

数学の答案の作製過程と指導との因果関係に関する調査

正 田 良

要約

I) 授業などでの教育, II) 感じ方・考え方, III) 数学の答案の3層を考え, それぞれに関する質問項目を設定した質問紙を文学部教育学科の大学生に対して行なった。

I) からII), II) からIII) への因果関係を重回帰分析で調べ, 教師が図に記号を書き入れることは, 子どもの図への書き入れに影響があり, さらに, 子どもが問題空間に対して広い視野にたつ影響を持つ可能性を指摘した。

1. 数学の答案の論理・系統性

数学の証明は, 古来論理的な思考・言明を錬成する手段として考えられている。古代ギリシャからユークリッド幾何はその典型とされ, ヨーロッパの中世では自由七学芸の, 文法, 修辞学, 論理学, 幾何, 算術, 音楽, 天文学の1つとして数えられて, 貴族の教養として重視されていた。

ソーンダイクを中心とする教育測定運動によって形式陶冶の実効性が否定されている。答案形式の改善が19世紀後半からなされてきたが, 特に数学教育改造運動などによって『ユークリッド原論』への偏重が批判されている。数学教育現代化の時期, 特に英米で証明が削減されたが, 日本では, 証明を中等教育で比較的熱心に行っている。また, 岩村聯氏のように古典としてのユークリッド幾何と, 図を書いて考えるという特色を持つ初等幾何との区別をして, 後者の効用を主張する⁽¹⁾など, 有識者と呼ばれる人々に証明に対する支持を得ていると言えるだろう。

現在の学習指導要領でも, 中2で, 「図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し, 推論の過程を的確に表現する能力を養う」⁽²⁾こと, 中3では, 「見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす」⁽³⁾ことが目標の中に認められ, 数学の答案などで, 論理的な表現を行なうことが重視されている。

正田⁽⁴⁾は, 幾何の証明に関して, (1)記録性, (2)順序指示, (3)簡潔性, (4)根拠の明示, (5)構造の可視化の5つをその効果を挙げ, 代数の答案でも連立方程式での行番号に見られるような根拠明示に関する特長を持っていることを指摘している。もとより中学校数学科の目標は, 「それらを進んで活用する態度を育てる」⁽⁵⁾とある。このような形式があると教えられるだけではなく, 証明などの答案形式がもつ論理・系統性の良さを知って, 他にそのような必要が生じたときに応用できることが必要である。しかし, これに関する状況は必ずしも芳しいものとは言えない。答案形式が子どもにとってテストなどへの対応として意

識されてしまっ、その良さを知るには至っていないからであろう。また、その良さを知ったり、実際の行動に活かしたりするには、どのような経験・教育や、どのような感じ方・考え方が有効であるかは、必ずしも実証的な調査が行なわれているとは言えない。そこで、ここでは、

I) 授業などでの教育。

II) 数学での答案形式への感じ方・考え方。

III) 答案の実際

の3層を考え、I) からII)、II) からIII) への因果関係を実証的に明らかにすることを期したい。

2. 調査問題の構成

調査問題の実際は、資料A⁽⁶⁾として稿末に記した。ここでは、各問に関する解題を記すこととしよう。

2. 1 授業などでの教育

三角形の合同条件などを用いた証明が教えられる中心的な学年として中2に注目することとした。昨今では、通塾率⁽⁷⁾が高く、学校が相対化している場合があるので、「もっとも影響のあった先生」という聞き方をしている。

このごろの教科書では、図が既に書いてあって、その図によってさまざまな作業・考察が行なえるようになっている。一方で、前述の岩村のように自分で図を書くことが重視されることがある。1. - 5) では教科書の使用形態に関して聞くもので、図の思考過程での扱い⁽⁸⁾に関して、2), 3)。そして、証明の形式的な面に関して1) に聞いている。

また、教科書で扱われている問題が平易すぎるために問題解決の程度が深まらない傾向

が見られる。そこで、4) で授業で扱う問題の様子を聞いている。

2. 2 答案形式についての感じ方・考え方

数学の答案は、その陳述の根拠を示すものであるが、それを「式」に関する記述への賛否で聞いているのが、2. - 2) で、逆に1) では他の理由として想定される「途中の計算ミスなどがないか確かめる」として聞いている。特に「根拠の明示」に関して聞いたのが3) である。

4) ~ 6) では数学の論証の陶冶性について聞いている。文面の通り、4) では「論理的思考」、5) では「アカデミックな論文」、6) では「日常生活」に関して聞いた。

