学校数学におけるパターンの科学としての数学観に基づく探究過程に関する研究

学校数学におけるパターンの科学としての数学観に基づく探究過程に関する研究

横山　和誉

要　約

本研究の目的は，パターンの科学としての数学観に基づき，従来の日本の学校数学に位置づく内容における探究過程の様相を明らかにすることである．第一に，先行研究参照し，本研究におけるパターンの科学としての数学観及び，パターンを規定した．第二に，パターンの科学としての数学観を学校数学に採り入れた先行研究の基礎的考察を行い，成果と課題を明確化した．第三に，「多角形の角の大きさの和」の問題,「折り目」の問題の探究過程を記述・分析することを通して，パターンを見出す過程及びパターンを事象と関係付けて解釈する過程において行われる活動を明らかにした.

論文の構成

1. 本研究の目的と方法（序章）

筆者は児童生徒に探究を通して算数・数学を学んで欲しいと考えている．算数・数学における探究を考察する視座となる数学観の一つに，数学者の育成や，数学の発展の考察を意図して生まれたパターンの科学としての数学観がある（デブリン, 1994/1995 ; ソーヤー，1978/1955）. この数学観に基づくとき, 数学における探究は，事象からパターンを見出し，見出したパターン自体を探究・考察の対象と

するパターンの探究と捉えられる．しかし，そもそも児童生徒にとって，パターンの探究を行うことは容易でない．また，パターンの科学としての数学観に基づいた数学教育学研究が国内外で行われているが（布川，2016；Wittmann, 2005），探究過程に焦点を当てて検討したものはない．特に，日本における先行研究は Wittmann が開発した教材を利用したものばかりであり，日本の学校数学において児童生徒が困難を抱える内容について検討したものはほとんどない．

以上より，本研究の目的を，パターンの科学としての数学観に基づき，日本の学校数学に位置づく内容についての探究過程における，パターンを見出す過程，見出したパターンと事象を関係づけて解釈する過程に焦点を当て，その様相を明らかにすることとする．

研究の目的を達成するため，本研究では以下の方法を設定する．

第一に，先行研究の概観・考察を通して，本研究におけるパターンの科学としての数学観及び，パターンの科学としての数学観に基づくとき探究・考察の対象となるパターンの概念規定を行う．

第二に，パターンの科学としての数学観を学校数学に採り入れたいくつかの先行研究の基礎的考察を行うことで，パターンの科学としての数学観を学校数学に採り入れる際の成果と課題明らかにする．

第三に，自身が設定した教材「多角形の角の大きさの和」,「折り目の問題」の探究過程を記述し，その考察を行うことで，探究過程におけるパターンを見出す過程，見出したパターンと事象を関係づけて解釈する過程の様相を明らかにする．

2．パターンの科学としての数学観（1 章）

(1)パターンの科学としての数学観の規定

アメリカの数学者 Steen（1988）は，数学は幾何学と算術に根差した学問として，空間と数の科学と定義されることが多かったが，現代数学の多様性はこの定義を超えてしまっていると指摘している．そして，より適切な定義が明らかになったとして,「数学はパターンの科学である．数学者は，数の中に，空間の中に，科学の中に，コンピュータの中に，そして創造の中に，パターンを求める」（Steen, 1988, p.616）と述べている．

このように，数学をパターンの科学であると捉える数学観，即ち，パターンの科学としての数学観は，イギリス生まれの数学者ソーヤー（1955/1978）に端を発する．ソーヤー（1955/1978）は,「『数学とは，ありとあらゆるパターンの分類と研究とをする学問である』ということができよう」(p.10) と述べ, また，アメリカの数学者デブリン（1994/1995）も，これまでの数学研究の発展を概説した著書の中で,「数学者たちが行なっているのは、数のパターン、形のパターン、運動のパターン、行動のパターンなどといった『抽象的なパターン』の研究なのだ」（p.10）と述べている．

例えば，デブリン（1994/1995）は，学校数学において最も基本的な学習内容である数を，パターンを記述するものとして捉えている．三個のリンゴ，三人の子供，三個のサッカーボール，三個の岩などには共通する抽象的なパターンとして「三つさ」があるとし，それを記述するものが数 3 であるとする.そして，数自体を探究・考察の対象として研究することを通して数論へと発展していくのである．

