関数の考えを育成する高等学校数学科の教材開発：変数の見方に着目して

関数の考えを育成する高等学校数学科の教材開発
―変数の見方に着目して―

髙増　拳生

要　約

本研究の目的は，関数の考えが小中高を貫いて重要な数学的な見方・考え方であるという立場のもと，特に高等学校数学科で関数の考えの育成を志向した教材の開発を行うことである．第一に，関数の考えを概念規定したのちに数学教育的価値及び意義と課題について言及し，教材開発の必要性を指摘した．第二に，先行研究から高等学校で特に重視したい関数の考えの一側面を獲得し，これを変数の見方として五つに整理・規定し，教材開発の視点を明確化した．第三に，教材を開発し，その有効性を示した．

本論文の構成

０．本研究の背景と目的・方法

算数・数学科においては，数学的な見方・考え方の育成が目指されている．なかでも関数の考えはその育成に大きく貢献するものとして，算数・数学教育の歴史的にも特に重要視されてきた．関数の考えの本質は，「一つのもの」を「ほかのもの」と関係づけてみようとすることにあり，人間がものを「考える」，ものが「わかる」ということの本質でもある（中島，1982）．それゆえ，概念や法則を創造的に導いたり，算数・数学の内容をよりよく理解したりするためにも関数の考えは有用であり，関数領域に限らず至るところで有効な思考様式としての汎用性をもっている．しか

し，校種が上がるにつれて注目がされなくなり，高等学校において関数の考えはほとんど意識されていないと考える．筆者の大きな問題意識はここにあり，高等学校数学科においても，関数の考えを積極的に用いて問題解決に寄与させていく姿勢をもった生徒を育成したいと考える．以上より，本研究の目的は，関数の考えが小中高を貫いて重要な数学的な見方・考え方であるという立場のもと，特に高等学校数学科において関数の考えの育成を志向した教材を開発することである．第一に，先行研究を踏まえて関数の考えの概念規定を行い，関数の考えの数学教育的価値と高等学校数学科における意義と課題について考察する（第１章）．第二に，特に高等学校数学科において関数の考えを育成する教材を開発するための視点を明確化する（第２章）．第三に，教材を開発し，その教材の特徴づけと思考・解決過程の考察を行うことで，本研究の数学教育的価値を示す（第３章）．

１．関数の考えに関する基礎的考察

(1) 関数の考えの概念規定

関数の考えはこれまで先行研究において様々に定義されてきた（例えば，文部省，1973，1978；中島，1982）．まず，文部省（1973）が関数の考えを「依存関係に着目すること，関数関係を見つけたり，用いたりすること，関数関係を表現すること」（p.13）の大きく三つにまとめて考察していることを踏まえて，関数の考えがいくつかの思考が合わさって構成された考えであり，先行研究にみられる定義の差異は，これらの思考過程のどこに特に焦点を当てるかや，問題意識の所在によって生じるものであると考察した．

また，中島（1982）は，「新しく考察の対象としている未確定の，または複雑なことがら（これをyとして）を，よくわかった，または，コントロールしやすいことがら（x）をもとにして，簡単にとらえることができないか．このために，何を（変数x）として用いたらよいか．また，そのときに，対応のきまり（法則）fはどんなになるか」（p.181）というような考えに立つことを「関数の考え」の基盤としている．この記述から，yをとらえていくためにどんなxを見いだし，選択していくかという過程が重要であることが示唆される．このような依存関係への着目は，関数の考えにおいても軽視，あるいは欠如されがちである（黒澤，2021；有國，2018）ことを踏まえ，本研究においてもその重要性がより強調されるように関数の考えを「ある事象を調べていくために，変数となりうる数量を見いだし，選択する過程を経て，数量（あるいは広く集合）間の対応関係を捉え，それを問題解決に利用しようとしていく考え」と規定した．なお，上記のように概念規定をするにあたり，変数・数量といっても関数の考えを働かせる事象は図形や式などさまざまであり，必ずしも数や量に限定しないことにする．

