論証指導とはどのような努力をすることなのか？：「説明の過程の意識化」に重点を置いて

学芸大数学教育研究会（2023 年 6 月 11 日）
樺沢　公一　（北海道教育大学旭川校）講演記録

論証指導とはどのような努力をすることなのか？
―「説明の過程の意識化」に重点を置いて―

１．はじめに～問題意識の変遷～

丁寧にご紹介いただきありがとうございます．よろしくお願いいたします．

本日のテーマなのですが，「論証指導とはどのような努力をすることなのか？」というタイトルをつけさせていただきました．

まず，私自身の研究テーマに至るまでの問題意識の変遷を少しお話しようかと思います．

（１）学生時代

学部時代の，多分 4 年生の頃に，3 年生次に新しく赴任していらしたばかりの藤井斉亮先生の数学教育の授業が論証指導への関心のはじまりだったと思います．正方形と平行四辺形の教材で，証明をして，その要素を分析して発展させていくという授業をしてくださって，最後に「証明が終わってからが数学なのだ」と仰いました．当時の自分は，証明が終わったら終わりだと思っていたんですけれど，この一言に衝撃を受けて，熱量があがってしまって，藤井先生のところにお話しに行ったんです．そうしたらこういう論文があって，それをもとに授業をしたのだと「証明に基づく発展的な学習指導」という杉山吉茂先生の論文を教えてくださりました．それですぐに図書館に行って論文をコピーして，宝物を見つけたような気持ちになったのを覚えています．

その後大学院に入る前に一度，新宿区の中学校で 5 か月ほど講師を務めました．中学 2 年生の数学を週 22 時間担当し，そこで論証指導を担当しました．ちょっと元気のいい子たちの学校で，「先生が 7 人目の数学の先生です」と言われて緊張しましたが，この学校の子どもたちや先生方との時間がとても楽しく勉強になる日々で，自分の原点のようになっています．講師をはじめた頃に，大学院入試があり，出願するときには，実はまだ証明の発展的な指導に惹かれていて，証明の発展に関する研究計画書を提出しました．

この講師をしているときに，平行四辺形の性質の証明の順番は，何でこの一択しかないように教科書は書かれているのだろうと疑問に思いました．子どもはまだ証明していない性質を使って証明したのですが，そこで用いた性質は，小学校で既に正しいと認めた性質でした．まずは教科書通りに授業ができることが大事とその順番にしたがってやっていたのですが，どうしたらよかったのだろうと気になる気持ちが強くなっていきました．

それで，修士課程でこの問題に決着をつけたいと考え，体系化の過程を重視した図形の論証指導に関する研究に取り組みました．大学院では，清水美憲先生にご指導いただき，NCTM の年報でもある Fawcett の「The Nature of Proof」という論文に出会い，子どもが証明の必要性を理解し，自分の考えで体系をつくっていく論証指導の実現について研究しました．大学院時代のことを話すと長くなってし

まいますので，本日は，そこで研究したことを実践に移すことに対して，どのように問題意識を深め，取り組んでいったのかについてお話します．

（2）2 つの研究授業

修士課程を修了して，東京都の国立大学附属中高と公立中学校で講師を 3 年間，東京都の公立学校で 2 年間勤め，2009 年度から附属小金井中学校で働かせていただけることになりました．

附属中に赴任した年に行った 2 つの研究授業についてお話しすることからはじめたいと思います．一つ目は JICA の授業視察の研究授業，二つ目はその 3 週間後に行われた附属中の公開研究会の研究授業でのことです．どちらも中 2 の論証指導の導入で，同じ問題を使って授業を実施しました．スライドには，当時いただいた 3 つの言葉をあげています．

①「この展開になるとわかっていたのか？」

まず，一つ目の JICA の授業視察での研究授業についてです．論証指導の導入ということで，「120 角形の内角の和を求めなさい」という問題で授業することを考えました．120 角形の図をかくことはできないので，多角形の内角の和を求める式が必要となります．そのため，具体的に何角形かの場合で考えていくことが課題となり，いろいろな考えが出て面白い授業になるんじゃないかと考えました．論証指導の研究をしていましたので，すごく張り切って勉強をして，論文にも目を通して当時の自分なりに頑張ってやったつもりだったんですけれど，今から思えばまだまだ安易な考えで授業に臨んでいたように思います．

実際に授業をしてみると, JICA の授業視察の時間は 4 クラスのうち 1 クラス目だったので，子どもがどんな反応をするのか予想できない部分があったのですが，ある子どもの発言をきっかけに，すごく深いところまで議論が進みました．授業者だけでなく，見ていた先生方の想像を超える深まりでした．

私自身が焦点化したかった演繹的な証明の必要性に議論が進み，そこからさらに子どもたちが自発的に議論を展開していきました．

授業が終わって，私自身，やあすごかったなあと驚いたのですが，みに来てくださった先生方の反応はそれ以上で,「附属の子はすごいなって久しぶりに思った」というお言葉をいただきました．そのときに来てくださっていた大学の先生方の関心はもっぱら,「樺沢はわかっていたのか？」ということでした．「この展開になることを意図していたのか」，「あのときのあの焦点化は，これを狙っていたのか」という議論する声が聞こえてきました．

私自身は，修士課程のときに Fawcett の論証指導のコースの記録を読んでいましたので，この授業のような議論を理想とはしていた．ですが，まさかここまでになるとは思っていなかったというのがそのときの正直な気持ちです．それでも子どもたちの議論をお褒めいただいたこともあり，嬉しい気持ちになっていたように思います．

②「ことごとくチャンスを逃しましたね」

JICA 視察ほどの授業が再現できるのかという不安がだんだん強まる中，3 週間後の公開研究会に臨みました．授業を 2 つともみてくださったのが中村光一先生で，この公開研究会の助言者をしていただきました．

授業は JICA の視察と同じ問題を扱い，活発に意見が出されました．自分が担任していたクラスということもあり，子どもたちも張

り切って取り組んでくれました．子どもの意見や議論のレベルというか，質もとても高いものでした．論証として価値のある発言ばかりが出てきたことを今でもよく覚えています．

ですが，その場でそれらの子どもの反応にきちんと対応することができませんでした．どの発言も，よく考えるとただの説明で満足しない，説明の一般性を求めるような鋭い意見が飛び交っていました．一つひとつの発言の意図はわかるのですが，どう切り盛りしてよいのかわからなくなってしまい，授業はあっという間に終わってしまいました．

協議会では，それぞれ発言の価値や授業中にどのように悩んだのかをお話しました．そのときの中村光一先生のご指導は,「ことごとくチャンスを逃しましたね」というお言葉からでした．JICA 視察の授業も踏まえ，私の意図も汲んだ上での厳しくもあたたかいご指導でした．これは，ものすごく自分の中に何かこう，残った一言で，今でもずっと宝物のように思っているお言葉です．論証指導では，子どもの表現が，言葉や説明に敏感になるセンスを育てるための指導のチャンスであるというお話をしてくださりました．教師はそのチャンスを逃さず価値付けることが論証指導の重要な所であり，難しさでもあるというお話だったと認識しています．子どもの表現を指導の「チャンス」として意識できたことは，自分にとって大きな転機でした．そして，JICA の時の「樺沢はわかっていたのか？」の答えは，残念ながら「わかっていなかった」ということがはっきりしてしまいました．

