教材「1089の不思議」に関する一考察

教材「1089の不思議」に関する一考察

清和　隼弥　　登野　皓志

要　約

本研究の目的は，教材「1089の不思議」についての数学教育的な価値を明らかにすることである．そのために,「1089の不思議」の解決過程と原題の発展を考察した．その結果，本教材の解決過程において「具体数の参照と文字式の変形とよみ」,「文字式の二面的な見方」,「変数と定数への着目」という3つの数学教育的に価値のある活動を明確にした．そして，原題の発展において，「複雑な事象における一定を見出す活動」に数学教育的な価値が認められることを論じた．最後に,「位の入れ替え」と「和と差」という観点で，他教材を考察した．

1．本研究の目的と方法

数学の授業において，教材は不可欠かつ重要であり，その教材研究の質は授業に直結する．杉山（1990）は教材研究の視点や方法について言及し,「1 章　何を教えるかを明らかにする」にて，対称な図形の指導において，その対称軸の「数」の違いだけではなく，対称軸の「位置」に着目することで，図形の一般・特殊の関係がより一層明らかにされるといった具体例を挙げ，指導者が教材をどれだけ価値づけできるかが重要であることを指摘した．また，Watanabe et al.（2008）は授業研究が，授業を継続的に改善することに寄与するためには，教材研究が重要であることを指摘している．

このように，教材研究の重要性は従来から謳われており，教材研究の成果を蓄積していくことは数学教育において重要である．

本研究では,「1089 の不思議」という教材に着目する.「1089の不思議」とは，3桁の自然数に対して百の位と一の位を入れ替えて引き算し，その差の百の位と一の位を入れ替えて足した結果が,いつでも1089になるというものである.この教材は数学的な見地からは，W.W.Rouse Ball（1905/1892）が，任意の数に対して行われた一連の操作の結果が一定となる例で挙げたり，デイヴィッド・アチソン（2004，pp.7-13）が「1089は魔法の数字」として扱ったりしている題材である．また，結果である 1089 は 4 桁の整数のうち，反転した数が整数倍になっている（i.e. 9801 = 1089 × 9),ただ2つの数のうちの1つである．

また,数学教育的な見地からは,藤井(2012)が，この問題を,「式の形式的処理」と「式に表す」の関連についての具体例として挙げており，大学生であっても，文字式の表現とその処理があまりにも機械的に身についていると，戸惑いが生じ，解くことができない実態を報告している．そして，この解決では,「繰り下がる」という要件を「式に表し」,「式の形式的処理」に反映させることが重要であることを指摘している．さらに，國本（2006）

は，小学校教師志望の大学生に対する最初の講義の題材としてこの教材を選んでおり，原題の桁数を発展させて，結果のパターン(2 桁では 99=9×11，3 桁では 99×11＝9×121，4 桁では 99×111＝9×1221..)を観察させることで，数学に対する意識を変容させることを意図した授業について説明している．

このように，「1089 の不思議」という教材は，数学的にも数学教育的にも注目されている．しかし，この教材の解決過程を考察し，1089 の意味や原題の発展を考察している研究は管見の限りなく，未だ研究の余地がある．

以上より，本研究の目的を，教材「1089 の不思議」についての数学教育的な価値を明らかにすることとする．

そのために，まず「1089 の不思議」に対する解決過程を記述し，操作の結果が一定になる理由と 1089 の意味を考察する．その後，原題の条件を発展させ，探究する．最後に，原題の解決過程と発展させた問題の解決過程を考察することで，教材「1089 の不思議」の数学教育的な価値を考察する．

２．「1089 の不思議」の原題とその解決過程

「1089 の不思議」とは，以下の問題である．

> (i) 百の位が一の位よりも大きい 3 桁の整数を一つ選び，その数をNとする．
> (ii) Nの百の位と一の位を入れ替えた数をMとして，NからMを引き，その差をLとする．
> (iii) Lの百の位と一の位を入れ替えた数をWとして，$L+W$を求める．
> このとき，$L+W$にはどのような性質があるだろうか．

まず，この操作の結果である$L+W$にどのような性質があるかを調べるために，具体的な数で実験してみると，以下の表 1 のようになる．

表 1 複数の数での実験結果

(N)	563	901	752	841	691
(M)	365	109	257	148	196
(L)	198	792	495	693	495
(W)	891	297	594	396	594
($L+W$)	1089	1089	1089	1089	1089

このように，複数の数に対して実験を行うと，いつでも$L+W$が 1089 になることが予想される．そこで以下では，「なぜ$L+W$がいつでも 1089 になるのか」という問題として，解決過程を記述する．その際，まずは「いつでも$L+W$が 1089 になるのか」について解決し，次に，「なぜ$L+W$が 1089 になるのか」について解決する．

(1) 繰り下がりに着目した解決過程

①いつでも$L+W$が 1089 になるのか

どんなNに対しても$L+W$が 1089 になることを示すために，文字を用いる．具体的には，位の操作を式で表現するために，百の位，十の位，一の位をそれぞれ文字でおいて考える．

3 桁の整数Nを$100a+10b+c$（$a,b,c \in \mathbb{Z}$，$0 \leqq c < a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$）とすると，百の位と一の位を入れ替えた数Mは，$100c+10b+a$である．NとMの差を計算して，同類項を整理すると，$L=N-M=(100a+10b+c)-100c+10b+a=99a-99c=99(a-c)$となる（＊1）．このとき，百の位と一の位の関係が見えなくなり，操作(iii)を行うことができなくなってしまう．

したがって，位の表現を残すために，百の位と一の位を残して変形すると，$L=N-M=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=100(a-$

$c) + (c - a)$とできる. 今, $(a - c)$を百の位, $(c - a)$を一の位と見ると，Wは，$100(c - a) + (a - c)$である. このとき, $L + W = \{100(a - c) + (c - a)\} + \{100(c - a) + (a - c)\} = 0$となり，1089 が得られない.

