学校数学における仮説的学習軌道を視点とした授業設計に関する研究：周期関数を事例として

学校数学における仮説的学習軌道を視点とした授業設計に関する研究
―周期関数を事例として―

登野　皓志

要　約

本研究の目的は，概念的理解を志向した問題解決型の授業を実現するために仮説的学習軌道を視点として授業設計の枠組みを開発することである．そのために，第 1 に先行研究から仮説的学習軌道を枠組みとして用いる価値と課題を明らかにした．第 2 に，一連のタスク設計の考察を通して枠組みを開発した．第 3 に，周期関数を事例に，開発した枠組みに基づき授業を設計し，2 人の学生を対象に実践を行った．そして，本研究における最終的な枠組みを明らかにした．

本論文の構成

1．本研究の背景と目的

我が国の数学教育では従来から問題解決型の授業の重要性が謳われてきた．しかし，現状としては最初から問題解決できている生徒が発表して終わったり，生徒の誰一人解決できず結局教師が説明してしまったりする授業が度々行われている．また，小学校，中学校，高等学校と学校段階が上がるにつれて，行わ

れなくなっていく現状がある．このような実態となっている要因は様々考えられるが，その 1 つとして問題解決型の授業設計の枠組みが理論的に明らかとなっていないことがあると考えられる．

そこで，本研究では Simon(1995)及びその後 Simon を含めた複数の研究者によって精緻化されてきた仮説的学習軌道に着目する．仮説的学習軌道は，概念的理解を促すことを意図し，そのためにピアジェの反省的抽象を背景とした生徒の活動を重視した指導設計の枠組みである．日本の問題解決型の授業が生徒の活動を重視してきたことを踏まえると，仮説的学習軌道は問題解決型の授業設計に対して示唆に富むと考えられる．一方で，1 対 1 の教授実験の中で発展してきた枠組みであるため，集団授業で用いることができるかどうかは検討の余地がある．

以上より，本研究の目的は，概念的理解を志向した問題解決型の授業を実現するために仮説的学習軌道を視点とした授業設計の枠組みを開発することである．この目的を達成するために次の 3 つの方法をとる．第 1 に Simon(1995)および Simon et al.(2018)をもとに仮説的学習軌道に関する基礎的考察を行い，仮説的学習軌道における授業設計の課題点を明らかにする（第 1 章）．第 2 に仮説的学習軌道の精緻化における理論的背景を整理したうえで，タスクの役割について考察し，それをもとに本研究における授業設計の枠組みを開発する（第 2 章）．第 3 に開発した枠組みが有効であるかを，周期関数を事例とし，教授実験により検証する．また，教授実験をもとに開発した授業設計の枠組みの有効性と課題点を考察し，修正する（第 3 章）．

２．仮説的学習軌道に関する基礎的考察

(1)仮説的学習軌道に着目する理由

仮説的学習軌道は構成主義の立場に立ち，生徒が自身の活動を通して数学的概念を構築していくことを促すための学習指導を，どのように設計するかを考えるための枠組みである．さらに，Simon を含む複数の研究者たちは Learning Through Activity 研究プログラムにおいて，ピアジェの反省的抽象を背景に，生徒の活動を詳細に分析し，その分析から仮説的学習軌道設計の枠組みを精緻化している．したがって，仮説的学習軌道に着目することで生徒の活動及び特定の数学的概念の学習を緻密に検討することができ，問題解決型の授業を設計する際に有用な枠組みであると考えられる．

(2)Simon(1995)における仮説的学習軌道とその構成要素

仮説的学習軌道は Simon が教師として行った教授実験における教師の意思決定に着目し，教師の役割を分析したことから導かれた数学指導サイクルの一部である(図 1)．

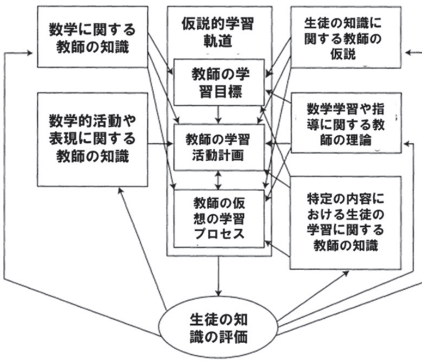

図１：数学指導サイクル

（Simon, 1995, p. 137, Figure5, 筆者和訳）

図 1 からもわかるように，仮説的学習軌道は方向性を定めるために教師が設計する学習目標(以降，学習目標)，学習目標を達成するた

めに教師が設計する生徒の学習活動計画(以降，学習活動)，学習活動の文脈の中で生徒の思考や理解がどのように発展するかを予測する仮想の学習プロセス(以降，仮想の学習プロセス)の3つから構成される．