③「こんな授業をしていてはいけない」

スライドの 3 つ目の言葉は，杉山吉茂先生の日曜ゼミでこの公開研究会の授業について発表したときにいただいたお言葉です．

発表した授業は，次の時間に，研究協議のご指導を踏まえ，うまく取り扱えなかった問題点などをできるだけ回収しようと取り組みましたので，駄目だったなという気持ちは消えませんでしたが，それほど悪くはないだろうと思っていました．

そのときの杉山先生のご指導は,「附属の教員がこんな授業をしていてはいけない」という厳しいお言葉から始まるものでした．

杉山先生は，120 角形なんていう問題はやらなくていいんだとお話しをはじめられました．附属の子たちだから先生がそういう問題を出せば付き合って一生懸命やる，と．
そして小金井小のホワイトボードに，こうやればいいと続けられました.「三角形から四角形の内角の和が説明できました．五角形についても説明できました．じゃあ三角形はどうなりますかって，これだけでやっていけばいいじゃないですか．最初からそんな一般化とかいうことを考えながらやらなくてもいいじゃないですか.」とおっしゃいました．

これはもう，その場にいられなくなるくらい，ものすごくショックでした．何もわかっていなかったのだと，この教材の構造もわかっていないのだと，論証指導を多角形の内角の和から入るねらいをわかっていなかったのだと身にしみるご指導でした．

2 つの研究授業でいただいたこれらのお言葉は，私自身が論証指導を考える上で大変大きな影響を与えるものでした．

（３）問題点の確認

公開研究会の授業で逃したチャンスのうち，重要と思われる一つをあげることにします．
この授業は，120 角形の内角の和の求め方を，

六角形の場合で説明することを課題にした授業でした.当時の子どもの授業記録ノートに,次のような反応が記録されていました.

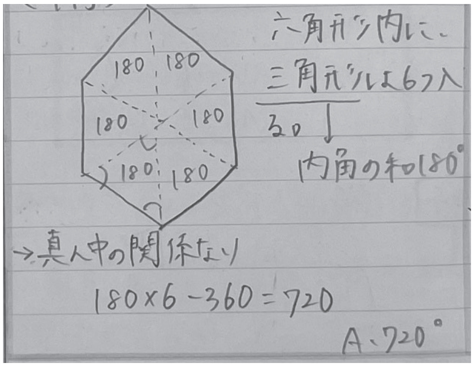


図 1　対角線を 3 本引く方法

ある子どもが,図 1 のように六角形の対角線を 3 本引く方法で内角の和を求めていました.これは六角形内に三角形が 6 個入るので

180°×6-360°=720°

と求めているのですが,実はこれは**図 1** をよくみてもわかるように,厳密には小さな穴があいていて,このように求められるのは特別な六角形の場合に限られています.このことは,穴があいてしまうと子どもが指摘したり,黒板にかいてみてうまく交わらなかったりすることで顕在化します.この反応は,実は JICA 視察の授業でも見られました.ですが,JICA 視察の授業では,この図をとても綺麗にかいていたので,顕在化しませんでした.図につっこみを入れる子どももたまたま出てきませんでした.

実際の授業では,同時にいくつかの発言がありました.例えば,図 1 の方法を発表した子どもに対して,「三角形は 6 つ入りますが,6 つにした理由は？」という発言がありました.これは,なぜ 6 個にしたのか発想のもとになったところを言ってほしいということだったと思います.しかし,これに対して別の子どもが辺の数に対応させたのだからいいじゃないかということを言ったのを聞いて,一応納得して引いたのですが,私自身うまく切り盛りすることが出来ませんでした.その後,対角線は 3 つとも交わるわけではないという発言も出ました.さらに,ぼこぼこのいびつな六角形はどうしたらよいのかという発言も出て,それに対して内部に 1 点決めればできるなどの発言が出ました.何とこの内部に点を打つと言った子どもは,いびつな六角形とそうでないものを両方ともカバーしようとして 2 つの図を指摘しました.ですが,前に出て凹んだ図形の中に点を打って,各頂点と結ぼうとしたらうまくいきませんでした.黒板の図が小さくて,チョークが太くてかけずに席に戻ってしまいます.そこで自分がもうちょっとやり取りすればよいのに,流してしまいます.もうちょっとわかりやすく図にかかせてみたり,本当に言いたかったことは何だったのかを問うてみたりして掘り下げずに終えてしまいました.

果たしてこれらの発言は何だったのかといことがちゃんと言葉にならないままでした.

この年の論証指導を通して生まれた問いは,どうしたら三角形の内角の和が 180°であることの証明の必要性を子どもが問うのかということです.多角形の内角の和の性質から論証指導を導入するねらいは,その証明の根拠である三角形の内角和の性質の証明の必要性を,子どもが問えるようになることでした.しかし,活発に考えの出る授業をしただけではそのようにはなりませんでした.小学校で既知としている三角形の内角和の性質の証明の必要性を子どもが問うようになるためには,きっと単元の導入の授業での指導ができてい

なかったことに原因があるのだと考えました．

子どもが既知の性質の証明の必要性を問うための教師の仕事は何なのか，論証指導で教師はどのような努力をすればよいのだろうかということが本日の主題になります．これが，附属学校1年目からずっと考えてきた問いでした．そのような論証指導の導入について，10年以上考え続けて来ました．一応の答えを出せたなと思えたのは，次に中学2年生を担当した4年後のことでした．

今日は，当時の授業を振り返り，これから進めていきたい研究についてお話しさせていただきます．

研究の問いは，子どもが自ら証明の必要性を問う学習は可能なのか，そしてその実現のための教師の仕事は何か，ということです．指導の重点とそれに基づく教材の選択について，また，子どもの発言のよさを逃さず価値付ける枠組み，そして指導の工夫について考えていることをお話させていただきます．

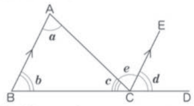
2.「証明の必要性を感じない」という問題点

まず，研究の問いの中の「証明の必要性」ということについて，どのような指導上の問題点としてなのかを確認していきます．

こちらの平成 21 年度全国学力･学習状況調査調査「数学 A」の8番の問題（**図2**）を見てみます．私自身，当時はあまり関心をもてていなかったなと思うところなのですが，先生方でご存知の方はどのぐらいいらっしゃいますか．地元の先生方にご存知かうかがったりしていまして関心がありますので，ご存知の方，手を挙げていただいてもよいですか．はい，ありがとうございます．この調査結果は当時話題になったようで，教科書の問題などにも影響を与えたようです．

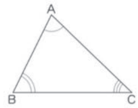
8　ある学級で，「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について，次の①，②を比べて考えています。

①
下の図の△ABCで，
辺BCを延長した直線上の点をDとし，点Cを通り辺BAに平行な直線CEをひく。



平行線の錯角は等しいから，　$\angle a = \angle e$
平行線の同位角は等しいから，　$\angle b = \angle d$
したがって，
$\angle a + \angle b + \angle c = \angle e + \angle d + \angle c$
$= 180°$
よって，三角形の内角の和は180°である。

②
下の図の△ABCで，
3つの角の大きさをそれぞれ測ると，
$\angle A = 72°$
$\angle B = 64°$
$\angle C = 44°$



したがって，
$\angle A + \angle B + \angle C = 72° + 64° + 44°$
$= 180°$
よって，三角形の内角の和は180°である。

どんな三角形でも内角の和は180°であることの証明について，下のアからオまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

