Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding : A Report on the Practice of Teaching in the 1st Grade "Composition of Shapes" and the 3rd Grade "Function"

国際中等教育研究　第16号 p.131 ～ 156
東京学芸大学附属国際中等教育学校研究紀要

「概念的理解」を志向する数学科授業のデザインと実践

―中学１年「図形の構成」と中学３年「関数」における授業実践報告―

Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding

－A Report on the Practice of Teaching in the 1st Grade "Composition of Shapes" and the 3rd Grade "Function"－

数学科　菅原 幹雄・新井 健使・本田 千春・山本 京平

１章　はじめに

本校数学科は，数学的リテラシーの育成を主たる理念として，本校独自の６年一貫カリキュラムを定めている（たとえば本校数学科，2013）。この教科の取り組みを支える教育システムが国際バカロレア（以下，IB）の中等教育プログラム（以下，MYP）であるが，その理論的基盤の一つに,「概念型カリキュラムと指導（以下，CBCI）」（Erickson et al.，2017）がある。2021 年度の授業研究会より，本校数学科として改めて CBCI を基として「概念的理解」を志向する授業をデザインし，実践することを試みている（小林，2022）。2022 年度においても,「概念的理解」を志向する授業の実践を継続し，公開研究会において提案授業を実施した。すなわち，本校数学科として,「概念的理解」を志向する授業をデザイン，そして研究授業という形で実践し，そこから数学科授業の在り方の示唆を得ることを研究の目的とした。

本稿は，公開研究会を軸とした一連の取り組みについての報告である。２章では，今年度校内研究テーマ「『学びの転移』を促す概念・文脈の活用―国際バカロレア（IB）の教育システムを活かした探究活動―」と本校数学科での取り組みとのつながりを示す。３章では，そのテーマの下で，公開研究会で実施した授業をどのようにデザインしたのかについて，授業ごとに示す。４章では，授業実践および研究協議会を通して得られた示唆や課題などを授業ごとに示す。最後に５章において，本校数学科として次年度以降の取り組みに向けた課題を整理し，示す。

２章　「学びの転移」を促す概念・文脈の活用

１節　「概念的理解」

CBCI において,「概念」とは単語や短いフレーズで示される普遍的かつ抽象的なものとされており，“思考の構築物（mental construct）”と表現されている。この「概念」の関係を明文化したものが「一般化」と呼ばれ，この「一般化」が「概念的理解」であると CBCI では示している。たとえば，物体の運動をトピックとしたとき，“速度”や“傾き”，“直線”といった「概念」が形成され，“速度は直線の傾きによって，数学的に表される”といった「一般化」がなされる（エリクソンほか, 2020, p.40）。この「一般化」は，１次関数の単元でも，２次関数の単元でも，微分の単元でも導出することが可能である。このように,「一般化」は，時，文化，状況を越えて転移するものである。

MYP において,「一般化」にあたるものが「探究テーマ」である。探究テーマは，概念と文脈との関係を表すもので，実際の内容により裏付けされた転移可能なアイデアを表現しているものであ

るが，単元の内容をこえて転移できないほど具体的なものであるべきではないとしている（国際バカロレア機構，2016，pp.73-74）。数学の手引きで示されている探究テーマの例も「関係性を表現したモデルを用いることにより，より良い意思決定が可能となる（二次関数でのテーマ例）」,「論理は，測定や観測を通して発見したものの妥当性を評価するための強力なツールである（平行線と角でのテーマ例）」（国際バカロレア機構，2020，pp.24-25）となっている。

CBCI と MYP の「概念的理解」に相当するものを比べたときに，CBCI の方が教科の特色が強く反映されているのに対し，MYP は逆に教科の色が反映されておらずむしろ他教科で使用することも可能な表し方となっている。ただし，CBCI において，例は上記の通りであるものの，概念には異なるレベルの一般性と複雑さがあり，マクロからミクロまでの概念が存在し，いずれも重要であることに言及している（エリクソンほか，2020，pp.58-59）。その意味では，特定の単元に閉じない概念の理解を志向するということが重要であることがわかる。あとは，その概念が，教科内の他単元に転移可能な（深みを与える）概念であるか，他教科等へ転移可能な（広がりを与える）概念であるかどうかの視点である。

したがって，本校数学科での取り組みにおける「概念的理解」とは，特定の単元に閉じない複数の概念の関係を明文化したものであり，単元の学習を通して獲得すべき転移可能な理解を反映したものであるとする。

２節　「学びの転移」を促す授業のデザイン

(1)　KUDs による授業デザイン

校内研究テーマに対しては，数学科の実践は「概念」を活用することになる。しかし，単に「概念」に重きを置いたからといって,「学びの転移」が起こるとは限らない。そこで,「学びの転移」を促す授業をデザインするにあたって，CBCI でも提示している KUDs を用いて説明することにした[1]。KUDs とは，生徒が何を知るべきなのか（Know-事実に関する知識），何を理解すべきなのか（Understand-転移可能な概念的理解），何ができるようになるべきか（Do-スキルやプロセス）の頭文字をとったものである。たとえば，CBCI では表１に示すような例を挙げている。これからわかる