(3) Simon et al. (2018)における仮説的学習軌道の設計

Simon(1995)では，仮説的学習軌道の3つの構成要素が明らかにされた一方で，その設計については明らかとなっていなかった．Simon et al.(2018)は，仮説的学習軌道の設計を，Simonを含む複数の研究者によるLearning Through Activity 研究プログラムの成果に基づいて4つの段階として明らかにしている．それは以下の通りである．

①生徒の現在の理解を評価する
②生徒の現在の知識に基づいた学習目標，つまり数学的概念を明確にする．
③学習目標の数学的概念の基礎となる生徒が現在利用できる活動を特定する．
④第3で明らかにした活動を引き出すと同時に，学習目標となる数学的概念が構築されるように反省的抽象（概念の調整）を促す一連のタスクを設計する．

(Simon et al., 2018, p.104，筆者整理)

この4つの段階において第2が仮説的学習軌道の学習目標の設計に，第3・第4が学習活動及び仮想の学習プロセスの設計に対応する．ここで，学習活動と仮想の学習プロセスは相互作用的な関係であるため第3・第4段階において明確に分けることができるものではないことに注意する．

(4) 仮説的学習軌道の課題

Simon et al.(2018)で明らかにされた仮説的学習軌道の4つの段階における設計は，生徒の活動を精緻に検討して得られた枠組みであるため示唆に富む一方で，一連のタスクの設計を志向しているためそのまま授業設計の枠組みとして用いることはできないという課題がある．30から40人に対する授業を前提した問題解決型の授業の設計枠組みを考える際，事前にタスクを1つ1つ設計し，それを順次解決させることを前提とした設計は適切ではない．

したがって，この4段階目について問題解決型の授業に適合するように修正する必要があると考える．

３．仮説的学習軌道を視点とした授業設計の枠組みの開発

(1) 仮説的学習軌道における学習目標の設計に対する検討

4段階目を修正するにあたり，まず学習目標となる数学的概念の意味を整理した．Simon(2017)によると，仮説的学習軌道における学習目標は数学的概念を明確にすることである．ここで，数学的概念とは「特定の数学的関係に関わる論理的必然性について，研究者が意図または推測した生徒の知識を明確にしたもの」(Simon, 2017, p.123)である．この説明で重要な点は，論理的必然性の有無である．論理的必然性のない学習者の知識モデルは数学的観念として区別される．

(2) 仮説的学習軌道における学習活動・仮想の学習プロセスの設計に対する検討

次に，概念の調整について整理した．概念の調整はピアジェの反省的抽象を精緻化したものである．ピアジェは反省的抽象を「行動の調整(coordination of actions)」と解釈していたのに対し，Simon et al.(2016)は行動の背後

には目標があることを指摘し，目標と行動のセットを概念と捉え，反省的抽象を「概念の調整(coordination of concepts)」と解釈した．Simon et al.(2016)における概念の調整は端的にいえば,「下位レベルの行動に基づく新しい概念の構築」(p.81)である．つまり，単にこれまで行っていた一連の行動を省略した結果に着目するのではなく，それらの一連の行動から概念が調整され，新たな上位の行動をとるようになることが重要である．

Simon et al.(2016)では概念の調整を記号を用いて表記している．この表記について説明するとともに，より詳細に概念の調整のプロセスを説明する．先の概念の定義より，概念を「G_n-A_n」と表記する．G_nは目標（Goal）であり，A_nは目標を達成する結果を生み出す利用可能な行動（Action）である．また，添え字のnは概念及び，概念を構成する目標と行動を異なるレベルで語れるようにするためである．ここで，添え字1はこれから構成される概念に使用し，添え字0はこれから構成しようとしている概念の基礎となる概念に使用する．概念学習はG_{0a}-A_{0a}及びG_{0b}-A_{0b}からG_1-A_1へ発展するプロセスである．添え字のaやbは異なる概念を表している．さて，概念の調整は，学習者が与えられた数学的タスクに対して新しい目標を設定し，その目標を達成するための利用可能な行動のセットを呼びだすことから始まる．ここで設定される目標はタスク(Task)に依存した目標でありG_Tと表記する．G_Tは0レベルの目標であり，新たな学習なしに達成できる目標である．この最初のステップをG_T-(A_{0a}→A_{0b})と表記する．矢印は行動が順次行われることを意味し，この一連の行動のセットを「活動」と定義する．ただし,先に述べたように行動には目標が存在し，より正確にはG_T-(G_{0a}-A_{0a}→G_{0b}-A_{0b})であるが，簡単にG_T-(A_{0a}→A_{0b})と表記する．そして，この一連の行動を調整することで，より高次の行動であるA_1を行うようになる．