ア　①も②も証明できている。

イ　①は証明できており，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

ウ　①は証明できているが，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことにはならない。

エ　①も②も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ　①は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが，②はそれでも証明したことにはならない。

図2　平成21年度調査「数学A」

問題は，どんな三角形でも内角の和は180°であることの証明について，正しいものを選ぶというものです．この証明について，①のようにきちんと証明をしたものと，②のように実測して 180°になったものが示されています．この2つについて，①と②は証明できているといえるのかについてかなり細かく問う選択肢となっています．選択肢アからオのどれが一番多く選ばれたか，皆さんどう思わ

れますか．実は一番多かったのは，イの選択肢で 32.6%なのでした．正答はウで，正答率は 29.7%でした．つまり，イの方が正答よりも多かったとわかります．

そして注目するべきは，アが 22.9%，イが 32.6%，エが 7.9%で，これらを合わせた 63.4%の子どもが，「実験や実測など帰納的な方法による説明で証明したことになるととらえられていると考えられる」という分析結果が報告されていることです．このようなまぎらわしい選択肢で考えさせられたことを差し引いて考えるべきかも知れませんが，6 割をこえる子どもが中学 3 年生になった時点で，帰納的な方法でも証明したことになると思っていたことになります．しかも驚くべきことに，「数学 B」の「提示された方針に基づいて証明する問題」（自由記述）に正答した 41.8%の子どものうち 63.1%の子どもが，**図** 2 の「数学 A」の問題で誤答していたのです．つまり，昔からよく言われていることですが，証明をかけることと，証明をする力との間にやはり乖離があるのだということが，数字で示されてしまったということになります．平成 27 年度にももう一度，対頂角の性質の証明に関する同じ趣旨の問題で調査をしているのですが，結果はほとんど変わらぬままでした．

この結果は何の問題なのかというと，証明の必要性と意味の理解の問題というように学習指導要領にもある言葉で指摘されています．

これは，論証指導においては，子どもが「証明の必要性を感じない」という問題として位置付きます．中学校第 2 学年で証明する図形の性質の多くは小学校で既に正しいと認めて使ってきたものです．この既知の性質をあらためて証明することの必要性を感じないという実態に対してどのように指導し理解させていくのかという問題です．取り上げた調査問題の三角形の内角の和が 180°であることや，対頂角が等しいという性質は，小学校で既知の性質ですので，まさに「証明の必要性を感じない」という問題にあたると言えます．

今日は詳しく言及することはしませんが，「証明の必要性を感じない」という問題点は，古くから言われている問題で，杉山吉茂先生（1986），清水美憲先生（2008），國宗進先生（2017），らがいずれも指摘しておられます．平成 21 年度や平成 27 年度の調査でも改善が見られず，昨年度の日本数学教育学会の夏の全国大会の基調発表の中にも，依然としてこの問題が指摘されています．つまり，現場の先生方は，今もこのことを指導上の問題点として認識していると言えます．

では，指導上のどのような点が問題なのかについて確認していきます．杉山先生（1986）は，それまでの「証明の必要性」に関する先行研究には，体系を求めていくという立場で証明を考えている研究が見られないことを指摘しています．杉山先生（1986）は，証明の意味を問い直し，証明の役割は，命題が真であることを示すことだけではなくて，体系を求めていくような立場，つまり説明の根拠を求めていくこと，命題を成り立たせている要素を明らかにしていくことも証明の役割であると述べています．このような証明の役割こそ重要であると述べられています．

一方，島田茂先生（1990）の証明の導入に関する文献では，証明の 2 つの意義をあげています．一つは，本当にいつでもそうなるのかということをすでに知っている知識を総動員して行う証明（局所的論証：興味ある性質

の探究の手段）で，もう一つは，証明する命題自身を独立なものとして扱う必要はないと明らかにする（体系的論証：理論的体系全体の整合性と審美性を求める）という意義があると述べています．

前者の立場で論証指導の導入をすることも考えられていました．本当にいつでもそうなるのかという立場からの証明の必要性を問う導入です．例えば，ちょっと不思議な性質でいきなり円周角の定理のようなちょっと変わった性質とかで導入することもできるんじゃないかという考えです．他にも外角の和から入ったらどうかとかという議論も過去にはありました．これが，杉山先生（1986）が指摘した命題が真であることを示すという立場での証明です．後者の体系的論証の立場は，それだけではなく，説明の体系を求めていこうという立場で，杉山先生（1986）が考えていくべきと主張されている意味での証明に当たります．ただし，島田先生（1990）は，中学校段階は，局所的な論証の方が主で，体系的論証は後の段階だと述べ,「体系的な論証をカリキュラムの中に取り入れるか否か，入れるとすればどう入れるかは,大きな問題である」と指摘しています．体系を求める立場での証明を取り入れた学習は本当にできないのか，子どもが体系をもとめることは難しいのかと自問してきました．論証の導入期は，既知の性質の証明に多くの時間を使うこととなりますので，やはり体系を求める立場で証明することが必要になると考えています．

３．論証の導入における指導の重点

あらためて,論証の導入期の指導の重点は,どこに置くべきなのでしょうか．

島田先生（1990）は同じ文献の中で，推論の学習について次のように書かれています．

「演繹論理も帰納論理もまた類比的な推論も素朴な形では小学校時代から子どもの思考の中に表れている…略…中学で論証がはいる前の段階で,「……であるわけを説明せよ.」という語の用い方は，この帰納的な推論と演繹的な推論とを未分化の状態で用いているのである．したがって逆にまた，証明の導入というのは，新しく演繹論法を教えるのではなく，未分化なものを分化させ，それぞれの働きの違いを何らかの形で意識して使い分けることができるようにすることであるともいえる.」（p.79）

これをはじめて読んだのは修士課程の時代のはずなのですが，当時は「体系化」の研究をしていたこともあってか，完全に読みとばしてしまっていました．演繹も帰納も類推もすべて小学校で用いているという認識を，小学校の先生が当たり前に持たれているのかはわかりませんが，自分も含めて中学校の先生にとっては当たり前ではありませんでした．現在はどうなのでしょうか．私はそう変わらないと思います．内角の和をやったぐらいにしか思っていないと思います．内角の和については表や規則をもとにかなりやっているから，もう n 角形はすぐできるんだとは言います．ですが，演繹と帰納はという見方で見たときに，子どもが小さい頃から推論に馴染んでいるということは多くの教員は考えていません. 例えば, 三角形の内角の和でここが 40°でここが 50°だったら，こんな図はあり得ないんですけど，ここ 90°と出す．これは三角形の内角の 180 度と認めれば，まあ図がどんなフリーハンドであろうと，結論として必ず

90がでます．これが演繹的な推論です．ちょっとずれていても子どもはこう出します．演繹的な推論をはじめて使うわけではありません．では，どういうことが重点かなのですが，島田先生（1990）が上の引用の下線部で述べている「新しく演繹論法を教えるのではなく，未分化なものを分化させ，それぞれの働きの違いを何らかの形で意識して使い分けることができるようにする」というところが重要だと考えています．これと同趣旨のことは学習指導要領も書かれています．しかしもっと重要なのは，「中学で論証がはいる前の段階で，「……であるわけを説明せよ．」という語の用い方は，この帰納的な推論と演繹的な推論とを未分化の状態で用いている」という子どもの実態です．これまでにたくさんの論証指導の文献を読んできましたが，このような子どもの実態に関する記述は，この文献にしか書かれていません．

