数学教育におけるコンピュータ利用の可能性

数学科　岸 谷 正 彦

教材作成の道具としてのコンピュータの利用の可能性と特に実験とその論理性の証明を重要視した授業のいろいろな場面でのコンピュータ利用を目的別に３つに分類しそれぞれについて教材の具体例を示した。

＜キーワード＞　数学教育とコンピュータ　教材作成　実験と証明

０．はじめに

新学習指導要領に基ずく教育課程の実施を来年に控え、数学教育の内容、役割も変化しようとしている。やがて来る21世紀の高度情報化社会、生涯学習社会にむけての高校の数学教育の内容の変化である。さらに個々の生徒の自己学習力の育成、数学の積極的な活用がさけばれている。従来の「公式重視型」、「論理重視型」から、自分自身の数学に対する考え方を養い、「数学を作り上げる体験」、「数学の基礎的な内容の獲得」、「数学の持っている論理的な思考力、それの表現」への変換が重要とされている。しかしながら、この変換も決して新しいものではなく、従来の教室で実験的におこなわれてきたものであるが、これをより効果的に具現化する道具としてのコンピュータの登場により具体性の帯びたものになってきた。あまり変化を好まない教師にとっても、視覚的な道具としてのコンピュータ、実験計算器としてのコンピュータの存在は、もはや無視できないものとなった。しかし問題点も多い。一つに設備の問題である。設置台数はいまだ充分とはいえず、コンピュータ室も１学校に１教室程度であり、また生徒が日常的に操作できる環境でもない。機器も高価で簡単には更新できない。また指導する側の教師にもまだコンピュータに関心ある人も少なく、プログラムを作成できる人も一部の熱心な教師に限られている。さらに、新学習指導要領のコンピュータの位置づけにも問題はある。コンピュータは、数Ａ、数Ｂの１つの章、数Ｃに割り当てられているが、コンピュータを教えるのかコンピュータを使って教えるのか、立場がはなはだあいまいである。また単位数との関係でコンピュータの分野は、選択されない可能性が高い。本来、数学教育の根本からの変革の中心になるべく考えられていたコンピュータの導入も将来は明るくない。しかしながら、過渡的な段階としての困難を抱えながらも、以前考えられたドリル型のソフトではない、数学教育に携わる人々の必要にせまられた、すぐれた学習ソフトの出現のためにも数学教育へのコンピュータの利用法はさらに研究されねばならない分野であると考える。

本稿は、数学教育へのコンピュータの利用の可能性について、理論の面から実践の在り方、そ

れに対しての具体例という２つの視野からのテーマを設定し研究したものである。

１．コンピュータと数学教育

コンピュータを教育の中にとりいれる場合、「なぜコンピュータを使うのか」即ちコンピュータ利用の必然性を常に問わなければならない。そのためにコンピュータと数学教育との関わりについて論じなければならない。いたずらなコンピュータ利用はかえって混乱を招くことにつながる。コンピュータの使い方次第では、新しい落ちこぼれを生み出す危険性も考えられる。コンピュータと数学教育との関連については、その目的と主体とによってつぎの３点について主に考える。

⑴　道具としてのコンピュータであるのか、コンピュータ自身の理解であるのか

いわゆる計算機としてのツールの利用とコンピュータ自身の言語を含めた理解は、切り離すことはむしろ良くない。しかしながら、高校教育においては計算機としての利用に重きを置き、コンピュータ科学や言語は必要に応じて身に付けさせればよいのではないか。来年度より使用される教科書は、言語（ＢＡＳＩＣ）の理解に終始しコンピュータを使って数学の理解を助けるまでにはいっていない。それは単位数の関係でコンピュータの分野を選択しづらくしている要因である。むしろコンピュータは、生徒にとっては使えればよく教師にとっても日常的な教材作成の道具としてコンピュータを利用すればよいのではないだろうか。

⑵　だれが使いだれが指導するのか

主体は生徒である。さらにコンピュータを道具として使おうとするとき、特に操作性においてより使い易いものが要求される。教師の指導のもとに授業の中にうまく溶け込みやすいものが望ましい。単なるコンピュータとの対話形式ソフトやドリル型ソフトは、いまだすべての要求を満たすものはない。また本稿ではＣＭＩ的活用は考えていない。