表１　KUDs の例（エリクソンほか（2020），p.85 を参考に筆者らが作成）

K	生徒が知るべきこと（トピック型，事実に関する知識）	1. チョウの生活環の段階 2. 私たちの国の発展における重要な歴史上の人物と彼らの功績 3. 面積と体積の公式
U	生徒が理解すべきこと（その教科における転移可能な概念的理解）	1. 生活環は，種の存続を可能にする。 2. 歴史上の転換点は国家の社会的，経済的，政治的方向性を形成し得る。 3. 幾何学的図形は変換（平行，対称，回転，相似など）することによって複製することも変形することもできる。
D	生徒ができるようになるべきこと（特定のプロセスおよびスキル）	1. データまたはアイデアを示すモデルや図を作成する。 2. 一次および二次資料を用いて，異なる歴史的観点を分析および比較する。

[1] CBCI では，カリキュラム設計の文脈で用いられているが，今回は「学びの転移」を促す手立てとして，授業デザインのために用いることにする。

ように，K は学びの対象であり，D は学ぶ手法であり，本実践で重視する U と相互に関係し合う。この３つを抑えることで，「学びの転移」を促す授業の枠組みができると考える。

(2) 「思考をうながす問い」の設定

「思考をうながす問い（探究の問い）」とは，生徒が概念的理解に向かって考えるプロセスを助けるもので，「事実に関する問い（事実的問い）」，「概念的な問い（概念的問い）」，「議論を喚起する問い（議論的問い）」にわけることができる（エリクソンほか, 2020, p.68；国際バカロレア機構, 2014, p.74）。MYP においては，単元を設計するにあたり必ず設定すべきものである。「事実的問い」を用いて知識の基礎を固め，「概念的問い」を投げかけることによって，生徒が自身の思考をより深い，転移可能な概念的理解へとつなげられるようにすることが，この「思考をうながす問い」設定の目的である。したがって，少なくとも２つ「事実的問い」と「概念的問い」を明記し，指導に位置付けることによって，「学びの転移」を促す授業をデザインすることにした。

３章　「概念的理解」を志向する数学科授業のデザイン

１節　中学１年「図形の構成」について

(1) 本実践における「概念的理解」

中学校図形領域の指導における「概念的理解」とは何であるか。本校数学科では独自カリキュラム[2]を作成し日々の指導にあたっているが，中学校１年生の図形領域に関する章は「図形の見方」と称している。すなわち，身の回りのさまざまな事象を図形として捉える見方を養うことを掲げている。このことは，現行の学習指導要領解説で掲げる図形指導の意義[3]とも相違ない。したがって，IB の示す重要概念[4]で言えば「ものの見方（Perspective）」が大きな軸となり，このことを踏まえた「概念的理解」を設定する必要がある。

本実践は，図形領域の特に空間図形の指導に関わる小単元である。空間図形の指導に特化して，「概念的理解」の設定に迫る。太田（2015）は，「空間図形指導の目標を考えるときには，空間図形の性質等その内容の理解に関する事柄と，空間図形について考える過程での見方や考え方に関する事柄を視野に入れることが必要である（p.198）」と示している。先の重要概念に照らし合わせれば，太田の示す後者を目標として掲げる授業を構成する必要がある。さらに具体的に考えるためには，島田（1990）の示す「空間の想像力（空間的直観）」が示唆的である。島田は，教育的な立場から「空間の想像力」として以下の３つを示している（pp.94-95）。

1. 経験的な世界に，抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること。
2. 頭の中で図形を考え，それに幾何学的操作を施した結果を，模型や図形を用いずに想像できること。

[2] 本校 Web サイト（https://www.iss.oizumi.u-gakugei.ac.jp/）の「カリキュラム・各教科」を参照されたい。

[3] 中学校学習指導要領においては，図形指導の意義として「我々は身の回りにある様々なものについて，材質，重さ，色などは除いて，『形』，『大きさ』，『位置関係』という観点から捉え考察することがよくある。このような立場でものを捉えたものが図形であり，それについて論理的に考察し表現できるようにすることが中学校数学科における指導の大切なねらいの一つである。（文部科学省，2018，p.45）」としている。

[4] IB では，各教科・学問間につながりをもたせる（広がりを与える）仕組みとして，16 の「重要概念（キーコンセプト）」を設定している。なお，後述する「関連概念」は，各教科別に設定され，その教科の学びに深みを与えることを意図した概念である。

a.　三次元の図形から三次元の図形へ
b.　三次元のものから二次元のものへ
c.　二次元のものから三次元のものへ
3.　空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること。

これらについて島田は，「実生活のうえでも必要なことであり，数学科教育だけが受け持つものともいえないが$_ア$，数学の学習にとっても重要なものである$_イ$といえよう（p.96；下線は筆者による）」と述べている。この捉え方は，まさに「概念的理解」の考え方に一致する。下線アは他教科等へ転移可能な（広がりを与える）概念であるかどうかの視点であり，イは教科内の他単元に転移可能な（深みを与える）概念であるかどうかの視点であると，解釈できる。したがって，この「空間の想像力」を土台とし，空間図形について考える過程での見方や考え方に関する事柄を視野に入れた形で「概念的理解」を設定することが求められる。