帰納と演繹の違いをわからせるには，どうすればよいでしょうか．学習指導要領解説などには，比較してというぐらいにしか書かれていません．どうやって比較したくなる場面が生じるのかということの方が大切に思います．指導としては，ストレートに推論の違いを聞くような指導も考えられますが，子どもが自分で問う場面はなかなか見られません．

何が重点なのか，もう少し文献を見ていき中村幸四郎先生（1981）の「数学史」を見ると，「証明が存在することが，ギリシア数学の特色であるとはいいがたいのであって，実にこのような証明方法の論理的な構造の探究やそれの反省，すなわち論証方法の原理の自覚によって裏づけられているということ，これがギリシア数学の特徴というべきである．」（p.38）と書かれています．この本の後ろの方で，数学の発展の歴史は，子どもの数学の発展の過程と深く結びついている部分があると述べられているのですが，まさに子どもの説明が証明に発展していく過程と，論証理論の形成過程が関係していると考えられます．やはり説明の論理的な構造の探究に目が向くような指導が重要ではないかと考えます．学習指導要領解説をよく読むと，中学生の発達段階は，「演繹の必要性と意味及びその過程に興味・関心をもち，論理的に考察し表現する力も高まっていく時期である」（p.51）と書いてあります．ちょっと砕けた言い方すると，中学2年生は，数学史でいうところのギリシアにあたるのだということだと思います．確かにギリシアのようなところが中学2年生にあると言われると，そうだなと思います．中学1年や2年は，どこまでも考えを突き詰めてしまったりとか，突っ走ってしまったりするようなところが，授業中に見られます．これはギリシアっぽいなと，ギリシア人もどこまでも内容の真理を追究しているところがあるように思います．そういう厳密さを求めたり言葉を吟味したりすることに面白さを感じたり，ギリシアの人たちがしていたこととすごく繋がったように思いました．さらに学習指導要領解説には，「数学的な推論の過程に着目して自分の思考を振り返り，論理的に考察したことを徐々に表現することができるようにする．」（p101）とあり，「証明方法の論理的な構造の探究やそれの反省，すなわち論証方法の原理の自覚」という部分と重なります．したがって，論証の導入における指導の重点は，数学的な推論の過程を子どもの考察の対象にすることであると言えます．

４．子どもの説明の過程を捉える枠組み

（１）論証の過程を捉える要素

しかし,具体的なその場での指導となると,はじめにあげたように簡単ではありません．はじめにあげたような反応例では，論証として一体何が起こっていたのかを考えようと思い出しました．実は今日は，子どもの論証の過程をどうにか捉えようと，枠組みを考えようとしました．先ほどの**図** 1 の例だと，説明の一般性が言えていないだとか，限られた場合にしか成り立っていないということはわかるのですが，もう少し落ち着いて，何がどういうふうにわかってるのか，どういう数学的な価値があるのかだとか，どういう認識をしてるのかを語るときに，いろいろとごっちゃになってるような気持ちもありました．

そこで，野矢茂樹先生(2006)の「入門！論理学」という本にあたってみました．ウィトゲンシュタインの本を翻訳していて，NHK の「ロンリのちから」という高校生向けの番組もつくられている方です．この本は，専門的な言葉や論理記号を用いずに，自然言語で論理学がどういうものなのかを素朴に語ろうとしている本でしたので，子どもの論証する「要素」をはっきりさせようと手に取りました．

まず，「論証」という用語の用い方ですが，島田先生（1990）は，一つひとつの命題の証明についていうのではなく，証明を方法論の一つと見なしてその性格を論ずるときには論証という語を用いると述べています．私自身もこの立場で「論証」の語を用いています．野矢先生（2006）は，論証を「ある前提から何らかの結論を導く，その全体」とし，その要素に「前提」「結論」「導出」をあげて次のように図で表現しています．（**図** 3）

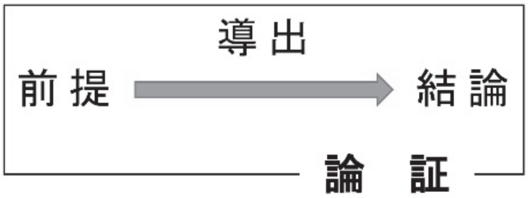


図 3　論証の要素

前提から結論の部分は，A ならば B で，仮定と結論を表しています．なぜ前提という言葉なのか，なぜ導出として演繹としていないのかを確認しておきます．

まず，導出は演繹以外にもあるということです．導出という部分は，結論を導く方法だけを取り出したものなので，本研究では主に演繹的推論または帰納的推論を指しています．もっと広く論証のプロセスを見るならば，他の推論も考えられます．野矢先生（2006）は，演繹的推論は「その前提から結論への導出が絶対確実なもの」としています．これではぴんと来ないと思いますので例をあげます．例えば前にあげた，三角形の内角の和を 180°と認めて前提し，2 つの角が 40°と 50°であるとすると，残りの角は 90°となります．それ以外の答えは絶対に出ません．それが演繹だという意味です．

また，前提が真であることまでは求められていないということも書かれています．考えるとその通りなのですが，自分ははっきりと意識できていませんでした．前提という言葉で考える理由ですが，一応そうしておくことで，必要に応じて仮定，根拠，条件，あらかじめわかってることなどの言葉と共に論証する過程を言葉にしやすくなると考えています．いったん,前提という言葉にしておくことで,例えば,「仮定を前提として意識できていなかった」だとか,「定義を前提にしてい」だとか,

「結論を前提としている」という論証をする側の捉えと供に記述することができます．また,「前提」は,「根拠」としてもそれほど違和感はないのですが,「根拠」は意識的に置くもので，正しくないと困るという意味もありますので,「前提」の語をあてることにします．

これらの要素をもとに，論証が正しいかどうかの評価について確認していきます．野矢先生（2006）は,「正しい論証というのは，導出が正しいだけではなくて，その前提も本当に正しいもの」であり，導出が正しいが前提が間違えているということはよくあると述べています．これは例えば，長方形の内角の和が 360°であることをもとに，半分に切って直角三角形 2 個に分けて，三角形の内角の和は 180°と導く子がいるとします．これは，導出にあたる部分は演繹的な推論を正しく用いているのですが，長方形の内角和を前提にすると循環してしまいますので，論証としては正しくないと言えます．野矢先生（2006）は，論証の正しさを評価するときには，論証と導出を区別することがとても大事で，その区別がないと，論証のどこがだめなのか明晰にならてこないと述べています．さらに，導出の正しさは事実が正しいのかどうかとは一切関係なく，事実調査（論証の正しさ）の持ち分と，論理（導出にあたる推論）の持ち分とが区別されることを指摘しています．推論の部分だけでなく，前提が正しいかどうかというところまで考えるのが論証です．

（２）子どもの説明の過程を捉える枠組み

ひとまずこれを用いて考えたいところなのですが,子どもの考えを授業で捉えるときに,どんな視点を持って考えていけばよいだろうかと枠組みを考えてみました.（**図 4**）

