東京学芸大学附属高等学校紀要 42　pp. 1～8, 2004

積空間の正規性*

Normality of Product Spaces

祖 慶 良 謙

概要. 可算パラコンパクト性と正規性は互いに独立した概念であるが, K. Morita [14], M.E. Rudin and M. Starbird [18] は可算パラコンパクト正規空間と距離空間の積空間が正規であることと可算パラコンパクトであることの同値性を示した. 一方で, 距離空間との積空間が正規とはならない可算パラコンパクト正規空間として Michael 直線がよく知られている [11]. 本稿では, 距離空間 M とその部分空間 A に Michael 直線の構成法を用いて, 新たな位相を導入した位相空間 M_A に対し, 可算パラコンパクト正規空間と M_A の積空間が正規であることと可算パラコンパクトであることの同値性を示す. これは, Morita-Rudin-Starbird の定理の拡張になっている.

キーワード： 正規, 可算パラコンパクト, 基本被覆, M_A

0. 序章

本稿において, 位相空間はすべて Hausdorff 空間を仮定する.

可算パラコンパクト性と正規性は互いに独立した概念であるが, K. Morita [14], M.E. Rudin and M. Starbird [18] は距離空間との積について, 次の定理を示した.

定理 0.1 (Morita [14]; Rudin-Starbird [18]) **(定理 3.1).**
X を可算パラコンパクト正規空間, M を距離空間とする. $X \times M$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M$ が可算パラコンパクトとなることである.

一方で, 可算パラコンパクト正規空間で距離空間との積空間が正規ではないものとして Michael 直線がよく知られている ([11]).

E. Michael は実数の空間 $\mathbb{R}$ において, 有理数 $\mathbb{Q}$ の各点の近傍は実数の空間 $\mathbb{R}$ のそのままの近傍とし, 無理数 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 上では各点を孤立点として, $\mathbb{R}$ 上に新しい位相を導入した Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ を構成した. そこで, Michael 直線の構成法を用いて, 位相空間 Y と Y の部分集合 A に対して, Y の各点 y の近傍 $N(y)$ を以下のように定め, 新しい位相空間 Y_A を構成する (定義 4.3).

(1) $y \in A$ のとき, $N(y)$ は位相空間 Y における近傍,
(2) $y \in Y - A$ のとき, $N(y) = \{y\}$.

本稿では, 距離空間 M と M の部分集合 A に対して, M_A を構成し, 定理 0.1 の拡張となる次の定理の証明をおこなう.

定理 0.2 (主定理). X を可算パラコンパクト正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M_A$ が可算パラコンパクトとなることである.

K. Morita [14] は基本被覆を導入し, それによって正規空間と距離空間との積の可算パラコンパクト正規性を特徴付けた (定理 2.3). 主定理の十分性の証明に基本被覆を用いる.

主定理において, 距離空間 M のかわりに一般の位相空間 Y とその部分集合 A としたときは, 成立しない (例 4.6).

さらに, 主定理から得られる次の系を示した.

定理 0.3 (定理 4.7). C をコンパクト空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$, $X \times C$ がともに正規ならば, $X \times M_A \times C$ は正規となる.

系 0.4 (系 4.9). X をパラコンパクト空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための

---

* 本稿は修士論文を再構成したものである [19]. また, 修士論文は新たな結果を加えて筑波大学数学系保科隆雄教授との共著論文として CMUC に掲載されている [9].

必要十分条件は, $X \times M_A$ がパラコンパクトとなることである.

系 0.5 (系 4.11). X を可算パラコンパクト族正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M_A$ が族正規となることである.

$\mathbb{N}$ で正の整数全体の集合を表す; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

順序数は, 順序位相をもつとする. ω は最初の無限順序数, ω_1 は最初の非可算順序数を表す.

1. 定義および事実

第 1 章と第 2 章では, 第 4 章の主定理の証明で用いる知識について述べる. 証明がないものについては, R. Engelking [5], Y. Kodama and K. Nagami [10], K. Morita [15], J. Nagata [16], T.C. Przymunsiński [17] を参照されたい. また, 本稿で定義されていない用語についても同様に参照されたい.

定義 1.1. A が位相空間 X の ゼロ集合 とは, $A = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ となる連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在するときであり, A が X の コゼロ集合 とは, A が X のゼロ集合の補集合で表されるときである.