以上のような概念の調整による学習によって学習目標となる数学的概念が構築されていくのである．そして，このような概念の調整を促すためにSimon et al.(2018)では一連のタスクを設計することを行っている．

(3) 仮説的学習軌道を視点とした授業設計の枠組みの開発

これまでの検討から，Simon et al.(2018)における4つの段階による仮説的学習軌道の設計のうち4段階目の概念の調整を促す一連のタスクを設計する点を集団授業で適用可能とするために修正を試みる．そのために，Simonらが一連のタスクをどのように設計しているのかを考察する．

ここでは，タスク設計の詳細について述べられているSimon& Tzur(2004)の次の一連のタスクを考察の対象とする．

1. 1/2に影を付けた長方形を描きなさい．6つのパーツに等分割されるよう長方形に線を引きなさい．1/2の中にパーツはいくつあるか求めなさい．
2. 2/3に影を付けた長方形を描きなさい．12個のパーツに等分割されるように長方形に線を引きなさい．2/3=?/12の?を求めなさい．
3. 図をかいて以下の?を求めなさい．
   a. 3/4 = ?/8
   b. 4/5 = ?/15
   c. 3/4 = ?/20
4. 同値分数の問題を解決する際に図をかく

方法は，数が大きくなると嬉しくない．そこで，以下の?を図をかかずに，もし図をかくとしたら各ステップで何が起こるか記述し，?を求めなさい．

a. 5/9 = ?/90

b. 7/9 = ?/72

(Simon &Tzur, 2004, pp.97,99)

本稿では，紙幅の都合上タスク3のみに焦点を当てて考察を述べる．筆者がタスク3に取り組み，そこから想定される子どもの当初の目標と活動を Simon et al.(2016)の表記を用いて整理したものが以下である．

1. 長方形の分割と斜線によってもとの分数を表現し(A_{0a}),
2. もとの長方形が新たな分数の分母で分割されるように各パーツを何分割するか求め(A_{0b}),
3. 各パーツを細分化し(A_{0c}),
4. 斜線部分における細分化された小パーツの個数を求める(A_{0d})

そして，このときの目標(G_T)は，斜線で色を塗ったパーツの中にいくつの細分化されたパーツがあるかを数えることであると考えられる．つまり，タスク3に取り組む子どもは当初，G_T-(A_{0a}→A_{0b}→A_{0c}→A_{0d})という活動を行っていると想定される．しかし，タスク3の3つの?を求めていく中で，a ではパーツを2分割して小パーツを6個数え上げればよいが，c ではパーツを5分割して小パーツを15個数え上げなければならない．そこで，子どもは「数えることが大変だな」,「もっと楽に数えたいな」と考えることが想定される．つまり，当初の目標(G_T)から，楽に斜線で色を塗ったパーツの中にいくつの細分化されたパーツがあるかを数えるというように目標(G_T)が変化することが概念の調整を促す要因となっていると考えられる．

以上のことから，一連のタスクではなくとも，生徒が設定する目標(G_T)が変化するような手立てを設計することで概念の調整を促すことができると考えられる．この点を踏まえ，開発した枠組みが図2である．

ただし，③については2つの理由で3つに細分化した．1つ目は，Simon et al.(2018)の3段階目は考える土台となるものがないと考えることが難しいためである．2つ目は，集団授業を前提としているため，複数の活動を予測する必要があるためである．ただし，C を行い，概念の調整の基礎となる活動が見出されなかった場合，再び A，B を行う必要がある．

①	生徒の現在の理解を評価する．
②	生徒の現在の知識に基づいた学習目標，つまり数学的概念を G－A の表記を用いて明確にする
③	A)問題を設定する B)問題に対する生徒の活動を予想する C)学習目標の数学的概念の基礎となる，生徒が現在利用できる活動を特定する
④	第3で明らかにした活動を引き出すと同時に，学習目標となる数学的概念が構築されるように反省的抽象(概念の調整)を引き起こす手立て(＝G_Tの変化を促す手立て)を設計する．