⑶　コンピュータのどのような特性を生かしたいのか

（イ）　多量のデータを高速に処理する

多量のデータ処理を生徒の目前で行なうことは電卓の使用などを除いて不可能であった。また複雑な計算も高速に処理できこれまでにない分野への活用が期待される。

（ロ）　グラフィクスによる視覚化が可能

これまで黒板で図示していたものや道具を使って表示していたものなどがグラフィクスでより正確に高速に表示できるようになった。また図形の移動なども可能である。

（ハ）　場面の状況を取り替えることが可能、同じ処理を何度もできる

プログラムを何度も走らせることによって同じ処理を何度もできる。これによって実験が可能になり、予測や確かめができるようになった。

（イ）～（ハ）は本来別々にあるものではない。

コンピュータを数学教育に導入する場合、コンピュータは数学の理解を助ける道具という立場をとるとき、コンピュータは使い易いものでなければならない。また、従来の授業の形態を100％

変えるものではない。しかしコンピュータの特性をいかせばこれまでに無い新しい教材が生まれる期待も大きい。

2．教材作成ツールとしてのコンピュータ

道具としてのコンピュータは我々教師の教材作成に際しても大きな変革を要求している。コンピュータを利用した教材作成に際してのポイントはつぎのように考えられる。

①従来の教材作成と労力的に差がない

プログラムの作成に厖大な時間を費やす必要はない。

②指導方法に充分な検討が加えられている

しっかりとした授業実践がある。

③コンピュータを使うことによって生徒の理解が深まることが期待される

今まで困難さを感じていた場面での利用。

④生徒自身がコンピュータを使って数学を実感できる（より興味が持てる）

これまでの受け身の数学学習からの脱皮。

⑤発展性のある話題（分野）である（一般化などが可能）

それに関連した多くの例題や問題を作ることができる。

⑥コンピュータの特性をうまく生かしている

１．(3)で述べたコンピュータの特性を生かしていること。

さらに教材作成に際して考慮すべき点についてつぎに考える。

(1) 使用するコンピュータの台数について（ＬＡＮシステムがない場合を考える）

使用できるコンピュータの台数によって教材作成の方法、目的も異なる。

（イ） １台の親機を使った一斉授業

場所　コンピュータ室、普通教室（コンピュータセットを教室に持ち込む）

生徒の目が１台のコンピュータに集中するため授業の中に自然に溶け込ませる事ができる。教師は必要な場面で必要なプログラムを走らせることができ教師の授業案に従って自ら実験や確かめに使用できるが生徒自らの活動は受け身となる。日常的な授業の中で必要な場面でのみコンピュータを使用すればよく、教材作成に関して最も簡単であり、今後広まる形態であろう。設備も教室にモニターが常備されていればコンピュータのみ移動して使えばコンピュータ教室はむしろ必要ないと言える。

（ロ） １～２人に１台を使った授業

場所　コンピュータ室、普通教室（ノート型コンピュータ　電源の確保が必要）

生徒はコンピュータに向かい独自の実験や確かめができ、（イ）より主体的な活動があるが予想以上の時間を要する。２人で１台を使用する場合いろいろ相談ができよりおもしろい

発想が期待できる。しかしいったん作業を始めだすと進度も異なり、教師主導型の授業は困難になる可能性がある。課題学習等に効果を発揮する。この場合の教材開発は充分になされる必要がある。

（ハ）　1人が1台を使う（主に補習用）

場所　コンピュータ室、教官室（ノート型コンピュータでも良い）

主に補習用（自習用）とし（ロ）の場合と区別する。生徒の要求に合ったドリル型ソフトはまだないと思われる。本稿ではこの場合を除いて考える。

(2)　教材の使用場面

教材はその授業者によっていろいろな形態をとる。コンピュータを用いる場合その汎用性はますます多様化してくる。また同じ教材でも授業者によって単元の導入で扱うか、単元のまとめに扱うか当然意見の別れるところである。ここでは次のような分類を行なってみる。

（イ）　単元全般

1つの単元をすべてコンピュータを使った授業にする場合も考えられるが、その必然性を特に考慮しなければならない。普段の授業でできることをあえてコンピュータを使って効果が上がるのかを考えなければならない。しかし微分、積分、確率、統計の分野にはその可能性があると考えられる。これらはコンピュータの導入によってこれまでと異なる内容に変化する可能性がある。