このように，形式的な式変形や，位の数を形式的に残す式変形では，$L + W = 1089$を得ることができず，証明できない．そこで，具体的な数の操作（図 1）を振り返り，その過程を文字で表現することを考える.

(N)		5	6	3
(M)	—)	3	6	5
(L)		1	9	8
(W)	＋)	9	9	1
$(L + W)$		9	18	9

図 1　N=563 に対する筆算図

図 1 より，NからMを引くとき，十の位から 1 が繰り下がり，一の位は 13-5 の計算をしていることがわかる．さらに，百の位の 5 が 1 繰り下がり，十の位では 15-6 の計算，百の位は，4-3 の計算をしていることがわかる.

このように具体的な数の筆算を捉え直すことによって，以下の図 2 のように，筆算形式において文字を用いて表すことができる.

(N)		a	b	c
(M)	—)	c	b	a
(L)		$a - c - 1$	9	$10 + c - a$
(W)	＋)	$10 + c - a$	9	$a - c - 1$
$(L + W)$		9	18	9

図 2　筆算形式の解答図

図 2 より，位の数を表すa, b, cがそれぞれ打ち消し合い，一の位が 9，十の位が 8 で百の位に 1 が繰り上がり，9 との和で百の位が 0，千の位が 1 となることから，$L + W$が 1089 になることが示せた.

以上より，$L = N - M = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + (c - a)$における$(c - a)$は，$a > c$より負の数となっていたため，0 という不可解な結果になったことがわかる.

次に図 1, 図 2 によって明らかになった「繰り下がり」に注意して, 筆算形式を用いずに, 文字式で表現することを考える. そのために, まず具体的な数に対して繰り下がりを考えると, 例えば 563 では, $563 - 365 = (500 - 300) + (60 - 60) + (3 - 5) = \{(500 - 100) - 300\} + \{100 + (60 - 10) - 60\} + (10 + 3 - 5) = \{(5 - 1) - 3\} \times 100 + \{10 + (6 - 1) - 6\} \times 10 + (10 + 3 - 5)$となる．これを文字式に表現すると，$N - M = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = (100a - 100c) + (10b - 10b) + (c - a) = \{(100a - 100) - 100c\} + \{100 + (10b - 10) - 10b\} + (10 + c - a) = 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) = L$とできる．このとき，百の位は$(a - c - 1)$，十の位は 9，一の位は$(10 + c - a)$であり，図 2 と一致する.

ここで, 位を表す数$(a - c - 1)$と$(10 + c - a)$が 0 以上 9 以下の整数になっていて，位の数として本当に成り立っているかどうかを調べる．今，aとcの大小関係から，$0 \leqq a - c - 1 \leqq 8 - c$，$0 \leqq 10 + c - a \leqq 9$より, 十進位取り記数法で上記のように$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$と表せることがわかる．このとき$W$は，$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$となる．したがって，$L + W = \{100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)\} + \{100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)\} = 100(a - c - 1 + 10 + c - a) + 180 + (10 + c - a + a - c - 1) = 900 + 180 + 9 = 1089$となる.

②なぜ$L+W$が 1089 になるのか

上述したように，最初に選択したNの位の数であるa,b,cは打ち消し合うため，$L+W$は一定になる．ここで，位の数の打ち消し合いより，$L+W=1089$に影響を与える数は，繰り下がりの際に生じた+10 や-1 であることがわかる．そこで，各位における繰り下がりによる貸し借りを整理する．一の位は十の位から 10 借りている．十の位は一の位に 1 貸し，百の位から 10 借りている．百の位は十の位に 1 貸している．したがって，操作(ii)の後，一の位は+10，十の位は+10-1=9，百の位は-1 になる．この百の位と一の位を入れ替えて足すため，足す数の百の位は+10，十の位は 9，一の位は-1 となる．そのため，操作(iii)の後には，貸し借りの両方が生じる位（十の位）で 9 が生じ，貸し借りの一方が生じる入れ替えの位では，貸し借りの和である 9 が生じる．以上より，繰り下がりによって，+10-1=9 が各位で生じたことで，990+099=1089 となったことがわかる．

(2) 99 の倍数に着目した解決過程

①いつでも$L+W$が 1089 になるのか

（＊1）より，$L=99(a-c)$である．ここで，この式からは百の位と一の位の操作ができないため，具体的な数に着目する．例えば，表 1 を観察すると，$N=752$と$N=691$のとき$L=495$で等しくなっていることがわかる．さらに式の形から，Lは 99 の倍数で，百の位と一の位の差で数が決まっていることがわかる．そして，$(a-c)$の範囲は，$0 \leqq c < a \leqq 9$より，$1 \leqq a-c \leqq 8$より，狭い範囲で制限されていることがわかる．ゆえにLとして，乗数が 1 から 8 である 99 の倍数を全て調べることによって示すことができる．

実際，$L+W=99+990=198+891=297+792=369+693=495+594=594+495=693+396=792+297=1089$となり，示せる．

②なぜ$L+W$が 1089 になるのか

上述したように，$L=99(a-c)$より，Lは 99 の倍数であり，範囲が制限されるため，全てを書き出すことによって証明できる．しかし，このままでは，なぜ 1089 になるかを説明することはできない．そこで，以下では$L=99(a-c)$を，単なる 2 数の差（$N-M$）として捉えるのではなく，NからMへの操作分と捉え直すことによって，1089 になる理由を考察する．