このように，パターンを記述したり，分析

したりする最適な手段は数学であり，数学的な表記，概念，手続きを用いることである．また，数学は，パターン自体を探究・考察の対象として研究することで，各種パターンに関する知識や分析の手法を発達させる（布川，2013）．以上の考察から，本研究において，数学は，パターン自体を探究・考察の対象として研究することを通して発展する学問であると捉える．そして，このように数学を捉える数学観をパターンの科学としての数学観と規定する．

(2)探究・考察の対象となるパターンの規定

次に，パターンの科学としての数学観に基づくとき，探究・考察の対象となるパターンについて規定する．ソーヤー（1955/1978）は，パターンは，非常に広い意味で解されるべきであるとして,「精神が認めることのできるほとんどあらゆる種類の法則性を包含すると考えるべきである」（p.10）と述べている．例えば，子どもがパターンを見出した次のような出来事を例に挙げている．

> いつか，ある小さい子どもがわたしに，こんなことを言ったことがある．「ぼくはSeptember（9 月）という言葉が好きだ．それは sEptEmbEr となっているからだ」．わたしは‘September’の母音と子音の間に ·*···*···*·というパターンがあることに, いままで全く気がつかなかった．これはいうまでもなく完全な対称性をもっている（ソーヤー，1955/1978, pp.20-21）．

このように算数・数学とは一見直接的には結びつかないだろうと考えられるようなものでも，そこにパターンを見出すことによって算数・数学における重要な概念が生まれ得ることが示唆される．そこで，パターンの科学としての数学観に基づくとき，探究・考察の対象となるパターンとは人間が認めることのできるあらゆる種類の法則性であると規定する．

3．先行研究の基礎的考察（2 章）

(1)海外の先行研究

ドイツの数学教育学者である Müller& Wiitmann(2004)は，パターンの科学としての数学観に基づき，教材及び教科書（Das Zahlenbuch）の開発を通して, パターンの科学としての数学観を学校数学に具体化している．開発した教材の 1 つであるアリスモゴン（図 3-1）は，児童が単に機械的に計算練習をするのではなく，計算しながら探究し，探究しながら計算することが意図されている．

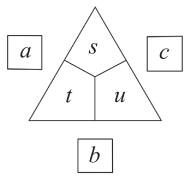


図 3-1 アリスモゴン

アリスモゴンは，加法と減法を同時的に練習するために開発された教材の 1 つで，「隣り合う 2 つの区画の数を足して，対応する辺の欄にその和を書く」（Wittmann, 2005, p.9）という構造をもつ．教科書の展開として，初めの問題は単に内側の 2 つの数の和を求め，外側の数を求めたり，外側の数と内側の数の差を求め，内側の数を求めたりすることによってアリスモゴンを完成させる．しかし，問題が進むにつれ，簡単には完成させられないアリスモゴン（例えば外側 3 つの数のみ与えられている）が与えられ，これまでの問題を振り返り, 探究する必要が生まれる. そして，探究を通して，外側の数と内側の数との関係

に着目してパターンを見出し，見出したパターンを用いて問題解決を行う．このように，Müller& Wiitmann（2004）は，パターンの科学としての数学観に基づき，パターンを見出し，見出したパターンを用いて考察するという活動を重視していることが示唆された．

(2)日本の先行研究

佐々・山本（2009）は，証明指導において証明の論理的厳密性や記述の形式性ばかりを重んじるのではなく，子どもの活動としての証明に価値を置き，Wittmann によって提唱された具体物の操作を通して数学的現象を説明する「操作的証明（Operative proof)」に着目した．そして,「ANNA 数」をもとに開発した題材「魔法の数」がもつパターンを，児童が「操作的証明（Operative proof)」によって説明することを意図した授業を実践･分析した．分析から，探究を通して見出したパターンを「操作的証明（Operative proof)」によって説明することは難しいものの，おはじきに対する操作と関係づけて解釈することは可能であるという児童の実態を明らかにしている．また,「操作的証明（Operative proof)」という概念を取り入れる際には，日本における従来からの指導との対応を十分に検討する必要性があることを指摘している．