以上を踏まえ，本実践における「概念的理解」を「我々はある空間の中に生活し，その中で物事を様々な視点から捉え，説明し，伝え合うことができる」とした。この「概念的理解」は，たとえば他の図形分野の単元に転移可能であるし，高等学校における三角比やベクトルなどの学習においても大切な視点であると考えられる。

(2)　単元について

MYP における数学は，「数値的および抽象的な推論」「モデルを用いた思考」「空間的な推論」「データを用いた推論」の 4 領域に分けられている。一方，中学校学習指導要領においては，周知のとおり「数と式」「図形」「関数」「データの活用」の 4 領域に分けられている。本単元は，MYP における「空間的な推論」，学習指導要領における「図形」に位置づく。

本単元「図形の見方」は，以下の 3 つの小単元（セクション）によって構成されている。

§ 1	空間図形と平面図形	見取図・投影図，柱体・錐体・球，直線や平面の位置関係，回転体
§ 2	図形の構成	多面体・正多面体，オイラーの多面体定理
§ 3	図形の求積	おうぎ形の弧の長さと面積，錐体・球の表面積と体積，展開図

本校カリキュラムにおいて，いわゆる学習指導要領上の「平面図形」にあたる内容は，一部を除き中学 2 年生にて学習するようにしている。これは，身の回りの事象からモデルを作成し，問題解決を行うことを軸としているためである。したがって，本単元を通して，生徒が空間図形のさまざまな見方や表現方法を学び，身の回りのものを図形的にとらえ，考察する力や問題解決に生かしていく姿勢を身に付けるように指導を行うことを意識したい。

上記を踏まえ，KUDs により単元を説明すると，表 2 のようになる。

(3)　教材について

本小単元で取り組む探究課題（教材）は，以下の「ジオデシック・ドームのつくりを探ろう」である。ジオデシック・ドーム自体は，イベントやキャンプ場（グランピング）などで目にすることも少なくない。当該学年の生徒の約 3 分の 2 は，10 月末の修学旅行（ワークキャンプ）にて，富士山レーダードーム館へ訪れているため，生徒たちにとっても馴染みのあるものではある。

表２　中学１年「図形の構成」

1. 小単元名	図形の構成	
2. 重要概念	ものの見方（Perspective）	
3. 関連概念	空間（Space），妥当性（Validity）	
4. 学習指導要領との関連	中学校　１学年　B 図形　(2)空間図形　ア(ｱ)・イ(ｱ) 高等学校　数学 A　(1)図形の性質　ア(ｳ)・イ(ｱ)	
5. [K]学習内容	1.　オイラーの多面体定理 2.　多面体・正多面体・デルタ多面体 3.　双対性	
6. [U]概念的理解（探究テーマ）	我々はある空間の中に生活し，その中で物事を様々な視点から捉え，説明し，伝え合うことができる	
7. [D]プロセス・スキル	1.　具体的な図やモデルを用いて説明する。 2.　空間に関する事象を平面に置き換えて考える。 3.　モデル（実物）をよく観察し，数学的推論に必要な要素を整理する。 4.　頭の中でモデルを構築しながら，推論をしたり説明したりする。	
8. 思考をうながす問い	(事実的問い) ・　正多面体は何種類あるのか。なぜ５種類しかないのか。 ・　立体図形の頂点・面・辺にはどのような関係性があるだろうか。 (概念的問い) ・　立体図形の特徴を説明するために大事なことは何か。 ・　立体図形を想像するために必要なことは何か。	
9. 指導計画（計９時間）	第１時	ポリドロンを利用してジオデシック・ドームを再現する
	第２時	ポリドロンで作成した立体図形を整理する
	第３時	正多面体が５つしかないことの説明【公開研究会】
	第４時	(正）多面体の頂点，面，辺について調べる（オイラーの多面体定理）
	第 5/6 時	双対性，デルタ多面体
	第 7-9 時	立方体の切断[5]

この探究課題では，ポリドロン[6]を用いて，さまざまな視点から考察することを意図している。学習内容としては，先述のとおり，オイラーの多面体定理，多面体・正多面体・デルタ多面体，双対性などを扱う。

探究課題を通した主たる活動を示す。まず，ジオデシック・ドームが同じ量の材料で最大の空間を得るために球に近い形を作るもので，災害にも強く，内部の空調効果もよくなることを説明したうえで，球に近い形がポリドロンで作れるかどうかを問う。その活動の中で，いくつか立体図形が作成されるので，視点を決めて（凹凸や対称性，同じパーツで作成されているか，など），さまざまな分類を行う【ﾌﾟﾛｾｽｽｷﾙ１・3】。次に，多面体・正多面体の定義を示したうえで，作成した立体の中

[5] 当初，展開図を扱う予定であったが,「概念的理解」をさらに深めるため，立方体の切断を扱うことにした。
[6] ポリドロンは様々な色をした何種類かの幾何学的なかたちをはめあわせて，平面的な模様や立体的な造形を作れる英国生まれのシステム遊具のことである。