説明すべき事柄			
	説明した子ども	説明に対して反応した子ども	全体での共有
子どもの表現 （言葉，図，各手順等含む）	・「六角形を向かい側の角にあうように線を引いたときに、三角形が合計で6個ずつできて…」 （真ん中で交わるという子どももいる） ・図の書き順 ・正六角形ではない図	・「今、向かい側の角って言いましたよね。それって、正六角形とか一部のものに限られちゃうんじゃないですか。」 ・反例の図	どういう場合はOKか，どういう場合は難しいかに言及する声
説明したい事柄	六角形の内角の和は720°	正六角形などの限られたものの説明にしかなっていない。	
説明している事柄	対角線が1点で交わる六角形の内角の和は720°	対角線が交わらない六角形があるからすべての六角形で説明できているとは言えない。	
意識／認識／自覚の実態			無意識だった前提が明らかになった
意識化させること	どの六角形でもいえる説明をするためには前提を吟味する必要があることに気付かせる		
教師の手立て	対角線が交わり、特別ではない六角形について説明している言葉や図を全体に共有する		

図 4　説明の過程を捉える枠組み

図 4 は，縦軸が子どもの思考，横軸の方はその 1 人の表現に対して，他の子どもが関わる場合と全体での共有の場合を要素として考えておきます．この表の枠をすべて埋めるのが目的なのではなくて，表の中のどこかの部分について，意識して考えなければならない場面があるのではと思い，このような枠組みを考えてみました．下段には活動の顕在化・共有を通して学習内容を内面化するための手立ての枠を設けましたが，まだあまり考えることができていません．

そして,「説明したい事柄」と「説明している事柄」というところは，これらが結構混ざることがあるので，分けて考えるべきだというふうに考えました．特にこれらの子どもの思考を知る上で重要な点は，子どもの表現に着目することです．特に，子どものかく図やその書き順も思考を捉える手掛かりとして意識することが重要です．説明したいことと実際説明していることのずれの把握が重要になると考えます．例えば，書き順で思考がわかることがとても多かったです．その書き順で対角線として引いているかがわかります．図形の内部に点を打つところからかいているのかなど，見てる子は見ていて，そこに対してコメントします．

自分の授業を振り返ると，六角形の 3 本の対角線が交わると考えた子どもの説明は，説

明の一般性に触れている場面で，証明の必要性と意味を理解する学習のチャンスであったと言えます．そして，教師が意図的に掘り下げなければ，問題が顕在化しない場面であるといえます．子どもの表現を取り上げて，その説明がどんな六角形についてもいえるのかを吟味させます．その際，具体的に図をかかせることで，この説明が適用できるのは 3 本の対角線が 1 点で交わる正六角形等の特別な六角形の場合という前提においてであったと自覚させられる「説明の過程の意識化」のチャンスであったと考えることができます．そういうチャンスだということをわかって生かす授業は，この後で紹介する授業である程度できたのですが，そこでの学習過程を言葉にして語ろうとしたのですが，時間をかけた割になかなかうまくいきませんでした．落ち着いて，生徒の論証の過程とそこに内在する数学教育的な価値を取りこぼさずに記述するにはどのような概念枠組みを用意したらよいのかと考えているという現状です．

５．論証指導の導入における教材選択の視点

（１）子どもがよく馴染んでいる題材で

説明の過程に子どもの目を向けさせるためには，どういう導入教材がよいのか．

まず, NCTM の第 13 年報でもある, Fawcett の「The Nature of Proof（証明の本性)」という実践的な研究からの示唆を確認します．Fawcett の研究は，日本では杉山先生（1986）と清水先生（2008）によって詳しく取り上げ紹介されております．自分もやはり，修士課程時代にお 2 人のご研究から知りました．ここでは本日の話題に関わる部分のみ取り上げることにします. Fawcett の論証幾何のコースでは，2 年間に渡って子どもが自分の考えに従って幾何の体系をつくっており，その姿が生き生きと記述されています．

私がこの Fawcett の研究で注目している点は，指導内容を非常に明確に示している点です．しかも数学の証明の要素で記述しています．定理や定義，証明されない命題（公理）ですとか，今の日本の中学校や高校では使われなくなった言葉の位置付けや重要性，そして必要性ということを指導内容としてはっきりと示してします．そしてそれらを理解した子どもの姿がこうなるはずだ，こうなってほしいということも示しています．今，学びに向かう人間性ということが言われていますが，その姿にあたることが示されています．それだけでなく，具体的な活動の記録と授業の手続きの原理が記述されています．この示し方こそ注目すべきで，これから Fawcett の書き方もきちんと参考にしたいと思っています．

さて，論証指導の導入には，どのような教材を選択すべきかという話題に話を戻します．

Fawcett の論証指導のコースのスタートは，授業の前の年に学校で議論になり，未解決だった話題を取り上げています．数学じゃないんです，論証指導での学習が日常生活に転移することをねらっているのですが，大事なのは，生徒がよく馴染んだ話題だったということです．Fawcett は,「学校での優れた業績に対して賞が授与されるべきか」という問題で導入します．議論で喧々諤々に学校がなったとき，議論をまとめる過程で,「賞」と「優れた業績」の見解がはっきりしないことに目を向けさせ，その議論を振り返り一般化して，定義を明確にする必要性を学ばせています．

Fawcett は, このような導入をする際に生徒

に考えさせる題材は，生徒にとって興味があり，また，よく知っている場面に関係のあるものであるかどうかを確認しておくことが大切であるとはっきり述べています．そして，「生徒の注意が，実例そのものではなく，すべての実例に共通している大切な原理に向けられるように議論を導いていくことは，教師の責任である.」(p.34) と述べています.

つまり，選択の重要な視点は，子どもがよく馴染んでいるものであるかということです.

杉山吉茂先生（1986）は，論証の導入の教材例として，次の**図 5** のような平行四辺形の求積公式が導かれる際に仮定していたことや根拠に目を向けさせて互いに説明するという例を示しています．（p.132）杉山先生は，フォセットの知見を取り上げたうえでこの例を示して，子どもがよく知っている場面でということも意識していると考えられます.

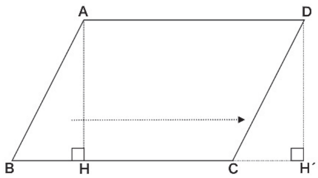


図 5 説明の根拠に目を向けさせる

この教材例では，平行四辺形の面積を求めるときに，長方形に帰着させますが，このとき，例えば点 C のところの角度が 180 度と見なしている根拠は何だろう，∠D が実際に 90 度になるのはどういう根拠からだろうということに目を向けさせ導入するという例です．この例は，無意識にしていたことも説明の対象になること，説明というものが，定義や既習の知識に基づいてなされることがわかり，ある事柄が説明できることが示されると，さらに他のことも説明してみようという関心が湧いてくるような教材で，とても魅力的です．この例をそのまま授業したことあるのですが，難しかったです．杉山先生ご自身も難しいよと仰っていましたが，誰もしてくれないなとも仰っていました．中 2 で証明の対象となるいろいろな性質が出てくるのはよいのですが，それらをお互いに説明できないかという課題意識を引き出していくことが簡単にはいきません．最後の学年で 1 回やったときは，それぞれお互い説明できないかというという問いを子どもは確かに発しましたが，何の要因でうまくいくのか，まだはっきりとしません.

もう一つ，数学史の研究者の伊東俊太郎先生（1990）の知見も示唆的です．論証理論の形成の歴史では，ユークリッド原論成立の 300 年ほど前のタレス（前 640～前 548 ごろ）のしたことが証明のはじまりだという説があります．このことについて伊東先生（1990）が詳しく調べられています．タレスは，よく知られた対頂角の性質を，あらためて「定理」と呼んで，それでお互いを説明しようとしていることを取り上げ,「すでによく知られている事実をただそのものとしてうけ入れるのではなく」より基本的な事柄から証明する態度がタレスにあったことを指摘しています．これはフォセットや杉山先生が論証の導入について述べていることと一致するのではないでしょうか.

