高校数学におけるグラフ理論の教材開発：「命題と論証」と「位相的な見方のよさ」を視点として

専門学術論文要約

高校数学におけるグラフ理論の教材開発
―「命題と論証」と「位相的な見方のよさ」を視点として―

遠藤　岳人

要　約

本研究の目的は，高校数学における，グラフ理論の特徴を活かした教材の開発である．この目的を達成するために，第１に，学校数学におけるグラフ理論の先行研究から，グラフ理論の特徴を整理し，高校数学においてグラフ理論を扱う際の課題を考察した．第２に，高校数学におけるグラフ理論の教材を開発するための視点を明確化し，「命題と論証」と「位相的な見方のよさ」を得た．第３に，前述の教材開発の視点をもとに教材を開発した．

本論文の構成

１．研究の目的と方法

長崎（2007）は，高校卒業までに身につけさせたい数学の内容が戦後 60 年間あまり変化しておらず，高校数学の内容が主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を唯一の頂点とする内容で構成されている点について指摘し，新しい教材開発の必要性について主張している．そしてこの指摘は，現在も変わっていないと考える．さらに氏は，生徒が多くの前提知識を必要とせずに問題にアプローチできる内容として離散数学を挙げている．これまでの離散数学に関する先行研究はグラフ理論に焦点があてられたものが多く，生徒が前提知識に左右されずにモデル化能力を獲得し，社会有用性の感得に貢献できることや，数学的表現のよさを実感できるといったことが指摘されている．上記のように，これまでの先行研究によって，前提知識を必要としな

くとも多くの数学的思考能力を身につけ，有用性を実感できるといったグラフ理論の特徴は主張されてきた．しかし，これまで高等学校学習指導要領における必履修科目でグラフ理論が扱われたことはなく，その要因として，グラフ理論の特徴を活かした教材が十分ではないことが考えられる．そのため，高等学校学習指導要領における必履修科目でグラフ理論が扱われるためには，グラフ理論の特徴を活かした教材を開発する必要があると考える．

以上より，本研究の目的は，高校数学における，グラフ理論の特徴を活かした教材の開発である．さらに，本研究の目的を達成するために，次の３つの課題を設定した．第１に，学校数学におけるグラフ理論の先行研究から，グラフ理論の特徴を整理し，高校数学においてグラフ理論を扱う際の課題を考察する．（第１章）第２に，教材開発のための視点を明確化する．（第２章）第３に，教材を開発し，開発した教材がグラフ理論の特徴を活かした教材となっているか考察する．（第３章）

２．グラフ理論の特徴と高校数学におけるグラフ理論の扱いに関する課題

⑴ グラフ理論の概念規定

グラフ理論は数学の歴史の中では新しく，その発祥となった問題は Euler(1736)による「ケーニヒスベルクの橋の問題」であり，位相幾何学（トポロジー）のはじまりとなった問題である．これは，ケーニヒスベルクの４つの地区 A,B,C,D に流れている川に架けられた７つの橋すべてを一度だけ渡るように散歩することはできないか，という問題である．

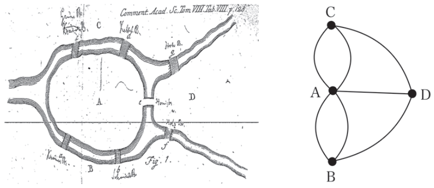

図１ 「ケーニヒスベルクの橋」の図（左図）とそのグラフ（右図）

その後，グラフ理論は，情報通信技術や計測技術の発達と相まって発達し，離散数学の一分野として理論的な奥深さを持つ一方で，スケジュール作成や経路検索等，実世界の様々な問題を計算機を利用して解くための道具として活用されている．グラフ理論では，前述の「ケーニヒスベルクの橋の問題」同様，物と物との関係として表れる現象を，物を点で表し，関係ある物同士を辺で結ぶ，グラフとして表わす．

よって，本研究で扱うグラフは，関数のグラフや統計のグラフではなく，いくつかの点（以下，頂点）と，それらを結ぶ線（以下，辺）からなるものを指す．尚，断らない限り，連結[1)]かつ有限[2)]グラフを指すものとする．