に正多面体がいくつあるか，あるいは作ることができるかを問う【ﾌﾟﾛｾｽｽｷﾙ 1・4】。ある程度つくられたところで，正多面体の種類について問う（本時の展開）【ﾌﾟﾛｾｽｽｷﾙ 2】。正多面体が５種類しかないことを確認したうえで，他の多面体も含めた特徴を探るために，辺・面・頂点の数に着目して考えさせる（オイラーの多面体定理）【ﾌﾟﾛｾｽｽｷﾙ 1・3】。また，最初に作成した立体の中には，デルタ多面体も含まれることが想定されるため，それらについても触れておく。ここまでの活動の総括として，平面と立体の往還を特徴づけるため，立体の展開図について学習を行う【ﾌﾟﾛｾｽｽｷﾙ 2・4】。最後に，ここまで触れた図形のいずれもジオデシック・ドームとは異なる形であることを確認し，正多面体を基にしながら作成していることに触れ，探究課題を終える。

特に公開研究会で扱った，正多面体が５種類しかない理由について述べる。検定教科書上では，いずれも紙面上に示しているが,「５種類しかないことが知られている」といった文言で終えているものがほとんどである（表３）。３社は，巻末課題やコラムのような位置づけで，正多面体が５種類しかない理由を考えさせるようになっている。

表３　検定教科書における位置づけ

教科書	位置づけ	示し方
大日本図書	本文中	「５種類しかないことが知られています」と示すのみ。
学校図書	本文中 節末（コラム）	本文に「５種類しかないことが知られている」と示した上で，節末の話題として，１つの頂点に正多角形を集める場面を想定させ，５種類しかない理由に迫る問いを示している。
啓林館	本文中	「５種類しかないことが 2000 年以上前から知られています」と示すのみ。
教育出版	本文中	「５種類しかないことが知られている」と示すのみ。
日本文教出版	本文中	「５種類しかありません」と示した上で，巻末課題として，１つの頂点に正多角形を集める場面を順を追って問い，最終的に５種類しかないことを示している。
数研出版	本文中	１つの頂点に集まる面の数などを問う問題があった上で,「５種類しかないことがわかっている」と示している。
東京書籍	本文中 巻末課題（発展）	本文に「５種類がある」と示した上で，巻末課題として，具体的に１つの面が正方形，正五角形，正六角形の場合を考えさせ，５種類しかない理由に迫る問題を示している。

中学１年生なりの示し方としては，１つの頂点に集まる角度に着目する方法が考えられる。特に正六面体を考えたときに，頂点をつくるのに最低限必要な３つを合わせると$360°$になることから，理由付けは比較的しやすいと考えられる[7]。

正多面体が５種類しかない理由は，各検定教科書の扱いからもわかるように，他の内容に影響を

[7] 正n角形の内角は$\frac{180(n-2)}{n}$である。１つの頂点にm枚の正n角形が集まるとき，その内角の合計が$360°$未満であれば立体図形となる。したがって，不等式$\frac{180(n-2)}{n} \times m < 360$を満たす自然数の組$(n,m)$を求めればよい。これを満たす$(n,m)$は$(3,3)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(4,3)$，$(5,3)$のみである。ある意味このことを言い換えて説明する活動が，本時には含まれていると考えられる。

及ぼさない。だからこそ,「概念的理解」が生徒の中にどう形成されるかが見取りやすいのではないかと考える。内容的なつながりがあって学びが転移されたとすれば，それは概念を活用して転移されたのか，それとも似たような内容だから転移されたのか，判断が難しい。つながりがない（あるいは見えにくい）ところにつながりを見いだす指導を行うからこそ,「概念的理解」のよさが生きてくるとともに,「概念的理解」を志向する授業の要素を特定できると考えて，本時にかかわる教材（および問い）をこれまで述べてきたように設定した。

２節　中学３年「関数」について

(1)　本実践における「概念的理解」

本校数学科では，現実場面の事象を数学的に定式化し，処理し，解釈する力，すなわち数学的モデル化に関わる力の育成を図ることを理念に据えている。そのために,「代数・関数」「幾何・三角法」「統計・確率」「離散数学」の 4 領域の学習をなるべくバランスよく配置し，各学年で学習する領域間の数学的内容の系統性を図ったカリキュラムを開発し実践している。本公開授業で実践する授業は，中学 3 年生の「代数・関数」領域の内容である。この単元では，中学校学習指導要領で示されている指導範囲を超えた内容を多く取り扱っている。それは，関数の特徴を捉える際に作用する，現象・式・表・グラフ間の臨機応変な関連づけに関する，関数感覚の育成を目指しているためである。