図2：開発した授業設計の枠組み

４．開発した授業設計の枠組みの検証

(1) 教授実験の目的と方法

本研究では学習者２人に対して教師が１人の形式で教授実験を行う．教授実験の目的は，G_T の変化を促す手立てが学習者の概念の調整を促すために有効であったかを明らかにすることである．教授実験の概要は以下の通りである．

対象：都内国立大学教員養成課程数学科(第4学年) 学生２名

実施時期：2023 年 12 月 26 日（火）

実施時間：約 115 分

データは教師の板書及び学生２名の手元を写したビデオカメラ計３台を用いて記録した．教授実験終了後，音声データについてはトランスクリプトを起こした．

(2) 教授実験の計画：開発した授業設計の枠組みに基づく教授実験の設計

ここでは開発した枠組みを基に授業を設計していく．ただし，本研究の性質上，日頃から授業を行っている生徒を対象としているわけではないため，本稿では１段階目を割愛する．

設計の２段階目について，学習目標は以下のように表せる．

G：周期関数かどうか判断する．

A：任意の y の値が等しい箇所を見出し，$f(x+\omega)=f(x)$が成り立つかどうか調べる．

設計の３段階目について，まず問題は「$y=\sin\frac{1}{2}x+2\sin(x+\frac{\pi}{4})$は周期関数か？」である．この問題で工夫した点は４点ある．本稿では特に重要な２点を挙げる．１点目はグラフの概形を与えなかったことである．２点目は$y=\sin\frac{1}{2}x$と$y=2\sin(x+\frac{\pi}{4})$の２つのグラフが描かれたグラフ用紙を与えたことである．１点目について，グラフの概形を与えないことでグラフを学生自身で描くことが想定され，そのグラフから周期関数と判断すると考えられる．しかし，そのグラフはすべての点をプロットして描いたわけではないため，周期関数と言いきれるかどうかは疑問が残ると考えられる．これにより，$f(x+\omega)=f(x)$が成り立つかどうか調べる方法が有効な解決であると認識されると考えられる．２点目について，グラフ用紙を与えることで点をプロットして描くことを促し，$f(x+\omega)=f(x)$をグラフの点と関連付けて捉えることを促すと考えられる．

次に，学生の活動の予想と概念の調整の基礎となる活動の特定について，本稿ではそのうちの１つを挙げる．それは，与えられた２つの関数のグラフを基にプロットし，その各点を結ぶ．出来上がった曲線から周期を見出し，周期関数と判断するという活動である．これは，以下のように表記される．

G_T：周期関数か判断する．

G_{0a}：和の関数のグラフを描く．

A_{0a}：もとの関数のグラフを利用してプロットし，それを結ぶ．

G_{0b}：周期を見出す．

A_{0b}：繰り返されているユニットを見出し，その長さを求める．

この活動は，概念の調整の基礎となる活動であると考えられる．

設計の４段階目について，G_Tの変化を促すような手立てを３つ設計した．１つ目は，自分自身でグラフを描くことを促すような問題用紙にしたことである．２つ目は，学生が周期関数であると判断した際に「周期関数とどのように判断したの？」と発問することであ

る．1 つ目の手立てによってグラフの概形を描き，そのグラフから周期関数であると判断すると考えられる．その際に 2 つ目の手立てである発問を行い，解決初期に想定される G_T「周期関数か判断する」という目標から，「周期関数か明確に判断する」という目標へ変化するよう促す．一方で，この発問をした際に想定されるのは,「ずっと同じ形が繰り返されている」と自身が捉えたグラフの概形について説明するだけの反応である．そこで，手立ての 3 つ目として「ずっと繰り返されているというのは本当か？」と発問することである．この発問によって，判断した根拠が曖昧であることを認識させ，周期関数と判断する根拠を明確にしようという目標への変化を促す．

(3) 教授実験の概要

教授実験では,佐藤と高橋(いずれも仮名）の学生 2 人と筆者の 3 名によって行われた．教授実験は，8 つの場面に分けられる．1 つ目は，問題を自力解決する場面である．2 つ目は，それぞれの自力解決を共有する場面である．3 つ目は，佐藤の表による解決を 2 人で行う場面である．4 つ目は，周期関数の具体について考える場面である．5 つ目は，グラフを描いて解決する場面である．6 つ目は周期関数となる根拠についてグラフを基に考える場面である．7 つ目は周期関数となる根拠を式を基に考える場面である．8 つ目は評価課題を解決する場面である．