例えば，$563-365=99(5-3)$を$563=365+99(5-3)$と変形することで，Lは365から563への操作分の$99(5-3)$であると見ることができる．このとき，5 と 3 は百の位と一の位の数を表している．ゆえに，この式から，「百の位と一の位の数を入れ替える操作」と「百の位と一の位の差に 99 をかけること」との関係性が見えてくる．ここで百の位の数と一の位の数の関係が明確に見えるように 99 を$(100-1)$と変形すると，$563=365+(100-1)(5-3)=365+100\times(5-3)+(-1)\times(5-3)$ となり，99 を足すことは百の位に 1 を足して，一の位から 1 を引くことと同値であることがわかる．ゆえに一の位が 0 でない任意の数に対して，99 を足すと百の位が 1 上がり，一の位が 1 下がる（＊2）ため，百の位と一の位を入れ替えるには，百の位の数と一の位の数の差の分だけ 99 を足し引きすれば良いことがわかる．このことから，百の位と一の位を入れ替える元の数が 99 の倍数であるとき，入れ替えた数も 99 の倍数となるため，Lが 99 の倍数のとき，Wも 99 の倍数になることがわかる．

以上より，NとMの差は，百の位と一の位を入れ替える操作分を求めること同値であり，Lは「(Nの百の位と一の位の差) ×99」となり，Wは，Lに対して「(Lの百の位と一の位の差) ×99」を足すことによって構成されると見ることができる．ここまで分かった一連の流れを具体的な数で考える．$N=563$のとき，Lは$(5-3)\times 99=198$であり，$M=L+(8-1)\times 99$だから，$L+W=(5-3)\times 99+\{(5-3)\times 99+(8-1)\times 99\}=11\times 99$とわかる．このとき，$W$を求めるために，一度$L$を198と表現する必要があり，$(5-3)\times 99$という操作を表す式表現から$W$を捉えることができていない．したがって，$W$の意味を操作から考察するためには，$L=99(a-c)$という数表現と，百の位と一の位の関係を明らかにする必要がある．

今，$L=198$で考えると，$L=198=99\times 2$である．このとき，Lの一の位と 99 の乗数の関係に着目する．ここで，99 の倍数は 9 の倍数だから，9 の倍数の性質「9 の倍数の一の位は 9 の乗数に対する 10 の補数」を用いて，Lの一の位は乗数である 2 に対する 10 の補数 8 であることがわかる．よって，$L=198=99\times(10-8)$と見ることで，一の位と乗数の関係を式に表すことができる．ここで，百の位と一の位の数の関係を考える．（＊2）より，一の位が 0 でない任意の数に対して 99 を足す操作は百の位に 1 を足し，一の位から 1 を引くことと同値だから，百の位と一の位の和は一定になることがわかる．例えば，438に 99 を 3 回足す操作は 4 に 3 を足し，8 から 3 を引くことと同値であり，$438+99+99+99=735$で，$4+8=7+5=12$である．したがって，99 を 099 と見ると，99 の倍数の百の位と一の位の和は 9 で一定（＊3）だから，Lの百の位は一の位の 9 の補数であり，$(9-8)=1$とわかる．

ここまでの考察を文字を用いて表現する．$L=99(a-c)$のとき，Lの一の位は$(10-a+c)$であり，百の位は$\{9-(10-a+c)\}=(a-c-1)$となる（＊4）．よって，百の位と一の位の差は$\left|\left((10-a+c)\right)-(a-c-1)\right|=|11-2a+2c|$となる．ゆえに，$W=99(a-c)+99(11-2a+2c)=99(11-a+c)$となり，$L+W=99(a-c)+99(11-a+c)=99\times 11=1089$ となる．ゆえに，1089 は 99 と 11 の積によって構成されていると見ることができる．

③99×11 の 11 はどこからきたのか

②より，百の位と一の位の入れ替えは，99 を繰り返し足し引きする操作と同一視でき，Lが 99 の倍数より，Wも 99 の倍数となることがわかった．今，Lから始めて，$L=100A+10B+C(A,B,C\in\mathbb{Z},\ 0\leqq C<A\leqq 9,\ 0\leqq B\leqq 9)$とすると，（＊3）と（＊4）より，$L=100A+10B+C=99(10-C), A+C=9$である．よって，$W=100C+10B+A=99(10-A)$となり，$L+W=99(10-C)+99(10-A)=99\{10\times 2-(A+C)\}=99(20-9)=99\times 11$となる．

このとき，9 は，Lの百の位と一の位の和であり，20 は，補数のもとになる 10 の 2 倍である．ここで，20 の意味について考察するために，$L=99(10-C)$の意味を再考する．99 の 10 倍は 990 であり，この数は 3 桁の 99 の倍数で最大の数で，百の位が 9，一の位が 0 である数である．$L=198$とすると，198 は，990 の百の位から 8 を引いて，一の位に 8 を足す操作によって得られる．この操作を式に表現すると 198=990-99×8=99(10-8)となる．ゆえに，3 桁の 99 の倍数は 990 から 99×（その数の一の位）を引いたものと見ることができる．

以上より，$L=990-99\times(L$の一の位$)$であり，$W=990-99\times\left(W\text{の一の位}\right)=990-99\times\left(L\text{の百の位}\right)$と解釈できる．よって，11 の意味は，「3 桁の 99 の倍数の最大値である 990 の乗数である 10 の 2 倍である 20 から，百の位と一の位の和である 9 を引いたもの」と見ることができる．

３．原題の発展とその解決過程

2 章より，原題の 1089 について，「(一)：位の数が打ち消し合うことにより，位の数は関係なく，繰り下がりによる貸し借りの+10-1=9 として見ることができること」，「(二)：百の位と一の位の入れ替えを，百の位と一の位の差の分だけ 99 を足し引きする操作と解釈し, 9 の倍数と 10 の補数に着目することで，99×（10 の 2 倍である 20 から百の位と一の位の和である 9 を引いたもの）として見ることができること」の二点がわかった．