(2) 関数の考えの数学教育的価値

本研究では，関数の考えの数学教育的価値を文部省（1973），中島（1982）を参考にして次の三つに整理した．

①科学的な探究の精神に基づいて事象を数理的にとらえて考察し，処理する能力・態度の育成と，その立場で概念や法則を創造的に導くことができるようにすること．

②算数・数学の内容のもつ意味について一層理解を深めていくことと，その立場で統合

的発展的な考察ができるようにすること．

③関数領域に限らず，図形や帰納・演繹的推論の場面などにおいても，関数の考えが重要な働きを担っていることを意識し，問題解決を有効にできるようにすること．

(3) 高等学校数学科における関数の考えの意義と課題

高等学校数学科においても関数の考えを考える意義は多くあるが，それにも関わらず関数の考えを育成するための学習指導や教材開発に関する研究がほとんど行われていないという現状がある．また，黒澤（2021）は，近年の全国学力・学習状況調査における関数の考えに関連した問題の正答率が低いことを挙げ，その原因の一つとして「関数の考えの第一歩」での教材等の未開発を挙げている．

そのため，一般に言われている関数の考えの課題を改善するのはもちろん，特に高等学校数学科に焦点をあてて研究を進めていくにあたって，高等学校での学習内容の特徴を生かしながら，関数の考えの育成を志向した教材の開発をする必要があると考える．

2．高等学校数学科に焦点をあてた関数の考えの教材開発の視点

(1) 高等学校数学科において特に重視したい関数の考えの一側面の獲得

高等学校数学科においては多変数の扱いが増える傾向にあると考えられる．それに伴って，従属変数をとらえるための独立変数を見いだして選択する過程が充実するというのはもちろんであるが，単に従属変数と独立変数間の関係をとらえるだけではない多様な変数の見方が働き得ると考えられる．この変数の見方という視点は，小学校において「変われば変わる」，「決まれば決まる」といった見方がよくなされ，１つの独立変数によって従属変数がとらえられる事象の扱いがほとんどである（そうでなかったとしても，ほとんどは複比例の事象である）ことを踏まえてみても，高等学校数学科において特に重要視したい関数の考えの一側面として相応しいと考える．

(2) 本研究における変数の見方

本研究では，多様な変数の見方を伴う関数の考えを，高等学校数学科の学習内容や先行研究にある事例等を踏まえて次の五つに整理し規定した．

①<u>変数を固定する考え</u>（中島，1982；島田，1990）…独立変数が複数あるときに，変数を（一時的に）定数としてみる見方．

②<u>変数を減らす考え</u>（有國，2018）…独立変数の間に対応関係を見いだし，一方の変数が他方の変数と連動して決まっているとみる見方．

③<u>合成関数の考え</u>（三輪，1974；G.Polya，1967）…当面捉えたい事象における従属変数と独立変数間に新たに媒介変数を見いだし，関数の合成の様相をみる見方．（この説明は$x \mapsto \mathbf{z} \mapsto y$の場合であるが，　$\mathbf{z} \mapsto x \mapsto y$の場合もある）

④<u>制限関係についての考察</u>（有國，2016；G.Polya，1964）…関係する二つの数量について，一方の値を決めれば他方の値の取り得る範囲がただ一つに決まるような変数間の関係をみる見方（軌跡が決まるとみる見方）．

⑤<u>変数の対称性についての考察</u>（G.Polya，1967）…ある二つ以上の変数が捉えたい従属変数にとって同様の役割を担っているとみる見方．

(3) 本研究における教材開発の視点

ここまでを踏まえて，本研究における教材開発の視点を次のように規定した．

①独立変数を三つ以上内在している多変数からなる事象を題材として選択する．また，これまで見てきた事例群を踏まえると図形領域であるほうが望ましい．

②関数の考えがもつ三つの思考段階，特に依存関係に着目する段階を着実に踏めるような構成をとる．

③多様な変数の見方が働かせられるような題材を選択する．ただし，これらの変数の見方が有効に働くかどうかは事象の中に内在している独立変数の数に少なからず依存するため，特に第一との関連が重要になる．

④統合的発展的に取り組めるような構成をとり，関数の考えが思考の原動力となって問題解決に寄与していくことが実感できるようにする．

3．関数の考えの育成を志向した教材開発

(1) 教材Ⅰ「三辺の和を既知とする三角形の決定と求積に関する探究課題」

> **探究課題（教材Ⅰ）**
>
> 長さが一定の針金を2回折り曲げて三角形を作る．このとき，
>
> ⑴ 他にどんな数量・条件が決まれば，三角形を決定することができるだろうか．
>
> ⑵ ⑴で選択した数量の組を用いて，新たな三角形の求積公式を導いてみよう．

