東京学芸大学リポジトリ
Tokyo Gakugei University Repository

平面と空間を往還する活動を実現する教材とその指導に関する一考察：空間図形の単元の中で平面図形の学習を行うことを目指して

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 東京学芸大学数学科教育学研究室 公開日: 2024-07-02 キーワード (Ja): ETYP: 教育実践, STYP: 中学校, SSUB: 数学 キーワード (En): 作成者: 新井, 健使 メールアドレス: 所属: 東京学芸大学附属国際中等教育学校
URL	https://doi.org/10.50889/0002000609

平面と空間を往還する活動を実現する教材とその指導に関する一考察
―空間図形の単元の中で平面図形の学習を行うことを目指して―

新井　健使

要　約

本稿の目的は，空間観念を育むことを意図しながらも他の図形分野の内容を学ぶことができる教材を開発し，その価値を明らかにすることである．そのために，特に平面と空間を往還する活動を実現し得るスリーブ制作を題材とした教材を開発した．その後その教材を用いた授業を実践し，空間観念の育成や平面図形の学習の実現の視点，生徒の視点から価値を考察した．その結果，生徒が目的意識をもって，また三次元と二次元を往還しながら取り組むことのできる教材であることなどの成果が得られた．

１. はじめに

中学校数学における空間図形の指導では，空間観念を育むことが大切である．空間観念を育む指導については，多くの文献においてその重要性が主張されている(例えば，島田，1990；杉山，2009；藤原，2021 など)．中学校学習指導要領解説においても,「図形の性質や関係を直観的に捉え論理的に考察する力を養うために，例えば，立体の模型を作りながら考えたり，目的に応じてその一部を平面上に表す工夫をしたり，平面上の表現からその立体の性質を読み取ったりするなど，観察や操作，実験などの活動を通して図形を考察することを基本にして学習を進めていく(文部科学省，2018，pp.78-79)」ことが指導の中に求められており，考察対象となるものが目の前にある状態で学習を進めることが空間観念を育む上で有効であると伺える．

一方で樺沢(2020)は,「どの教師も，模型をつくりながら考え，観察するような学習が重要であることは認めているが，時間がかかりすぎるため断念したという声もよく聴かれる．このような声の背後には，時間をかけてそれに見合うだけの価値があるのかという問題意識が潜んでいると考えられる(p.25)」と指摘している．したがって，単に観察・操作・実験などの活動を実現できるだけでなく，それらを通して図形分野の多くの内容を学ぶことができる教材が必要であると言えよう．

そこで本研究では，空間観念を育むことを意図しながらも他の図形分野の内容を学ぶことができる教材を開発し，その価値を明らかにすることを目的とする．特に価値を明らかにするために，開発した教材の授業実践を行い，実証的考察を行う．なお，ここでいう教材とは，実現したい観察・操作・実験などの活動や学習内容を含んだ素材を授業で提示する探究課題にしたものを指すことにする．

２．教材の開発

(1)　開発の視点

空間観念を育むための教材開発の視点としては，島田(1990)の示す「空間の想像力(空間的直観)」が示唆的である．島田は，教育的な

立場から「空間の想像力」として以下の3つを示している(pp.94-95).

1. 経験的な世界に,抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること.
2. 頭の中で図形を考え,それに幾何学的操作を施した結果を,模型や図形を用いずに想像できること.
   a. 三次元の図形から三次元の図形へ
   b. 三次元のものから二次元のものへ
   c. 二次元のものから三次元のものへ
3. 空間で,いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること.

これらについて島田は,「実生活のうえでも必要なことであり，数学科教育だけが受け持つものともいえないが，数学の学習にとっても重要なものであるといえよう(p.96)」と述べており，空間図形の指導上の重要な視点として示されていることが伺える．したがって本研究では上記のいずれかの要素を含む教材を空間観念を育む教材として規定する．