以下，この二点の見方をもとにして，原題を発展させた問題を考える．その際，入れ替える位の数の大小関係は原題と同様とする．

(1) 桁数と入れ替える位を変える

①n桁の百の位と一の位を入れ替える

3 桁をn桁に変え，百の位と一の位を入れ替えた場合, NとMの千の位以上は全て等しいため，位の数は打ち消し合い 0 になるため，原題と同様になり，$L+W=1089$となる．

②n桁の10^{n-1}の位と一の位を入れ替える

原題の百の位を 3 桁の数の最大の位，一の位を最小の位と解釈すると，n桁の場合は，10^{n-1}の位と一の位を入れ替えることを考えればよい．

（一）の見方で考えると，$L=N-M$において繰り下がりを考慮して，Lの10^{n-2}の位から十の位までの位の数は 9 となり10^{n-1}の位の数と一の位の数の和が 9 となるため, $L+W=99\cdots90+099\cdots9=1099\cdots989$となる．

（二）の見方で考えると，10^{n-1}の位と一の位の入れ替えは，$(10^{n-1}-1)$の繰り返しの和として見ることができ，$(n-1)$桁の$(10^{n-1}-1)$の倍数の最大の数である$(10^{n-1}-1)\times10$と一の位の関係を考えることで，$L+W=(10^{n-1}-1)(20-9)=(10^{n-1}-1)\times11$となる．

③n桁の10^kの位と10^lの位$(l<k)$を入れ替える

（一）の見方で考えると，$L=N-M$において繰り下がりを考慮して，Lの10^{k-1}の位から10^{l+1}の位まで位の数が 9 となり，10^kの位の数と10^lの位の数の和は 9 となり, それ以外の位の数は等しいため, 打ち消し合い 0 になる．ゆえに，$L+W=99\cdots90\cdots0+0\cdots099\cdots9=1099\cdots9890\cdots0$となる．このとき，1 は$10^{k+1}$の位であり，最後の9は$10^l$の位である．

（二）の見方で考えると，10^kの位と10^lの位の入れ替えは，(10^k-10^l)の 繰り返しの和として見ることができ，k桁の(10^k-10^l)の倍数の最大の数である$(10^k-10^l)\times10$と一の位の関係を考えることで，$L+W=(10^k-10^l)(20-9)=(10^k-10^l)\times11$となる．

この結果は，$10^l(10^{k-l}-1)\times11$と変形することで，10^kの位より大きい位と10^lの位より小さい位は打ち消し合うため，$(k+1-l)$桁の最大の位と最小の位を入れ替え，10^l倍したと見ることができる．

(2) 桁数と入れ替える位の個数を変える

ここでは，n桁の数の 2 組の位を入れ替える．具体的には，n桁の「10^kの位と10^lの位$(l<k)$」の入れ替えと「10^sの位と10^tの位$(t<s)$」の入れ替えをすることを考える．

ここで簡単のため，$0 \leqq l < k, t, s \leqq n-1$としても一般性を失わない.

今,（一）の見方と（二）の見方で考える準備として位の数に着目すると，10^sの位と10^tの位$(t < s)$を入れ替えた数の差は，$A99 \cdots 9B00 \cdots 0$（#1）となる．ただし，Aは10^sの位で，9 の個数は$(s-t-1)$個，Bは10^tの位であり，$A+B=9$，$0 \leqq A \leqq 7$，$2 \leqq B \leqq 9$である．同様に，10^kの位と10^lの位$(l < k)$の入れ替えた数の差は$C99 \cdots 9D00 \cdots 0$となる（#2）．Cは10^kの位で，9 の個数は$(k-l-1)$個，Dは10^lの位であり，$C+D=9$，$0 \leqq C \leqq 7$，$2 \leqq D \leqq 9$である．したがってLは，（#1）と（#2）の和を考えればよい.

①$l < k < t < s$のとき

（一）の見方で考えると，$L = A99 \cdots 9B00 \cdots 0C99 \cdots 9D00 \cdots 0$となるため，$L+W = 10989 \cdots 900 \cdots 010989 \cdots 900 \cdots 0$となる.

（二）の見方で考えると，$L+W$は，$(10^k - 10^l)$の繰り返しの和と$(10^s - 10^t)$の繰り返しの和として見ることができ，それぞれ位の入れ替えは独立しているため，$A+B=9, C+D=9$より，それぞれ(1)③と同様にして，$L+W = (10^s - 10^t) \times (20-9) + (10^k - 10^l) \times (20-9) = \{(10^s - 10^t) + (10^k - 10^l)\} \times 11$となる.

②$l < t < s < k$のとき

②の大小関係のとき，2 組の位の入れ替えは互いに影響を受けるため，Lを表す数が複雑になる.ゆえに,まず具体的な数で考える.例えば,$N = 75389417286$として,10^9の位（5）と10^2の位（2）を入れ替え，10^7の位（8）と10^4の位（1）を入れ替えると，$M = 72319487586$となり，$L = N - M = 03069929700$となる.

このとき，$W = 07029969300$で，$L+W = 10099899000$となる．今，Lに着目すると，10^9の位は 5-2=3 となり，5 に繰り下がりが生じていない．これは，本来10^2の位に貸すはずの 10 を10^7の位の 8 が貸してしまっているからである．また，10^4の位は本来繰り下がりが生じないが，10^2の位に 10 を貸すために繰り下がりが生じ，11-1-8=2 となっている．このように, 3(2)①では, 10^kの位の数は10^lの位に 10 を貸すために繰り下がりが生じていたが，この大小関係では, 10^sの位の数が繰り下がるため，10^kの位では繰り下がりが生じていない．また，10^tの位は本来，位の入れ替えにおいて小さい位だから繰り下がりが生じないはずが，10^lの位に 10 を貸すために，繰り下がりが生じてしまっている.