⑵ 学校数学におけるグラフ理論の特徴

先行研究で主張されてきたグラフ理論の特徴を整理すると，以下になる．（表 1）

表１ 学校数学におけるグラフ理論の特徴と主な先行研究

多くの前提知識を仮定しなくとも問題解決できる	秋山(2005)，長崎(2007)
数学の有用性を実感できる	西村(2007)，花木(2007)，Rosenstein(2018)
数学的モデル化能力を獲得できる	Greefrath et al(2022)，西村(2007)
数学的表現のよさを実感できる	秋山(2005)，花木(2008)
数学を創造・発展させる活動ができる	花木(2008)
命題をつくりやすい	奥田(2015)

⑶ 学習指導要領上におけるグラフ理論の扱いの変遷

高等学校における学習指導要領でグラフ理論が扱われたのは，平成 20 年改訂高等学校学習指導要領の科目「数学活用」であった．

しかし,「数学活用」はグラフ理論を扱った科目であったにも関わらず,以下示すように,普通科では8.1%，専門学科では6.2%，総合学科では 20.8%の履修率にとどまっている．そのため，ほとんどの生徒はグラフ理論について学習していない現状が伺える．(図 2)

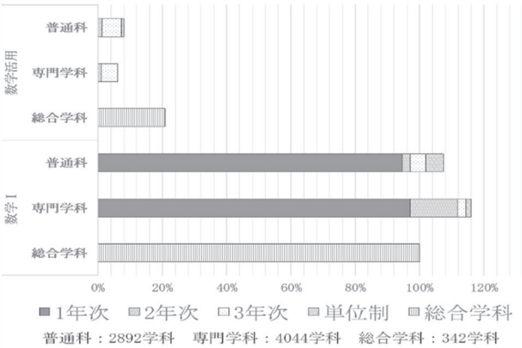

図 2　平成 27 年度公立高等学校における「数学活用」と「数学Ⅰ」の履修率比較（文部科学省，2015）

さらに，グラフ理論は，平成 20 年改訂高等学校学習指導要領の改訂版にあたる，平成 29 年改訂高等学校学習指導要領においても科目「数学 C」の中で扱われることになった．

また，高校数学においてグラフ理論が扱われたのは，前述の平成 20, 29 年改訂高等学校学習指導要領であったが，数学教育現代化期の昭和 44 年改訂中学校学習指導要領においても扱われていた．この学習指導要領は，位相幾何学的な見方を取り入れた，位相的な見方が日本のカリキュラムに初めて導入された学習指導要領である．(堀川，2014，p.161)

そして，この位相的な見方は，第 3 学年「C 図形」領域において育成が目指され，図形や空間についての見方を豊かにすること [3]が目標とされた．実際に，当時の指導書では，一筆書き問題がとりあげられた．(図 3)

しかし，位相的な見方は教育課程審議会の答申に基づき,次期昭和 52 年改訂中学校学習指導要領から削除された．(文部省，1978)

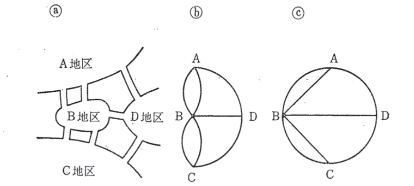

図 3　一筆書き問題(文部省, 1970, p.100)

(4)　高校数学におけるグラフ理論の扱いに関する課題

表 1 からわかるように，グラフ理論は多くの特徴があることから，グラフ理論を高校数学において扱う意義は多くあるといえる．

また，前節では，学習指導要領におけるグラフ理論の扱いの変遷をたどることで，これまでグラフ理論がどのように高校数学で扱われていたのか整理した．そして，高等学校学習指導要領において扱われていても，グラフ理論を学習しない生徒が多くいる実態が「数学活用」と「数学Ⅰ」の履修率比較によって明らかとなった．(図 2) グラフ理論は，表 1 に示すように，高校数学において扱う意義が多くあるにもかかわらず，その内容を学習する生徒が少ないということは，非常に惜しいことである．さらに，これまで高校数学の必履修科目でグラフ理論が扱われたことがないことから，グラフ理論には，これまであまり着目されてこなかった，他に着目すべき特徴というのがあるのではないかと考える．