定義 1.2. $\mathcal{U}$ を位相空間 X の部分集合族とする. $\mathcal{U}$ が 局所有限 (resp. 疎) とは, 任意の $x \in X$ に対して, $N(x) \cap U \neq \emptyset$ となる $U \in \mathcal{U}$ が高々有限個 (resp. 高々 1 個) しかないような x の近傍 $N(x)$ が存在することである.

また, $\mathcal{U}$ が 点有限 とは, 任意の $x \in X$ に対して, $x \in U$ となる $U \in \mathcal{U}$ が高々有限個しかないときである.

明らかに局所有限ならば, 疎であり, また, 点有限でもある.

命題 1.3. 位相空間 X の局所有限な部分集合族 $\mathcal{U}$ に対して,

(1) $\overline{\mathcal{U}} = \left\{\overline{U} \middle| U \in \mathcal{U}\right\}$ は局所有限である.

(2) $\bigcup\left\{\overline{U} \middle| U \in \mathcal{U}\right\} = \overline{\bigcup\left\{U \middle| U \in \mathcal{U}\right\}}$ となる.

定義 1.4. λ を無限濃度とする.

位相空間 X が (λ-) パラコンパクト であるとは, (濃度が高々 λ である) X の任意の開被覆が, 局所有限な開被覆により細分されることである. 特に, $\lambda = \omega$ のときは, 可算パラコンパクト という. 明らかにパラコンパクトは, 任意の λ に対して, λ-パラコンパクトである.

位相空間 X が λ-族正規 であるとは, X の任意の疎な閉集合族 $\{F_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ に対して, $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha < \lambda$ となる X の互いに素な開集合族 $\{U_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が存在することである. 任意の λ に対して, λ-族正規のとき, 族正規 という.

定理 1.5. (1) (Stone [20]) 距離空間はパラコンパクトである.

(2) (Bing [3]) パラコンパクト空間は族正規である.

定理 1.6. 位相空間 X が正規であるための必要十分条件は, X の点有限な開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ となる X の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在することである.

任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, 定理 1.6 のような $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の 収縮 という.

定理 1.7. 正規空間 X に対して, 次は同値である.

(1) X が可算パラコンパクト,

(2) X の任意の可算開被覆 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して, それを収縮する X の局所有限な開被覆 $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する,

(3) X の任意の可算開被覆 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して, それを収縮する X の閉被覆 $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する.

定理 1.8. X を λ-パラコンパクト空間, C をコンパクト空間とするとき, $X \times C$ は λ-パラコンパクト空間である.

定理 1.9 (Morita [12]). C をコンパクト空間とする. X が $w(C)$-パラコンパクト正規ならば, $X \times C$ は正規である. ここで, $w(C)$ は C の weight を表す.

定理 1.10 ([12]; Tamano [21]). 位相空間 X に対して, 次は同値である.

(1) X がパラコンパクト,

(2) X の Stone-Čech のコンパクト化 $\beta(X)$ に対して, $X \times \beta(X)$ が正規,

(3) X のある (または, すべての) コンパクト化 $\alpha(X)$ に対して, $X \times \alpha(X)$ が正規.

定理 1.11 (Dowker [4]). 位相空間 X に対して、次は同値である.

(1) X は可算パラコンパクト正規,

(2) $X\times\mathrm{I}$ は正規, ここで, $\mathrm{I}=[0,1]$,

(3) 任意のコンパクト距離空間 Y に対して, $X\times Y$ は正規.

系 1.12. Y を離散ではない距離空間または, 無限コンパクト空間とする. $X\times Y$ が正規ならば, X は可算パラコンパクトである.

定理 1.13 ([12]). 位相空間 X に対して, 次は同値である.

(1) X は λ-パラコンパクト正規,

(2) $X\times\mathrm{I}^\lambda$ は正規, ここで, $\mathrm{I}=[0,1]$,

(3) $X\times D^\lambda$ は正規, ここで, $D=\{0,1\}$ の離散空間.

定理 1.14 (Alas [1]). $A(\lambda)$ を濃度が λ である離散空間の 1 点コンパクト化とする. $X\times A(\lambda)$ が正規となるための必要十分条件は, X が可算パラコンパクト, λ-族正規となることである.

2. Morita の基本被覆

この章では, Morita の基本被覆について述べる.

M を距離空間とするとき, Stone の定理 [20] により, 次のような開被覆列 $\{\mathcal{B}_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ がとれる.