本授業では，関数の特徴を捉える上で重要な関数の概念である「変化の割合」に焦点を当てる。中学校学習指導要領解説（2018）では，変化の割合について以下のように示されている。
単に計算の仕方を覚えてその数値を求められるようになることのみをねらいとしているのではなく，その数値を求めることを通して，比例や一次関数で変化の割合が一定でグラフが直線になったのに対し，関数 $y = ax^2$ では変化の割合が一定でなく，それゆえグラフが曲線になることを理解するとともに，変化の割合の関数の考察における役割や,グラフでの見方を知ることも大切である。
以上を踏まえつつ，本授業では，考察の対象を関数 $y = ax^2$ にとどめず，変化の割合を用いて関数を考察し，具体的な事象を捉え表現する力を育成することをねらいとする。1 次関数で学んだ変化の割合を転移させて，区間を区切った速さを比較する方法を見出させる。この概念をこれから学習する様々な関数に対して転移できることを期待している。

(2)　単元について

関数の学習について，小学校の算数では，4 年生から 6 年生にかけて伴って変わる二つの数量の変化や対応について，変化の様子を表や式，グラフを用いて表し，変化の特徴を考察している。また，比例の関係を理解し，比例の理解を深めるために反比例についても学習している。中学 2 年では, 地震の揺れが伝わる時間と距離の関係から比例を含めた 1 次関数の学習を行い, 関数関係とは,関係する二つの数量について，一方の値を決めれば他方の値がただ一つ決まるような関係であることを理解している。そして，二つの数量の関係を表・式・グラフに表し，変化や対応の特徴を捉え，関数関係について調べる活動を行っている。

中学 3 年では，具体的な事象の中から非線形な変化のパターンを見出し，それを簡単なべき乗関数（$y = ax^2, y = ax^3, y = \frac{a}{x}, y = \frac{a}{x^2}$）を用いて表すとともに，それらを用いて事象を数学的に考察する能力を伸ばすことを目標としている。探究課題「大型飛行機の開発が難しいのはなぜだろう？」では，機体の全長と面積，体積の変化の関係から 2 乗に比例する関数と 3 乗に比例する関数を見出し，表と式とグラフを対応させて関数の特徴について学習している。特に 2 乗に比例する関数にお

いては，1 次関数の式・グラフとの比較を通して変化の割合が一定でないことやグラフが直線にならないことを学習している。探究課題「マサイ族の視力を実感しよう」では，視力検査を行う，ランドルト環の切れ目の長さと視力の関係から反比例の関係を見出し，反比例について，表と式とグラフを対応させて関数の特徴について学習している。比例も反比例も，グラフ関数電卓を用いて，比例定数や次数を変化させて関数の特徴を探る活動を行っている。探究課題「絶対値や根号をふくむ関数のグラフはどうなるの？」では，絶対値や根号をふくむ関数のグラフを通して，変域の学習を行ったり，これまで学習した関数を，遇関数・奇関数という見方で捉え直したりする。次の単元では，グラフの平行移動やグラフを和や積と見ること，2 次方程式などを扱う。

上記を踏まえ，KUDs により単元を説明すると，表 4 のようになる。

(3)　教材について

公開授業で教材とするのは，PISA2000 のレーシングカーの問題を参考にしたものである（図１）。PISA2000 の問題は，サーキットを走るレーシングカーの走行距離と速度の関係を表すグラフから，速度の変化をとらえる問題である。レーシングカーがある速度で走る地点を指摘する問題や，グラフの形からサーキットのコースの概形を指摘する問題が小問として含まれている。

また，9 月当初，物理入門の働き続ける力の学習においては，以下のような，時間と速度の関係を表すグラフ（v-t グラフ）からオートバイのサーキットのスタート地点を求める問題を扱っていた。