したがって，子どもの目を説明の過程に向けさせたいのならば，まったく知らない不思議な性質などを扱うよりも，子どもがよく馴染み，一見すると説明する必要性を感じないような教材の中にこそ，証明の必要性を考える機会があるのかもしれないと考えました.

（２）論理的に整理する必要感をもたせる

子どもが自ら既知の性質の証明の必要性を問うような展開の工夫ができるのか，できる

としたら，どんな準備をすればよいのかを具体的に考えていきます.

体系をそのまま，ここだけ見ますね.

一般的な中学校 2 年の論証の導入の体系は，対頂角の性質から入り，平行線の性質，三角形の内角和の性質，多角形の内角と外角の性質へと進んでいき，体系をたどる流れになっています. これに対し, 教科書で 1 社だけ（以前は 2 社）ですが，多角形の内角の和の説明から入り，三角形から多角形が説明できた所で，じゃあそのもとになっている三角形の内角和の性質も何かをもとに説明できないだろうかと，論理的な流れに整理する必要感をもった上で，対頂角，平行線の性質を考えていくという展開もあります.

はじめにふれた 120 角形の内角の和を求める問題で導入する授業は，多角形の内角和の性質の説明から入る後者の立場です.

対頂角の性質からスタートすることにもよさがあります．2 直線の関係からわかりやすく体験的に体系を積み上げていくことができます. それぞれの難しさもあります. 例えば，対頂角から入るとき，性質が当たり前過ぎて子どもの証明の対象になりにくいです．多角形の内角和から入るときには，三角形の内角和の性質の証明の必要性を丁寧に指導しなければ，子どもは混乱してしまいます．それぞれの難しさやよさはありますが，私は，論理的な流れに整理する必要感をもって,「より単純な性質から説明できないか」と，小学校で既知である三角形の内角和の性質の証明の必要性を問うことが期待できると考え，多角形の内角の和の性質から入ることにしました.

具体的には,「六角形の内角の和を求めなさい」という問題から導入することにしました.
はじめにあげた 2 つの研究授業で 2 人の先生方から頂いたご指導により決めました.

一つは，中村光一先生からのご指導です. 六角形で内角和の求め方の説明を考えさせると，前提を吟味し説明の一般性を問題にする活動を顕在化し，説明の過程に目を向けさせられると考えたからです.

もう一つは，杉山吉茂先生からのご指導です．はじめから一般化をしようとせず，六角形の内角和の説明をきちんとやることで，体系を求めることも一般化を求めることも，子どもから引き出せることを期待したからです.

６．説明の過程の意識化に重点を置いた指導

実際にどのような授業を実践したのかについて見ていきます．2 つの研究授業をした 2009 年から 5 年後の 2014 年に，再び中学 2 年生を受けもつことができました. その 2014 年に「六角形の角の和を求めなさい」という問題で研究授業をしたときに，子どもの予想外の反応などから，こういう展開をすればよいのではないかということを，自分の中でかなりはっきりとさせることができました．2009 年の研究授業のご指導を踏まえられたのは，当時の附属小金井中学校の校長先生をしてくださっていた太田伸也先生，同僚の川村栄之先生と柴田翔先生が議論につきあってくださったお陰です.

ここでは，授業の前半と後半に分けてお話します.

（１）説明の前提の意識化

2014 年の授業では，次の（**図 6**）のような反応を意図的に全体の議論にのせて生かすことで，論証指導上価値のある議論ができるとわかりました.

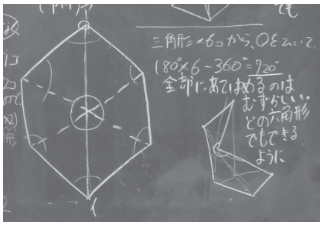


図 6　3 本の対角線が 1 点で交わる考え

授業をすると，子どもからいろいろな求め方が出てきますが，必ず全体に出した方がよいと考えられるものがあります．（**図 6**）のような，正六角形ではない六角形で 3 本の対角線が 1 点で交わると考えている子どもをさがして黒板に出してかかせることがこの教材での授業の第一のポイントとなります．正六角形ではない少し細長い図をかく子や,「真ん中で交わる」という子がいます．見つからなければ，他クラスの考え等と教師が示してでも考えさせたい反応です．（**図 6**）の生徒は,「六角形の向かい側の角にあうように線を引いたときに三角形が合計 6 個ずつできて…」と発表しました．これに対し，すかさず「それって，正六角形とか一部のものに限られちゃうんじゃないですか」と議論が起こりました．

この場面について少し詳しくお話しします．授業でそのような生徒がいたとして，黒板に書かせると，交わらなくて図の方をかき直そうとしたり,「あれっ，交わらない」と呟いたりですとか，おかしなことが起こります．また，ノートには，いろいろな六角形をかきますので，交わらないという意見がやはり出てきます．どの子どもにも反例を見つける可能性があります．正六角形で求めている考えを出して図をかかせても，全員が正六角形をかきますので，反例は出てきません．

これが実は，2009 年の授業後に中村光一先生が論証指導で六角形という図形を扱うのは面白いというお話ししてくださったことでして，私はそのお話の真意がどこにあったのかということは，この図をかかせて表現させるまで気が付くことがきませんでした．子どもが前に出て，かき始めると，図が教えてくれるのです．特別な図に引っ張られている子どもが，反例が出て，考えるべき問題が顕在化します．

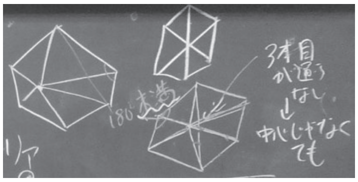


図 7　内部に点をうつ

反例が出てそのままだと,（**図 6**）の考えは間違いだったのではとなりそうですが，本当にだめなのかと子どもに考えさせます．例えば 180×6－360 はよい考えだと思うのだけど，生かせないかなという立場で授業をします．すると，内部に点を打つやり方が出され，考えが生かされて，この考えはうまい考えだったのだと子どもの中に入っていきます．なのでこのアイデアを出した子は，むしろ活躍した子どもというふうにして終わることができると思います．（**図 6**）の考えを取り上げるよさは，反例が出てもそのアイデアが生かされることです．内部に点を打つよさの理解も深まると期待されます．

このような論証指導における価値のある議論を生むためには，教師の側の教材の価値の掘り下げが重要になります．ですが，私自身もそうであったように,簡単ではありません．例えば次のような，教師の方で先回りして，今取り上げたような反応が出ないようにしている授業を見ました．六角形の内角の和の求め方を考えさせている授業で，ウの考えの生

徒に黒板でかかせたら 3 本の対角線が 1 点で交わらなかったのですが，教師がこっそり交わるような図にかき直してあげたということがありました．他にも，3 本の対角線が 1 点交わる六角形の図を黒板に貼って，それをプリントでも配布するという授業も見ました．それらの授業は，1 時間で多角形の内角の和まで一般化しなければならないからやむを得ないという立場で授業しているようでしたが，論証の学習のチャンスを逃して欲しくないと思います．しかも，それらの一時間で n 角形まで一般化する授業は，表で一般化していて，なぜずっと 180°ずつ増えていくのかについて考えさせてはいませんでした．つまり，演繹的な推論を使っていないことになります．それでは小学校の学習と変わりません．そういう説明の過程をみる目を育てないで論証指導といえるのだろうか，という気持ちで六角形の内角の和の授業を考えました．