次に実現したい学習内容について整理する．多くのことを学ぶことができる教材の開発を目指すため，学習指導要領で示されている内容の多くが実現可能であることが要件としては求められる．したがって，空間図形を中心として図形分野全般の内容を俯瞰して考える必要がある．現行の学習指導要領および検定教科書は,「平面図形」と「空間図形」は別の項目として設定されており，また平面図形を学んだあとで空間図形を学ぶ構成となっている[*1]．しかし，我々は空間の中で生活をしており，その中で事象を図形的にとらえながら問題解決や考察を行なっている．そのため，実際の考察対象は空間図形から入ることが自然であると考える．空間図形から導入し，それらを考察する中で平面図形に関する学習を実現できれば，生徒にとって自然であると同時に多くのことを学ぶことができる教材になるだろう．

したがって，平面図形の内容を未習の状態で空間図形の学習に取り組み，その中で平面図形の内容も実現可能であるかどうかが開発した教材をみる視点となる．

(2)　教材

以上を踏まえて設定した教材は次のとおりである[*2]．

ソフトクリームのコーンやテイクアウトできるカフェの飲み物には,手が汚れることや,熱さ・冷たさを感じることをできる限り避けるために,「スリーブ」というものが用意されている.このスリーブをデザインしてみよう.

図１　スリーブの写真

空間観念を育むためには，考察対象となるものが目の前にある状態で学習を進めることが大切であるため，スリーブ制作という状況をつくり出すことにする．模型を制作しながら空間図形を学んでいくことに関して藤原(2021)は，模型の制作を生徒の活動のゴールとして設定することにより,「知識・技能を総合的に活用して考察し表現する機会が生まれ,

空間と平面の関連付けが相互になされる(p.4)」と主張している．本研究では平面図形の学習内容と空間図形の学習内容を一緒に学ぶ機会を得ることを意図しているため，模型製作は平面と空間の 2 つの視点を往還しながら取り組む活動の実現を期待できることがわかる．これは島田の示す「2．頭の中で図形を考え，それに幾何学的操作を施した結果を，模型や図形を用いずに想像できること.」の要素を含むものであるため，空間観念を育むことが期待される．

この教材で実現したい学習内容は，平面図形ではおうぎ形の弧の長さ（と面積），空間図形では（錐体の）展開図である．いずれも，スリーブ制作の過程で必要な情報となる．例えば**図 2** が紙コップの側面の展開図だとして，スリーブの設計図を作成するためには，曲線 BC, DE が円の一部分であることに気が付き，おうぎ形 ABC の中心角の大きさを知る必要がある.さらにその中心角を求めるためには，母線 AB（AD）の長さを求める必要がある．これらを求めるためには，おうぎ形の弧の長さや錐体の展開図について理解している必要があり，その知識の構築をこの文脈で行うことを想定している．

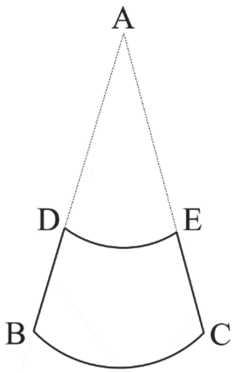

図 2　紙コップの展開図例

なお，生徒の活動としては，小学校で学んでいる円周や割合を根拠として,実測する BD の長さを用いてAD:ABの比を算出することで設計図を作成すると想定している．

３．授業実践の概要

(1)　授業準備

実践にあたり，授業者が用意したものは，

- 授業プリント
- 紙コップ（9 オンスを用いた）
- 工作用紙（スリーブ制作用）
- 定規
- 分度器
- コンパス
- 紙ひも
- 電卓

である．紙ひもを用意したのは，実際に制作しようとするとおうぎ形の作図が必要になるが，その半径が通常のコンパスでは測ることができない大きさとなるためである．

また，活動のルールとして，以下の 2 点を設定することにした．

- 紙コップには，書き込んだりしないようにする．
- 紙コップを切って分解したり，穴をあけたりしないようにする．

意図としては，紙コップを全クラスで共有しながら使用することと，また，分解してしまうとそのまま展開図としてうつしとって制作ができてしまい，実現したい数学的な内容に到達しにくくなると判断したためである．