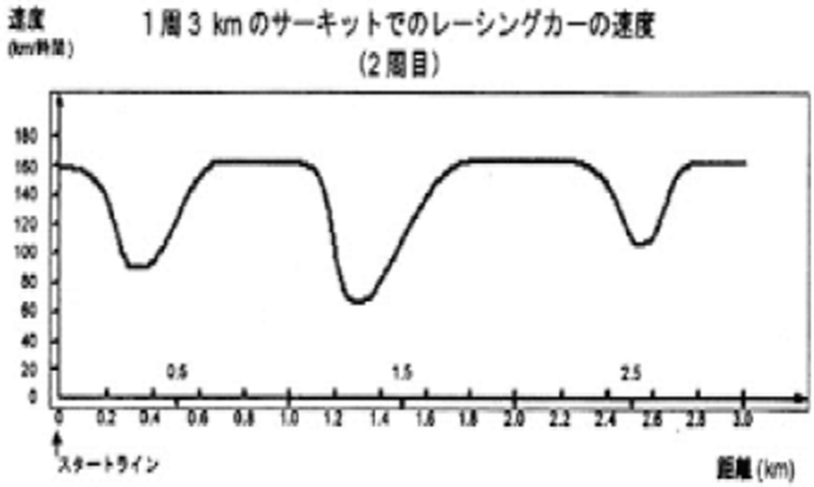


図１　PISA2000 のグラフ

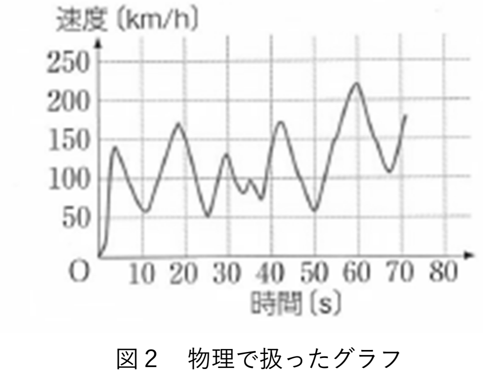


図２　物理で扱ったグラフ

表４　中学３年「いろいろな関数」

1. (小)単元名	いろいろな関数	
2. 重要概念	関係性（Relationships）	
3. 関連概念	変化（Change）・モデル（Models）・表現（Representation）	
4. 学習指導要領との関連	中学校　　１年　C 関数　ア（イ）（エ）イ（ア）（イ） ３年　C 関数　ア（ア）（イ）（ウ）イ（ア）（イ） 高等学校　数学Ⅰ（3）2 次関数 　　　　　数学Ⅱ（5）微分・積分の考え	
5. [K]学習内容	1.　n乗に比例する関数 2.　n乗に反比例する関数 3.　2 乗に比例する関数の変化の割合 4.　絶対値や根号を含む関数のグラフ	
6. [U]概念的理解 (探究テーマ)	数理科学的なモデルを作成することは,事象の変化や関係性を捉えるために有効である。	
7. [D]プロセス・スキル	1.　事象のなかに伴って変わる二つの数量を見出し，関数関係で捉える。 2.　グラフと変化の割合，事象を関連づけて考察する。 3.　関数の式からグラフを考えたり，グラフから式を考えたりする。	
8. 思考をうながす問い	(事実的問い) ・　n乗に比例する関数，n乗に反比例する関数にはどのような特徴があるか。 ・2 乗に比例する関数の変化の割合にはどのような特徴があるか。 ・曲線になる関数のグラフにおいて，変化の割合はどこに現れるのだろうか。 ・　絶対値や根号を含む関数のグラフはどのようになるか。 (概念的問い) ・　関数の変化の特徴の調べ方にはどのようなもの(方法)があるのだろうか。	
9. 指導計画（計 15 時間）	第 1-7 時	探究課題：大型飛行機の開発が難しいのはなぜだろう？ 表面積と体積に着目して，大型飛行機の開発が難しい理由について探究する課題。(n乗に比例する関数)
	第 8-11 時	探究課題：マサイ族の視力を実感しよう ランドルト環の構造に着目し，反比例関係を見いだし，マサイ族の視力を測るためのランドルト環について考察する課題。(n乗に反比例する関数，双曲線，漸近線)
	第 12/13 時 (本時 1/2)	探究課題：速度はどのように変化しているか，わかるかなサーキットのコースについて，時間と距離のグラフから考察する探究課題。(2 乗に比例する関数の変化の割合)
	第 14/15 時	探究課題：絶対値や根号をふくむ関数のグラフはどうなるの？ 比例・反比例とは異なる式表現をした関数のグラフについて考察する課題。(記号$f(x)$，偶関数・奇関数，絶対値を含む関数，根号を含む関数)

走行距離と速度のグラフや時間と速度のグラフでは，変化の割合に思考は及ばないので，本教材では，与えるグラフを時間と走行距離のグラフに変更する。グラフの増加の仕方の違いから加速している部分と減速している部分を読みとらせたり，時間を区切って平均の速さを求めて時間と速度のグラフをつくらせたりすることをねらいとする。区間のとり方の違いから，区間がより小さいほど，より正確な速度（瞬間の速度）が求められることに気づかせたい。また，そのためには，与えられたグラフから読みとることができないような値が必要になるため，時間と走行距離の関係を表す式をつくる必要性を想起させたい。そして，本単元の概念的理解（探究テーマ）である「数理科学的なモデルを作成することは，事象の変化や関係性を捉えるために有効である。」につなげたい。

本単元の前時までの学習では，2 乗に比例する関数に関して，変化の割合を求め，それが一定ではないことを 1 次関数の式との比較において学習している。また，反比例の変化の割合についても学習している。その際には，式のみを対象としていたので，本授業において，具体的な事象で曲線における変化の割合を捉え直すことも本授業のねらいの一つである。変化の割合という用語やその求め方を理解していても，具体的な事象において活用することができなければ，本質を理解しているとはいえない。また，その逆の場合においては，概念理解ができているとはいえない。数学の世界と現実事象の世界を行き来することで概念理解を図っていきたい。

なお，本授業では，オートバイの加速，減速を等加速度直線運動と仮定し，2 次関数の式を用いて時間と走行距離のグラフを作成している。本時で扱う題材を，次の単元で学習する「グラフの移動」で扱うことで，加速や減速時のグラフの変化の仕方の理解をさらに深める予定である。

４章　「概念的理解」を志向する数学科授業の実際

１節　中学１年「図形の構成」の実践報告

(1)　実践の概要

実施時期：令和４（2022）年 11 月下旬から令和５（2023）年１月上旬まで

対　　象：中学１年生２クラス（各 30 名程度）

記　　録：後方からのビデオ撮影，および最終の板書写真，生徒の授業プリントの PDF，振り返りシートの PDF

(2)　公開授業の目標

- ２次元と３次元を往還しながら，１つの頂点に集まる角度に着目して，正多面体が５種類しかない理由を説明することができる。【思考・判断・表現】
- 自分の説明や他者の説明に，修正と補足をしながらより適切な説明を考えることができる。【主体的に学習に取り組む態度】