したがって，繰り下がりに注意すると，$L = (C+1)0 \cdots 0A9 \cdots 9(B-1)9 \cdots 9D0 \cdots 0$と表現される．ここで，$B, C$の範囲より，$(C+1)$と$(B-1)$で，繰り上がりと繰り下がりは生じない.

（一）の見方で考えると，10^kの位と10^lの位の和は$(C+1)+D=10$となり，10^sの位と10^tの位の和は$A+(B-1)=8$だから，$L+W = 1009 \cdots 989 \cdots 900 \cdots 0$となる.

（二）の見方で，乗数の 10 の 2 倍と入れ替える位の和から考えると，$L+W = (10^s - 10^t)\{20 - A - (B-1)\} + (10^k - 10^l)\{20 - (C+1) - D\} = (10^s - 10^t)\{20 - (A+B) + 1\} + (10^k - 10^l)\{20 - (C+D) - 1\} = (10^s - 10^t) \times 12 + (10^k - 10^l) \times 10$となる.しかし,この結果は，具体的な数に対する操作の結果と合わない.したがって,複数の位を入れ替える場合，その位が互いに影響するため（二）の見方をそのまま用いることができないことがわかった.

そこで，位の入れ替えと$(10^s - 10^t)$の繰り

返しの和の見方に戻る．今，2 組の位を入れ替えた数の和$L+W$は，$C+1$とDの和，Aと$(B-1)$の和とその位の間の 9 と 0 の和によって構成されるため，位の数は打ち消し合い，一定になることは明らかである．今，入れ替える位の数を考えると，大きい位と小さい位の数の差が，2 組の位の入れ替えで互いに影響を受ける前の元の差よりも 1 だけ小さくなっていることがわかる．今，$A\cdots B00\cdots 0=(10^s-10^t)\times(10-B)$ とすると，$B\cdots A00=(10^s-10^t)\times(10-B)+(10^s-10^t)\times(B-A)$だから，$A\cdots(B-1)00\cdots 0$と$(B-1)\cdots A00\cdots 0$の和は，$(B-1)$から$A$を引くことになり，単に$A$と$B$を入れ替えた和である 11 よりも，1 小さくなる．同様に，$(C+1)\cdots D$と$D\cdots(C+1)$でも和が 11 よりも 1 小さくなる．したがって，$L+W$は 11 を基準にして考えることで，$L+W=\{(10^s-10^t)+(10^k-10^l)\}\times(11-1)=\{(10^s-10^t)+(10^k-10^l)\}\times 10$とわかる．ゆえに，$L+W$は入れ替えた位の差を 10 倍したものであることがわかる．

③$l<t<k<s$のとき

②と同様に 2 組の位の入れ替えによる繰り下がりを考慮すると，$L=(A+1)0\cdots 0C9\cdots 9(B-1)9\cdots 9D0\cdots 0$である．このとき，$A,B$の範囲より，$(A+1)$と$(B-1)$で，繰り上がりと繰り下がりは生じない．

（一）の見方で考えると，$L+W=(A+1+B-1)0\cdots 0(C+D+1)099\cdots 909\cdots 9890\cdots 0=90\cdots 0109\cdots 909\cdots 9890\cdots 0$となる．

（二）の見方で考えると，3(2)②と同様に，11 を基準として考えればよい．入れ替える位の数を考えると，10^sの位と10^tの位では，$(A+1)$と$(B-1)$を比較すればよいため，入れ替える位の数の差は元の差である 11 より 2 だけ小さくなっており，10^kの位と10^lの位では，元の差である 11 と等しい．ゆえに，$L+W=(10^s-10^t)\times(11-2)+(10^k-10^l)\times 11=(10^s-10^t)\times 9+(10^k-10^l)\times 11$となる．

④同じ位を２回入れ替えた場合（ex. $k=t$）

$l<k=t<s$の場合（以下，$k=t$をtとする）を考える．今，10^sの位と10^tの位を入れ替えた後に，10^tの位と10^lの位を入れ替えるとする．$B+C$の範囲に注意して，繰り上がりを考慮すると，$L=A9\cdots 9(B+C)9\cdots 9D00\cdots 0(B+C\leqq 9)$で，$L=(A+1)0\cdots 0(B+C-10)9\cdots 9D0\cdots 0$ $(B+C\geqq 10)$となる．それぞれAと$(A+1)$は10^sの位，$(B+C)$と$(B+C-10)$は10^tの位，Dは10^lの位である．

（一）の見方で考えると，$L+W$はBとCの和が消えることがないため，一定にはならないことがわかる．

次に，（二）の見方で考えると，$B+C\leqq 9$のとき，$A\cdots(B+C)$と$(B+C)\cdots A$の和は，$B+C$からAを引くことになり，元のAとBを入れ替えた和である 11 よりもCだけ大きくなる．同様に，$(B+C)\cdots D$と$D\cdots(B+C)$では，$D-(B+C)$より，元の和である 11 よりもBだけ小さくなる．ゆえに，$L+W=(10^s-10^t)\times(11+C)+(10^t-10^l)\times(11-B)$となる．

$B+C\geqq 10$のとき，$(A+1)\cdots(B+C-10)$と$(B+C-10)\cdots(A+1)$の和は，$(B+C-10)$から$(A+1)$を引くことになり，元のAとBとを入れ替えた和である 11 よりも$(11-C)$だけ小さくなる．同様に，$(B+C-10)\cdots D$と$D\cdots(B+C-10)$では，元の和である 11 よりも$(B-10)$だけ小さくなる．ゆえに，$L+W=(10^s-10^t)\times C+(10^t-10^l)\times(21-B)$となる．