（ロ）　単元の導入の部分

導入部分はとくに神経を使う所である。導入でつまずく生徒も多い。印象に残り、さらに今後の発展を示唆させる興味をもたれるものが望ましい。

例　2次関数の平行移動、極限、区分求積、数列、級数、微分方程式など

（ハ）　単元のまとめ

今まで学んできた事の整理に使うことも可能である。発展性はないが意外な発見も考えられる。また単元を越えた分野の確認にも使える。

例　2次不等式の整理や2次不等式と2次関数との関係　複素数とベクトル、三角関数の合成など

（ニ）　より効果的な場所

一番多い使い方であろう。コンピュータを使ったほうがより効果が期待できる場合である。三角関数のグラフや多くのグラフの表示、図形の分野や複雑な数値計算を必要とする分野などいろいろな使い方が考えられる。数列の極限、級数、軌跡、包絡線など

（ホ）　総合問題

すべての内容を昇華した形で生徒自身の数学の考え方の鍛練のためにも使用される。多くは課題学習のような形態が考えられるが、この分野の教材開発は急務である。

(3) 学習の形態

生徒の学習の形態から分類する。多くはコンピュータ教室の構造やコンピュータの使用台数、配置、教師の人数に起因するので「(1)使用するコンピュータの台数」と同様の考察となる。

(イ) 一斉学習形態

教師の指導によって生徒が適時コンピュータを使って、教師の発問に答える。１時間すべてコンピュータを使う必要はなく、使いたい時に利用される。ＬＡＮシステムがある場合はさらに効果的に生徒自身のコンピュータを使っての参加を可能にする。生徒がプログラム操作に慣れていないと思ったより能率は上がらなし、プリントを作る必要があるなど普段以上の準備が必要である。

(ロ) １人～２人に課題として

一斉学習ではないが１人または２人に課題を提出し生徒はコンピュータを使って解決していく方法が考えられる。生徒のグループ毎に課題が異なる場合も考えられるので生徒の相当な技量が要求される。課題は数学的に意味のあるより精選されたものが必要となる。また後日課題の解答や解答に至ったプロセスの発表形式の授業も準備しなければならない。

(4) 使用するプログラムの種類

自作のプログラムを使うのかアプリケーションを使うのか、これがコンピュータを使った数学の教材を考える場合最もネックとなる場合が多い。市販のアプリケーションは使用者のこまやかな立場に立ったものならばよいが、改良ができないなど使用者の思いどうりとはいかないようである。また、高価であったりマニュアルを読まねばならないなど煩わしさも多い。しかし市販ソフトの必要性はますます増大し、操作性の簡単な基本的ソフト（たとえば、グラフのみ表示するソフト、図形を描くソフトなど）の出現が期待される。現在のところ多少プログラムが作る事ができる人にとっては、自作のほうがより便利なようである。本稿でも自作のより単純なＢＡＳＩＣで書かれたプログラムを使用している。いずれにしても準備に多大な労力を必要しないことが大事である。

(イ) 初期値の入力方法

初期値（たとえばグラフを描くソフトにおいて３次関数の係数の値など）の入力はできるだけ簡単な方が良い。また入力ミスや極端な値にも対応できることが望ましい。簡単にエラーメッセージが出るのは良くない。

(ロ) プログラム掲示型か非プログラム掲示型か

言語を知っている生徒にとってプログラム自身に興味を持つのも当然である。それを止める必要はない。むしろ自分に使い易いよう改良してもよいのではないか。また関数の入力など直接プログラムを変更したほうが簡単な場合もあろう。そのためにもプログラムは生徒に提示できるほうが良いのではないか。

(ハ) プログラムの長短

自作のプログラムの場合使い易さや画面の見易さなどからプログラムは長くなりがちであるが、短いプログラムの方がよいのではないか。特にプログラムを掲示する場合は30行程度のプログラムが望しい。