以上のことから，高等学校学習指導要領における必履修科目でグラフ理論が扱われるためには，これまであまり着目されてこなかったグラフ理論の特徴に着目し，その特徴を活かした教材を開発する必要があると考える．

３．教材開発の視点

⑴　命題と論証

奥田（2015）は，中学生を対象に，生徒が自ら命題を設定し，その真偽を確かめる活動に着目し，そのような活動を活発にできるようなグラフ理論の教材を開発した．氏によると，生徒はグラフが同型であるための十分条件を見いだす中で命題を設定し,反例を考え,反例が出ないように命題の条件を変更する活動が行われると述べている．（図 4）

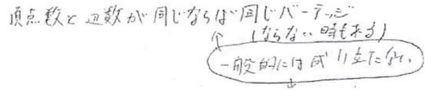

図 4　奥田（2015）における生徒自身がつくった命題の記述（p. 125）

そして，グラフのような具体的な事例から一般化された結論を吟味する活動を通して，生徒が自ら命題を設定し，その真偽を確かめる活動を行うことができると述べている．

さらに，氏は中学生を対象に授業実践を行ったが，これまで高校数学において命題をつくりやすいというグラフ理論の特徴を活かした教材の開発は行われていない．命題に関する内容は，高校数学において扱われる内容であることから，高校数学においてグラフ理論を扱う意義があるとともに，高校数学におけるグラフ理論の教材開発のための視点の一つになりうるのではないかと考える．

また，現行の教科書では，例えば命題「$x>2 \Rightarrow x>0$」の真偽を求めることや,「$x>1$ は $x>0$ であるための何条件か」を求めることのように，教える知識が前提にあり，それに合う例題を取り上げ演習させる展開となっている．そのため，一つの問題を解決する過程を通して，命題を推論・設定し，必要条件・十分条件といった条件を整理する中で命題の逆・裏・対偶の関係を考え，命題を証明するといった一連の内容が扱われず，それぞれの学習内容が独立している課題が考えられる．

以上のことから，グラフ理論の問題を解決する過程を通して，前述の内容が扱われる教材が必要であると考える．そのため，命題と論証を教材開発の視点とする．尚，命題と論証において,証明ではなく論証を用いるのは,単に命題を証明するだけでなく，対偶や背理法といった証明の方法論まで含むためである．

⑵　位相的な見方のよさ

はじめに，前章 3 節で述べた位相的な見方について規定する．大野他（1973）は「位相幾何学というのは位相変換 [4]によって不変な性質，すなわち位相的性質を研究する幾何学である.」（p. 47）と述べ，ここでの位相的性質は図形のつながり方であると述べている．実際に，位相変換によって一つの三角形は，頂点・辺・面のつながりを変えずに，円や不規則な閉曲線に変形できる．（図 5）

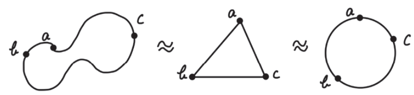

図 5　三角形と同相（≈）な図形の例

そのため，位相的な見方とは，図形を変形させても点・線・面のつながりが変わっていなければそれら図形を同じとみる，位相変換による見方であるといえる．例えば，鉄道の路線図が,実際の線路と同じとみているのは,位相的な見方の一例である．

しかし,昭和 52 年改訂中学校学習指導要領において，位相的な見方は削除され，その理由について，田島（1977）は次を挙げている．

①位相変換における図形の性質を指導するための教材が中学校数学教育の中では，あまりにも少な過ぎること．

②発見的学習法の中で行ったので直観的から

山勘またはパズル的方法にその指導が進んでしまった.
③指導者が教材に不十分な理解のためややもすると固定的な事象として指導してしまう.
④従来の図形（相似，合同等の変換）の教材と位相教材の両者の指導のねらいが，あまりにもかけ離れているので，これらを結び付ける教材がない．そこで次の段階（高校数学）でどの領域にも関連性に乏しいので，発展性がない.　　　　（田島, 1977, p. 252）

さらに，位相的な見方が大事といわれながら，位相的な見方をしたことによって問題をうまく解決できるといった，位相的な見方のよさを実感できる教材が見受けられなかったことも，位相的な見方が削除された理由の一つであると考えられる.

