東京学芸大学リポジトリ
Tokyo Gakugei University Repository

遠心力を用いない第1宇宙速度の説明について：水平投射の観点から

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 東京学芸大学教育実践研究推進本部 公開日: 2023-11-13 キーワード (Ja): 天体力学, 第1宇宙速度, 水平投射, 遠心力, 曲率 キーワード (En): celestial mechanics, first cosmic velocity, horizontal throw, centrifugal force, curvature 作成者: 小林, 晋平, 太田, 渓介 メールアドレス: 所属: 東京学芸大学, 開智所沢中等教育学校
URL	https://u-gakugei.repo.nii.ac.jp/records/2000131

東京学芸大学紀要　自然科学系　75：11－15，2023

遠心力を用いない第１宇宙速度の説明について

―― 水平投射の観点から ――

小　林　晋　平*1・太　田　渓　介*2

物理科学分野

（2023年５月31日受理）

KOBAYASHI, S. and OTA, K.: Explanation of the first cosmic velocity without using centrifugal force: from the viewpoint of horizontal throw. Bull. Tokyo Gakugei Univ. Div. Nat. Sci., 75 : 11–15. (2023)　ISSN 2434–9380

Abstract

We explain how to derive the first cosmic velocity from the viewpoint of the horizontal throw. Instead of using the centrifugal force, we can derive the first cosmic velocity if we impose the condition that an object does not fall to the ground even if it continues to fall along the parabolic trajectory, since the curvature of the surface of the earth matches to the fall distance of the object. We also mention that this kind of the change of viewpoint is significant in extracting the essentials of physical phenomena and the importance of the inclusion of this perspective in physics class.

Keywords: celestial mechanics, first cosmic velocity, horizontal throw, centrifugal force, curvature

Department of Physics, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Koganei-shi, Tokyo 184-8501, Japan

要　旨

地上静止系における水平投射の観点から第１宇宙速度を導出する方法について説明する。この方法では遠心力を用いる必要がなく，水平投射によって物体が放物軌道に沿って落下し続けても，落下の度合いが，地表が曲がっていることによる地面の下り具合と一致するという条件を置くことで第１宇宙速度の導出が可能であることを見ていく。この計算に基づく「視点の変更」が物理現象の本質を引き抜く上で役立つこと，および大学での力学の講義や高校物理の力学範囲でこうした内容を取り入れることの重要性について述べる。

キーワード：天体力学，第１宇宙速度，水平投射，遠心力，曲率

１．　はじめに

物理学において座標系は物体の運動や物理法則を定量化し，解析するために必須の道具である。しかし物理現象とは，本来私たちが人為的に導入した座標とは無関係に存在するものである。この考えを推し進め，「座標系によらない物理」や「物理学の幾何学化」を行ったのがラグランジュやハミルトンなどによって

＊１　東京学芸大学 基礎自然科学講座 物理科学分野（184-8501　東京都小金井市貫井北町 4-1-1）
＊２　開智所沢中等教育学校（359-0027　埼玉県所沢市松郷169）

構築された解析力学である[1]。しかし，「座標系によらない物理」という発想は私たちにはあまり直感的ではなく，正直とっつきにくい。例えば高校数学で学ぶベクトルで $\vec{a}=(1,2)$ などの成分表示を行うことがあるが，この成分は何らかの座標を導入して初めて決まるものであり，ベクトル本体である $\vec{a}$ と，その成分とは同じではない。しかし私たちにはこれらが等価であると感じられるし，同じベクトルを別の座標系で成分表示するような練習を（少なくとも高校範囲で）することはない。大学の物理でも，例えば電磁気学ではデカルト座標だけでなく極座標や円筒座標などさまざまな座標系が用いられるが，座標系ごとに勾配（grad），発散（div），回転（rot）といった量の表示が異なることに躓く学生がほとんどである。同じ幾何学量であっても，使う座標が異なれば成分が異なること，すなわち視点が異なれば得られる数値は異なるという事実にはあまり馴染みがないのである。解析力学にしても，「座標によらない物理学の定式化を行いたい」という動機が理解されていないため，「解析力学は何がしたい学問なのか」という疑問を持たれることが多い。