以下の授業の流れを想定して実践することにした．

課題把握

i.　観察，必要な情報を得る

ii.　展開図に着目する
iii.　拡大図・縮図の知識を活用する
iv.　設計図を作成する
完成

課題把握，完成とは別に，ⅰ～ⅳまで大きく4つのフェーズを想定した．ⅰは，数学的モデル化を遂行する上で必要不可欠であり大切なフェーズであるが，教材の文脈上，生徒は自然と必要な情報を得ようと観察したり測定したりすることが想定される．ⅳについても，ⅰ～ⅲがある程度充実することで，教材で求められていることと相まって，実際の制作にスムーズに移ることができる．一方で，ⅱ・ⅲについては，授業者がある程度方向づけや生徒の考えをファシリテートする必要がある．したがって，議論を焦点化させるための問いを事前に設定して授業に臨んだ．

ⅱ→　紙コップの展開図はどのような形になるだろうか？
ⅲ→　おうぎ形の半径はどのように求めればよいだろうか？

(2)　授業の実際

対象：中等教育学校 1 年生(2 クラス，計 57 名)
期間：令和 5(2023)年 1 月 20 日～30 日で計 5 時間

対象生徒はこれまでに多面体（オイラーの多面体定理含む），投影図，回転体，直線や平面の位置関係について学習しており，中学 1 年の平面図形の内容は未習である．

第 1 時では，課題把握とⅰのフェーズにとどまった．生徒は紙コップのありとあらゆる場所の長さを測りとり，それをもとに設計図をかこうと試みていた．工作用紙に設計図をかき，それを切り取ってスリーブ状にして紙コップにはめ，うまくいくかどうかを検証する．そのような一連の流れを絶えず繰り返す様子が見受けられた．

生徒のその姿から，紙コップの展開図のイメージはなかなか難しいということがわかった．

展開図をかいている生徒で一定数いたのは，側面が「台形」であると考えている生徒である(**図 3・4**)．紙コップの底と飲み口で円の半径が異なることからイメージされたのだと考える．

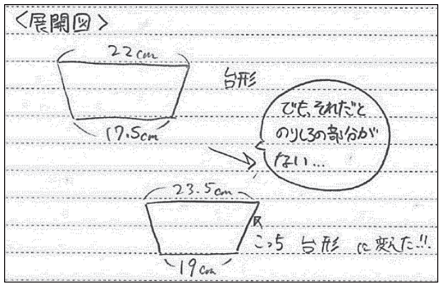

図 3　生徒 A の授業プリント記述

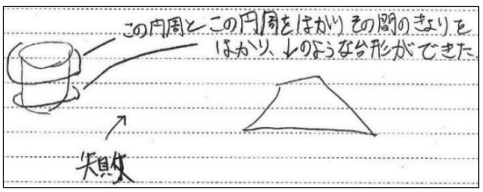

図 4　生徒 B の授業プリント記述

だが，この考え方は，すぐに彼らの中で棄却される．というのも，実際に作って丸めてみると，すき間が開いてしまい，スリーブの形にならないことがすぐに確認できるからである．授業中そのように気が付いている生徒は多数おり，授業プリントに記録している生徒もいた(**図 5**)．ほかにも側面の展開図を「長方形」や「平行四辺形」と見なす生徒もいるが，同じように，実際に制作して，そうでは

ないことに気が付く様子が見受けられた．

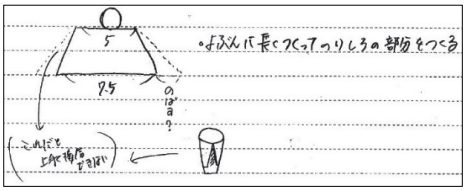

図 5　生徒 C の授業プリント記述

第 2 時では，上記のような考え方を取り上げ，紙コップの展開図に焦点を当てて（フェーズⅱ）議論することにした．事前に設定した「紙コップの展開図はどのような形になるだろうか？」を本時の問いとした．意見としては複数出た(板書には残してある；**図 6**)が，いずれも「実際にやってみるとダメだった」と棄却されていった．誰も試していなかったものについては，その場で簡易的につくり，全員で確かめる作業を行なった．