一方で, 位相的な見方には, 数学的な見方・考え方の育成や学習の動機付け，論理的思考の育成等の価値があると，平岡（1969）や日本数学教育学会編集部（1973）によって述べられてきた．また，平成 30 年告示学習指導要領においては，数学的な見方・考え方を働かせながら，数学的に考える資質・能力の育成が目指されている.（文部科学省, 2018, p. 91）このことから，位相的な見方は，現在の学校数学において数学的な見方・考え方が大事であると言われながら扱われていない見方であり，前述のような価値ある見方であるため，高校数学において扱う価値があると考える.

以上のことから，グラフ理論の問題を解決する過程で，位相的な見方のよさを実感できる教材が必要であると考える．そのため，位相的な見方のよさを教材開発の視点とする.

4．グラフ理論の教材開発

⑴　命題と論証の教材

①　問題

あなたの学校では今，道路清掃ボランティアが企画され，あなたは図 6 に示すすべての道を清掃することになった．そこで，どのような経路で清掃すれば最適かを考え，担当清掃範囲における清掃経路を企画せよ．尚，清掃開始時は学校から清掃道具を持ち出し，終了時は集めたごみを学校へ持ち帰ることとする.

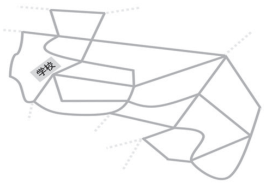

図 6　担当の清掃範囲

上記問題は, 各点につながった辺の数（以下, 頂点次数）が奇数である点（以下, 奇点）を 2 個含むグラフ G に対する郵便配達員閉歩道 [5)] を求める問題であり，2 個の奇点間を結ぶ重み最小の道を加えることで解が得られる.

②　問題解決過程

本教材の解決にあたり，その過程の中で生成される問いを記述していくと，解決過程の概要は図 7 になる.

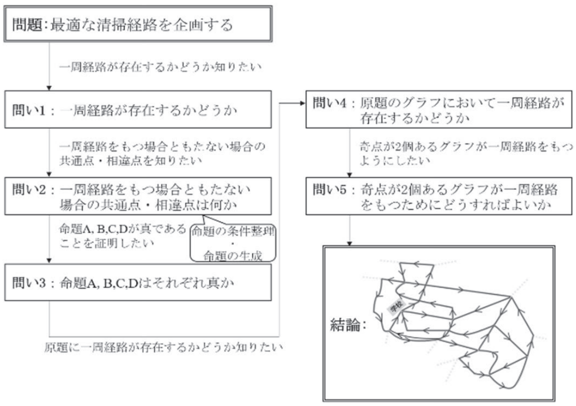

図 7　解決過程で生成される問いの構成

特に，本稿では図 7 のうち，命題が表れた

過程の問い2と論証が表れた過程の問い3について詳述することとする．

はじめに，命題が表れた過程である．

図6の図上に経路をトレースして考えると，どのような経路をトレースしても一周経路[6)]が得られないため，図6の図は一周経路となる経路が存在しないのではないかと推測される．しかし，一周経路となる経路が存在しないとは言い切れないため，一旦，単純な図で考える．（図8）

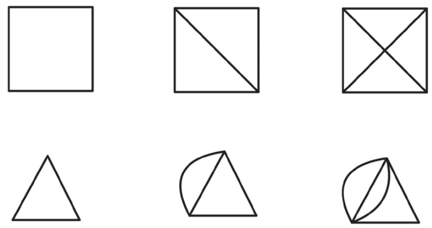

図8　単純な図の列挙

そして，図8に対して経路をトレースすると，以下となる．（図9）図9に示す，黒点Sと黒点Tはそれぞれ出発地点と到着地点を表し，赤線と赤線上の矢印はそれぞれ経路と経路の進行方向を表す．