7), 8) では、思考過程での図の役割について聞いたもので、1. - 2), 3) に対応したものである。さらに、2. - 10) では、図を思考の助けとしながらも問題の構造を明らかにするために「証明問題の答案は、図がなくてもわかるように書くべき」ことの必要性⁽⁹⁾を意識しているかどうかについて聞いている。

2. - 9) は問題解決に関するもので、1. - 6) に対応している。

2. 3 数学の答案の実際

3. - 1) は、風間⁽¹⁰⁾の発表を参考に設けたものである。「図にひきずられず、仮定をもとに論理的に、図にある関係を考えることができるか」に関する問である。元の図に比べて図と仮定とのずれを誇張してある。資料B「ループリック」として3. に関するコーディングの要領を示したが、ここでは「図にひきずられてはいない」に注目して、もっぱ

らコードが4以上かどうかのダミー変数として扱った。

3. - 2) は、連立方程式の答案の論理・系統性に関しての間である。ここではもっぱら、 $x=4$ の前に、「(1)へ代入」の指摘の有无に注目し、ダミー変数として扱った。

3. 調査結果

3. 1 単純集計

上述の質問紙を、都内の2つの私立大学の文学部教育学科で小学校の教員免許を取得するための算数の教科のための科目を履修する135名の学生を被験者として行なった。単純集計の結果を表1として記す。

1. - 3)「教師が図に記号を書き入っていた」、2. - 8)「回答者が図に記号を書き入れる」、2. - 2)「式は、回答者の考えの根拠を示す役割をもっている」に積極的な回答が得られていること。図と仮定とのずれに対して図にひきずられずに仮定から推論する割合が多かったのに対して、連立方程式の答案で根拠の記載洩れに気付く割合は少なかった。

3. 2 IIを目的変数とする重回帰分析

2. のそれぞれを目的変数として、1. の各問いを説明変数とする重回帰分析⁽¹¹⁾を行なった。その回帰係数を表2に記す。それぞれの係数の右に「*」とあるのは、5%有意、「**」とあるのは1%有意であることを示している。この表から見いだされることを箇条書きの形で記そう。

(1) 表1で指摘した2つの関連、1. - 3)「教師が図に記号を書き入っていた」、2. - 8)「回答者が図に記号を書き入れる」に統

計的有意性が認められる。

(2) 1. - 1)の「先生は仮定・結論・証明の3つを分けて…重視していた。」は説明変数として、2. - 5)「アカデミックな論文を書くことに役立つ」のみに有意であった。形式的な側面を回答者は評価するのであろう。

(3) 1. - 2)の「自分で図を書いてみることをその先生は強調」は、2. - 3)「数学の答案は直前の行のみが根拠である場合を除き、…」のみに有意であった。直接の因果関係をすぐには解釈するのは難しいが、教育者が問題解決や答案作成の見通しや筋道を重視する場合、被教育者が問題空間に対して広い視野にたって、直前に触れられた以外の条件を重視するようになるのだろうか。

(4) 1. - 3)は(1)に指摘した他、2. - 2), 2. - 3)への説明変数としても統計的に有意となった。前項同様直接の因果関係を説明するのは難しいが、できあがった答案からでは、読み取れない問題解決の過程を重視する傾向ともいえる1. - 3)が、被教育者の見通しをもった問題解決に寄与しているのではないだろうか。

(5) 1. - 4)「教科書以外の問題」は、2. - 3)への寄与がみられるが、1. - 5)「教科書を生徒に開かせて」は説明変数としてどの2. の項目とも有意ではなかった。

(6) 1. - 6)の問題解決を重視した授業は、回答者の問題解決2. - 9)の説明変数として有意である。また、2. - 10)「答案は、図がなくてもわかるように書く」にも有意となった。図としての見えの背後にある問題の構造を意識するようになったのだろうか。

(7) 1. - 7)の当該指導への評価は、2. - 4)「論理的な思考ができることに役立つ」

に有意であったが、2. - 6)「日常生活に役立つ」に有意になるには至っていない。

3. 3 Ⅲを目的変数とする重回帰分析

同様に、3. のダミー変数のそれぞれを目的変数として、2. の各問いを説明変数とする重回帰分析を行なった。その回帰係数を表3に記す。3. - 1) の2つに関しては定数項以外に有意な説明変数はなく、3. - 2) に関しては、2. - 8) のみが説明変数として有意であった。

3. - 1) に関しては図と本文との矛盾というやや高度な事柄に関するものである。例えば、「三角形の各辺の垂直二等分線は1点で交わる」のような3直線の共点の証明などでは、図を、わざと不正確にかいて共点でないようにしておき、初めの2本の直線の交点が、第3の直線上にあることを示すこともある。この場合、図の正確さは相対的なものとなり、仮定によって示された条件を使った推論が必要となる。正答率は高かったが、被験者は、2. の各問で計測される要素以外の要因がこのような正答を導いたのであって、ここでの設問では、統計的に有意な説明変数とはなりえなかった。どのような設問が適切であるかについては、今後の課題としたい。