3．授業の場面でのコンピュータの利用の目的別分類

以上の考察に対し本稿では、コンピュータ教室の構造から一斉授業の場合と課題学習の場合とに限定する。また目的を主に生徒の積極的な活動を期待するものとし、次の３つの場合に具体的問題を設定してみた。基礎的な分野での活用例はすでに多くの研究があるのでここではより発展的な分野に的をしぼった。

① 発展的な要素のある課題として生徒に提示し、新しい分野への導入として使う。単元の導入に使えるが、さらに既知の分野の整理と共に新しい考え方を学ぶ教材である。

例 (イ) 整数論
(ロ) 帰納的問題（再帰的方法）(二重帰納法)
(ハ) y=1/x と y=logx の関係 （対数関数の導入） ➡事例２
(ニ) 円関数と極座標、複素数、媒介変数
(ホ) 近似式、近似値

② いろいろな考え方のできる問題を提示し、既習の分野の異なる観点からの学習の整理に使う。ある話題の導入として、あるいは既知の内容の整理に使われる。

例 (イ) ３次関数と３次方程式の解の種類、判別式 ➡事例１
(ロ) ２次関数と２次不等式
(ハ) 通りうる領域の存在範囲
(ニ) 三角関数の合成
(ホ) ２次分数関数の分類
(ヘ) 軌跡
(ト) 周期関数

③ 試行錯誤しながら解決していく問題を提示し、結果を予想したり、一般化を試みたりする。与えられた課題に対し実験を繰り返しながら法則を見付け結論を予想しその証明も試みる。主に課題学習の扱いとなる。

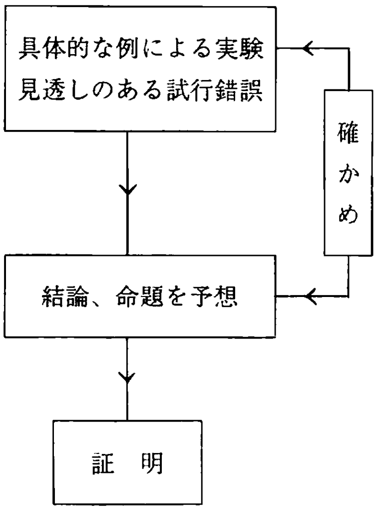
例 (イ) 1､2､･､nから順列を作り､その隣り合う２数の積を作り､それらの和が最小になるときの並べ方 ➡事例４
(ロ) ３点からの距離の和が最小になる点 ➡事例３
(ハ) 最大値、最小値を求めさせる手順
(ニ) 符号法則

（ホ）　ＳＱＲ（A^2+B）が整数になる条件

（へ）　長さ１の線分に対する包絡線

（ト）　追跡線

①②③とも、これらを考える根底には、常に次のようなコンピュータを使った実験的要素がありその結論を支える証明がある。図で表すと



数学の教材としてのプログラムの作成において、問題の取り組み方、考え方、実験の方法などが多方面から考慮されていなければならない。またプログラムが生徒の種々の要求を満たしていなければならないし、生徒の問題に対するアプローチの方法は多いほうがよい。実験によってなんらかの法則が意識され、さらにその法則の正当性のための確かめが行なわれる。そのような試行錯誤の結果、その法則の正しさが確実なものとなったときそれの論理性の証明が行なわれる。その証明のアイデアはコンピュータとの相互のやりとりのなかで生まれてくるものでもよいが，まったく別個のアイデアでなされる場合もある。コンピュータはそこまで立ち入る必要はない。

４．具体例

事例１　３次関数のグラフ

指導目標
- ３次関数のグラフの概形についてまとめる。
- ３次関数のグラフとその導関数との関係について調べる。
- ３次関数の式の因数分解の形からそのグラフの概形を調べる。
- ４次関数についても同様のことを調べる。
- 発展として３次方程式の解と係数の関係、判別式についてもふれる。

既出事項　整関数の微分　３次関数のグラフ（増減表）　２次関数と２次方程式
　　　　　ＢＡＳＩＣ（キー操作　プログラミングの初歩）

評　　価
- ３次関数とその導関数の関係が的確に理解しているか。
  もとの関数のグラフの概形から導関数のグラフの概形を書くことができるか。
  またその逆もできるか。
- ３次関数の因数分解された式からグラフの概形がわかるか。
- ４次関数についても同様の考察ができるか。