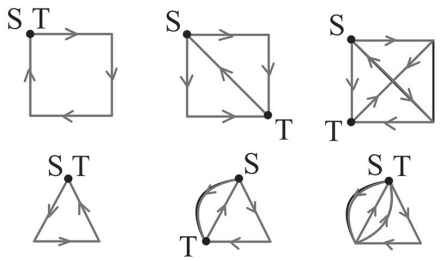

図9　図8に対する経路の書き出し

さらに，図9の図を，一周経路をもつ場合ともたない場合にグループ分けし，一周経路をもつ場合ともたない場合の図上における共通点・相違点を考える．そこで，図9の黒点S，T同様に，ある辺が別の辺に切り替わる地点（以下，点）としてプロットした図（以下，グラフ）で捉え，各点とつながっている辺の数（以下，頂点次数）を書き表したグラフで捉えると，図10となる．

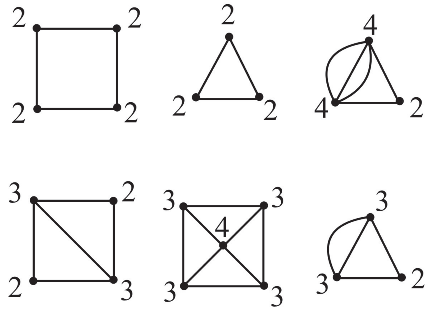

図10　一周経路をもつ場合（上段）ともたない場合（下段）のグラフの頂点次数

図10より，一周経路をもつ場合ともたない場合を頂点次数との関係で捉えると，以下のことが共通していると推測できる．

- グラフが一周経路をもつ場合，グラフ内すべての頂点の頂点次数が偶数である
- グラフが一周経路をもたない場合，グラフ内の頂点の頂点次数に奇数が含まれる

よって，このことをそれぞれ命題として捉えると，以下になる．

- **命題A**「グラフが一周経路をもつ⇒グラフ内すべての頂点の頂点次数が偶数である」，
- **命題B**「グラフが一周経路もたない⇒グラフ内の頂点の頂点次数に奇数が含まれる」

さらに，元々，図6のグラフにおいて一周経路が存在するかどうかを調べていたため，「〇〇である場合，一周経路をもつ/もたない」の「〇〇」がわかると，一周経路をもつかどうか判断できる．そのため，以下のことが共通しているとも推測できる．

- グラフ内すべての頂点の頂点次数が偶数である場合，グラフが一周経路をもつ
- グラフ内の頂点の頂点次数に奇数が含まれる場合，グラフが一周経路をもたない

よって，このことをそれぞれ命題として捉

えると，以下になる．

・**命題 C**「グラフ内すべての頂点の頂点次数が偶数である⇒グラフが一周経路をもつ」

・**命題 D**「グラフ内の頂点の頂点次数に奇数が含まれる⇒グラフが一周経路もたない」

次に，論証が表れた過程である．尚，本稿では特に，命題 A の証明について詳述する．

証明 グラフ G が一周経路をもつことから，経路の始点と終点は一致し，グラフ G すべての辺を通る．ここで，グラフの各点における辺の動きに着目すると，図 11 より，経路の始点かつ終点 S は，最初，S からその他の点 V へ辺が出る（以下，自身の点から別の点へ辺が出ることを「出」と表記する．）で始まり，最後，V から S へ辺が入る（以下，別の点から自身の点へ辺が入ることを「入」と表記する．），つまり，「出」で始まり，「入」で終わる．

