で利用されており、数学を考えていく中で重宝な道具となる。理系の生徒は、微分・積分においてその一端を学習したり、発展的に考える場面が多く準備されるが、文系の生徒にとっては、三角関数の利用を学習する機会が少ない分、理解の「深まり」あるいは「克服」に転じることが困難である。三角比から三角関数の配列は自然ではあるが、内容を深めていく中で、特に、三角関数を適用する実際の場面を時間をかけて見させていくという工夫が必要であろう。

### 3-4. 数列

数列は下表の示すように、2、3年生で学習の時期が異なっている。2年生は2年次に、3年生は1年次で学習しており、学年間での理解の状況に大きな差異が見られた。

42期生（現3年生）

	数学 I	数学 A
1学期	数と式 2次関数	個数の処理 確率
2学期	数と式 三角比 三角関数	*数列
3学期	三角関数	図形と方程式

43期生（現2年生）

	数学 I	数学 A
1学期	数と式 2次関数	個数の処理 確率
2学期	数と式 三角比 三角関数	図形と方程式
3学期	三角関数	指數関数 対数関数

	数学 II	数学 B
1学期	指數関数 対数関数	複素数平面 ベクトル
2学期	微積分 分数関数 無理関数	ベクトル いろいろな曲線
3学期	数列と関数 の極限	極座標と 極方程式

	数学 II	数学 B
1学期	*数列 微分	ベクトル
2学期	微積分 分数関数 無理関数	複素数平面
3学期	数列と関数 の極限	いろいろな曲線

扱い方の大きな違いは、数列を学習する以前に指數・対数関数を学習しているか否かという点である。指數法則の確認と指數・対数方程式、不等式を学習し、その扱い方を充分にしてきているかないいかが内容的な意味での両者の違いである。また、調査時期を考えると、3年生にとってはほぼ一年が経過しており、その間、数列を利用した内容の学習がほとんど皆無である一方で、2年生にとっては、学習の直後に調査が行われている。後者の影響も少なからずあると思われるが、前者の影響がより大きいのではないかと考えられる。

割合 1 の表 (2 年生) (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	97	2.8	97	3.4
②	95	5.1	96	4
③	92	7.9	90	4
④	85	15	84	16
⑤	71	29	84	16
⑥	51	49	66	34
⑦	76	24	85	15
⑧	62	38	71	29
⑨	57	43	71	29
⑩	72	28	85	15
⑪	76	24	88	12

割合 1 の表 (3 年生) (%)

問題番号	学習時点		現時点	
	○	×	○	×
①	93	6.8	98	1.5
②	93	6.8	99	0.8
③	87	12	98	1.5
④	78	22	94	6.1
⑤	48	52	86	14
⑥	36	64	72	28
⑦	60	40	85	15
⑧	52	48	77	23
⑨	35	65	67	33
⑩	51	49	72	28
⑪	48	52	64	36

割合 2 の表 (2 年生) (%)

問題番号	○○ ○×			
	○○	×○	××	○×
①	94	2.3	0.6	2.8
②	93	3.4	1.7	2.3
③	85	5.1	2.8	6.8
④	74	10	4.5	11
⑤	63	21	7.3	8.5
⑥	37	29	20	14
⑦	66	19	5.6	9.6
⑧	50	20	18	11
⑨	46	25	18	11
⑩	68	17	11	4
⑪	69	19	5.6	6.2

割合 2 の表 (3 年生) (%)

問題番号	○○ ○×			
	○○	×○	××	○×
①	93	5.3	1.5	0
②	9	6.1	0.8	0
③	87	11	1.5	0
④	77	17	5.3	0.8
⑤	45	41	11	3
⑥	33	39	26	2.3
⑦	57	28	12	3
⑧	48	30	19	3.8
⑨	33	34	31	1.5
⑩	50	22	27	0.8
⑪	42	22	30	6.1

これからの中高数学の指導内容のあり方を求めて

数列 実容理由(3年 文系)

(%)