ただし，本教材では“三角形が決定する”とは，三角形の形と大きさが一意に定まることを指し，“公式”とは，一般に成り立つ関数関係を式で表現したものを呼ぶ．

なお，本教材は中学校までの学習内容及び正弦定理や余弦定理，二辺夾角の求積公式は既有の知識として設定する．

①思考・解決過程

まず，針金の長さが一定であるという条件は，三角形の周の長さが一定であることを意味し，周の長さが変われば三角形の大きさも変わっていくことから，特に大きさという面で三角形の決定に関係のありそうな数量であると考えられる．そのため，これを独立変数として同定し，Lとする．はじめは，特別な三角形を考えてみたりすることが活動として想定される．例えば正三角形・直角二等辺三角形といった条件があれば，周の長さだけで三角形が決定し，求積公式はそれぞれ$S=\frac{\sqrt{3}}{36}L^2$, $S=\frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}L^2$と表せることなどが見いだされる．また，具体的に操作してみることで，うまく折らないと針金が足らなくなったり，余ったりする（図1）ことなどが見いだされ，このような活動を通じて徐々に変数や変域の意識が生まれてくると考える．

図1　針金が不足あるいは余剰な場合の例

同時に3辺をコントロールすることは難しいので，1辺の長さaを固定して，そのときにできる三角形について考えていく（変数を固定する考え）．ここで，条件を満たす三角形を集合として連続的にとらえていくために以下の解決から針金の文脈から離れ，Geogebraを用いて解決していくことにした．このとき，残り2辺のうち1辺を決めればそれに伴ってもう1辺も決まることから，それぞれ点B,Cを中心とし，半径の和が$L-a$となるような2円をとると，その2円の交点（図2における破線）が点Aであることがわかる（変数を減ら

す考え，制限関係についての考察）.

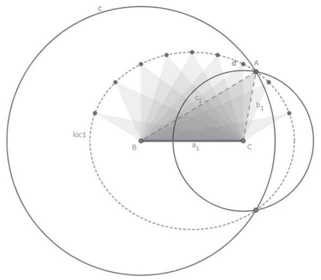


図 2　1 辺aを固定したときの三角形の集合

今，三角形の形と大きさが一意に決まればよいので，上下左右反転してできる三角形は当面している問題の解決において同じものとして扱ってよいと考えられる．こうしたときに，「この三角形，あるいは点Aの動きを止めるためには，ほかにどのような数量が決まればよいか？」といった問いが発生する．

すると，例えばこれまでの経験から高さhを数量として見いだし，選択することが考えられる．この数量の組（L,a,h_a）を①とする．

また，先の破線を描く手続きからも，1 辺の長さをbとして採用することが考えられる．この数量の組（L,a,b）を②とする．

さらに三角形の構成要素である角度についても同様に着目しようとすることが考えられ，辺aの両角θ，もしくは辺aの対角θとして採用することが考えられる．この数量の組（L,a,θ）を③とする．

ここで特に，辺aの対角である場合を踏まえると，1 辺とその対角が分かれば正弦定理の主張から外接円の半径Rも数量としての候補になると考えられる．この数量の組（L,a,R）を④とする．さらに④を踏まえると，内接円の半径rも同様にして数量としての候補になると考えられる．この数量の組（L,a,r）を⑤とする．（図 3）

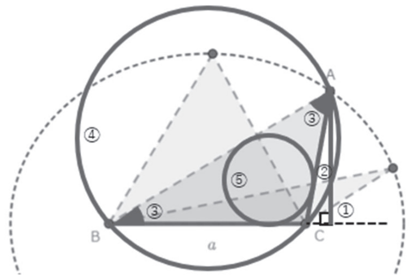


図 3　1 辺aと選択した数量の組①～⑤

こうしたときに,「三角形は選択した数量によって一意に決まるか？」といった問いが発生する．以下，紙面の都合上，③のθがaの対角の場合について詳述する．

点Aは図 2 で示した破線で描かれた図形（楕円）上の点であり，かつ BC を始線，θを動径のときの点Bから出る半直線上の点であるため，1 点に決まる．すなわち，三角形が一意に決まり，面積も決まる．すると，「三角形の面積は選択した数量によってどのように表現できるか？」といった問いが発生する．

既有の求積公式 $S=\frac{1}{2}casin\beta$ ・・・（ｉ）を基盤としてcを$L,a,\theta(=\beta)$で表すことを目指す（合成関数の考え）.