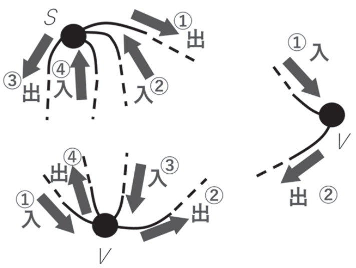

図 11　辺の出入り（各点での番号は出入りの順序を表す．）と頂点次数の関係

さらに，表 2（α は辺の出入りの仕方を，β は使用する辺の本数を，γ は辺の偶奇を表す．）に示すように，辺の出入りが決まると，各点の頂点次数の偶奇も決まる．そのため，S の頂点次数を k（k は自然数）とすると，表 2 より，S の頂点次数 k は偶数である．

表 2　辺の出入りの仕方と使用する辺の偶奇

α	出	入	出	入	出	入	出	…	入
β	1	2	3	4	5	6	7	…	k
γ	奇	偶	奇	偶	奇	偶	奇	…	偶

また，同様に，V は「入」で始まり，「出」で終わる．そして，V の頂点次数を ℓ（ℓ は自然数）とすると，表 3 より，V の頂点次数 ℓ は偶数である．

表 3　辺の出入りの仕方と使用する辺の偶奇

α	入	出	入	出	入	出	入	…	出
β	1	2	3	4	5	6	7	…	ℓ
γ	奇	偶	奇	偶	奇	偶	奇	…	偶

よって，すべての頂点次数は偶数である．□

③　考察

まず，命題が表れた過程についてである．グラフが一周経路をもつ場合ともたない場合の共通点を考えたことで，「グラフが一周経路をもつ」，「グラフが一周経路をもたない」，「グラフ内のすべての頂点次数が偶数である」，「グラフ内の頂点次数に奇数が含まれる」の 4 つの条件に着目した．そして，それらの条件の何が仮定で何を結論とするのかを整理した，つまり，命題の必要条件や十分条件を整理したことで，命題が推論・設定された．

次に，論証が表れた過程についてである．命題 A は，グラフの各点における辺の出入りの動きが直接的に証明に反映された，言語による証明を行った．命題 C については，言語による証明，さらに，厳密な証明として，背理法や数学的帰納法でも証明される．また，命題 B, D については，対偶法で証明される．

命題に関する内容は，平成 30 年告示学習指導要領解説における必履修科目「数学 I 」の内容の一つ「集合と命題」において扱われることから，本教材は高校数学の必履修科目に位置づけることのできるといえる．

以上より，本教材は，命題をつくりやすいという特徴を活かして，必履修科目「数学 I 」の内容の一つ「集合と命題」に位置づけるこ

とができ，さらに，命題の条件を整理することを通して，命題に関する内容をストーリー性をもって学習できる教材であるといえる．

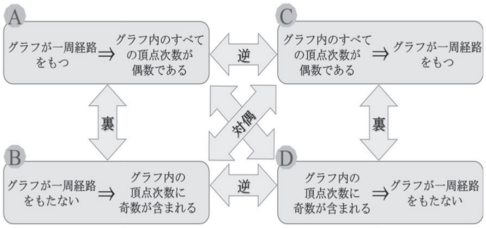

図 12　命題の逆・裏・対偶の関係

⑵　位相的な見方のよさを実感できる教材

①　問題

問題 1：立方体の展開図は何通りあるか.
問題 2：立方体以外の多面体の展開図を求めよ.
問題 3：多面体を平面に埋め込んでも変わらない性質は何か.

上記問題のうち問題 1 は,立方体の展開図が何通りあるか求める問題である．展開図は,小学校，中学校においても扱われる内容であるが，ここでは，立方体と展開図の関係をみる中で，位相的な見方がなされ，立方体の展開図が 11 通りあることを求める．また，問題 2, 3 を設けることで本教材をトピック的な扱いではなく,発展的な扱いになるようにした．