(1) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$\mathcal{B}_n=\{B_{n\alpha}\,|\,\alpha\in\Omega_n\}$ が局所有限,

(2) $\{\mathrm{St}(y,\mathcal{B}_n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ が M の各点 y の近傍基となる. ここで, $\mathrm{St}(y,\mathcal{B}_n)=\bigcup\{B\in\mathcal{B}_n\,|\,y\in B\}$.

これを用いて基本被覆を定義する.

定義 2.1 (Morita [13]). 距離空間 M と上の (1), (2) を満たす開被覆列 $\{\mathcal{B}_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_n=\{B_{n\alpha}\,|\,\alpha\in\Omega_n\}$ をとる. $\alpha_i\in\Omega_i$, $i=1,\cdots,n$ に対して, $W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ を次で定義する.

$$W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\bigcap\{B_{i\alpha_i}\,|\,i=1,\ldots,n\}$$

X を位相空間とする.

$X\times M$ の開被覆 $\mathcal{U}$ が次のように表せるとき, <u>基本被覆</u>であるという.

$$\mathcal{U}=\{U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\times W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,|\\ \alpha_i\in\Omega_i,\ i=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N}\}$$

ここで, $U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は,

$$U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\subset U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}),\\ \alpha_i\in\Omega_i,\ i=1,\ldots,n,n+1$$

を満たす X の開集合.

基本開被覆 $\mathcal{U}$ に対して,

$$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\subset U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$
$$X\times M=\bigcup\{F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\times W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,|\\ \alpha_i\in\Omega_i,\ i=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N}\}$$

となる X の閉集合族

$$\{F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,|\,\alpha_i\in\Omega_i,\ i=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N}\}$$

が存在するとき $\mathcal{U}$ は <u>特殊細分</u> をもつという.

命題 2.2. X を位相空間, M を距離空間, $\mathcal{G}=\{G_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ を $X\times M$ の開被覆とし, $W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ を定義 2.1 で定義されたものとする. このとき, $\alpha_i\in\Omega_i$, $i=1,\ldots,n$, $\lambda\in\Lambda$ に対して,

$$U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\lambda)=\bigcup\{P\,|\,P\text{ は }X\text{ の開集合},\\ P\times W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\subset G_\lambda\},$$
$$U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\bigcup\{U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda\}$$

とおけば,

$$\mathcal{U}=\{U(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\times W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,|\\ \alpha_i\in\Omega_i,\ i=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N}\}$$

は $X\times M$ の基本被覆となる.

定理 2.3 ([13]). X を可算パラコンパクト正規空間, M を距離空間とする. $X\times M$ が可算パラコンパクト正規となるための必要十分条件は, 任意の $X\times M$ の基本被覆が特殊細分をもつことである.

主定理の十分性の証明は上の定理を用いる. 実際, K. Morita はこの定理を用いて Morita-Rudin-Starbird の定理 (定理 3.1) の十分性を証明した ([7], [14]).

3. Morita-Rudin-Starbird の定理

この章では, Morita-Rudin-Starbird の定理および, それから得られるいくつかの事実を述べる.

定理 3.1 (Morita [14]; Rudin-Starbird [18]). X を可算パラコンパクト正規空間, M を距離空間とする. $X \times M$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M$ が可算パラコンパクトとなることである.

十分性は, K. Morita [14] によって, 必要性は, M.E. Rudin and M. Starbird [18] によって示された.

証明は, M.E. Rudin and M. Starbird [18] または, T.C. Przymusiński [17] を参照されたい.

この定理を Morita-Rudin-Starbird の定理という.

以下は Morita-Rudin-Starbird の定理より得られる.

定理 3.2 ([18]). C をコンパクト空間, M を距離空間とする. $X \times M$, $X \times C$ がともに正規ならば, $X \times M \times C$ は正規となる.

定理 3.3 ([18]). X を λ-パラコンパクト正規空間, M を距離空間とするとき, 次は同値である.

(1) $X \times M$ は可算パラコンパクト,
(2) $X \times M$ は正規,
(3) $X \times M$ は λ-パラコンパクト正規.

系 3.4 ([18]). X をパラコンパクト空間, M を距離空間とする. 次は同値である.

(1) $X \times M$ はパラコンパクト,
(2) $X \times M$ は族正規,
(3) $X \times M$ は正規,
(4) $X \times M$ は可算パラコンパクト.