これは余弦定理によって達成されるので，$\{L-(a+c)\}^2=a^2+c^2-2cacos\theta$を$c$について解いて，（ｉ）に代入すると次を得る．

$$S=\frac{aL(L-2a)sin\theta}{4(L-a-acos\theta)}\quad (\theta：a\text{の両角})$$

続いては，はじめに固定する数量を 1 角の大きさαに変え，先ほどと同様にそのときにできる三角形について考える．このとき，点B,Cは$AB+BC+CA=L$を満たすように取るので，点B,Cの 2 点のうち 1 点を決めればそれに伴ってもう 1 点も決まることがわかる．ここで，点Aを原点とするような始線上に距離が$\frac{L(L-2b)}{2(L-b-bcos\alpha)}$となるような点$B$と，その始線

に対してαを動径としたときの点Aからでる半直線上に距離がbとなるような点Cをとると，その2点を結ぶ線分（図4における太い実線）が辺aであることがわかる．

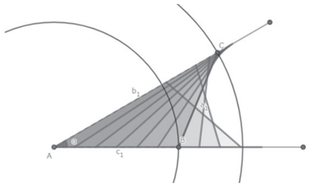


図4　1角αを固定したときの三角形の集合

こうしたときに，「この三角形，あるいは辺aの動きを止めるためには，ほかにどのような数量が決まればよいか？」といった問いが発生する．ここで変数となり得る数量の候補は先に出した通りである．上で選択した数量の組との重複を避けると，同様に(L,α,h_a)，(L,α,β)，(L,α,R)，(L,α,r)が考えられる．これらの数量の組を順に⑥，⑦，⑧，⑨とする．詳細については，紙面の都合上省略する．

以上から，選択した数量の組と得られた求積公式をまとめると次の表1のようになる．

表1　選択した数量の組と得られた求積公式

数量	求積公式
① L,a,h_a	$S=\frac{1}{2}ah_a$
② L,a,b	$S=\frac{1}{4}\sqrt{L(-L+2a+2b)(L-2b)(L-2a)}$
③ L,a,θ	$S=\frac{aL(L-2a)sin\theta}{4(L-a-acos\theta)}$ （θがaの両角） $S=\frac{L(L-2a)sin\theta}{4(1+cos\theta)}$ （θがaの対角）
④ L,a,R	$S=\frac{L(L-2a)a}{4(2R+\sqrt{4R^2-a^2})}$
⑤ L,a,r	$S=\frac{1}{2}Lr$
⑥ L,α,h_a	$S=\frac{L^2h_asin\alpha}{4\{(1+cos\alpha)h_a+Lsin\alpha\}}$
⑦ L,α,β	$S=\frac{L^2}{2}\frac{sin\alpha sin\beta sin(\alpha+\beta)}{\{sin\alpha+sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}^2}$
⑧ L,α,R	$S=\frac{L(L-4Rsin\alpha)sin\alpha}{4(1+cos\alpha)}$
⑨ L,α,r	$S=\frac{1}{2}Lr$

②本教材の数学教育的価値

本稿では，大きく四点を挙げる．

第一に，この三角形の決定・求積という題材は，小学校からなじみのある事象であり，高等学校で三角比を学習することによってこれまで依存関係は認めても，関数関係として表現することが難しかった“角”という変量も（辺と同等に）積極的に考察の対象に挙げることができるようになる．そうすることで，三角形の決定と三角形の求積が強いかかわりを持ったものとして認識されるとともに，既習の数学的内容を関数の考えの立場で見直し，理解を深めることができる．

第二に，「三角形が決定するということは三角形の面積も一意に決まるはずだ」ということを思考の原動力として，解の存在が保証された問題を解くことができる．さらに，今回導出された求積公式①⑤⑨等を発端として，逆である「三角形の面積が決まれば，三角形が決定する」が必ずしも成り立たないことにも着目されると考えられ，これも求積公式に対する理解を豊かにするうえで重要である．