②　問題解決過程

本教材の解決にあたり，その過程の中で生成される問いを記述していくと，解決過程の概要は図 13 になった．

特に，本稿では図 13 のうち，位相的な見方が表れた過程の問い 2 と問い 3 について詳述することとする．

問題 1 を解決するにあたり，立方体の展開図を考えると以下が挙げられる．（図 14）

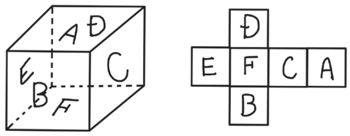

図 14　展開図の列挙

このとき，展開図の辺数，頂点数と立方体のそれらの数は一致していないことに気づく．しかし，展開図は組み立てると立方体になるため，それらの数は同じになるはずである．

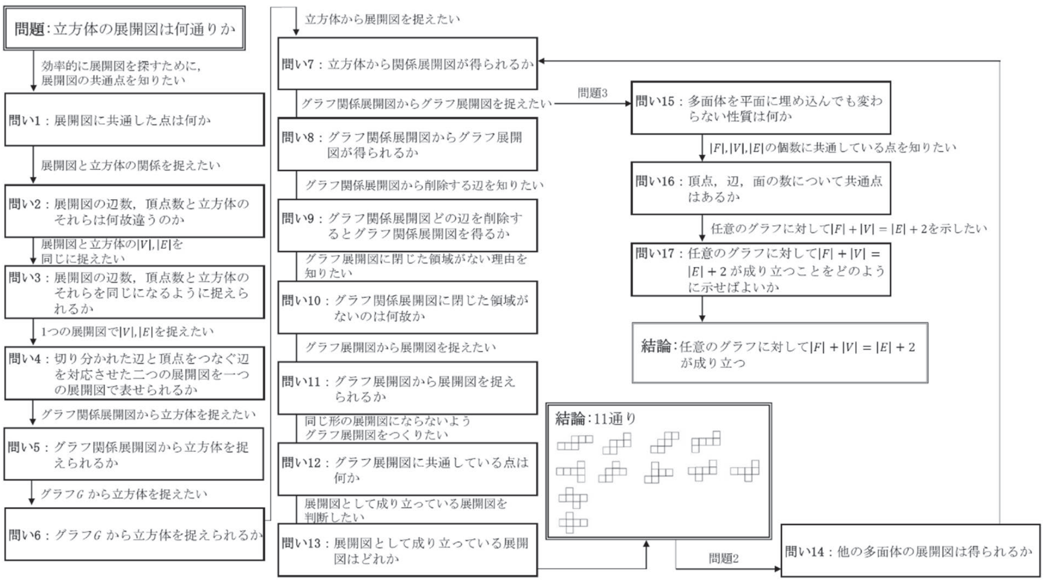

図 13　解決過程で生成される問いの構成

よって，それらの数が同じになるように考えるために，立方体を展開する過程を考えると以下となる．（図 15）

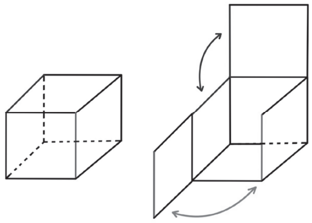

図 15　立方体の展開とそのときの辺の対応

図 15 から,展開図にするには立方体のある辺を切り広げる必要があることがわかる．そして，辺を切り広げるときに辺が 2 か所に分かれる．そのため，立方体の辺を展開図上の辺と対応付けると，以下となる．（図 16）

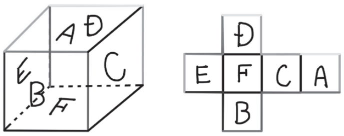

図 16　切り分かれた辺の対応

さらに，展開図上に色分けされた辺は，もともと立方体の一辺であったため，色分けされた辺同士をつなげ，一つの辺として考えると，以下となる．（図 17）すると，もともとの立方体の辺数と同じになるように捉えられた．

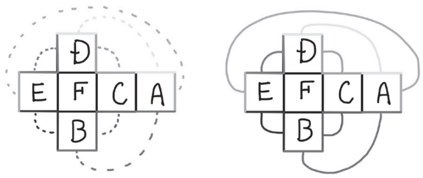

図 17　切り分かれた辺同士をつなぐ辺を対応させた展開図

同様に，頂点，面の個数についても対応付けを考えると，最終的に，立方体の辺・頂点・面それぞれの個数を，辺・領域（辺で囲まれた部分）・点に対応付けた展開図（立方体の面を点として簡潔に表した展開図をグラフ関係展開図と呼ぶ.）が得られる．（図 18）