一方，布川（2013, 2016）は，小学校算数科から中学校数学科への学習内容の移行について，パターンの科学としての数学観を算数と数学の関係を考える際の視点として援用し，考察している．そして，パターンの探究の過程は「具体的な場面からパターンを見いだし，それを記述し規定する段階」(布川, 2016, p.4）と「パターン自体を探求･考察の対象とする」（布川，2016, p.4）段階があることを指摘している．また，小学校算数科から中学校数学科への移行について考察する際は，児童生徒の学習活動がパターンを記述する活動なのか，あるいはパターン自体を対象に探究する活動なのかという視点で吟味できるとしている．

(3)先行研究の基礎的考察から得られる課題

パターンの科学としての数学観を学校数学に適用した先行研究の基礎的考察から先述した示唆が得られるものの，そもそも探究過程において児童生徒がどのようにパターンを見出すのか，見出したパターンをどのように解釈するのかについての詳細までは明らかになっていない．また，パターンを見出し，見出したパターンを用いて考察することによってどのように数学的概念を理解していくのかについても明らかに出来ていない．従って，これらの点について検討する必要がある．さらには，布川（2013, 2016）を除き，日本の数学教育学研究においてパターンの科学としての数学観に基づいた具体的な事例の検討は佐々・山本（2009）のように海外の事例をもとにしたトピック的な教材ばかりであり，日本の現行のカリキュラムにある既存の教材に焦点を当てて検討した先行研究は管見の限りない．そこで，3 章では日本の現行のカリキュラムにある既存の教材，及び，現行のカリキュラムにおいても位置付けられる教材の探究過程を記述し考察することを通して，探究過程においてパターンを見出す過程，また，見出したパターンと事象を関係づけて解釈する過程について検討する．

4. パターンを見出す過程と解釈する過程に焦点をあてた事例の考察（3 章）

(1) パターンを洗練する事例「多角形の角の大きさの和」の問題

①教材の概要

多角形の角の大きさの和について，児童は小学校第 5 学年において学習する．その際，三角形,四角形の角の大きさの和が 180°, 360°であることは既習である．児童は，既習を前提に，五角形，六角形と角の個数を 1 つずつ増やしながら多角形の角の大きさの和を求めていく．その際，例えば次のように多角形を三角形と四角形に分割して解決を行うことがしばしばある．

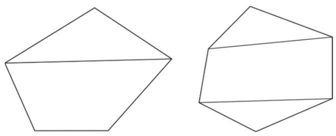


図 4-1 しばしば見られる解決の例

本研究においては，探究過程を記述するにあたり，児童は三角形，四角形の角の大きさの和が 180°，360°であることを前提として，五角形,六角形の角の大きさの和を,図 4-1 のように三角形と四角形に分割して求めたと仮定する．また，五角形，六角形の角の大きさの和を求めた後，教師が「何角形の角の大きさの和まで求められるだろうか」という問題を提示したと想定して,探究過程を記述する．

②想定される探究過程

本稿では，想定される探究過程のうち，特徴的な活動がみられた過程のみ記述する．

(a) 探究の契機となるパターンを見出す過程

先に示した図 4-1 の解決は，五角形，六角形の角の大きさの和を，三角形と四角形の核の大きさの和をもとにして求めようとしていると考えられる．このとき,「多角形は三角形，四角形に分割することができる」というパターン（P_A）を見出している．次に七角形の核の大きさの和について考察すると，分割の仕方は多様である（図 4-2）．

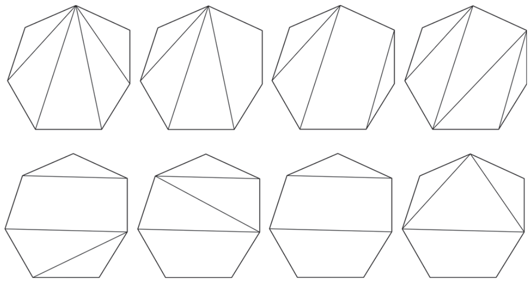


図 4-2 想定される多様な分割の仕方

これらの解決のうち，どの場合でもP_Aは成り立ち，角の大きさの和を求めることができる．しかし，角の個数を増やして多角形の角の大きさの和を求めていくとき，P_Aを用いるだけでは，考察対象となる多角形の全てに補助線を引いて分割した三角形，四角形の個数を数え上げる必要があり,煩わしい.だから，図 4-1 の図について，そこにパターンを見出すことができないかと吟味する．即ち，五角形，六角形の角の大きさの和を求めるときに補助線を引いた図を観察し，両者に共通する図の見方がないかと吟味する．