以上より，同じ位を 2 回入れ替えた場合には，結果が一定にならないことがわかる．

４．教材「1089 の不思議」に関する考察

(1)解決過程で働く数学的な考え方と「位の操作」に対する数学教育的な価値

①原題の解決過程に焦点を当てて

以下では，まず 2(1)①と 2(2)①の「いつでも$L+W$が 1089 になるのか」に対する解決過程を考察し，その次に 2(1)②と 2(2)②及び③の「なぜ$L+W$が 1089 になるのか」に対する解決過程を考察する．

2(1)①では，藤井（2012）が指摘したように，「繰り下がり」を式の形式的処理に反映させることが重要だった．具体的には，文字式の形式的な処理によって得られた$L=99(a-c)$から操作(iii)が困難となったことを契機として，具体的な数の筆算を振り返り，繰り下がりを考慮して，文字を用いて筆算形式による証明を行った．そして，再び具体的な数に対する式変形である$563-365=\{(500-100)-300\}+\{100+(60-10)-60\}+(10+3-5)=\{(5-1)-3\}\times 100+\{10+(6-1)-6\}\times 10+(10+3-5)$をもとにして，文字式による証明を行った．このときの具体的な数は，ただの数ではなく擬変数として捉えている．

2(2)①では，文字式の形式的な処理によって得られた$L=99(a-c)$では位の操作が困難となり，具体的な数に焦点を当てて考察を行った．その際，表 1 と$99(a-c)$という式の形から，Lは 99 の倍数であること，$(a-c)$の範囲から数の範囲が制限されていることをよみとり，全事象を調べることによって証明した．

これより，「いつでも$L+W$が 1089 になるのか」に対する解決過程では，文字の形式的な処理によって活動が停滞してしまったことを契機として，「数を擬変数として捉え文字式の変形に活用する活動」や「$99(a-c)$の意味をよむ活動」が行われたことがわかる．その際，常に具体的な数を参照することで，文字式の見方が変容した．

2(1)②では，文字式の計算によって位の数a,b,cが打ち消し合うことから，位の数である変数は関係なくなり，繰り下がりによって生じる+10 や-1 といった定数に着目することで，$L+W=1089$となる理由を考察した．

2(2)②では，$L=N-M=99(a-c)$というNとMの差である「結果」を，99 を足し引きするという「操作」の観点で捉え直すことによって 1089 の意味を考察した．その際，$99(a-c)$における「99」を 100-1 と見ることで百の位と一の位の操作における定数として捉え，「$(a-c)$」を百の位と一の位の差という変数として捉えることを通して，1 つの式に含まれる 2 つの数量関係に着目し，1089 の意味を考察した．

これより，「なぜ$L+W$が 1089 になるのか」に対する解決過程では，複雑に変化する事象において定数と変数に着目する考えや文字式に対して「結果」と「操作」の両方の見方を働かせる活動が行われたことがわかる．

以上より，原題の解決過程において，「具体数の参照と文字式の変形とよみ」，「文字式に対する結果と操作の二面的な見方」，「定数と変数への着目」という数学的にものを考えるときに重要な活動が含まれているという意味で，本教材の数学教育的な価値を認めることができると考える．

②原題の発展の解決過程に焦点を当てて

3 章の(1)から(2)①までは，2 章における（一），（二）の考えをもとに解決することができた．一方，3(2)②，3(2)③では，（二）における「乗数の 10 の 2 倍である 20」と「入れ

替える位の和」の差という見方では解決できず，新たに 11 を基準として，その変位を考えることで，(10^k-10^l)と(10^s-10^t)の乗数を求め，$L+W$の値を特定することができた．

この 2 つの見方に基づく解決過程において共通しているのは，解決過程の最初の時点で一定になるという見通しがもてることである．具体的には（一）の見方では，入れ替える位の数の和が「一定」になること，その間の数は 9 の連続数によって構成されることによって一定であることがわかる．(二)の見方では，原題の解決過程で定数と見ていた 99=100-1 を変数として捉え直し，10^kの位と10^lの位の入れ替えを(10^k-10^l)の繰り返しの和と見て，10^kの位と10^lの位の数の和が一定であることにより，結果が一定になることがわかる．そして，入れ替える位の和が一定であることを利用することで，複雑な文字式の計算を用いることなく解決できた．

次に，2 つの見方において，異なる点を考察する．（一）の見方では，$L+W$を構成するために，入れ替える位の数との間の 9 の連続数に着目する必要があった．さらに，3(2)②では，2 組の位を入れ替えた数が混在するため，例えば，$L+W=10099899000$として結果の数が一定になることがわかっても，その数の構成要素の整理は煩雑になり，その数と，入れ替える位の数との関係が見えなくなった．

一方，（二）の見方では，$L+W$を構成するために，3(2)②，3(2)③，3(2)④のLに対する繰り下がりと繰り上がりに関する考察を除いて，入れ替える位の数だけで解決することができ，構成された数においては，入れ替えた位を用いて表現することができた．

以上より，原題の発展の解決における複雑な数操作に対して，入れ替える位の和が「一定」であることを見出すことが重要であること，構成される数$L+W$に対して，(10^k-10^l)の繰り返しの和と見ることで，構成された数と位の数の関係を明確にすることができることがわかった．

このうち 1 つ目は，原題の発展の解決において「$L+W$が一定」となることを証明するとき，選択したNに応じて複雑に変化するL，Wといった対象を考察する際,「その操作に表れる位の和が一定」であるという，複雑な現象における一定を見出し，考察する活動が行われることを意味している．この活動は，例えば円 O の弧 AB に対する円周角$\angle APB$が「一定」であることを証明するとき，円周上の点 P の位置によって複雑に形が変化する$\angle APB$に対して，中心角$\angle AOB$が一定であることを見出す活動と同様である．