論証の授業がうまくいくためには，教師の仕事が大事なのだという思いを強くしました．

（２）生徒が証明の必要性を問う授業展開

①説明の根拠の意識化

（1）の議論を通して，いろいろな方法で求める説明ができたら，説明を振り返り，説明の根拠に目を向けさせていきます．（図 8）

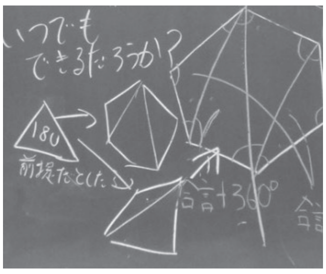


図 8　説明を振り返る

次は，（図 8）の場面でのやり取りの抜き出しです．

T1：この問題を考えるときに，根拠にしたことは何ですか？ …略…

S1IG：三角形の内角の和は 180°…略…

S2FS：四角形の内角の和は 360°…略…

S4SH：…略…四角形も結局，三角形 2 つに分けることができるので，…略…三角形の内角の和が 180°だっていうことが，根拠に，それだけで根拠になるかなと思いました．

実はここでの T1 の発問が大切で，説明を振り返ることを促します．はじめは当たり前の確認程度で，三角形としか言わないだろうと思ったのですが，2 つの四角形に分けて求める方法も出していたこともあり, S2FS のような意見が出ました．四角形も六角形のもとになってるのだと，矢印で論理的な関係を意識して板書します．（図 8）板書の手順も大事です．このようにかいておくと，四角形も三角形がもとになっているということを自分で見つける子どもが増えると期待されます．後で取り上げますが, ひと言で発問するだけで，三角形がもとになっていると言い始めます．このようにすると，実はここで，局所的な体系ができたことを意識することができます．何がおおもとになってるのかがわかるようになります．そうすると根拠への関心が全く変わってきます．六角形の問題だからこそ，四角形だけを根拠に説明することが可能です．この点にも六角形でやるよさがあります．このようなよさをできるだけ吸い尽くし生かしたいと考え，授業をつくりました．

②既知の性質の証明の必要性を問う

ここでさらに，次にどんなことを調べたり考えたりしたいかを子どもにききます．次の

ようなやり取りがありました.

T2：三角形の内角の和を根拠にして説明がつきましたが，次あなたたちはどういうことを考えますか.（1 分程度ノートに記述）…略…
S3YR：三角形の内角の和が 180°である理由
T4：…略…内角の和 180°何でだろうって思った人いますか. ああ，こんなにいる…YR さんどういうこと考えているの？ …略…
S5YR：それは何かはじめに教えられたことであって…略…教えられたというか，何かその，理由とかを追求とかしなかった. …略…
SS1：（複数名が）ちぎってぺたぺた. …略…
T9：ちぎってぺたぺた？それは，理由はやってないっていうふうに思うんですか？
SS2：（多数の生徒がうなずく）
T10：思う. YR さんと誰か違うような意識でこれ思った人いる？さっき手あげた人もう一回手あげて？皆同じ？理由やらなかったなって思った人？
S10SH：ちょっと違うんですけど，これ全部三角形の内角の和が 180°だっていうことを根拠にしてるって今，やったと思うんですけど. それを根拠にしてるっていうことは，その根拠になっている根拠はなんだろうなって思いました.

この時間の活動が結実する場面です. 意図した通り，S3YR から「三角形の内角の和が 180°である理由」というような証明の必要性に関わる疑問を引き出すことができました.

このような意見は，1 クラスで多くても 5 人程度しかもたないように思われます. そして，なかなか声に出して言いません. 今まで前提として問題を考えていたこともあってか，それを言ったらおしまいだくらいに思っている生徒もいます. また，もとになるところを突くのはあまりよくないことだと思っている節もあります. このようなときに大事なのが，1～3 分程度でもよいので各自でノートにかく時間をとることです. かかせずに発言を求めると，消えてしまいます. 何か本当に，蛍を掴むようにやさしくやらないといけないように思います. もしも先に「一般化する」などという声があがると，たちまち消えてしまいます. ですので，あまり声を出させるべきではないというのが，私自身が何度か授業をして得た知見です.

さて，S3YR に続く，S5YR や SS1 のような発言は，証明の必要性を問うものであり，小学校での知り方を振り返っていることから，島田先生(1990)が述べている帰納と演繹を分化する活動に位置付くと考えられます. これは，T4 のように問いかけてつっこんで発言の真意をきくことが大切です.

そしてさらに，S10SH の，「根拠になっている根拠は何だろうな」という発言は，これはもう本当に純粋に体系を求める立場から証明の必要性を問うものと考えられます. この生徒は，S4SH の発言をした生徒で，授業を通して問いが強化されていると見られます. 本日は，偶然この会場に，2014 年の授業で鋭い発言をした生徒が，数学教育を研究する院生としてこの会に参加しています. とても嬉しい気持ちです.

7. 授業展開の再現

この授業について論文発表会で口頭発表をしたときに，やはり一般の公立学校ででもできるのですかというご質問をいただきました.

そこで昨年度，公立学校で授業していただきました．コロナ禍で大変な中，北海道帯広市の福岡先生に授業をしていただきました．福岡先生は，数学教育で修士課程まで進まれて，「思考」に興味をもって子どもの研究をされた方で，皆さんのスライドに入れた「授業の改善案」の板書計画をお見せして Zoom で打合せをし，授業していただきました．授業前日の夜に食事をしながらお話しましたが，実質 1 回の打合せをしただけで，趣旨を理解して授業してくださりました．実は帯広は，旭川からは東京よりも遠くて，旭川から帯広まで行くのに大雪山を越えてバスで片道 4 時間半かかります．旭川からだと東京までは 3 時間かかりませんので，この会場の方が旭川からは早く着きます．今日は，福岡先生から了承いただけましたので，少し授業の様子についてお話します．

（１）説明の前提の意識化

（図 9）の板書の真ん中の下にかかれているのですが，3 つの対角線が 1 点で交わると考えて，三角形 6 個に分ける考えが出てきます．黒板に出てかかせたのですが，偶然 3 本が 1 点で交わってしまいました．教師も本当は交わらない六角形をかきたかったようなのですが，交わってしまいました．ですが，ちょっと長めの机間巡視のときに，一度この考えをしようと図をかいて消した生徒がいました．書いていて，3 本の対角線が 1 点で交わらなくて消しました．授業者の先生も見つけていまして，教室の後ろでこっそりこの生徒から行こうと確認しました．教師が「(この考え）やろうとしていたけどさ，図を消したよね？何で？」と聞きます．他の生徒が「面倒だから」と割って入り笑いが出るのですが，ここで，「面倒だからと先生は思わない」と切り返し，「何か考えたんだよ．ちょっと周りの人と話してごらん．なんでだろう？」と時間をとったらたくさんのつぶやきが出ました．「中心の線がずれちゃう.」という声があがり，「正六角形ならできる」「正六角形でもできる」さらにすごくよくわかっている生徒が,「左上だと厳しい」と，黒板の左上の六角形を指さしていました．これは，左上のちょっといびつな六角形だと対角線が 1 点で交わらないという発言です．さらに,「自分のミスかと思った」と小さく呟く生徒もいました．これは，交わらなかったのだけど，自分のミスだと思って図を消したという意味です．そして,「中心はどこでもいいんじゃん」と，内部に点を打つことに気が付いたと考えられる声が記録されていました．これは，授業中に私が教室