以下の(4)(5)(6)では，主に 5 つ目の場面以降について述べる．

(4) 教授実験における活動の分析①：佐藤の活動

佐藤の活動を Simon et al.(2016)の表記を用いて，G_{0a}-A_{0a} から G_{0k}-A_{0k} で整理した．そして，教授実験中の各行動を G_{0a}-A_{0a} から G_{0c}-A_{0c}，G_{0d}-A_{0d} から G_{0f}-A_{0f}，G_{0d}-A_{0d} から G_{0k}-A_{0k} の 3 つに分け，それぞれの活動に対するタスクに依存した目標を分析した．

そして,評価課題における佐藤の行動から,佐藤は教授実験において概念の調整をしたと考察した．

(5) 教授実験における活動の分析②：高橋の活動

高橋の活動を Simon et al.(2016)の表記を用いて，G_{0a}-A_{0a} から G_{0l}-A_{0l} で整理した．そして，教授実験中の各行動を G_{0a}-A_{0a} から G_{0e}-A_{0e}，G_{0d}-A_{0d} から G_{0l}-A_{0l} の 2 つに分け，それぞれの活動に対するタスクに依存した目標を分析した．

そして，評価課題における高橋の行動から高橋は教授実験において概念の調整をしたと考察した．

(6) 開発した授業設計の枠組みに対する考察

本稿では，佐藤の概念の調整に焦点を当てて授業設計の枠組みに対する考察を行う．

まず，佐藤は 2 つの関数のグラフを基にプロットし，その各点を結んで曲線を描いた．その後，高さが等しい 2 点を指で指し示しながら「なんかおんなじ」と発言した．つまり，手立ての 1 つ目である，自身でグラフを描くことは促すことができた．さらに佐藤は，自身で描いたグラフを基に周期関数と判断した．この時の佐藤の G_T は，「和の関数が周期関数か判断する」であったと考えられる．

そのあとの教師と佐藤のやり取りは以下の通りである．

教師：これ，周期関数…周期関数？になりそう？

佐藤：なりそう．

教師：もっかいその理由何だっけ？

佐藤：えっと，その一定の区間で同じグラフの，概形が繰り返されてるから．

（中略）

教師：から，周期関数？この同じ形が繰り返されているっていうのはさ，どういうこと？

佐藤：えっと，なんていえばいい．ここでいえば，その 4π 区間分は，が何回も繰り返される．

教師：それほんと？

教師は，手立ての 2 つ目として周期関数と判断した根拠を問うた．それに対し，佐藤は自身が描いたグラフを根拠に判断したことを述べた．それを受けて，教師は手立て 3 つ目として同じ形が繰り返されているのは本当か問うた．この一連の手立てに対し，佐藤は再びグラフの概形について観察しており，同じ形が繰り返されているかどうかを視覚的に判断することに葛藤を抱いていないと考えられる．つまり，G_T が変化していないと考えられる．

しかし，その後佐藤の G_T は変化したと考えられる．その場面でのやり取りは以下の通りである．

教師：そのおんなじ形が繰り返されてるってのは？

佐藤：おんなじ値をとる…

（中略）

佐藤：4π，8π，12π，16π が全部同じ値，同じ数値になって，それとおんなじで，4π から 8π のどの値とっても…

（中略）

佐藤：4π から 8π までの値の変化の仕方と，8π から 12π までの変化の仕方

教師：変化の仕方と？

佐藤：が一緒

（中略）

教師：これはどうやっていうの？言えてる？

高橋：確かに

佐藤：んー，えー．

この場面で，同じ形が繰り返されるという意味について教師が問いかけると，佐藤は「値」や「数値」という表現を用いて説明した．そして，その表現で周期関数かどうか判断できているかを改めて問うと，佐藤は葛藤した様子を見せ，さらには 2 つの点の y 座標の値が等しいか調べる行動をとった．このことから，佐藤の G_T が「和の関数の値の変化が一定区間で同じことを明確にする」へと変化したと考えられる．

このように G_T が変化したのは，佐藤にとって埋没していた前提が議論の対象となったことが要因であると考えられる．教師とのやり取りの中で，佐藤は「同じ形」であることは「値が等しい」ことを意味するという埋没していた前提を明確にした．そして，教師がその前提を議論の対象としたことによって G_T が変化したと考えられる．