「座標によらない物理」と「物理法則の大局的な見方」の関係についてはここでは言及しないが[2]，物理学を幾何学化し再定式化するという大きな目標はともかく，座標系の取り方は人為的で便宜上のものに過ぎないことを理解することは重要である。小中高に限らず大学の教養課程においても物理法則を「公式」として暗記するだけの悪癖はなかなか払拭されないが，そもそも公式とは，何らかの座標系を与え，その中で表現されたものである。例えばデカルト座標と極座標の運動方程式の見た目が大きく異なるように，座標系が異なれば「公式」の形も異なる。すなわち，特定の座標系でのみ表現された公式を丸暗記することは実用的な意味でも極めて限定的にしか役に立たない。

また，複数の視点から物理現象を説明できることは，現象の本質を理解する上でも重要である[3]。先行研究[2]では，光の軌跡を局所的な視点と大局的な視点の２つによって説明できることを述べたが，そうした大きな視点の変換に限らず，まずは自分に馴染みのある視点で理解し，そのあとで別の視点から現象を理解しようと試みることで，１つの現象についても理解が深まり，新たな応用を発見することにも繋がる。

ところで，複数の視点を持つことの重要性はその難しさから学校教育課程ではあまり力説されることがないが，少ない例として高校力学の慣性力の単元ではこのことを暗に学習する。慣性力とは，加速度運動する系からの視点で現れる力であり，等速直線運動する系では現れない。加速度運動する系は非慣性系と呼ばれ，逆に等速直線運動をする系は慣性系と呼ばれる（より正確には，慣性の法則が成り立つ系を慣性系と呼ぶ。慣性系という用語は高校までで学習することはなく，大学以降でも相対性理論を学ぶ際に導入されるのが普通である）。

非慣性系の具体例は無数にあるが，日常生活でよく見かけるものとして回転運動している物体に乗った系を挙げることができる。回転運動は速度が時々刻々変化する加速度運動であり，回転運動している人（非慣性系にいる人）には慣性力の１種である遠心力が感じられる。

例えば私たちが車に乗っていて，その車がカーブするとき，私たちはカーブの外側に飛ばされるような遠心力を感じるが，これは車に乗っている人にだけ観察される現象であり，同じ運動を地上静止系から見た場合，遠心力は現れない。車がカーブしているにもかかわらず，乗っている人は等速直線運動を続けようとするため，結果的にカーブし始めた出した車の壁に押しつけられることになる。車に乗っている人は壁に押しつけられたことを「自分はカーブの外側に吹っ飛ばされた」と感じるのであり，両者の視点に矛盾はない。

またバケツに水を入れて振り回すと，回転の速さが十分大きければバケツの中の水がこぼれてくることはない。これは水に働く重力（およびバケツからの垂直抗力）と遠心力が釣り合っているためだと解釈できるが，これも同様で，地上静止系から見ると水が落下しようとするより早く，バケツが水を「拾い続けて」いると観察される。

バケツに入った水と同じく，回転運動によって遠心力が生じ，落ちてこないと解釈できる例に宇宙ステーションや人工衛星などがある。例えば国際宇宙ステーション（ISS）は地上 400 km の高さを秒速 7.7 km で周回している。

この地上 400 km という値は地球の半径である 6400 km に比べれば十分小さな値である。そうした地球の地表スレスレから水平に投射された質点が，空気抵抗などの摩擦がない状況で，地面に落下せずに周回運動できるために必要な初速のことを第１宇宙速度と呼ぶ。この速度の導出には，質点に働く遠心力と地球から質点に働く万有引力とが釣り合うという条件を用いればよく，値はおよそ秒速 7.9 km である。

さて，質点に働く力が釣り合うという見方は，質点に対して静止した系からのものである。質点は等速円運動しているため慣性力として遠心力が現れるが，この遠心力と地球からの万有引力とが釣り合い，「質点

は静止している」と考えられることになる。

一方，同じ現象を地上静止系から見た場合，地上静止系は慣性系であるから慣性力である遠心力は現れない。地上静止系においてこの現象は「質点が地球からの万有引力を向心力として等速円運動している」ととらえられる。質点とともに動く系と地上静止系とでは現象の「見え方」は異なるがそこに矛盾はなく，このことは数式で示すこともできる。