定理 3.5 ([18]). X を可算パラコンパクト λ-族正規空間, M を距離空間とする. $X \times M$ が正規であるための必要十分条件は, $X \times M$ が λ-族正規となることである.

系 3.6 ([18]). X を族正規空間, M を距離空間とする. $X \times M$ が正規であるための必要十分条件は, $X \times M$ が族正規となることである.

4. 主定理

この章では, 主定理の証明をおこなう. 最初に次の補題から証明する.

補題 4.1 (Hoshina [6]). X を可算パラコンパクト空間, E, F を次を満たす X の互いに素な集合とする.

(1) F は X の閉集合,
(2) $E \subset \bigcap\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 各 U_n は X の開集合,
(3) $\bigcap\left\{\overline{U_n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cap F = \emptyset$.

このとき, $F \subset G \subset \overline{G} \subset X - E$ となる X の開集合 G が存在がする.

この補題より, 次のことが成り立つ.

補題 4.2. X を可算パラコンパクト空間, K は X の閉集合, L_1, L_2 を $K \subset L_1 \cup L_2$ を満たす X のコゼロ集合とする. このとき, $K \subset G_1 \cup G_2$, $\overline{G_i} \subset L_i$, $i = 1, 2$ となる X の開集合 G_1, G_2 が存在する.

証明. X を可算パラコンパクト, K を仮定を満たす X の閉集合とする.

$E_1 = X - L_1$, $F_1 = K - L_2$ とおけば, $E_1 \cap F_1 = \emptyset$ であり, 補題 4.1 の (1), (2), (3) を満たす. よって,

$$F_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X - E_1 = L_1$$

となる X の開集合 G_1 が存在する. さらに, $E_2 = X - L_2$, $F_2 = K - G_2$ とおけば, $E_2 \cap F_2 = \emptyset$ となり, 補題 4.1 の (1), (2), (3) を満たす. よって,

$$F_2 \subset G_2 \subset \overline{G_2} \subset X - E_2 = L_2$$

となる X の開集合 G_2 が存在する. このとき,

$$K \subset G_1 \cup G_2$$

である. □

補題 4.2 は主定理の必要性の証明に用いる.

E. Michael [11] は, 以下のように Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ を構成した.

$\mathbb{R}$ の各元 x の近傍 $N(x)$ を次のように定める.

(1) $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $N(x)$ は実数の空間 $\mathbb{R}$ における通常の近傍,
(2) $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき, $N(x) = \{x\}$.

この近傍により $\mathbb{R}$ に新しい位相を導入する.

上の構成法を用いて, 一般の位相空間について, 次の定義をおこなう.

定義 4.3. Y を位相空間, A を Y の部分集合とする. Y の各元 y の近傍 $N(y)$ を次のように定める.

(1) $y \in A$ のとき, $N(y)$ は位相空間 Y における近傍,
(2) $y \in Y - A$ のとき, $N(y) = \{y\}$.

この近傍により Y に新しい位相を導入し, その位相空

間を Y_A と書く.

上の定義において, 距離空間 M と M の部分集合 A について, M_A を構成する.

定理 4.4(主定理). X を可算パラコンパクト正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M_A$ が可算パラコンパクトとなることである.

証明. 必要性. $X \times M_A$ を正規空間とする. 定理 1.7 により, $X \times M_A$ の任意の可算開被覆に対して, それを収縮するような $X \times M_A$ の閉被覆をつくればいい.

$\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $X \times M_A$ の任意の可算開被覆とする. A は M_A の閉集合だから, $X \times A$ は正規. よって, Morita-Rudin-Starbird の定理から, $X \times A$ は可算パラコンパクトでもある. 定理 1.7 により,

$$X \times A = \bigcup \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$F_n \subset U_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

となる $X \times M_A$ の閉集合族 $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ がとれる. $X \times M_A$ の正規性から,

$$F_n \subset V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

となる $X \times M_A$ の開集合 V_n がとれる.

$$V = \bigcup \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

とおく.

任意の $y \notin A$ に対して, $\{(X \times \{y\}) \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $X \times \{y\}$ の可算開被覆である. $X \times \{y\}$ は可算パラコンパクト正規であるから, 定理 1.7 より,

$$X \times \{y\} = \bigcup \{E_{ny} \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$E_{ny} \subset (X \times \{y\}) \cap U_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

となる $X \times M_A$ の閉集合族 $\{E_{ny} \mid n \in \mathbb{N}\}$ がとれる.

$$E_n = \bigcup \{E_{ny} \mid y \notin A\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

とおく.