一方で，G_T が変化したがその後の行動は 1 つの行動ではなく複数の行動が行われた．つまり，概念の調整は G_T が変化することだけ促すことができるわけではないと考えられる．G_T が変化した直後の教師と学生 2 人のやり取りは以下の通りである．

高橋：え，でも，ここの，ここからここまでと，ここの青と，重なり方がずっと同じ．だから…

佐藤：あ，ほんとだ．

（中略）

教師：佐藤さん教えてもっかい．

佐藤：え，ここと，この間で，え，この緑と青，の曲線の重なり方が一緒．
教師：重なり方ってどういう意味？
（中略）
教師：これ（値の変化が一緒），言える？言える？根拠は？何だっけもう1回言って．
高橋：2 つの関数の重なり方じゃない．なんか，なんていえばいいんだ．
佐藤：この区間なら，青のグラフも緑のグラフも
教師：うん．
佐藤：おんなじ．
教師：おんなじ．形になってる．
佐藤・高橋：うん．
高橋：たしかにね．だって周期が 2 と 4 だからさ．そうなるよね．
佐藤：あー．
（中略）
高橋：緑が 4π で，青が 2π の周期．
佐藤：うん，そうだね．で，だから，でそのおっきい方の，緑の 4π の周期に合わせれば，そしたらもう，両方とも同じ…（中略）両方とも周期的に
教師：両方とも周期的に何？
佐藤：周期的に変化する．から，その和も周期的になる．

この場面では，当初 2 つのグラフの重なり方という表現を用いて，値の変化が同じであることを高橋が説明した．佐藤も同様にグラフの重なり方という表現を用いたが，佐藤はその後，教師とのやり取りの中でそれぞれのグラフが同じ形であるという表現に変えて説明した．その説明を受けて高橋は，周期という表現を用いて説明した．佐藤は高橋の説明を受けて，もとの 2 つの関数がどちらも周期 4π であることを付け加えて説明した．つまり，この場面における佐藤の説明に着目すると，高橋との相互作用によって，事象の説明に用いられる表現が「周期」という数学的な表現へと洗練されている．これによって，変化後の佐藤の G_T を達成することができていると考えられる．

佐藤はこの後の評価課題で，すぐに 2 つの関数の周期を求めて周期関数であると判断していることから，先述したように概念の調整をしたと考えられる．

以上より，概念の調整は 2 つの要因が重要であったと考えられる．1 つ目は，G_T の変化を促す手立てとして埋没した前提を議論の対象とすることである．2 つ目は，事象の説明に用いられる表現を数学的な表現へと洗練することである．これら 2 点を踏まえ，授業設計の枠組みの 4 段階目を以下のように修正した．

④	第 3 で明らかにした活動を引き出すと同時に，学習目標となる数学的概念が構築されるように反省的抽象(概念の調整)を引き起こす手立てを設計する． A)予想した活動において，多くの生徒にとっての埋没した前提が議論の対象となるような発問を検討する．(タスクに依存した目標の変化を促す) B)(事象に対して同一の部分に焦点をあてているときの)事象の説明に用いられる洗練された数学的な表現を検討する．

図 3：修正後の 4 段階目

５．本研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，概念的理解を志向した問題解決型の授業を実現するために仮説的学習軌道を視点とした授業設計の枠組みを開発することであった．この目的に対し，先行研究の理論的考察から図 2 に示した授業設計の枠組みを開発し，それに基づいて設計し，教授実験を実施した．教授実験から得られた知見を基に，図 3 に示したように枠組みの 4 段階目開発した枠組みを修正した．

今後の課題は，第 1 に開発した授業設計の枠組みを用いて授業を設計，実施しその有効性と課題を検証することである．第 2 に概念の調整という理論で表現できる学習プロセスの適用範囲を明らかにすることである．

引用・参考文献

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M., &Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning,6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Simon, M., Placa, N., &Avitzur, A. (2016). Participatory and anticipatory stages of mathematical concept learning: Further empirical and theoretical development. *Journal for Research in Mathematics Education,* 47(1), 63-93. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0063

Simon, M. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 117-137. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1

Simon, M., Kara, M., Placa, N.,& Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The learning through activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior,* 52, 95-112. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002

（との　こうじ
稲城市立稲城第三中学校
〒206-0812　東京都稲城市矢野口 3043 番地）