五角形，六角形の角の大きさの和を求めた図形では，どちらもまず三角形に分割し，次にその三角形と 1 辺を共有する四角形に分割したとみることができる.このような五角形,六角形に共通する図形の見方によって，分割の仕方自体をパターンとみなすのである．七角形においてもこのパターンが成り立つように分割しようと思考する．即ち，初めに三角形に分割し，次にその三角形と 1 辺を共有する四角形に分割するように補助線を引くと 2 つの場合が考えられる（図 4-3）．

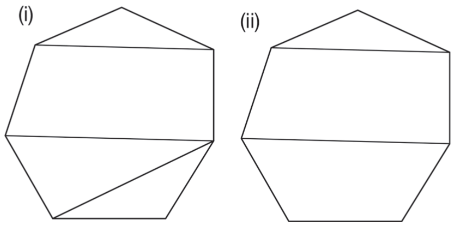


図 4-3 抽出される七角形の分割の仕方

つまり，三角形，次に四角形ができるように補助線を引き，残った部分をさらに三角形ができるように分割するか（(i)の解決)，四角形のままにするか（(ii)の解決）の 2 つの場合である. 図 4-3 のように補助線を引くことで，五角形，六角形，七角形は分割の仕方にパターンを成り立たせながら各多角形の角の大きさの和を求めることができるのである.

例えば，(i)のようにして，八角形，九角形と角の大きさの和を求めていく場合，各多角形は, まず三角形 1 つと四角形 1 つに分割し，それと三角形いくつ分かに分割するように補助線を引くことになる．従って，P_Aに比べ多角形を分割する三角形，四角形の個数をより限定した「多角形は三角形 1 つ，四角形 1 つと三角形幾つかに分割することができる」というパターン（以下，P_{B_1}）を見出す．数学的表現の書き方自体も何らかのパターンを記述するとして吟味し，P_{B_1}を見出すことによって，多様な解決がある者の中から，見出したパターンが成り立つような解決のみが抽出され，パターン自体を探究・考察の対象とするパターンの探究へと進展していくのである.

(b)パターン自体を探究・考察の対象として新たなパターンを見出す過程

探究を通し，図 4-4 のように，多角形を三角形のみで分割する図の見方をすることによって，多角形は，角の個数から 2 を引いた値個の三角形に分割できる」という図としてのパターン（以下，P_{H_1}）を見出し，角の大きさの和について，「多角形の角の大きさの和は，180° と角の個数から 2 を引いた値との積である」というパターン（以下，P_{I_1}）を見出す.

図 4-4 三角形のみで分割する図の見方

しかし，なぜ多角形は角の個数から 2 を引いた値個の三角形に分割できるのだろうかと思考してみると, 確かに, 三角形は 3-2=1(個)，四角形は 4-2=2(個)，五角形は 5-2=3(個)，六角形は 6-2=4(個)，七角形は 7-2=5(個)，八角形は 8-2=6(個)，九角形は 9-2=7(個)の三角形に分割できるが，一見図 4-4 を観察しても，一つ一つの三角形が対応する一貫した図の見方にパターンを見出すことは難しい. そこで，改めて図 4-4 を，多角形を分割した一つ一つの三角形の数え上げ方にパターンを見出そうと観察する.

すると，四角形，五角形の場合，各多角形は 1 つの頂点から対角線を引くことで三角形だけに分割されているという点で共通している．また，分割した三角形は対角線を引いた 1 つの頂点をつくる 2 辺を除く各辺に一つずつ対応していると捉えられる（図 4-5).