問題番号	○-○				×-○				×-×				
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5
①	80	9			6				1			1	
②	82	8			8				1				
③	76	11			11				3				
④	70	7			16				5				
⑤	38	4	1		38	1		1	11			3	
⑥	30	5			30	3		1	20	1	1	4	
					15	15							
⑦	51	3	1		28				11			3	
⑧	43	3			31		1		11	1	1	5	
⑨	28	1			31	0	3	1	15	3	8	8	
						16							
⑩	47	1			24			1	8		4	9	
⑪	39	4			20			1	14	1	5	11	

数列 実容理由(3年 理系)

(%)

問題番号	○-○				×-○				×-×				
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5
①	86	7			2								
②	90	3			3								
③	84	3			9	2							
④	74				14	3			2	2	2		
⑤	45				40	3			3	2	5		
⑥	33				2	34	5		2	7	5	5	3
⑦	53				28	2			2	5	2	2	
⑧	41				28	3			2	7	3	3	2
⑨	34				28	3			2	14	3	5	2
⑩	53				9	2			3	10	5	5	5
⑪	40	2			12	2	2	3	10	3	7	3	

• 15 等差・等比数列 • 16 漸化式

全般的に、理解の「つまずき」を見ると、2年生に比べ3年生の値が非常に大きい。特に、文系の生徒の3割弱の者にとって、どうしても分からないと回答する問題が多い現状である。個々の問題を見てみると、等差、等比数列、簡単な数列の問題については高い理解を示しているが、複雑なシグマの計算以降の問題からつまずく生徒が多くなる傾向がある。

4-⑥ (いろいろな数列の和)

数列  $\{a_n\}$  の一般項が、 $a_n = n \times 2^n$  であるとき、この数列の

初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めたい

$$<\text{解}> S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + \dots + n \cdot 2^{n+1}$$

2式の辺々を引いて、

$$\begin{aligned} -S_n &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + \dots + 1 \cdot 2^n - n \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

よって、 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	51/49	66/34	37	29	20	14
3年生	36/64	72/38	33	39	26	2.3
理系	47/53	88/12	45	43	10	2
文系	27/73	59/41	24	35	38	3

4-⑥の問題は、いろいろな数列の和を求める問題である。3年生では、学習時点で理解している者が約1/3で、特に文系では30%に満たない。しかも、文系では現在でも4割弱の生徒は理解していないと回答している。学習後に、利用する場面が少ないということが起因していると考えられる。理系の生徒で、理解の「克服」と回答する理由の一つとして、微分・積分での利用がある。

4-⑨(数列の漸化式)

数列  $\{a_n\}$  が、 $a_1=5$ 、 $a_{n+1}=2a_n+3$  で定義されるとき、一般項を求めたい

<解>漸化式は、 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$  と変形できる

$$b_{n+1}=a_n+3 \text{ とおくと、}$$

$$b_1=8, b_{n+1}=2b_n \text{ より、これを解いて}$$

$$b_n=8 \times 2^{n-1}=2^{n+2}$$

$$\text{よって、 } a_n=-3+2^{n+2}$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	57/43	71/29	46	25	18	11
3年生	35/65	67/33	33	34	31	1.5
理系	38/62	72/28	36	36	26	2
文系	32/68	64/36	31	32	35	2

4-⑨の問題は、数列の漸化式の問題である。階差数列を考える方法ならまだ納得できるものの、教科書にあるような特性方程式を利用する方法は必然性がこの時点では望めない。3年生の学習時点での理解は35%とかなり低く、現時点でも33%の生徒が理解にいたっていない。理系の、理解の「つまずき」と回答する生徒の割合は全体の28%であるが、その理由として「どうしてもわからない」と言う生徒が14%と高い。それに対して、2年生の学習時点での理解は57%と比較的高いことも分かる。

4-⑤(階差数列)

数列；4, 7, 12, 19, 28, ······

の一般項を求みたい

<解>階差数列は、3, 5, 7, 9, ·····で、等差数列である

よって、その一般項は、 $2n+1$

ゆえに、求める数列の一般項 $a_n$ は、

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) = n^2 + 3 \quad (n \geq 2)$$

$$n=1 \text{ のとき, } a_1=4 \text{ より } a_n=n^2+3 \quad (n \geq 1)$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	71/29	84/16	63	21	7.3	8.5
3年生	48/52	86/14	45	41	11	3
理系	50/50	88/12	47	41	9	3
文系	46/54	84/16	43	41	14	2