このように本教材は，複雑な事象における「一定」に対して，その事象に内在している「別の一定」を見出すという，数学的にものを考えるときに大切な考えや活動が含まれているという意味で，数学教育的に価値があると考える．

2 つ目は,「構成される数を入れ替えた位の数だけで表現できる」という，結論において決定的に影響している仮定を明確にすることによって，桁数を一般化した問題の解決の見通しをもつことができることを意味している．この見通しは，原題を拡張したP進法における位の入れ替えを(P^k-P^l)の繰り返しの和と見れば良いことが類推されるとともに,「位の入れ替え」という条件をもつ教材に対する解決の見通しや動機づけにつながる．

このように，原題を発展させる際に見通し

をもって，類推の根拠となるものを見出す活動こそに，この教材としての数学教育的な価値を認めることができると考える．

(2)「位の入れ替え」と「和と差」に関する教材の考察

4(1)②より，原題の条件である「位の入れ替え」と「和と差」を条件に含む教材を同一の観点で見ることができることが推測される．

以下，2つの教材を「位の入れ替え」という観点で考察したものを記述する．

①カプレカ数

「カプレカ数」とは，位の数を入れ替えて最大にした数と最小にした数との差をとったときに，元の値に等しくなる自然数のことである．

例えば，カプレカ数に対して，以下の教材を考える．

4 桁の自然数に対してカプレカ操作をして一定になる数はあるか．

文字式を用いて証明する方法では，4 桁の自然数の位を大きい順に並べたものを$N=ABCD$，最小の数$M=DCBA$としたとき，$L=N-M=999(A-D)+90(B-C)$を求め，Lの倍数に着目して全数を調べる方法や，位の数を繰り下がりを考慮して表現し，それぞれの位が一致する場合を複数の連立方程式を解くことで求める方法があるが，どれも手計算では求めることが大変である．

そこで，「位の入れ替え」と「和と差」の視点で考える．具体的には，4 桁の自然数の位を大きい順に並べたものを$N=ABCD$，最小の数$M=DCBA$としたとき，$L=N-M$で，Lの千の位と一の位を入れ替え，百の位と十の位を入れ替えた数をWとすると，原題の発展より，$L+W=(10^3-10^0)\times 10+(10^2-10)\times 10=10890$となる．この結果より，$L$の入れ替える2組の位の和は 10 と 8 であることがわかる．今，Nの位の数で等しい数がある場合，和の条件より，Lと矛盾するため，すべて異なる数とわかる．したがって，和が 10 の組は（9,1），（8,2），（7,3），（6,4）で，和が 8 の組は，（7,1），（6,2），（5,3）であり，すべての数が異なるという条件より，4 桁の数の組み合わせは，（9,6,2,1），（9,5,3,1），（8,7,2,1），（8,5,3,1），（7,6,3,2），（7,6,4,1），（6,5,4,3）となる．ここで，Lの一の位は$(10+D-A)$で，千の位は一の位の 9 の補数かつ，百の位の繰り上がりより，1 が足されるため，$(A-D)$である．この結果より，$A-D=D,B,C$となる．この条件を満たす組は（8,7,2,1）と（7,6,4,1）であり，この 2 つの数に対して操作を行うことで，$N=7641$とわかる．

さらに，この結果を利用することで，7641 に数を付け足した場合，例えば$7A64B1$では，AとBの入れ替えとその和が一定であることから，$A+B=9$かつ$A-B=B$より，$A=6$，$B=3$となり，766431もカプレカ数になることがわかる．同様に，7641 の 7 と 6 の間と 4 と 1 の間にそれぞれ同じ数の 6 と 3 を入れた場合，常にカプレカ数になることがわかる．

②回文数

「回文数」とは，1221 のように，位の数を逆から並べても同じ数になる数のことである．

例えば，回文数に対して，以下の教材を考える．

1221 のように，4 桁の回文数が 11 の倍数になることを証明しなさい．

まず，文字式を用いて証明する．$N=1000a+100b+10b+a\left(a,b\in\mathbb{Z},\ 1\leqq a\leqq 9, 0\leqq b\leqq 9\right)$とすると，$N=11(91a+10b)$と変形でき，

$(91a+10b)$は自然数より，Nは 11 の倍数であることがわかる．このとき，文字式による証明では 4 桁の回文数と$(91a+10b)$の意味について考察することが難しく，桁数を増やした場合では式が複雑になるため，考察が困難になることが想定される．

そこで,「位の入れ替え」と「和」の視点で考える．具体的には，1221 を 0021 と 1200 の和と見れば良い．すなわち, 4 桁の回文数$ABBA$は，千の位と一の位の入れ替え，百の位と十の位の入れ替えと見て，$ABBA=2\times 00BA+(10^3-1)(A-0)+(10^2-10^1)(B-0)=2\times(10B+A)+\{(10^3-1)A+(10^2-10^1)B\}=(10^3+1)A+10(10+1)B$と再構成できる．このとき, (10^3+1)と$(10+1)$は 11 の倍数より 4 桁の回文数は 11 の倍数であることがわかる．

この結果から，原題を発展させることを考える．以上より，回文数を位の入れ替えで見たとき, 常に位の入れ替える組が$A\cdots 0$と$0\cdots A$のように，位の数と0の組になっているため，構成される数は，回文数の（位の数-0）に対して，$10^k(10^l+1)$の形がかけられることになる．ここでkとlは，回文数の桁数と入れ替える位に関係していることは明らかである．ここで, 11 の倍数と$10^k(10^l+1)$の関係に着目すると，10^kは 11 の倍数でないから，10^l+1に着目すれば良い．ここで,「1089 の不思議」から，1089=11×99 で，原題の発展より$10989=11\times 999$，$109989=11\times 9999$ である．このとき，10^l+1は，11，101，1001，10001，100001 ‥であり，原題で得られた数との関係を考えると, 1089-1001=88=8×11, 10989-10001=988, 109989-100001=9988=908×11 となる．この結果から，$(91a+10b)$の 91 は 99-8 によって得られた数であり，10 は10^kからきていることがわかる．