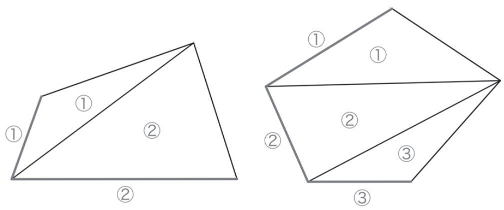


図 4-5 三角形を各辺と対応させる見方①

従って，四角形，五角形を分割した三角形の個数は, 角の個数から 2 を引いた値ではなく，対角線を引く 1 つの頂点をつくる 2 本の辺を

除いた辺の本数，即ち，辺の本数から 2 を引いた値であると解釈できる．また，三角形の場合は，対角線は 0 本であり，1 つの頂点を定め，それをつくる 2 本の辺を除いた辺の本数，即ち，1 個の三角形によって分割されていると解釈できる．よって，各多角形の角の個数と辺の本数は同じであるため，各多角形を三角形だけに分割したときにできる三角形の個数は,「角の個数から 2 を引いた値」ではなく「辺の本数から 2 を引いた値」であるとして解釈を修正するのである．

しかし，六角形，七角形，八角形，九角形は，1 つの頂点から対角線を引いていないため，分割した三角形の個数をこのような解釈とは図が対応していない．そこで，四角形，五角形の図を観察し，補助線は，1 つの頂点から対角線を引くことによって多角形を三角形だけで分割するように引いたとみなす．そして，この分割の仕方をパターンとみなし，パターンが成り立つように,六角形,七角形,八角形，九角形に改めて補助線を引いて三角形だけに分割すると，確かに，分割した三角形は，対角線を引いた 1 つの頂点をつくる 2 辺を除く各辺に対応していることが分かる．

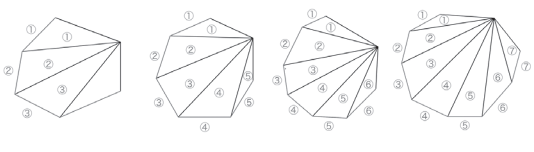


図 4-6 三角形を各辺と対応させる見方②

すると，図 4-5,4-6 より，どの多角形も，1 つの頂点から対角線を引くことによって，その頂点をつくる 2 辺を除く各辺に対応する三角形によって分割することができている．このような図の見方をして，各多角形を分割する三角形の個数とそれに対応する辺の本数との関係に着目する．そして,「多角形は，辺の本数から 2 引いた値個の三角形によって分割することができる」というパターン（以下，P_{J_1}）を見出す. また, P_{J_1}を見出すことにより，各多角形の角の大きさの和について,「多角形の角の大きさの和は，180° と辺の本数から 2 を引いた値との積である」というパターン（以下，P_{K_1}）を見出すのである．

③探究過程の考察から得られる示唆

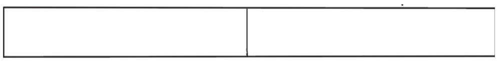
探究過程の考察から，前者の探究の契機となるパターンを見出す過程では，図・式，表といった数学的表現のかき方自体も何らかのパターンを記述するとして吟味する活動が行われることが示唆される．また，吟味し，パターンとみなしたものが成り立つように探究を進めることで，様々なパターンを創造することができ，事象への考察を深めていくと考える．他方，見出したパターン自体を探究・考察の対象として新たなパターンを見出す過程では，見出したパターン自体を探究・考察の対象とすることによって図，式，表といった数学的表現を変更するという活動が行われることが示唆される．また，この活動が行われる場合の一つとして，探究・考察の対象であるパターンを見出した数学的表現のままでは，見出したパターンを事象と関係付けて解釈できない場合があると考える．さらには，見出したパターンと事象と関係づけて解釈することができるように数学的表現を変更し，新たなパターンを見出すことを通して，探究過程において見出すパターンは，初めは図や式，表といった個々の数学的表現から見出されるものの，探究が進むに連れ，事象と関係づけて解釈できるものへと洗練していくと考える．

(2)パターンの解釈を通して事象を理解する事例「折り目」の問題

①教材の概要

設定した教材は以下の通りである．

表 4-1 教材「折り目の問題」

> 横長の細い長方形の形をした紙があります．この紙の両端がぴったりと重なるように半分に折ると，下図のように折り目が 1 本できます．
>
> 
>
> これと同じことを 10 回繰り返したとすると折り目はいくつできると予想できますか．また，その予想は本当に正しいですか．確かめなさい．