※下線部が，「概念的理解」にかかわる部分である。

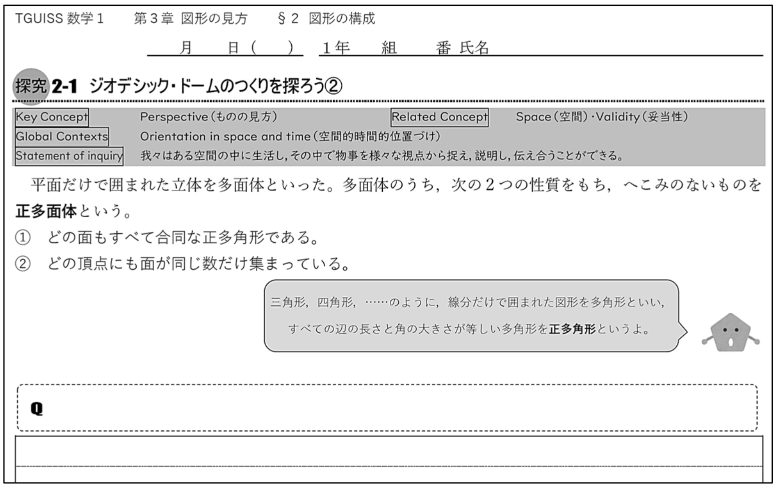
(3)　公開授業の指導案

時間(分)	学習活動（主な発問(T)，予想される生徒の反応(S)）	留意事項(○)・評価(■)・手立て(□)
5 (5)	**１．本時の導入** 前時の，ポリドロンを用いて立体図形を作成した活動を振り返る。 T1：もともとジオデシック・ドームと同じような立体図形をつくろうとしていましたが，そのときに一番近い形だったのがこれで	

した（正二十面体を示す）。これは正二十面体と呼ばれる立体です。今日は，このような正多面体と呼ばれる立体図形について，考えていきます。

授業プリントを配布する。

○正多面体の定義を確認する。



TGUISS 数学１　第３章 図形の見方　§２ 図形の構成

月　日（　）１年　組　番 氏名

探究 2-1 ジオデシック・ドームのつくりを探ろう②

Key Concept	Perspective（ものの見方）	Related Concept	Space（空間）･Validity（妥当性）
Global Contexts	Orientation in space and time（空間的時間的位置づけ）		
Statement of inquiry	我々はある空間の中に生活し，その中で物事を様々な視点から捉え，説明し，伝え合うことができる。		

平面だけで囲まれた立体を多面体といった。多面体のうち，次の２つの性質をもち，へこみのないものを**正多面体**という。

① どの面もすべて合同な正多角形である。
② どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

Q

T2：まず予想として，正多面体は何種類ぐらいつくれると思いますか？

S1：●種類（生徒が思い思いに発言する）。

T3：それでは，正多面体が何種類つくれるかを考えてみましょう。ここにポリドロンを用意してますので，必要に応じて使ってください。

Q．<u>正多面体は何種類つくることができるか？</u>【事実的問い】

15 (20)