第三に，関数の考えの視点に立って（求積公）式を読むことによって，事象に対する理解を促進することができる．例えば，求積公式⑤⑨から3辺の和が既知であれば後は内接円の半径のみで面積が一意に決まることがわ

かり，⑦から 2 つの角を固定した際に相似な三角形が決まることで，3 辺の和Lの面積Sへの寄与はその 2 乗倍であることがわかる．このような構造的なとらえ方も関数の考えには欠くことのできない面であるといえる，

第四に，本教材は探究の過程で興味深い発展的な問いが幾つも表出される．例えば，図 2 における破線（軌跡）や，図 4 における太い実線によって描かれる包絡線の正体について探究したり，図 2 の曲線を用いないで（基本作図の範疇で），三角形の決定をいう方法について探究したりすることが考えられ，この点も本教材の価値として挙げられる．

⑵　教材Ⅱ「図形の辺上に配置した玉の総数に関する探究課題」

探究課題（教材Ⅱ）

図形の各辺に同じ数ずつ玉を配置することを考える．このとき，

⑴ 正多角形において必要な玉の総数を求める式はどのようになるか．また，　正多面体においてはどうか．各々適当な数量を見いだし，立式せよ．

⑵ 他の平面図形・空間図形において必要な玉の総数を求める式はどのようになるか．

ただし，各頂点には必ず玉を配置することとする．既有の知識は特に設定しない．

①思考・解決過程

図形の辺上に配置した玉の総数を従属変数として同定し，yで表す．次に必要な玉の総数は，当然各辺に何個ずつ玉を配置するかや，考える図形にも依存することが直ちに想起される．⑴では，はじめに正多角形を考察の対象としていくため，正多角形の〇角形の部分と 1 辺に配置する玉の個数を（独立）変数として同定し，正n角形の各辺にx個ずつ玉を配置するとして，n,xによって表していくことにする．ただし，$n \geq 3$であり，各頂点には必ず玉を配置することから$x \geq 2$で考える．いま 2 つの独立変数を同定したが，これを同時に動かして考えていくのは少々難しいので，例えば正三角形，すなわち$n = 3$として図形を固定したときのxとyの関係を考えてみる（<u>変数を固定する考え</u>）．すると，対応の規則や変化の特徴を調べることによって関数関係$y = 3(x-1)$を帰納することができる．同様に，例えば$x = 3$として固定したときのnとyの関係を考えてみると，関数関係$y = 2n$を帰納することができる（<u>変数を固定する考え</u>）．ここまでを踏まえると，玉の総数yは，正（n）角形の（n）と，（1 辺に配置する玉の個数（x）− 1）の 2 つの変数に複比例していることがわかる．

表 2　綜合（正多角形）

x＼n	3	4	5	6
2	3	4	5	6
3	6	8	10	12
4	9	12	15	18
5	12	16	・・・	・・・

これらを綜合すると，上の表 2 のようになり，関数関係$y = n(x-1)$を帰納することができる．このきまりが成り立つわけとして，例えば次のような説明が考えられる．

<u>説明 1：（玉の総数）＝（1 辺に配置する玉の個数）×（辺の数）−（頂点の数）</u>

まず，正n角形の 1 辺に玉を 2 個配置するときは，頂点のみに配置されるので，玉の総数は正n角形の頂点の数に一致して，n個となる．次に正n角形の 1 辺に玉をx（$x \geq 3$）個配

置するとき，辺の数はn本であるから，$x \times n = xn$．ここで，図5の枠のように頂点にある玉が2回重複して数えられるので，正n角形の頂点の数はn個であり，$xn - n = n(x-1)$

説明2：（玉の総数）＝｛(1辺に配置する玉の個数）－1｝×（辺の数）

正n角形の1辺に玉をx個配置するとき，説明1のように数えると頂点にある玉が2回重複して数えられるので，それを避けて図5の枠のように数えると，$(x-1) \times n = n(x-1)$

説明3：（玉の総数）＝（頂点の数）＋｛(1辺に配置する玉の個数）－2｝×（辺の数）

正n角形の1辺に玉をx個配置するとき，頂点（1辺の両端）に2つと，図5の枠のように頂点（1辺の両端）以外の辺上に$(x-2)$個と数えられるので，正n角形の辺の数はn本であるから，$n + (x-2) \times n = n(x-1)$