第１宇宙速度の導出においてもこのことは同様で，円運動している物体に乗った系と地上静止系と，どちらの系の視点を使っても導出することはできるが，特に遠心力は私たちに馴染みのある力であることと，円運動の運動方程式の使い方に困難を感じる生徒が多いことなどから，遠心力を利用した第1宇宙速度の導出が採用されることも多い。

とはいえ，「ISSは落下し続けている」という表現もしばしば目にする。ここでいう落下とは，地球の中心に向かって放射状内向きに落ちているという意味ではなく，水平投射された物体が地面に落下していくように，水平方向の等速直線運動と，鉛直方向の自由落下が組み合わさった運動としての落下のことである。

私たちからは ISS は上空400 km に浮かんだ天体のようにしか見えないが，図1のように地上静止系で全体を見ることができる観測者からすると，ISS は地面に向かって水平投射を繰り返し，落下し続けていると観測される。にもかかわらずいつまで経っても地面に衝突しないのは，水平投射において落下した距離の分だけ，地面もまた「下がって」いるからにほかならない。つまり地球の表面が曲がっていることによって，ISSが落下しても，地面に到達しないのである。

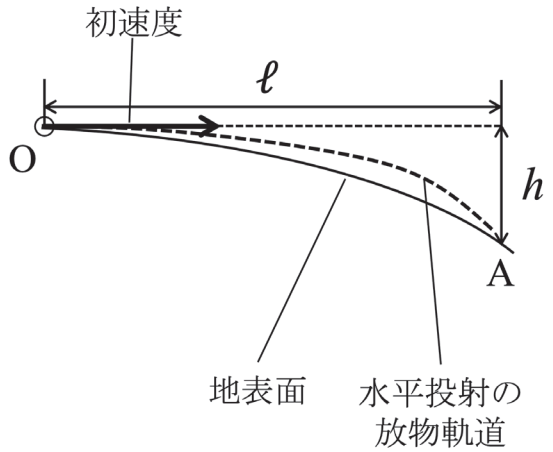

図１　地表近くでの水平投射による落下軌道と地表の曲がり

本稿ではこのことを計算で確認し，その活用について考えていく。初めに，遠心力と万有引力の釣り合いを使った方法で第１宇宙速度を導出する計算を確認する。これはよく知られた計算であり，高校物理でも学習するものである。次に，地表の曲がり具合と水平投射による落下分が一致し，水平投射によって落下しても地面との距離が変わらないときの初速が第１宇宙速度であることを数式で示す。最後にまとめとして大学での力学の講義や高校物理の力学における視点の変換やこうした計算の重要性について述べる。

２．遠心力を用いた第１宇宙速度の導出の確認

物体の質量を m，水平投射したときの初速を v_1，地球の半径と質量をそれぞれ R, M とし，万有引力定数を G とすれば，物体に働く遠心力は mv_1^2/R，地球から物体に働く万有引力の大きさは GMm/R^2 と表せるから，釣り合いの式は

$$m\frac{v_1^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

となる。これを初速 v_1 について解けば

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

のように第１宇宙速度を求めることができる。ここへ $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$，$M = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$，$R = 6.36 \times 10^6\ \mathrm{m}$ を代入すると，有効数字２桁で第１宇宙速度 v_1 は秒速 7.9 km（時速２万5000 km）という値が得られる。また，質量 m の物体に働く重力のほとんどが万有引力であることから，

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

の関係があることを使うと v_1 は $v_1 = \sqrt{gR}$ と表すこともできる。これらはすべて高校物理で学習する内容である。

３．地表面近くでの水平投射から見た第１宇宙速度

次に，第１宇宙速度を地上静止系で水平投射の観点から見直してみる。

よく知られているように，地表近くでは重力加速度の大きさは一定であり，向きは鉛直下方で一様である。その結果，水平方向に投射された物体は空気抵抗が無視できるときは水平方向に等速直線運動，鉛直下