Claim 1. $E_n - V$ は $X \times M_A$ の閉集合.

Claim 1 の証明. $\{E_{ny} - V \mid y \notin A\}$ が疎な閉集合族であることを示す.

閉集合族であることは明らか.

任意に $\langle x, y \rangle \in X \times M_A$ をとる.

(i) $y \in A$ のとき, V は $\langle x, y \rangle$ の近傍となり, 任意の $z \notin A$ に対して, $V \cap (E_{nz} - V) = \emptyset$.

(ii) $y \notin A$ のとき, $X \times \{y\}$ は $\langle x, y \rangle$ の近傍となり, $z \neq y$ なる任意の $z \notin A$ に対して, $(X \times \{y\}) \cap (E_{nz} - V) = \emptyset$.

よって, 命題 1.3 より,

$$E_n - V = \bigcup \{E_{ny} - V \mid y \notin A\}$$

は $X \times M_A$ の閉集合. □(Claim 1)

$$K_n = \overline{V_n} \cup (E_n - V), \quad n \in \mathbb{N}$$

とおく.

Claim 2. $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を収縮する $X \times M_A$ の閉被覆.

Claim 2 の証明. 閉集合族であることは明らか.

(1) $X \times M_A$ の被覆であること:

任意に $\langle x, y \rangle \in X \times M$ をとる.

(i) $\langle x, y \rangle \in V$ のとき, $\langle x, y \rangle \in V_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる. このとき, $\langle x, y \rangle \in K_n$.

(ii) $\langle x, y \rangle \notin V$ のとき, $\langle x, y \rangle \in E_{ny}$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる. このとき, $\langle x, y \rangle \in K_n$.

(2) $K_n \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$ であること:

$$K_n = \overline{V_n} \cup (E_n - V) \subset \overline{V_n} \cup E_n \subset U_n.$$ □(Claim 2)

十分性. 第 2 章の Morita の基本被覆を用いる.

$X \times M_A$ を可算パラコンパクトとし, $\{U_1, U_2\}$ を $X \times M_A$ の開被覆とする.

$$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j) = \bigcup \{P \mid P \text{ は } X \text{ の閉集合}, P \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \subset U_j\}, \quad j = 1, 2,$$
$$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 1) \cup U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 2)$$

とおく. 命題 2.2 から,

$$\{U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \times (W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \cap A) \mid \alpha_i \in \Omega_i, i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\}$$

は $X \times A$ の基本被覆となる. A は M_A の閉集合だから, Mrita-Rudin-Starbird の定理から, $X \times A$ は可算パラコンパクト正規. 定理 2.3 から,

$$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \subset U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$
$$\bigcup \{F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \Omega_i, i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\} \supset X \times A$$

となる X の閉集合族

$$\{F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \Omega_i, i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\}$$

がとれる.

X の正規性より,

$$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \subset H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 1) \cup H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 2),$$
$$H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j) \subset U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j), \quad j = 1, 2$$

となる X のコゼロ集合

$$H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 1),\quad H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; 2)$$

がとれる.

$$H_j = \bigcup \{H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j) \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \Omega_i,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\},\quad j = 1, 2$$

とおけば, H_1, H_2 は $X \times M_A$ のコゼロ集合.

Claim 3. (1) $H_j \subset U_j$, $j = 1, 2$,

(2) $X \times A \subset H_1 \cup H_2$.

Claim 3 の証明. (1): 任意に $\langle x, y\rangle \in H_j$ をとる.

$$\langle x, y\rangle \in H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j) \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

となる $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \Omega_1, \cdots, \alpha_n \in \Omega_n$ がとれる. よって, $\langle x, y\rangle \in U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j) \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

さらに, X の開集合 P で,

$$x \in P,\quad P \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \subset U_j$$

となるものがとれる. ゆえに, (1) が成り立つ.

(2): 任意に $\langle x, y\rangle \in X \times A$ をとる.

$$\langle x, y\rangle \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \times W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

となる $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \Omega_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega_n$ がとれる.

$H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j)$ のとりかたより,

$$x \in H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; j)$$

となる $j \in \{1, 2\}$ がとれる. ゆえに, (2) が成り立つ.