以上より，$l=2n+1$（nは 0 以上の整数）のとき 9 と 8 が偶数個並ぶため，$(10^{2n+1}+1)$は 11 の倍数であることがわかり，偶数桁の回文数は 11 の倍数であることがわかる．

③「位の入れ替え」で教材を見る価値

以上の考察より，最大の数から最小の数を引いた差が一定になる「カプレカ数」, 位の数が対称的になっている「回文数」という「位の数」に特徴づけられた教材を「位の入れ替え」という視点で考察できることがわかった．そして，一見表面的な位の操作を，(10^k-10^l)の繰り返しの和と一貫して見ることで,「位の入れ替えと和と差によって生じる一定な数」,「位の入れ替えによって生じる倍数関係と位の数との関係」という，教材がもつ数学的な関係性を考察することが可能となった．

解決過程においては, ①カプレカ数では「位の入れ替え」の視点で見ることで，原題の解決が容易になり，問題の発展まで見通しをもって解決できることを示した．「1089 の不思議」においても,「位の入れ替え」という視点が，解決の見通しに有効に働いていたことからも，この視点は，原題に対する桁数の拡張に対して有効に働くことが明確になった．

②回文数では,「位の入れ替え」の視点で見ることで，倍数関係に$10^k(10^l+1)$という数が影響していることがわかり，その考察において,「1089 の不思議」の結果である 1089=99×11 を基準として考察することで, 10^l+1が 11 の倍数になることがわかった．

このように，一見バラバラに見える複数の教材を「同じ問題」と見る活動は，数学における類推の考えを働かせる機会を生徒に与えることができるという意味で価値があると考

える．

５．今後の課題

今後の課題は以下の二点である．

第一に，本研究における解決過程をもとに，この教材の対象学年を明確にするとともに，授業目標の設定と具体的な学習指導を設計，実践し，生徒の実態に基づき，解決過程を評価，改善することである．

第二に，4(2)で考察した教材に対して，教材の特徴を精緻に考察するとともに，配列や取り扱い方も含めて検討した教材群を開発することである．

附記

本論文の「1089 の不思議」の探究過程及び考察は，東京学芸大学大学院教育学研究科で，「算数・数学科授業デザイン」という授業にて，成田慎之介先生と数学教育サブプログラム M57 期の皆さん（大塚陽介先生，中嶋広大先生，相澤匡紀，五十嵐開智，和泉飛鳥，倉澤侑，新堂絵梨香，高増拳生，丸山諒太，横山和誉）と他サブプログラムの近藤みゆき，橘海音，山下才貴と考察したものを筆者が加筆・修正し，先行研究の視点を加えて考察したものである．

引用・参考文献

デイヴィッド・アチソン（2004）．数学はインドのロープ魔術を解く 楽しさ本位の数学世界ガイド（伊藤文英訳）．

藤井斉亮（2012）．数学的問題解決過程における文字式の役割と機能．杉山吉茂先生喜寿記念論文集編集委員会，続・新しい算数・数学教育の実践を目指して 杉山吉茂先生喜寿記念論文集（pp.198-208）．東洋館出版社．

國本京亀（2006）．教師養成事始め．全国・数学教育学会誌 数学教育研究，12，1-11． https://doi.org/10.24529/jasme.12.0_1

三輪辰郎（1996）．文字式の指導序説．筑波数学教育研究．15，1-14．

太田伸也（2017）．「10 倍して 9 の段の九九を引く」問題について．藤井斉亮先生ご退職記念論文集編集委員会，数学教育学の礎と創造 藤井斉亮先生ご退職記念論文集（pp.208-219）．東洋館出版社．

杉山吉茂（1990）．力がつく算数科教材研究法．明示図書．

Watanabe, T., Takahashi, A., & Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. In F. Arbaugh & P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into mathematics teacher education* (AMTE monograph series, Vol. 5, pp. 131–142). San Diego, CA: Association of Mathematics Teacher Educators.

W.W.Rouse Ball（1905/1892）. Mathematical recreations and essays. Bulletin des sciences mathématiques

（せいわ　しゅんや
浦和実業学園中学校・高等学校
〒336-0025　埼玉県さいたま市南区文蔵
3 丁目 9-1
との　こうじ
稲城市立稲城第三中学校
〒206-0812　東京都稲城市矢野口 3034）

訂　正　文

『学芸大数学教育研究』　第 36 号　pp.31-43

教材「1089 の不思議」に関する一考察

清和隼弥・登野皓志

上記論文において記載内容に誤りがありましたので，以下のように訂正いたします。

該当箇所	誤	正
p.34　左　32 行目	$1 \leqq a - c \leqq 8$	$1 \leqq a - c \leqq 9$
p.34　左　33-34 行目	乗数が 1 から 8	乗数が 1 から 9
p.34　右　1-3 行目	$L + W = 99 + 990 = 198 + 891 = 297 + 792 = 369 + 693 = 495 + 594 = 594 + 495 = 693 + 396 = 792 + 297 = 1089$	$L + W = 99 + 990 = 198 + 891 = 297 + 792 = 396 + 693 = 495 + 594 = 594 + 495 = 693 + 396 = 792 + 297 = 891 + 198 = 1089$
p.37　左　8 行目	$0 \leqq A \leqq 7$，$2 \leqq B \leqq 9$	$0 \leqq A \leqq 8$，$1 \leqq B \leqq 9$
p.37　左　12 行目	$0 \leqq C \leqq 7$，$2 \leqq D \leqq 9$	$0 \leqq C \leqq 8$，$1 \leqq D \leqq 9$

以上