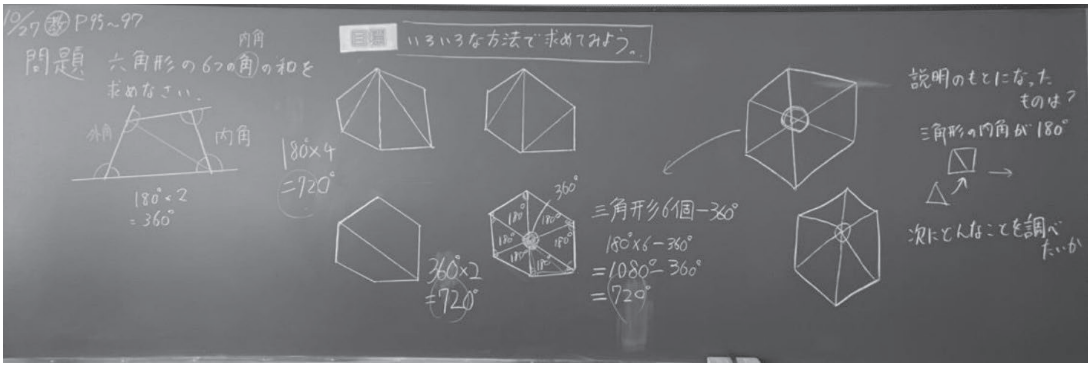


図９　公立学校での授業の板書

内で観察していてもひろえなかった発言です．他の生徒から，「必ずしも対角線引く必要ないんじゃない」という声も聞かれました．

このように，一般の公立学校でも，説明の前提を意識する発言がたくさん出てきました．しかもこういう筋を通していく議論を面白がる様子が見られました．

上の内部に点を打つ考えにつながる呟きは，まだ教室全体に共有はされていませんでした．そこで福岡先生は，「これやっちゃだめ？」と全体に問い返します．対角線が 1 点で交わる考えのことです．「やっていい」などと教室がざわざわしたところで，「オールマイティーにマイナーチェンジできる？」と発問をします．すると，内部に適当に点を取るという声があがり，やはりかいてみないとわからないからと，みんなでかいてみます．最後に教師が「これならどんな形でもいけそうだ」と価値付けて，この議論を終えました．このときやはり，180°×6－360°という考えを生かせないかという立場で進めたことが大切です．

（2）生徒が証明の必要性を問う授業展開

①説明の根拠の意識化

次に，「今日のいろんな説明で，もとになったものは何だろう．」とそれまでの説明を振り返らせます．この場面では，事前に打ち合わせた通りに 2 つの四角形に分ける方法を黒板に出しておいたことが効いてきます．やはり「三角形の内角の和が 180 度」としか出ません．そこで教師が「でも，これ三角形じゃなくない？」と問いかけます．とても上手な問いかけで，「四角形…」と生徒が呟いたところで「でもこれってって…」と問い返すと，口々に「三角形 2 つだ」という声が出てきました．そして「一番根っこにあるのが三角形」と共有されました．

②既知の性質の証明の必要性を問う

最後に，「次にどんなことを調べたいか」と発問し，チャイムがなる 1～2 分前だったのですが，各自でノートに記述する時間をとりました．数えるのが面倒くさい百角形でやりたいなどの呟きが聞こえ，どの生徒もいろいろと考えていました．チャイムが鳴ってしまったのですが，共有すると，「どんな図形でも三角形が通用するのか」「外角」「公式がつくれそう」などの発言がでました．公式とかいている生徒が多かったです．

なぜ三角形の内角の和が 180°なのかとかいている生徒を教室の中に 1 人見つけていたのですが，これも打合せで想定した通り，なかなか自分から発言しませんでした．

そこで教師が，「でもみんなそもそもない？」と問います．そこでやっと書いた子が手をあげて，「なんで三角形の内角の和が 180 度なのか」と発言しました．そうしたら，前の方の何人かや，離れた子たちが同じだとうなずいていました．

この様子をみて，小学校で既知である「三角形の内角の和が 180°」という性質の証明の必要性を問うことは，生徒の問題になり得るのだなと思いました．発言した生徒は，比較的数学を得意とする生徒だったそうですが，この発言が生徒たちの問題になる可能性を見ることができました．ただ，学習感想を取らなかったことを本当に後悔しています．授業さえしていただければと，学校にはご無理をお願いし，今思うとすごく異様な雰囲気の中でしたので仕方がありませんが，そこが反省点です．

８．まとめ

研究の問いは，子どもが自ら既知の性質の証明の必要性を問う学習は可能であるかということと，その実現のための教師の仕事は何かということでした．

そのような学習は説明の過程を意識化する視点での教材や展開の工夫によって可能であり，教師の意図的な指導が必要だということが，2009 年，2014 年，そして 2022 年の授業を振り返ることでわかりました．

ただ，私自身の例のように，論証指導のことをかなり頭でわかっていても，論証の過程における教師の仕事を見つけ，実践することは難しいということもわかりました．子どもの発言を見逃さない眼をもって授業することの大切さと共に，かなり丁寧にしないといけないこともあるとわかりました．論証指導について知ったことを，実際に行えるようになるには，例えば教師自身が実際に授業をみたり，普段から教材について議論をしたりして，論証する場に身を置くような，身体的な要素も含む訓練が必要かも知れません．

六角形の内角和を求める教材による論証指導の導入の実践には，まだまだ改善の余地がありますが，附属小金井中学校で働かせていただいていたからこそ，たくさんのご指導をいただき，時間をかけてつくることのできた実践だったと思っております．

今回は，前提や根拠についてのお話が中心でしたが，定理などの他の要素に焦点を当てた学習についても研究していきたいと考えています．例えば，昨年修了した石田さんの研究が面白く，私が附属学校の最後の 1 年で行った授業を，「A ならば B」の枠組みで分析し，A に当たる「仮定」を「条件」と呼ぶなどし，単元を通して多様な意味で扱っていたのだと，新たに目を開かされるような研究で，研究を広げていく上で，本当に勉強になりました．

今後は，「説明の過程の意識化」という，説明の論理的な構造を，子どもの考える対象にしていく学習指導について研究し，論証指導で教師が努力すべきことを明らかにしていきたいと考えております．

以上で終わります．このような機会をいただき，どうもありがとうございました．

引用・参考文献

Fawcett,H.P(1938/1995). The Nature of Proof (NCTM 13th Yearbook). (Reprinted by the NCTM).

伊東俊太郎(1990). ギリシア人の数学. 講談社学術文庫

國宗進(2017). 数学教育における論証の理解とその学習指導. 東洋館出版社.

中村幸四郎(1981). 数学史—形成の立場から—. 共立出版.

野矢茂樹(2006). 入門！論理学. 中央公論新社.

島田茂(1990). 教師のための問題集. 共立出版.

清水美憲(2008). 算数・数学教育における思考指導の方法. 東洋館出版社.

杉山吉茂(1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版社.

講演日：2023 年 6 月 11 日

会　場：東京学芸大学 20 周年記念飯島会館

記録者：川上寛太，花村脩平