□ (Claim 3)

補題 4.2 より,

$$X \times A \subset V_1 \cup V_2,\quad \overline{V_j} \subset H_j,\quad j = 1, 2$$

となる $X \times M_A$ の開集合 V_1, V_2 がとれる.

$$V = V_1 \cup V_2$$

とおけば, 必要性と同様な証明で,

$$X \times M_A = K_1 \cup K_2,\quad K_j \subset U_j,\quad j = 1, 2$$

となる $X \times M_A$ の閉集合 K_1, K_2 がとれる. □

考察 4.5. 主定理の証明について.

必要性においては, $X \times A$ の可算パラコンパクト正規性さえあれば, 特に M が距離空間にこだわらなくともよい. ところが, 十分性においては, $X \times M$ の可算パラコンパクト正規性を用いてはいるが, 基本被覆も用いているので, M が距離空間であることが必要である. そこで, 十分性において, M が距離空間という仮定を外し, $X \times A$ の可算パラコンパクト正規性の仮定のみで示すことができるか, が問題となってくる. つまり,

問題. Y を一般の位相空間, A を Y の部分集合とし Y_A を構成する.

$X \times A$ を可算パラコンパクト正規空間とする. $X \times Y_A$ が可算パラコンパクトならば, $X \times Y_A$ が正規となるか.

この問題は否定的に解決した. 次は, その例である.

例 4.6[†] 次を満たすコンパクト空間 X, Y と Y の部分集合 A が存在する.

(1) Y_A は可算パラコンパクト正規,

(2) $X \times A$ は可算パラコンパクト正規,

(3) $X \times Y_A$ は可算パラコンパクトであるが, 正規ではない.

証明. R.H. Bing [3] は可算パラコンパクト正規であって, ω_1-族正規ではない空間を以下のように構成した (Example ***G***).

$\mathcal{P}(\omega_1)$ を ω_1 の部分集合全体の族とする.

$Y = \{f \mid f : \mathcal{P}(\omega_1) \to \{0, 1\}\} = 2^{\mathcal{P}(\omega_1)}$ とする.

各 $\alpha < \omega_1$ について, $f_\alpha : \mathcal{P}(\omega_1) \to \{0, 1\}$ を次で定義する. $P \in \mathcal{P}(\omega_1)$ に対して,

$$f_\alpha(P) = \begin{cases} 1 & \alpha \in P \text{ のとき} \\ 0 & \alpha \notin P \text{ のとき} \end{cases}$$

$A = \{f_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ とおく.

Y, A に対して, Y_A を構成する:

(1) $f \in A$ のとき, $f = f_\alpha$ の近傍は, $\mathcal{P}(\omega_1)$ の有限部分集合 $\mathcal{F}$ に対して,

$$N(\alpha, \mathcal{F}) = \{f \in Y \mid \text{各 } P \in \mathcal{F} \text{ に対して, } f(P) = f_\alpha(P)\}$$

(2) $f \in Y - A$ のとき, f の近傍は $\{f\}$

X を濃度が $|A|$ の離散空間の 1 点コンパクト化とする. A は Y_A の閉集合だから, 可算パラコンパクト. よって, 定理 1.8 より, $X \times A$ は可算パラコンパクト. また, A は $w(X)$-パラコンパクトだから, 定理 1.9 より, $X \times A$ は正規. さらに, $X \times Y_A$ は可算パラコンパクト. ところが, Y_A は ω_1-族正規ではないので, 定理 1.14 より, $X \times Y_A$ は正規ではない. □

最後に, 第 3 章のように以下の事実が得られる.

定理 4.7 (*cf.* 定理 3.2). C をコンパクト空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$, $X \times C$ がともに正規ならば, $X \times M_A \times C$ は正規となる.

証明. $X \times M_A$, $X \times C$ がともに正規とする.

(i) C が有限のとき. 離散空間となるから明らか.

[†] 筑波大学数学系山崎薫里先生に教えていただいた.

(ii) C が無限のとき. $X \times C$ が正規だから, 系 1.12 より, X は可算パラコンパクト. X は正規でもあるから, 主定理より, $X \times M_A$ は可算パラコンパクトである. C はコンパクトだから, 定理 1.8 より, $(X \times M_A) \times C$ は可算パラコンパクト. $(X \times C) \times M_A \cong (X \times M_A) \times C$ であり, $X \times C$ が可算パラコンパクト正規だから, 主定理より, $(X \times C) \times M_A \cong X \times M_A \times C$ は正規. □

定理 4.8 (*cf.* 定理 3.3). X をλ-パラコンパクト正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M_A$ が λ-パラコンパクトとなることである.