教材の対象は小学校第 5 学年とする．問題の解決にあたっては変化する数量の関係に着目する．求めたい数量である 10 回折った時の折り目の本数に対して，それと関係のある他の数量を用いて調べられないかと考え，事象を観察し，伴って変わる二つの数量を見出す．そして，その伴って変わる二つの数量の関係を図や表や式を用いて表し，数量の間の変化や対応の特徴を考察してパターンを見出す．本教材の探究においては，横長の細い長方形の形をした紙を児童に与えることにする．児童は初め，実際に紙を折るという操作を行い，問題を解決していくと考えられる．しかし，実際に 10 回紙を折ろうとすると，紙を綺麗に折ることができない．そこで，実際に紙を折ることができた結果からパターンを見出し，そのパターンを用いて問題を解決することが想定される．よって，求めた 10 回折った時の折り目の本数が本当に正しいと言えるか，その真偽を紙にできた折り目の本数を数え上げることによって確かめることができないのである．問題解決の過程を振り返り，問題解決に用いたパターンを事象と関係づけて解釈することによって，それが本当に正しいと言えるかについて確かめる必要が生まれる．

②想定される探究過程

実際に折ることができた場合から，折った回数とそれに対応する折り目の本数を表にまとめ，「折る回数と折り目の本数の関係」に着目し，パターンを見出す．

表 4-2 折る回数に対応する折り目の本数

回数（回）	1	2	3	4	5	…
折り目（本）	1	3	7	15	31	…

すると，表における数値の関係に着目し，「折る回数を 1 多くしたときの折り目の本数は，折る回数を 1 多くする前の折り目の本数を 2 倍して 1 を加えた値になる」というパターン（P_A）を見出す．見出したP_Aを用いることによって，6 回，7 回，…と紙を折る回数を増やした場合の折り目の本数を求めていき，

$$
\begin{aligned}
&(10\text{回折った時の折り目の本数})\\
&=(9\text{回折った時の折り目の本数})\times 2+1\\
&=511\times 2+1\\
&=1023(\text{本})
\end{aligned}
$$

として問題に対する回答を得る．しかし，P_Aが正しいことを確かめていない以上，この回答が正しいとは言い切れない．そこで，P_Aを事象と関係づけて解釈していく．

紙を折る回数を 1 回ずつ増やしていくと，次のように折り目ができていっていることが観察できる（図 4-7）．

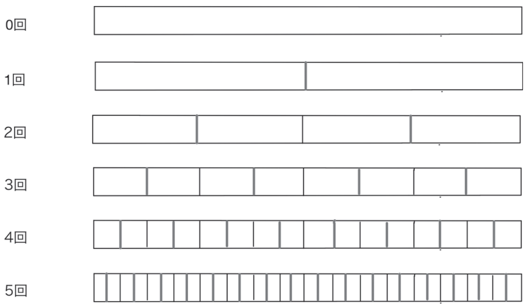


図 4-7 折った回数と対応する折り目の様子

つまり，折る回数を 1 多くする前の紙にできている各区画の真ん中に新たに折り目ができているのである．さらには，初めに折ったときの折り目を対象の軸として，左右に紙を折る回数を 1 回増やす前の長方形ができているとみることができる．このような図の見方により,「紙をある回数だけ折って開いたとき，紙を 1 回折ったときにできる折り目を対称の軸にして，その左右に紙をある回数より 1 回少ない回数だけ折って開いたときの長方形ができる」というパターン（P_B）を見出す．

また，P_Bを見出すことによって，折り目の本数について,「紙をある回数だけ折った時の折り目の本数は，紙をある回数より 1 回少ない回数だけ折って開いたときの折り目の本数を 2 倍した値に，紙を 1 回折った時にできる折り目の本数 1 を加えた値と一致する」というパターン（P_C）を見出す．