図5　左から順に説明1，2，3の図

よって，いずれの場合も2つの変数x, nを用いて$y = n(x-1)$と表現できることが，演繹的な形で説明することができた．特に，1辺に配置する玉の個数xを固定したときの玉の総数yは，正n角形の（n），すなわち辺の数あるいは頂点の数によって決まるといえる．

次に⑴の後半では，正多面体を考察の対象としていく．そのため，先ほどの正多角形の場合と同様にして，正多面体の〇面体の部分，すなわち面の数と1辺に配置する玉の個数を（独立）変数として同定し，正m面体の各辺にx個ずつ玉を配置するとして，m, xによって表していくことにする．ただし，$m =$ 4,6,8,12,20のいずれかであり，各頂点には必ず玉を配置することから$x \geq 2$で考える．

例えば，正四面体，すなわち$m = 4$として図形を固定し，xとyの関係を考えてみる（変数を固定する考え）．すると，対応の規則や変化の特徴を調べることによって関数関係$y = 4 + 6(x-2)$を帰納することができる．同様に，例えば$x = 3$として固定したときのmとyの関係を考えてみると，mが$y-2$の倍数になることや，正n角形のnも関係のある数量であることに着目すれば，関数関係$y = m(n-1) + 2$（ただし，$x = 3$）を帰納することができる（変数を固定する考え）．

ここまでを踏まえて，これらを綜合することで関数関係を推測していきたいが，正多角形のときと比べても両者の式の関連を見いだして綜合することが難しいと考える．そのため，綜合する前にそれぞれ変数mまたはxを固定した式に対して，そのきまりが成り立つわけを演繹的に説明することを試みる．

まず，前者のmを固定してできる式に対しては，先の説明3によって説明できることに気づく．すなわち，$y = 4 + 6(x-2)$の4は正四面体の頂点の数であり，6は辺の数に対応していることがわかる．よって，特に1辺に配置する玉の個数xを固定したときの玉の総数yは，正m面体の辺の数と頂点の数によって決まるといえる．そのため，正m面体の辺の数と頂点の数を独立変数として同定し，それぞれE, Vを用いて表すと，次のような式になる．

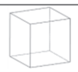
$$y = V + (x-2)E \quad \cdot\cdot\cdot (I)$$

さらに，先ほどの正多角形においては，辺の数Eと頂点の数Vがnで一致していることから，説明1の$y = n(x-1)$も説明2の$n + (x-2) \times n$もまた，$y = V + (x-2)E$としてみ

ることができる．一方で，後者のxを固定したときにできる式に対しては，yは少なくともm,nという２つの変数によって決まっているとみることができる．ここで，mを決めればそれに伴ってnも一意に決まることがわかる（変数を減らす考え）．実際，$y=mn-m+2$として変形できることに着目すると，mは正m面体の面の数と一致しており，mnは正m面体の面の数に（正多面体を構成する）正n角形の辺の数あるいは頂点の数をかけたものとしてみることができる．換言すると，mnは正m面体を構成する正n角形に着目したときに，正m面体の辺の数あるいは頂点の数を，重複を許して数えたときの値であるといえる．さらにその重複分について考えると，正m面体の頂点の数はmに依存して決まるが，辺の数はmに依らず 2 で一定であるため，$\frac{mn}{2}$は正m面体の辺の数として見ることができる．ゆえに，正m面体の面の数を独立変数として同定し，これをFを用いて表すと，一般に次のような式になる．

$$y=(x-1)E-F+2\cdot\cdot\cdot(II)$$

表 3　綜合（正多面体）

図					
$x \diagdown m$	4	6	8	12	20
2	4	8	6	20	12
3	10	20	18	50	42
4	16	32	30	80	72
5	22	44	42	110	102

したがって，正多面体の場合における玉の総数yは，はじめにどの変数を固定するかによって，異なる式を得ることができ，（I）の場合は正m面体の辺の数と頂点の数，（II）の場合は正m面体の辺の数と面の数によって決まるといえる（合成関数の考え）．