この指導においても，展開図（二次元）を確認しつつ，実物で確かめる作業（三次元）も行うことを意識した．

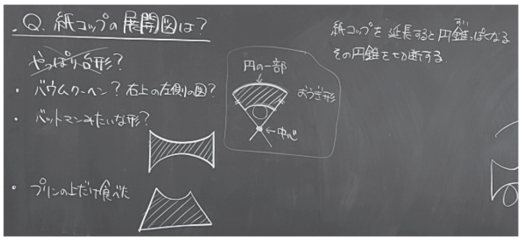

図 6　第 2 時板書の一部

前時の段階から，紙コップが「円錐」を切り取った図形に見なせることを考えていた生徒が各クラス複数名いた(**図 7・8**)ため，その生徒のアイデアを取り上げることにした．

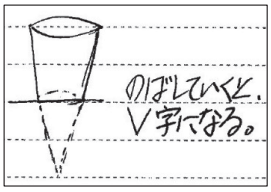

図 7　生徒 D の授業プリント記述

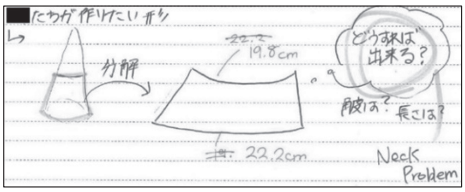

図 8　生徒 E の授業プリント記述

「円錐」であるという考え方については，実際に紙コップに大きめの紙を巻き付けてみるなどして確かめている生徒も多くいた．その際の展開図については，実際に工作用紙で試行錯誤する中で見出した生徒が多かった．その点を整理するために，円錐の展開図の側面の形をおうぎ形ということを確認し，次時で詳しくまとめることに言及した上でおうぎ形は円の一部であることなどを簡単に確認した．「本当だ」「なるほど」と納得しながら模型製作を試みる生徒がいる一方で，わからない長さや角度があるというフェーズⅲに入りかけている生徒もいた．

第 2 時は同時進行で制作も行なっていたため，時間としてはここまでで終わってしまった．

第 3 時では，まず初出のおうぎ形について，用語などを整理するところから始めた．おうぎ形の弧の長さについては，おうぎ形が円の一部であることを基にしてどのように求めればよいかを問い，360°に対する中心角の割合で考えればよいアイデアを引き出してまとめた．

続いてフェーズⅲに入り，小学校算数での拡大図・縮図の知識を利用しておうぎ形の半径を求めていくようにした．しかし，生徒がどのように考え，計算をすればよいのかに困難性を抱えている様子が見受けられたため，適宜補足をしながら，比例式にて半径を求める計算を確認して終了した．

第4時では，前時の活動を踏まえ，実際に紙コップが一部となっている円錐の母線，すなわちおうぎ形の半径を求める活動を行った．実際に用意した紙コップに対して，授業で整理した数値は板書に集約した(フェーズⅳ；**図9**)．

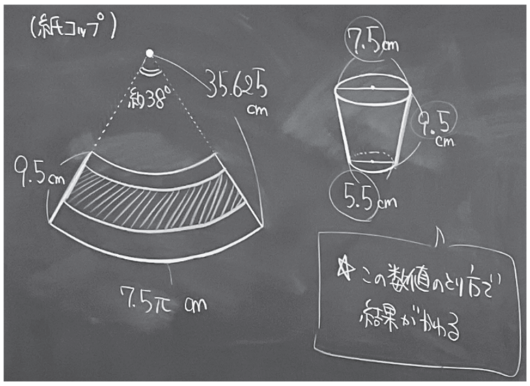

図9　第4時の板書の一部

計算結果を踏まえてスリーブを制作すると，多少の誤差はあるが，スリーブとしての機能を果たすものを多くの生徒が完成させていた．

第5時は，弧の長さの求め方と同じようにおうぎ形の面積を求める公式を導出し，おうぎ形に関する練習問題を扱う時間とした．また，併せて錐体の展開図の確認も行なった．

4．考察

(1)　授業実践の考察

今回の教材は，探究過程で生徒にとって新たな数学的概念や知識を学ぶことを意図した展開におおむねできることがわかった．今回達成したい数学的な知識は，おうぎ形の弧の長さ（と面積）および（錐体の）展開図であった．いずれも活動の中で自然と表出する，あるいは生徒が知りたいと思える展開を実現することが可能であると考える．