2. - 3)「数学の答案は直前の行のみが根拠である場合を除き、すべて根拠を明示するべき。」は、3. - 2) に対する説明変数として有意ではなかった。このような考え方感じ方ではあるのに、実行はされていないことになる。3. - 2) は、かなりささいなことであるので、見つけにくいものではあった。連立方程式の解法に関しては、熟達による自動化に重きがおかれて、論理的根拠の言明と

しての答案へ意識がおかれてはいないことのあらわれとも思われる。

他方、2. - 8)「図に記号を書き入れることがある」が有意であった。この因果関係に関して直接の解釈は難しいが、図に記号を書き入れて試行錯誤するような行動は、問題空間に対して広い視野にたつて、直前に触れられた以外の条件を重視する結果となって、直前に触れた以外の条件を援用することに対する意識を明らかにするためかと思われる。

4. まとめと今後の課題

今回の質問紙の構成並びに調査によって、下記のような示唆や結果を得ることができた。しかし、より鮮明な統計的結果として示すことができるような質問紙の構成については、今後の課題をしなければならない。

- (1) 中学校の図形の授業の際に教師が、図に辺が等長であるなどを示す記号を書き入れることは、子どもが自分で問題解決をするときに図に記号を書き入れるようになりやすいという影響がある。このような影響は、自分で図を書くことと合わせて、子どもが問題空間に対して広い視野にたつ影響も示唆された。
- (2) 問題解決を重視した授業は、子どもの問題解決場面での方策に影響があるだけではなく、「答案は、図がなくてもわかるように書く」といった図の背後に存在する条件の意識にも有用ではある。しかし、仮定と図とのずれへの対処へ有意な影響は、示せなかった。

表 1：単純集計

答\問	1	2	3	4	5	6	7	2	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	3	1	8	4	3	7	1	1	1	2
2	2	5	0	14	13	12	7	6	1	1	4
3	9	11	1	20	14	19	13	8	3	3	9
4	24	26	2	24	21	47	36	15	8	8	56
5	38	26	19	21	25	30	36	45	25	25	25
6	48	50	67	27	33	19	27	42	64	64	28
7	13	14	45	21	25	5	9	18	33	33	11
平均	5.16	5.02	6.10	4.49	4.84	4.23	4.51	5.19	5.81	5.81	4.67
SD	1.19	1.41	0.88	1.79	1.69	1.33	1.48	1.29	1.06	1.06	1.27

答\問	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	20	52	
1	3	4	7	1	1	1	1	7	7	0	25	
2	5	15	21	9	1	1	1	8	10	22	11	
3	12	30	29	21	0	7	14	3	1	13		
4	44	48	48	39	5	18	40	5	1	19		
5	40	22	19	28	19	40	24	9	9	5		
6	26	13	8	30	55	44	27	25	37	5		
7	5	3	3	7	54	24	15	63	45	5		
平均	4.56	3.89	3.64	4.50	6.12	5.39	4.53	4以上	4以上	4以上		
SD	1.23	1.29	1.32	1.34	0.99	1.19	1.58	102名	92名	34名		

表 2：「考え方・感じ方」を目的変数とした説明変数としての「受けた授業」

	2.(1)	2.(2)	2.(3)	2.(4)	2.(5)
定数項	2.54 **	2.23 **	1.28	0.81	1.82 *
1.(1)	0.04	0.06	0.02	0.10	0.24 **
1.(2)	0.13	0.13	0.26 **	-0.01	0.03
1.(3)	0.24	0.42 **	0.26 *	0.17	-0.14
1.(4)	0.03	-0.01	0.13 *	0.04	0.02
1.(5)	-0.02	0.02	0.02	0.10	0.05
1.(6)	0.05	0.03	0.00	0.04	0.11
1.(7)	0.01	-0.04	-0.06	0.31 **	0.15
	2.(6)	2.(7)	2.(8)	2.(9)	2.(10)
定数項	1.73	4.24	2.00 **	1.96 *	1.20
1.(1)	0.15	0.01	0.01	0.07	0.14
1.(2)	0.06	0.12	-0.02	0.02	-0.08
1.(3)	-0.15	0.14	0.66 **	0.21	0.21
1.(4)	0.02	-0.04	0.02	0.03	-0.08
1.(5)	0.13	-0.06	-0.03	0.08	0.02
1.(6)	0.11	0.03	-0.03	0.27 **	0.32 **
1.(7)	0.12	-0.19	0.07	-0.01	0.15