方に等加速度運動をし，物体は地面へとやがて落下する。これは放物軌道である。初速を大きくしていくと物体が地面に落下するまでに水平方向へ移動する距離は増加していくが，やがて地面に落下していくことには変わりがない。

では第１宇宙速度で水平方向に投射した場合はなぜ地面に落ちてこないのか。これは，第１宇宙速度が十分大きいため水平方向の移動距離が大きくなり，地表面の曲がりが無視できなくなるからである。すなわち物体は落下するものの，地球の表面が曲がっているために「地面も下がっていき」，いつまで経っても物体が地面に落ちてこないのである。別の言い方をすると，水平方向に移動したときの物体の落下分と，地球の曲率（表面の曲がり具合）による地面の下がり具合が一致するのが第１宇宙速度で投射された場合である。

この考え方が正しいことを実際に計算で示そう。地表面近くで水平投射される物体の運動を考えるため，水平方向に x 軸，鉛直下方に y 軸を取る。重力加速度の大きさを g とし，投射した位置原点 $(x,y)=(0,0)$ とすると，時刻 t での物体の位置は高校物理でもよく知られているように

$$x = v_0 t\,, \qquad y = gt^2/2$$

で表される。ここで v_0 は水平方向に打ち出された物体の初速である。h は地表からの高さで，地球の半径 R に比べて $h \ll R$ が成り立っているとする。

地表面が平らであれば，物体が地面に落下するとき，それまでに物体が水平方向に進む距離 ℓ と投射された地点からの高さ h との関係は $\ell = v_0 t,\ h = gt^2/2$ から

$$h = \frac{g\ell^2}{2v_0^2}$$

となる（図１）。

さて，物体が y 軸方向に h だけ落下しても地面に衝突しないためには，地表の曲がっていることによって，水平方向に進んだときに地面が適当な大きさだけ「下がって」いればよい。物体が地表スレスレで等速円運動を続けるためには，図２のように水平方向に ℓ だけ進んだとき，地表面がちょうど h だけ「下がって」いればよいことになる。

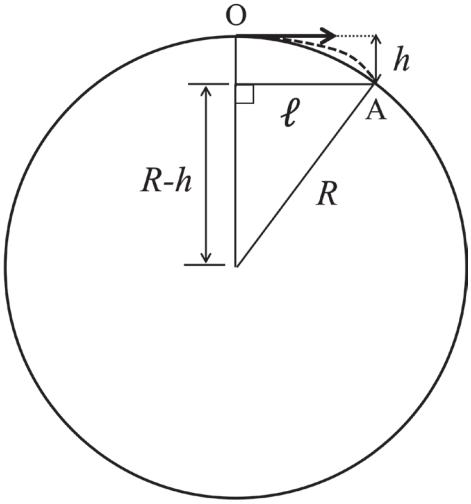

図２　地表近くでの水平投射による落下軌道と地球の半径

このとき地球の半径 R と h, ℓ の間には

$$R^2 = \ell^2 + (R-h)^2$$

が成り立つ。この関係と $h \ll R$ を用いると近似的に

$$2Rh = \ell^2 + h^2 \Rightarrow \frac{2h}{R} = \left(\frac{\ell}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 \approx \left(\frac{\ell}{R}\right)^2$$

から

$$h \approx \frac{\ell^2}{2R}$$

が得られる。なおこの近似自体は高校物理の光学の単元でニュートンリングにおける干渉縞の間隔を求める際にも用いられるものと同様である。

これらより h を消去すると，

$$\frac{g\ell^2}{2v_0^2} = \frac{\ell^2}{2R}$$

より ℓ に関係なく

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

が得られる。最後の式変形では重力加速度 g の大きさと万有引力の関係を用いた。

得られた初速 v_0 の値は２節の第１宇宙速度 v_1 と一致しており，こうして地表近くで水平投射された物体が落下しても，その分だけ地面が「下がって」いれば，いつまで経っても物体が地面に衝突することはなく，物体は地表スレスレのところを等速円運動し続けることを示すことができた。