以上から，必要な玉の総数をy，１辺に配置する玉の個数をxとしたとき，数量と必要な玉の総数を求める式をまとめると次の表４のようになる．

表４　選択した数量と得られた式

数量	必要な玉の総数を求める式
x,n	$y=n(x-1)$
x,E,V	$y=V+(x-2)E$
x,m,n	$y=\frac{(x-1)mn}{2}-m+2$
（I）x,E,V	$\begin{cases} y=V+(x-2)E \\ y=(x-1)E-F+2 \end{cases}$
（II）x,E,F	

⑵では，考える図形を正多角形や正多面体から，他の平面・空間図形へ変えてみたときに，必要な玉の総数を求める式がどうなるかについて考察する．詳細は省略する．

②本教材の数学教育的価値

本稿では，大きく二点を挙げる．

まず，この図形の辺上に配置した玉の総数という題材は，小学校においても取り上げられる事象を扱っており，問題の把握や素朴な操作が行いやすいと考える．そのため，図形や１辺に配置する玉の個数を変えながら個々の具体的な例を調べ，それを表に整理するなどをして変化や対応のきまりを帰納的に発見し，のちに発見したきまりを演繹的な形で説明できるような活動も想定されやすいことから，これは本教材の価値として挙げられる．

次に，統合的発展的な考察が十分に期待できるという点でも価値は大きいと考える．1 辺に配置する玉の個数xを固定したとき，頂点の数Vと辺の数Eさえ決まれば，玉の総数を決めることができ，ほかの平面・空間図形であっても$y=V+(x-2)E$という関係が成り立つといった特徴を持っている．そのため，頂点と辺の繋がりさえ保てば立体を平面に埋

め込んでも結果が保たれるので，図形の変換にも焦点をあてることができると考える．さらに，この立体を平面に埋め込むという操作によって面の数Fが１減ることに注意すれば，空間図形において成り立っていた$y=(x-1)E-F+2$という関係において，Fを$F-1$として$y=(x-1)E-(F-1)+2=(x-1)E-F+3$とすれば平面図形においても成り立つ関係として統合的発展的に考えることができる．さらに，$y=n(x-1)$と$y=V+(x-2)E$との関係は上で見たが，$y=V+(x-2)E$と$y=(x-1)E-F+2$を同じものとして見ることで，数学的に価値のあるオイラーの多面体定理を発見することができる．

$$V+(x-2)E=(x-1)E-F+2$$
$$V-E+F=2$$

この関係式を厳密に証明することは難しいとしても，探究の過程で頂点や辺，面の数といった変数が見いだされ，それらに成り立つ関係が自然な形で発見されて着目できるような扱いが期待できることは意義のあることだと考える．

４．本研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，関数の考えが小中高を貫いて重要な数学的な見方・考え方であるという立場のもと，特に高等学校数学科で関数の考えの育成を志向した教材の開発を行うことであった．その結果，開発した教材Ⅰ・Ⅱにおいて思考・解決過程のなかに多様な変数の見方を伴った関数の考えが働き，それによって問題解決が有効になったとともに，関数の考えによって高等学校の学習内容や事象に対する豊かな理解を得ることができた．そのため，本教材は高等学校数学科での関数の考えの育成に貢献することができる教材といえ，これを本研究の数学教育的価値とした．

今後の課題は，第一に，開発した教材をもとに授業実践を行うこと．第二に，関数の考えと類似した概念や，問題解決のストラテジーに関する先行研究にもあたること．第三に，高等学校数学科における関数の考えの学習指導について校種間の繋がりも踏まえながら考究していくことである．

主要引用・参考文献

有國想（2018）．関数の考えの学習指導に関する研究－対象の置き換えの焦点をあてて－．東京学芸大学大学院修士論文．

G.Polya（1964，1967）．『MATHEMATICAL DISCOVERY VOLUME Ⅰ（・Ⅱ） 数学の問題の発見的解き方（問題解決の理解・解決・教授)』(柴垣和三雄，金山靖夫訳)，みすず書房．

黒澤俊二（2021）．「関数の考え」とは何か－小学校算数における「関数の考え」育成の意味とその改善点－．立教大学教育学科研究年報，64，209-250．

文部省（1973）．『小学校算数指導資料 関数の考えの指導』，東京書籍．

中島健三（1982）．『算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察』．東洋館出版社．（復刻版 2015 年）

（たかます げんき
東京都立白鷗高等学校・附属中学校
〒111-0041 東京都台東区元浅草 1-6-22）