表 3：「答案の実際」を目的変数とした「考え方・感じ方」

	定数項	2-1)	2-2)	2-3)	2-4)	2-5)	2-6)	2-7)	2-8)	2-9)	2-10)
3-1)①	0.77 *	0.01	-0.05	0.00	0.03	-0.03	-0.06	0.03	0.01	0.03	0.00
3-1)②	0.86 *	-0.04	0.00	-0.02	0.06	-0.04	-0.06	0.05	0.02	0.00	-0.01
3-2)	-0.17	0.02	-0.03	-0.02	0.00	0.01	0.03	-0.05	0.11	0.01	0.00

資料A：質問紙

図などに関する調査

あとの数学概論（概説）で扱う話題に関連して次の調査によって取材します。この調査への返答は、提出したかどうか出席点に影響する他は、成績には影響しません。また、結果は統計的に処理されますので、匿名性は保持されます。ありのままを率直に答えて下さい。

回答用紙と問題用紙に分かれています。回答用紙のみ回収して問題用紙は回収しません。また、回答用紙はお返ししませんので、もし回答をメモしておく必要のあるかたは、問題用紙に回答をメモされるとよいでしょう。

回答は特に指定するもの以外は、

- | | |
|---------------------------|-------------------|
| 7. 他に類を見ないほどその傾向が甚だしい。 / | 6. かなりその傾向がある。 |
| 5. どちらかというとその傾向がある。 / | 4. どちらとも言えない。 |
| 3. どちらかというとその反対の傾向をもつ。 / | 2. その反対の傾向が顕著である。 |
| 1. その反対の傾向が他に類を見ないほど甚だしい。 | |

の7点法で応えて下さい。

2005 年 11 月（正田）

1. あなたの中学2年当時に、あなたに影響のあった数学の先生の指導に関して伺います。

塾の先生などに影響が強かった方はその先生。数学の先生が2人以上であったときは、主に図形に関する授業を担当されていた方について応えて下さい。

1) 図形の証明問題で、その先生は仮定・結論・証明 の3つを分けてそれぞれを書くことを重視していた。

2) 図形の証明問題で、まず自分で図を書いてみることをその先生は強調されていた。

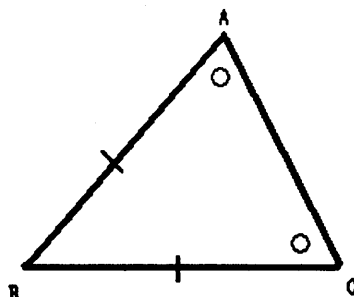
3) 図形の証明問題で、図に長さが等しいとか、角の大きさが等しいとか、垂直であるとかを表す記号（右図参照）を書き入れることを、その先生はやられていた。

4) その先生は教科書以外の問題を紹介したり触れたりされていた。

5) その先生は教科書を生徒に開かせて使っていた。

6) その先生は「何が分かっているのかな」とか「何が分かればいいのか」といった問題解決に関する問い掛けをなさった。

7) その先生の指導を、あなたは特によく受けたいと思った。



2. あなたの考え方・感じ方に関して伺います。

- 1) 「式をはっきり書くべき理由は、途中の計算ミスなどがいないか確かめるため」と思っている。
(以下、「・・・と思っている」を略して記します)
- 2) 式は、回答者の考えの根拠を示す役割をもっているので書く必要がある。
- 3) 数学の答案は直前の行のみが根拠である場合を除き、すべて根拠を明示するべき。
- 4) 中学2年程度の数学の論証を学ぶことは、論理的な思考ができることに役立つ。
- 5) 中学2年程度の数学の論証を学ぶことは、大学でのレポートとか、卒業論文とかのアカデミックな論文を書くことに役立つ。
- 6) 中学2年程度の数学の論証を学ぶことは、日常生活に役立つ。
- 7) 図形の証明の答案は、数と式の答案と違って、わかってからでないと書けない。
- 8) 証明のとき図に長さが等しいとか、角の大きさが等しいとか、垂直であるとかを表す記号(1. 3)の図参照)を書き入れることがある。
- 9) 数学の問題を考えると「何が分かっているのかな」とか「何が分かればいいのかな」といったことを考える。
- 10) 図形の証明問題の答案は、図がなくてもわかるように書くべきだと思う。

3. 次の質問に答えてください。

- 1) 図2で、直線「カ」で、紙を折ると、辺ACと辺BCは重なりました。
 - ① 三角形ABCはどんな三角形ですか。また、そう考えた理由を説明して下さい。
 - ② 角「あ」の角度は何度でしょう。またそう考えた理由を説明して下さい。