時間	指　　導　　内　　容	生徒の活動と留意点
10	●３次関数のグラフの概形について調べてみよう ◎作業　次の関数とその導関数をモニターに表示してみよ (1) $y=x^3-3x^2+2$　(2) $y=x^3+3x^2+3x-2$ (3) $y=x^3-6x^2+9x$　(4) $y=x^3-2x^2+2x-1$ その他いろいろな関数についても調べよ	生徒はコンピュータを使っていろいろなグラフを表示させる
	発　問　$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ の２つのグラフの関係でわかることを調べよ	グラフの増減、$f'(x)=0$ の解と $y=f(x)$ の極値をとる x の値など（極値の個数)、変曲点
	まとめ　３次関数のグラフ概形について、どのようなものがあり、それはどのように特徴づけられるか	極値の個数によって場合分けができることを気付かせる $3ax^2+2bx+c=0$ の判別式をＤとする
	質　問　３次関数が極値を持つときの条件を求めよ	６つの場合が考えられる

	質　問　3次式を因数分解したときのすべてのタイプをかきあげよ	
	例　2次式 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$　$\alpha\neq\beta$　α、βは実数 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$　αは実数（重解） $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$　$\alpha\neq\beta$　α、βは虚数 の3つの場合がある	必要に応じて2次式の場合を復習する
	（イ）　$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　α、β、γは異なる実数 （ロ）　$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$　$\alpha\neq\beta$　α、βは実数 （ハ）　$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)^3$　αは実数 （ニ）　$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　αは実数　β、γは虚数	
25	◎作業　（イ）～（ニ）の場合について、具体的な関数をもとめ、グラフの概形を表示せよ	例　(イ) $y=x^3-x$ (ロ) $y=x^3-x^2$ (ハ) $y=x^3-3x^2+3x-1$ (ニ) $y=x^3+x^2+x$
	まとめ　（イ）～（ニ）の場合について、それぞれのグラフの概形をかけ	因数分解した形からグラフの概形がわかるか
35		
	◎作業　つぎの関数とその導関数をモニターに表示してみよ (1) $y=x^4-4x^2+3$　(2) $y=x^4-2x^3+2x$ (3) $y=x^4-2x^3+1$　(4) $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ その他の関数についても調べてみよ	コンピュータを使って係数を入力しモニターに表示する
	まとめ　4次関数のグラフの概形についてどのようなものがあり、それはどのように特徴づけられるか	3次関数の場合と同様に極値の個数に着目させるそのとき3次式の因数分解の形（実数解の個数）

45		によって場合分けができることを気付かせる
	発展 ３次方程式の解と係数の関係をもとめよ	時間があれば扱う
	３次方程式　$ax^3+bx+c=0$　の判別式をつくろう	変曲点を原点にとった場合のみ扱う

- プログラムは授業前にコンピュータに入力してある。生徒はｒｕｎを入力することによってこのプログラムを使うことができる。
- プリントを用意し、それに従って生徒は学習する。
- コンピュータ室は２人で１台が使用できる。またスイッチの切り替えによって親機のモニターが自分のモニターに表示できる。
- キーボード操作とＢＡＳＩＣの初歩については１時間をこれにあてている。プログラム文法のうちINPUT、LIST、RUN、IF、GOTO、FOR～NEXTなどの命令は学習している。

事例２　Ｙ＝１／Ｘ　とＹ＝ｌｏｇＸ　との関係

指導目標・区分求積法によってある図形の面積が求まることの理解、及び対数関数との関係についてその性質も含めて歴史的な意味も理解する。

指導内容・区分求積法の一つの応用として、y=1/x、x軸、直線 x=a,x=bとで囲まれた面積をコンピュータを使って求めさせる。たとえばa=1、b=2のときの面積とa=2、b=4のときの面積が等しいことを確認させる。さらにこれと同じ関係が成り立つ a、bの値をコンピュータを使って見付けさせ、このような事実の成立の理由を考える。すなわち

$\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx=\int_1^b\frac{1}{x}dx$ が成り立ち、　$\int_1^a\frac{1}{x}dx=L(a)$ とおくと、