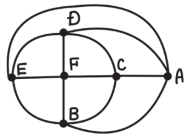

図 18　グラフ関係展開図

③　考察

問い 2，問い 3 を解決することによって，展開図から立方体の頂点・辺・面の数に対応したグラフ関係展開図を見いだした．展開図は，立方体を平面に展開，変形することで得られる表現であることから，立方体と展開図の頂点・辺・面それぞれの数が同じになるように捉えたグラフ関係展開図は，立方体と同じことを表しているといえる．また，このときのグラフ関係展開図と立方体を同じとみた見方は，位相的な見方であるといえる．

さらに，ここでの位相的な見方は，現在の学校数学において数学的な見方・考え方が大事であると言われながらも，扱われていない見方であるが，本教材を扱うことによって，解決の中で位相的な見方を働かせ，見いだすことができるといえる．そのため，この点においても本教材の意義があるといえる．

また,問い 15 の多面体を平面に埋め込んでも変わらない性質を考えることによって，オイラーの定理の証明内容まで扱うことができる．現行の高校数学においてオイラーの定理は，「数学 A」において扱われる内容である．そのため，本教材を高校数学の必履修科目において扱うことで,科目間の内容を結び付け，発展性をもたせることが可能であると考える．

以上より，本教材は，位相的な見方による問題解決ができるという特徴を活かして，位相的な見方のよさを実感でき，さらに，発展性をもって学習できる教材であるといえる．

５．今後の課題

今後の課題は，開発した教材をもとに授業を立案し，授業実践すること，そして，学校数学におけるグラフ理論の特徴についてさらに深く考究していくことである．

注

1)グラフの任意の2頂点間に辺が存在する．

2)頂点集合 V,辺集合 E が有限集合．

3)図形の頂点と辺のつながりが重要となる，位相的な観点から図形の性質を考察することによって，図形や空間についての見方を豊かにすることが目標とされた．

4)集合 X から集合 Y への変換で，次の(1)，(2)を満たすものを位相変換という．

(1)集合 X と Y とが一対一に対応する連続変換である．

(2)逆変換も連続である．（両連続である．）

5)重み付きグラフ G において，G のすべての辺を少なくとも1回は通る閉じた経路のうち，最も重みの小さい経路を求める問題．

6)始点と終点が一致し，すべての辺をちょうど一度ずつ通る経路．

引用・参考文献

Euler, L.(1736) . Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Euler Archive - All Works. 53.

大野清四郎他 (1973)．中学校　数学教育現代化全書　第6巻図形．金子善蔵．(原著出版1970年)

奥田宏敬(2015)．グラフ理論の教材化(2)―同型性判定問題に焦点をあてて―．日本数学教育学会第 48 回秋期研究大会発表集録，123-126.

長崎栄三他(2007)．高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の研究開発最終報告書．国立教育政策研究所科研研究成果報告書．

堀川一樹 (2014)．数学教育現代化期の中学校数学科における教科書内容の精選課程．―位相教材に着目して―．日本数学教育学会誌数学教育学論究臨時増刊,96,161-168.

日本数学教育学会編集部 (1973)．図形や空間についての位相的な見方について．日本数学教育学会誌，55(11)，281-284.

平岡忠 (1969)．数学教育におけるトポロジーの考えの教育的価値について．茨城大学教育学部紀要，18，159-170.

田島定夫 (1977)．とてもおいしい位相教材の削除．日本数学教育学会誌，59，252.

文部科学省 (2015)．平成27年度公立高等学校における教育課程の 編成･実施状況調査の結果について．https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/__icsFiles/afieldfile/2019/02/12/1413569_002_1.pdf　(2023.5.3参照)

文部科学省(2018)．高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説　数学編理数編．学校図書．

文部省 (1970)．中学校指導書　数学編．大阪書籍．

文部省 (1978)．中学校指導書　数学編．大日本図書．

（えんどう　たかひと
東京都立府中高等学校
〒183-0051　東京都府中市栄町3-3-1）