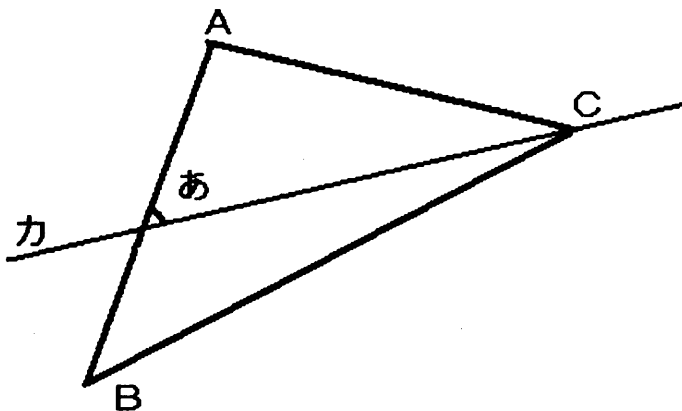


図2

- 2) 中2のケンタ君は、回答用紙に記したような答案を作りました。不適切なところがあれば、添削してあげてください。

なお、問題は、

50 円切手と 80 円切手を合わせて 10 枚買ったなら、680 円でした。

50 円切手を何枚買ったのでしょうか。

でした。

図に関する調査の 回答用紙

3. の回答欄。1)

①三角形ABCはどんな三角形ですか。また、そう考えた理由を説明して下さい。

()

②角「あ」の角度は何度でしょう。またそう考えた理由を説明して下さい。

()

2) <下記の答案の添削をして下さい>

$$\begin{cases} x+y=10 & \cdots \cdot (1) \\ 50x+80y=680 & \cdots \cdot (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \times 50$$

$$30y=180$$

$$y=6$$

$$x=4$$

答え 4

1. と 2. の回答欄

1.					2.					3.					集計欄				
1)	2)	3)	4)	5)	1)	2)	3)	4)	5)	1)	2)	3)	4)	5)	1)	2)	3)	4)	5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

右端の3つの欄には記入しないでください。

資料B:ループリック

図に関する調査 3. のループリック

1) ①

7 : (二等辺三角形) 辺ACと辺BCは重なるから

6 : (正三角形か二等辺三角形) 辺ACと辺BCは重なるから <正三角形が特殊な二等辺三角形とは思っていない>

5 : (二等辺三角形) 2つの辺が等しいから

4 : (二等辺三角形) 図がそうみえないことを「斜めから見た図なので」などと解釈して説明している。あるいは、根拠不記載、もしくは、根拠不適切。

3 : (正三角形)

2 : (直角三角形)

1 : (直角二等辺三角形)

1) ②

7 : (90°) 直線 CA に関して対称だから。

6 : (90°) $CA = CB$ の二等辺三角形だから。

5 : (90°) 根拠不記載もしくは根拠不適切。

4 : (90°) 図がそうみえないことを「斜めから見た図なので」などと解釈して説明している。

3 : (105° など) 何らかの推論をして、見掛けとは異なる結果をだした。

2 : (60° など)

2)

無答を0点として、

《 $x=4$ の前に、「(1)へ代入」》の指摘で、+4点。

《「50円切手をx枚、80円切手をy枚買ったとすると」を冒頭に》の指摘で +2点。

《答えに単位の「枚」を付ける》の指摘で、+1点

《注》

(1) 岩村聯「大いなるパーン大いなる初等幾何」『数学セミナー』1984年9月号。

(2) 文部省,『中学校学習指導要領(平成10年12月)解説 数学編』,大阪書籍,1999, p.21

(3) 前掲書, p.24。

(4) 正田 良「幾何の証明形式の「よさ」に関する基礎的研究」『三重大学教育学部研究紀要』第52巻 教育科学(2001) pp.15-24 ページ, 2001

(5) 前注(2)のp.12。

(6) 紙幅の関係で、改行などのレイアウトは変えている。

(7) 2005年12月13日付けの朝日新聞社説は、「(小学校高学年の)3人に1人は塾に通い」、保護者の7割が「(子どもの学力を高めるには)予備校・塾の方が優れている」との総理府のアンケートを紹介している。

(8) 証明での図の役割に関しては、前注(4)で記した文献に記した。

(9) 前注(4)の文献参照。

(10) 風間喜美江「中学校図形学習における「図をよむ・かく」活動の必要性について」,第38回数学教育論文発表会(山梨大学),日本数学教育学会主催,2005。

(11) 統計処理には,“Stat Partner”を用いた。またその設定は当該ソフトのデフォルトによった。