４．授業への展開とまとめ

第１宇宙速度は高校物理では万有引力の単元で登場し，先述のように速度の導出には等速円運動している系に乗った視点から計算される。遠心力と万有引力の釣り合いという考え方は，遠心力が私たちに馴染みがあるだけでなく，力の釣り合いという静力学の問題に落とし込めることで理解しやすい。

万有引力の単元は，その他の力学の単元と比べると少し連続性を欠いており，歴史的にも物理学的にも重要ではあるものの，学習の動機付けが希薄になる単元である。ようは「浮いて」いる単元であり，各論的な印象が否めない。第１宇宙速度も，地球による万有引力のエネルギーを振り払って無限遠方へ飛び去るために必要な初速である第２宇宙速度も，遠心力や力学的エネルギー保存則の応用例として扱われている。そのため，第1宇宙速度で物体が打ち出される物理的状況を吟味する機会は少ない。

さらに，万有引力に関係する内容は実験で扱うことも難しいため，どうしても「思考実験」的なアプローチに止まらざるを得ない。これらの理由から，本稿で紹介した，通常は考えない視点による第1宇宙速度の導出は，この系のセットアップについて深く考えるための一助になるのではないだろうか。この計算には複数の近似を用い，根底にはテイラー展開の考え方があるため高校物理での展開は進学校に限られるとは思われるが，少なくとも大学以降の物理では近似の計算とその妥当性の吟味は基本かつ重要事項であるから，本稿で紹介した内容を例題として活用することができるだろう。

ちなみに本稿では取り上げなかったが，万有引力に関連し，地表近くでの物理とそれを結びつける教材としては，万有引力による位置エネルギーと，地表近くでの重力による位置エネルギーの形の違いを考えさせるものもある。これもまた近似計算が必要になるため大学以降で扱うのが妥当な内容であるが，天下りではあるが近似計算の仕方だけ与えてしまえば高校でも扱えないことはない。

一般に物理現象は，私たちが人為的に置いた座標系には本来依存しない。この事実は，物理法則の本質が人為的な座標とは無関係であるという，自然の性質の根本と関連しているにもかかわらず，小中高はもとより大学においても解析力学や相対性理論など，一部の分野を除いて強調されることはない。

その理由はいくつかあるが，一つには共変性を表す数学的な道具であるテンソル代数や微分幾何学を習得するのがあまり簡単ではないこと，そして私たちに馴染みのある座標系を使った説明が物理的にわかりやすいことにある[4)]。実際，等速円運動している物体に乗った視点から，遠心力と万有引力の釣り合いという静力学で考える方が私たちに馴染みがあることも述べた通りである。

本稿で紹介した計算は近似を用いていたり，遠心力を用いない導出であるためにあまり馴染みのないものであったりと，簡単な説明方法でないことは確かである。しかし，円運動の単元でも地上静止系からの視点を最初に導入し，そこでは遠心力に相当する項は質量と加速度の積だと解釈される。計算する方程式も力の釣り合いを表す式ではなく，運動方程式とみなされる。その意味では，本稿で紹介したような地上静止系からの視点を通すことも自然であるし，そこに近似計算を絡め，力学の最初の方で学ぶ水平投射や曲率という幾何学的な観点も入れることで，第１宇宙速度を求めるだけの問題に大きな広がりが出る。

いずれにせよ，物理学に限らずあらゆる科学は実際の現象を観察することから出発していることを考えると，１つの現象について，問題設定で与えられた視点だけが「正しい」とするのではなく，いくつかの視点から考える習慣を身に付けさせることは重要である。これは盲目的な公式の暗記から離れさせる１つの手段であるとともに，「物理学とは何を以て何を見るかである」という，物理学のある種の「主観性」にも気付かせる手段となるのではないだろうか。

引用文献

1) 早田次郎（2006）現代物理のための解析力学。サイエンス社。

2) 小林晋平（2017）教員養成における理科の資質・能力の育成を目指す授業プログラムの開発：第5節 光の軌跡を用いた物理法則に対する大域的な観点を育成するための授業。東京学芸大学紀要自然科学系69：63-66.

3) 小林晋平（2021）宇宙の見え方が変わる物理学入門。ベレ出版。

4) 小林晋平（2018）ブラックホールと時空の方程式：15歳からの一般相対論。森北出版。