ただし，おうぎ形については探究活動のちょうど折り返しあたりで直面するため，探究活動のモチベーションを保ちつつ，数学的に整理する必要がある．今回は探究活動を重視したため，おうぎ形の弧の長さの求め方や，その直前の円錐の展開図の話題についてやや雑に扱ってしまったことは否めない．生徒の感覚に任せてしまった部分が多く，例えば円錐の展開図も本来であれば実際に円錐を切り開いたり，おうぎ形の弧の長さと底面の円周に等しくなることを展開図を利用して考えるなど，それぞれの内容に正対する時間をより多くつくる必要があった．この部分の指導をより丁寧に行うことで，おうぎ形と円錐の両者の理解が深まることが期待される．

また，空間観念という視点からも，実物を用いながらではあるが，生徒は空間図形と平面図形を往還して思考するため，その育成に資する教材であることがわかる．空間図形に相当する模型を扱いつつも，絶えず平面図形を想定しながら制作する様子が見受けられた．特に導入直後は工作用紙を用いて設計と作成を繰り返していた．この活動は，まさに三次元と二次元を往還しながら数学的に考えることであり，空間観念（島田の示す2の要素）をはたらかせまた豊かにする活動であることがわかる．

一方で，問いの工夫については，検討の余

地がある．すなわち，生徒の思考に沿った問いの構成が課題になるということである．フェーズⅱ・ⅲで問いを想定していたが，効果的に働いたのかどうか，またこのような問いでよいのかどうかはさらなる考察と議論が必要である．

また授業構成についても改善の余地がある．フェーズⅲで，事前では拡大図・縮図の知識を利用しておうぎ形の半径を求めていくことを計画し，授業でもその方向で考えることにした．しかし，それでは中学3年生で学習する“三角形と比の定理”が必要となってしまう．小学6年生で学ぶ拡大図・縮図の発展と見なすこともできたが，本来は投影図の知識を利用しておうぎ形の半径を求める流れにすべきであった．投影図(正投影図法)のよさは，高さ・幅・奥行きを正確に表すことができるという点にある．したがって，円錐の母線がおうぎ形の半径となる構造をおさえれば，紙コップを含めた円錐を投影図に表すことで，半径(母線)を測りとることが可能になる．

(2)　生徒の声

このような授業を経て，生徒はどのように感じたのだろうか．

当該学期に取り組んだ教材(探究課題)の中で，どれが面白く(interesting)感じたのかのアンケートを実施した．本稿で示したスリーブの教材を挙げた生徒は，全体の41%で，その理由の一部は**表1**のとおりである．グループで話し合い，お互いのアイデアを持ち寄りながら制作するプロセスや，それによって数学的な理解が深まったと感じたことに面白さを感じる生徒がいることが，記述からよみとることができる．

一方で，「色々なものが入り乱れて，よく分からなかった.」という声もあった．これについては問いの工夫によって整理できると考えられる．

表1　生徒アンケートの結果の一部

グループで，展開図がどうなるのかわからない状態からはじめて，難しかった．しかし，みんなでアイディアを出していくうちに，展開図に気づき，協力ができたから．たくさんのコミュニケーションをとって，問題解決につながったことが，達成感があって楽しかった．また，理解も深まった．
実際にグループを組んで計算や作成をして，実践的な探究課題だったから一番面白かった．最後にグループで作ったときは，わからないところを誰かが計算したり，知識を共有したりと，協力して作れて，最終的にはカップに綺麗にはまって達成感があった．
数学をカフェでよく見るスリーブ(自分たちの生活にある身近なもの)に関連付けることができたうえ，班の人たちとたくさんコミュニケーションをとりながら学習を進めることができたからです．
班の人と話し合いながら平面図など様々な視点の図からわかることを使ってスリーブを作るのが面白かったからです．
スリーブのデザインをするために今まで学んだ知識を活用しながら，考えられたことが楽しかったし，おうぎ形などの理解が深まったから．
個人作業よりも班活動が多かったから，意見を共有することで自分の中での思考も広がっていくことができたからです．
私は応用問題で自分の知識を関連付けて考えることが苦手だった．しかし応用の仕方が身についているなと感じたのがスリーブをデザインした時だったと思ったので選んだ．スリーブを作る時は簡単に言えば立体のものの展開図を作るということだった．大体の決まった図形，例えば立方体や直方体円錐などは結構展開図を覚えているという感じだったのでスリーブを作る時は他の自分が知っている知識に関連付けるという点では成長できたと感じたから．