4-⑤の問題は、階差数列の問題である。これも、4-⑨と同様に学年間の学習時点での理解において差異が大きい。ただ、3年生も現在ではほとんどの生徒が理解している点で異なっている。学習時点で、シグマ記号の形式的な扱い方に戸惑う生徒が多いということであろう。

4-⑧(数列の和と一般項)

数列  $|a_n|$  の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が、 $S_n = 3n^2 + n$

で表せるとき、一般項を求みたい

<解> $a_1 = S_1 = 4$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + n - [3(n-1)^2 + (n-1)] \\ &= 6n - 2 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n = 6n - 2 \quad (n \geq 1)$$

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	62/38	71/29	50	20	18	11
3年生	52/48	77/23	48	30	19	3.8
理系	50/50	78/22	45	33	17	5
文系	53/47	77/23	50	27	20	3

4-⑧の問題は、数列の和と一般項の関係の問題であるが、2、3年生とも同じような状況である。形式的な記号での取り扱いに慣れなためであろう。

## 4-⑩（数学的帰納法）

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$$

が成り立つことを示したい

＜解＞ (1)  $n=1$  のとき、等式が成り立つ

(2)  $n=k$  のとき成り立つことを仮定する。このとき

$n=k+1$  のときも成り立つ

という二つのことを証明すればよい

	学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	72/28	85/15	68	17	11	4
3年生	51/49	72/28	50	22	27	0.8
理系	57/43	71/29	55	16	28	1
文系	46/54	73/27	46	27	27	0

4-⑩の問題は、数学的帰納法による証明の問題である。2、3年生での学習時点での理解の状況に大きな差異がある。2年生は、7割強の生徒が理解を示しているのに対して、3年生は、ほぼ半数の者しか理解しておらず、現在でも約3割の生徒が理解を示していない。 $n=k$  のときの仮定から  $n=k+1$  の結論を導くところが理解できない。システムの証明であり、証明すべきことを使用しているわけではないことが理解できないと言える。扱う時期の面で、示唆的である。

## 4-⑪（二項展開と二項係数）

$(x+2y)^5$  の展開式で、 $x^3 y^2$  の係数を求めたい

＜解＞この展開式の一般項は、

$${}_5C_k \times x^k \times (2y)^{5-k} = {}_5C_k \times 2^{5-k} \times x^k y^{5-k}$$

と表される

求める項の係数は、 $k=3$  のときであるから

$${}_5C_3 \times 2^2 = 40$$

## これからの高校数学の指導内容のあり方を求めて

学習時点	現時点	○○	×○	××	○×
2年生	76/24	88/12	69	19	5.6
3年生	48/52	64/36	42	22	30
理系	50/50	64/36	41	22	28
文系	47/53	65/35	43	22	31
					4

4-⑪の問題は、二項展開と二項係数の問題である。これも、4-⑩と同じ傾向にある。3年生の3割の生徒が未だに理解していない内容である。

扱う時期の差が大きく関わっている内容であると言って良い。学習時点での理解の差を考えると、内容的には2年次で扱うのが妥当であると思われる。また、3年生の理解の変容を見ると、次のことがわかる。3年生の理系の生徒ですら、全体的に学習時点では理解できない内容であり、数学Ⅲの微積分で、実際に利用している内容が多いにも関わらず、つまずく生徒が少なくない。ましてや、文系の生徒にとって、利用場面はこの部分に限定されていると言って良く、理解の状況が「克服」へと変容することは望めない。従って、2年次で扱ったとして、その後の手当てを十分に検討する必要がある。

### 4. 今後の課題

現在の3年生(43期生)に対して、同じ問題を使用して、その後理解がどう変わってきているかを調査する予定である。特に学年間で理解の状況に大きな差異が認められた「数列」についての調査の結果は、内容の配列に大きな意味をもつものと考える。

また、「ベクトル」、「複素数平面」、「微分・積分」といった数学Ⅱおよび数学Bの内容についても、同様の調査を行っていく予定である。(下図の点線部)