そして，P_Aは，P_B,P_C を基にして,「紙をある回数折った時，初めに折った時にできる折り目を対象の軸として，その両側にある回数より 1 回少ない回数だけ折ったときと同じ折り目ができる．そのため，紙をある回数折った時の折り目の本数は，紙をある回数より 1 回少ない回数だけ折ったときの折り目の本数を 2 倍した本数と，紙を初めに折った時にできる折り目 1 本との和となる」と事象と関係付けて解釈することができる．よって，P_Aを用いて求めた 10 回折った時の折り目の本数 1023 本は正しいと結論づくのである．

③探究過程の考察から得られる示唆

問題の解決を志向して探究を行うとき，初めに事象における数量に着目して，数量のみを抽象し，その変化の様子を表などによって整理することを通して，数値の関係からパターンを見出し，見出したパターンを用いて問題を解決することはしばしば見られる．問題の解答が得られると，問題の解決に用いたパターンがなぜ成り立つのか事象と関係付けて解釈しないままに探究を終えてしまうことが少なくないと考える．しかし，問題の解決に用いたパターン自体を探究・考察の対象として事象と関係付けて解釈することは，問題解決の妥当性を確かめるだけに止まらない価値があると考える．

本事例で考察したように，問題の解決に用いたパターン自体を探究・考察の対象として事象と関係付けて解釈する過程では，事象を図に表現し，問題解決に用いたパターンを対応づけるという活動が行われると考える．また，探究過程では，図に表現する際，図のかき方と事象とを対応づけることで，見出したパターンを事象と関係付けて解釈することができたり，新たなパターンを見出すことができたりする場合があった．更に，見出した新たなパターンをもとにして元の探究・考察の対象であるパターンを事象と関係付けて解釈することが可能となる場合があった.従って，問題の解決のためにパターンを見出し，それを用いて解決するだけでなく，問題の解決に用いたパターン自体を探究・考察の対象として事象と関係づけて解釈することは，問題解

決の妥当性を確かめるだけでなく，新たなパターンを見出すことにもつながり，問題における事象そのものに対する更なる探究へと進展する契機となり得ると考える．

5. 本研究の総括と今後の課題

本研究の目的は，パターンの科学としての数学観に基づき，日本の現行のカリキュラムに位置付けられている内容についての探究過程における，パターンを見出す過程，見出したパターンと事象とを関係付けて解釈する過程に焦点を当て，その様相を明らかにすることである．

結果，前者の過程では，図，式，表といった数学的表現のみならず，それらのかき方自体も何らかのパターンを記述するとして吟味するという活動，見出したパターン自体を探究・考察の対象とすることによって，パターンと事象の対応を見直し，図，式，表といった数学的表現を変更するという活動が行われることが明らかとなった．そして，後者の過程では，事象を図に表現し，問題解決に用いたパターンを対応づけるという活動,「数量の変化」を,「事象の変化」と対応づけるという活動が行われることが明らかとなった．

今後の課題は，検討した事例を教材として授業実践を行うことで，生徒が実際に行う探究の様相を捉え，探究過程における生徒にとっての構成要素を明確化し，学習指導への示唆を得ることである．

引用・参考文献

キース・デブリン（1995）．数学：パターンの科学—宇宙・生命・秩序の探究（山下純一訳）．日経サイエンス社．（原著出版1994年）

Müller, G. N.& Wiitmann, E Ch.(2004)．Das Zahlenbuch 1, Schuljahr, Lehrband. Klett.

布川和彦（2013）.「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討．上越教育大学研究紀要，32，pp.169-180.

布川和彦（2016）.「数学＝パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察．日本数学教育学会誌，98(4)，3-14.
https://doi.org/10.32296/jjsme.98.4_3
（2024/5/6 最終確認）

Steen, L. A.（1988）．The science of patterns. Science，240(4852)，611-616.
https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611　（2024/5/6 最終確認）

佐々祐之・山本信也（2009）．数学教育における操作的証明に関する研究～おはじきと位取り表による操作的証明の事例から～. 日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論文集論文発表の部，553-558.

W.W.ソーヤー（1978）. 数学へのプレリュード（宮本俊雄・田中勇共訳）. 美鈴書房.（原著出版1955年）

Wittmann, E. Ch.（2005）．Mathematics as the Science of Patterns — A Guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.

（よこやま　かずたか
札幌市立平岸中学校
〒062-0931　北海道札幌市豊平区平岸1条21丁目3-1）