Ｌ(ａｂ)＝Ｌ(ａ)＋Ｌ(ｂ)が成り立つ。これによってy=logxの導入がなされる。また自然対数の底の値が求められることにも触れる。

既出事項　面積　区分求積法　対数関数　和の記号を使っての計算

評　　価
- 図形の面積の求め方と区分求積法の理解ができているか。
- 関数Ｌ(ｘ)の性質をとらえることができるか。
- その性質の証明を和の記号を使って示すことができるか。

事例３　３点までの距離の和が最小になる点

指導目標●漠然とした問題から実験によって手がかりを見付けその証明も試みる。

指導内容●３点のうち２点はあらかじめ与え、他の１点の座標を入力すると、３点までの距離の和が最小になる点をコンピュータが表示する。多くの点を入力するなかで求める点の一般的な性質を見付けさせる。３点が特別な位置関係（たとえば、２等辺三角形など）にある場合から一般の三角形への場合のアプローチの仕方も考えられ、結果が予想できたらその証明を試みさせる。

既出事項　図形の性質

評　　価●与えられた３点と最小となる点とはどのような位置関係にあるかが読みとれるか。

●３点が特別な位置にあっても最小となる点は一般の位置にある３点と同じ位置関係であることがわかるか。

事例４　１からＮまでの自然数から順列を作り隣り合う２つの数の積の和を最小にするときの並べ方を求めよ

指導目標●漠然とした問題から実験によって手がかりを見付けその証明も試みる。

指導内容●直観で考えた数の並びをコンピュータを使って計算させる。すべての場合を計算させても良いが直観の方がより早く結論に達することも学ばせる。証明は数学的帰納法の知識を必要とする。

既出事項　数学的帰納法

生徒の活動　Ｎの値を入力し、さらに順次数を入力する。たとえばＮ＝６のときの順列（2､4､5､1､6､3）に対し２つの数の積の和は　$2\times4+4\times5+5\times1+1\times6+6\times3=57$　でこの値がモニターに出力される。　これを繰り返し行い法則を見付けながら一般の場合の最小の並べ方の予測をする。

評　　価●直観によって最小の並べ方を考えても良い。コンピュータは単なる補助のために使われる。

●直観をともなう試行の結果得られた予測に対し、証明が得られるか。

5．今後の課題について

実際の授業を通して問題点を挙げてみたい。

(1)　コンピュータの特性によるもの

- グラフィクスを使ってグラフを描いてもグラフの概形はわかるがそのグラフの書き方を理解したのではない。
- 級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 、 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ の和をコンピュータを使って計算させても実数としての数の列は存在するが、それが収束するか否かは別の問題である。またすべての生徒が興味をもつとは限らない。($2^{\sqrt{2}}$ についても同様)
- 単純に予想される事柄をコンピュータを使って計算しても興味を示すとは限らない。(例サイコロの１の目の出る確率)

(2)　指導する側からによるもの

- 操作性　市販ソフトも自作ソフトも操作を理解するのに時間がかかり、教師が扱い易いと思っても生徒が扱い易いとは限らない。
- 学習効果　教師側の準備する労力に比例しない場合もある。またコンピュータを使うことによる思考の制限についても考えなければならない。
- 構造上　コンピュータを使う授業は特別なものという意識が強い。コンピュータ室の数もいずれ問題となるであろう。

実際の授業を通しても問題点が山積されるがそれでもコンピュータの持つ魅力は絶大である。今後多くの実践例を通して数学教育におけるコンピュータの利用の可能性について模索していきたい。

課題のみ列挙すると

①コンピュータ教室の問題（構造、機種、配置など）

②ハード、ソフトウェアー両面の問題、市販ソフトの研究

③生徒一人ひとりに対する評価の問題

④数学の教材のコンピュータ利用可能性の追求

⑤カリキュラム、指導法の改善（中高の連携）

⑥指導者の育成（大学教育、教育実習）

⑦諸外国の実践例

参考文献

(1) 文部省　　指導計画の作成と学習指導の工夫　　1992
(2) 日本数学教育学会　　21世紀の算数・数学教育の教育課程の基本理念と内容に関する研究　1993
(3) 日本数学教育学会　　1990年代の数学教育　　1988
(4) 沢田、橋本　数学科での評価　　共立出版　　1990
(5) 宮詰　パソコン数式処理システムの数学教育における利用　高等学校数学教育研究会　1992