証明. $X \times M_A$ を λ-パラコンパクトとする. 定理 1.13 より, $X \times \mathrm{I}^\lambda$ は正規. I^λ はコンパクトだから, 定理 4.7 より, $X \times M_A \times \mathrm{I}^\lambda \cong (X \times M_A) \times \mathrm{I}^\lambda$ は正規. ふたたび, 定理 1.13 より, $X \times M_A$ は λ-パラコンパクト. □

系 4.9 (*cf.* 系 3.4). X をパラコンパクト空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. このとき, 次は同値である.

(1) $X \times M_A$ はパラコンパクト,
(2) $X \times M_A$ は族正規,
(3) $X \times M_A$ は正規,
(4) $X \times M_A$ は可算パラコンパクト.

定理 4.10 (*cf.* 定理 3.5). X を可算パラコンパクト, λ-族正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規である必要十分条件は, $X \times M_A$ が λ-族正規となることである.

証明. $X \times M_A$ を正規とする. 定理 1.14 より, $X \times A(\lambda)$ は正規. ここで, $A(\lambda)$ は濃度が λ の離散空間の 1 点コンパクト化. 定理 4.7 より, $X \times M_A \times A(\lambda) \cong (X \times M_A) \times A(\lambda)$ は正規. ふたたび, 定理 1.14 より, $X \times M_A$ は λ-族正規である. □

系 4.11 (*cf.* 系 3.6). X を可算パラコンパクト族正規空間, M を距離空間, A を M の部分集合とする. $X \times M_A$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times M_A$ が族正規となることである.

5. 付記

A.V. Arhangel'skiĭ [2] は相対位相的性質の一つとして相対正規性, 相対強正規性および弱 C-埋め込み性の概念を定義し, 位相空間 X とその部分空間 A に対し, Michael 直線の構成法によって新しく導入された位相空間 X_A が正規であること, A が相対強正規であること, A の相対正規かつ弱 C-埋め込みであることが互いに同値であることを示した.

筑波大学数学系保科隆雄教授と筆者は, 位相空間 X, Y と X の部分空間 A に対し, $X_A \times Y$ の正規性を $(X \times Y)_{(A \times Y)}$ の正規性で特徴付けた [9].

参考文献

[1] O.T. Alas, *On a characterization of collectionwise normality*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), 13–15.
[2] A.V. Arhangel'skiĭ, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology Appl., **70** (1996), 87–99.
[3] R.H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math., **5** (1951), 175–186.
[4] C.H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math., **5** (1951), 219–224.
[5] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
[6] T. Hoshina, *Prodacts of normal spaces with Lašnav spaces*, Fund. Math., **124** (1984), 143–153.
[7] T. Hoshina, *Normality of product spaces,* II, in: K. Morita and J. Nagata, eds., *Topices in General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1989, 121–160.
[8] T. Hoshina and R. Sokei, *Relative normality and product spaces*, 京都大学数理解析研究所講究録, **1303**(2003), 1–5.
[9] T. Hoshina and R. Sokei, *Relative normality and product spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **44** (2003), 515–524.
[10] 児玉之宏, 永見啓応, 位相空間論, 岩波書店, 1974.
[11] E. Michael, *The Prodact of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 375–376.
[12] K. Morita, *Paracompactness and prodact spaces*,

Fund. Math., **50** (1962), 223–226.

[13] K. Morita, *Products of normal spaces with metric speces*, II, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, **8** (1963), 87–92.

[14] K. Morita, See: proof of the implication (3) → (4) in Theorem 1.3 in: T. Ishii, *On product spaces and product mappings*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 166–181.

[15] 森田紀一, 位相空間論, 岩波書店, 1988.

[16] J. Nagata, *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[17] T.C. Przymunsiński, *Product of normal spaces*, in: K. Kunen and J.E. Vaughan, eds., *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984, 781–826.

[18] M.E. Rudin and M. Starbird, *Product with a metric factor*, General Topology Appl., **5** (1975), 235–348.

[19] R. Sokei, *Normality of product spaces*, 修士論文, 筑波大学, 1998.

[20] A.H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 977–982.

[21] H. Tamano, *On compactifications*, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 162–193.