授業を終えて，インタビューを実施した生徒もいる．その生徒は，この教材について，以下のように答えている（S が生徒，T がインタビュアー；下線は筆者による）．

S33：たぶん，スリーブをつくってみようって言われずに問題文が「スリーブの作り方を説明してみよう」だったら，そっちの方が簡単だったなって思います．

T39：え，どういうこと？

S34：計算とかは，その授業でおうぎ形の弧の部分と円周が同じ長さで，そこがくっつくから，円錐になるんだよっていう流れは，授業を通して理解しているから，「説明しよう」だったらそのまま書けばいいけど，実際に工作用紙で自分が作ってみようってなると，その弧の部分は半径，直径を意識しながら作るから，数学の知識が全部入るなって思います．それが，ここはじゃあコンパスが必要でみたいな，ここは測って同じにしないといけないとか，そういう風にその授業に限らず，今までの小学生で習ってきたことも全部思い返して正しくやるって思うと，けっこう混乱してそれが難しかったかなって思います．

T40：なるほどね．じゃあやっぱりこれ，実際つくろうとするからより難しくなった一方で，いろんな数学が動員されたって感じね．

S35：そうです．すごい学びにはなったと思います，難しかったけど．でも楽しかったです．

(インタビュー実施日：令和 5(2023)年 7 月 31 日)

実際に制作するという活動が，生徒の思考を促したということがわかる．また，これまで学んできたことが総動員される教材であったと生徒自身も認識しており，それが彼らの楽しさにつながったこともわかった．

アンケートおよびインタビューから，生徒たちはこの教材に対して知的な面白さを十分感じていることがわかる．

５．おわりに

本研究の目的は，空間観念を育むことを意図しながらも多くのことを学ぶことができる教材を開発し，その価値を明らかにすることであった．

この目的に対し，スリーブ制作を題材とした教材を開発し，実践を行なった．その結果，次の 3 点が成果として得られた．

① 空間図形に関する本教材は，平面図形の内容を未習の状態で取り組み，その中で平面図形の内容の学習も実現可能であることがわかった．

② 本教材は，生徒が目的意識をもって，また三次元と二次元を往還しながら取り組むことのできる教材であることがわかった．

③ 本教材は，生徒自身も既習事項を活用させながら制作および新たな概念形成を志向していることを自覚しており，そこに楽しさや面白さを感じていることがわかった．

一方で，課題としては次の 2 点が得られた．

① 議論を焦点化させるための問いを事前に設定したが，その有効性については判断できなかった．さらなる検証および考察が必要である．

② 制作活動を中心としたため，生徒それぞ

れの進度にばらつきがあり，混乱をさせてしまった生徒も一定数いた．フェーズの洗練により，生徒の思考を整理するプロセスを検討することが求められる．

なお，空間観念を育むという視点からは，本教材に大きな可能性を見出した一方で，単元全体で育成のプロセスを検討する必要がある．したがって今後の課題としては，本教材を洗練させていくとともに，本教材を取り入れた単元設計について検討することが挙げられる．

註

*1　実際の単元配列については学校によって決められるが，ここでは検定教科書に掲載されている順に指導を行う想定でいる．

*2　開発にあたっては，野島淳司（東京学芸大学附属国際中等教育学校）も携わっている．

引用・参考文献

藤原大樹(2021)．平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する学習指導―クリスマスツリーの模型制作を通して―. 日本数学教育学会誌，103 巻 3 号，3-10.

樺沢公一(2020)．空間図形の問題解決における「対象/視点」を意識した指導に関する考察―全体での議論における教師の関わりに着目して―. 学芸大数学教育研究，第 32 号，25-36.

文部科学省(2018)．中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説 数学編．日本文教出版株式会社.

島田茂(1990)．空間の想像力．教職数学シリーズ 実践編 10 教師のための問題集(pp.94-101)．共立出版.

杉山吉茂(2009)．中等科数学科教育学序説 杉山吉茂教授講義筆記．東洋館出版社.

（あらい　けんじ
東京学芸大学附属国際中等教育学校
〒178-0063　東京都練馬区東大泉 5-22-1）