２．個人追究

ポリドロンを用いながら，正多面体が何種類つくることができるかを考える。

○本来は想像しながら考えてほしいところだが，中学１年の図形の最初ということもあり，模型を用いて考えさせる。

■思判表：A

S2-1：１つの頂点に着目して理由を考えることができている。

S2-1a：１つの頂点には，３つ以上の面が集まって立体図形ができることを理解している/気が付いている。

S2-1b：１つの頂点に集まる角度の合計は，$360°$未満にならなければいけないことを理解している/気が付いている。

S2-1c：正三角形（１つの角が$60°$）だと

３つ集まると$60° \times 3 = 180°$

４つ集まると$60° \times 4 = 240°$

５つ集まると$60° \times 5 = 300°$

６つ集まると$60° \times 6 = 360°$（$360°$以上）

となり，６つ以上集めて立体図形を作ることができない

	ことを理解している/気が付いている。 S2-1d：正方形（１つの角が90°）だと ３つ集まると$90° \times 3 = 270°$ ４つ集まると$90° \times 4 = 360°$（360°以上） となり，４つ以上集めて立体図形を作ることができないことを理解している/気が付いている。 S2-1e：正五角形（１つの角が108°）だと ３つ集まると$108° \times 3 = 324°$ ４つ集まると$108° \times 4 = 432°$（360°以上） となり，４つ以上集めて立体図形を作ることができないことを理解している/気が付いている。 S2-1f：正六角形（１つの角が120°）だと ３つ集まると$120° \times 3 = 360°$（360°以上） となり，正六角形で立体図形を作ることができないことを理解している/気が付いている。 S2-1g:正七角形以上の正多角形を使って立体図形を作ることができないことを理解している/気が付いている。	
	S2-2：上記S2-1 の a～g のいずれかが抜けているが，説明を試みている。	■思判表：B
	S2-3：上記S2-1 の a～g について，ポリドロンを用いた操作上は理解していることが見受けられるが，説明の言語化ができていない。	■思判表：B □何に着目しているかを問う。
	S2-4：ポリドロンを利用して，多面体の作成を試みている。	■思判表：C □ポリドロンを用いて立体図形をつくる過程を一つひとつ確認させる。
	S2-5：手が止まっている。	■思判表：C □ポリドロンを渡し，S2-4 の段階まで引き上げる。
20 (40)	**３．集団討論①** S2-1 の a～g を議論の対象として，５種類しかないことの理由付けをしていく。	
	S3-1：自分の意見を発表したり，他者の考え方に対して反駁したり補足したりしている。	■主：A ○授業プリントに記述としてその様子が含まれるものも該当する。
	S3-2：発表された意見に対し，周りの助けを得ながら理解しようとしている。	■主：B ○わからない点を授業プリントに残すようにさせる。
	S3-3:理解しようとしているものの何も行動を起こしている様子が	■主：C

	見受けられない。	○必要に応じて，個別に指導する（全体の様子との兼ね合い）。
5 (45)	**4．集団討論②** T4：これで，正多面体が５種類しかないことが説明できました。ところで，**立体図形の説明をしたいのに，なぜ平面での説明をしたのですか？【概念的な問い】** 少し考えさせた上で，2〜3名の生徒を指名する。	○自分の思考過程を認知させ，「概念的理解」を志向させる。 ○問いが生徒に伝わっていない様子であれば，以下の補助発問を行う。 □補助発問「今までのどのような経験が，今回の説明に行かせたと思いますか？」
	S4-1：同じ立体図形でも，3Dの視点からも2Dの視点からも，いろいろな視点で見ることで，特徴が見えてくると考えたから。	○２次元と３次元の往還を意図した考えは必ず取り上げる。
	S4-2：立体図形を見るときに，見取図や投影図（対面図・側面図・平面図）などいろいろな視点から見ることで説明しやすくなったことと同じで，視点を変えてみようと考えたから。	○過去の学習体験（算数含む）から見方・考え方が転移されている考えも取り上げたい。
	S4-3：どうしたら立体図形をつくることができるかを考えたら，平面から立ち上げていくイメージがあったので，平面で説明をしようと考えた。	○操作から着想を得た考えについては，生徒の実態に応じて取り上げる。
	S4-4：１つの頂点に集まる角度で考えようと思ったときに，立体図形のままだと説明がしにくかったから。	○同上。
5 (50)	**5．振り返りとまとめ** T5：では，最後に学習感想シートを書きたいと思いますが，今日は特に「**立体図形の特徴を説明するために大事なことは何か【概念的な問い】**」といった視点で書いてもらいたいと思います。 授業の最後に，学習感想シートを記述する。	

(4) 授業の実際

第１時

導入は，３章１節(3)で示したとおり，「ジオデシック・ドームのつくりを探ろう」から入った。具体的には図３のような探究課題を示した。

実際に作業をする中で，図形の構成要素やさまざまな空間図形の特徴を生徒に見出させたかったため，ポリドロンを使用して，球に近い形を探る活動を行なった。ただし，富士山レーダードーム館などが三角形を用いた立体であることから，正三角形のポリドロンのみをもちいることにした。正二十面体をつくる生徒を想定していたが，実際にはさまざまな立体図形をつくる様子が２クラス

共通して見られた。また，富士山レーダードーム館で実際にジオデシック・ドームを見た生徒も多かったため，できるかぎり大きい立体図形をつくろうとする生徒も一定数いた。

どちらのクラスも，正二十面体が球に近い形ということで共通認識を得て終わった。

探究 2-1　ジオデシック・ドームのつくりを探ろう①

Key Concept	Perspective（ものの見方）	Related Concept	Space（空間）・Validity（妥当性）
Global Contexts	Orientation in space and time（空間的時間的位置づけ）		
Statement of inquiry	我々はある空間の中に生活し，その中で物事を様々な視点から捉え，説明し，伝え合うことができる。		

イベントやキャンプ場などで，右の写真のようなドームを見たことはあるだろうか。これは，ジオデシック・ドームと呼ばれている。同じ量の材料で最大の空間を得るために球に近い形を作るもので，強風や地震などに強く，内部の空調効果もよくなるという利点がある。富士 WC の人間理解・国際理解コースの生徒が訪ねた富士山レーダードーム館などにも採用されている。このようなジオデシック・ドームのつくりについて考えよう。

（出典：https://earthdome.net/）

Activity：ジオデシック・ドームをつくろう

「ポリドロン」を使って，できるだけ球に近い立体を作ろう。

① 作った立体の見取図をかくこと。

② 作った立体はどのような図形によって構成されているかを簡単に説明すること。

図３　探究課題「ジオデシック・ドームのつくりを探ろう」

第２時

前時で正二十面体をつくることができなかった生徒も多かったため，第２時も作業を軸にした。第２時では，正三角形に加え，正方形のポリドロンも生徒へ与えた。正五角形，正六角形のポリドロンについては，次時で提示する予定であったため，与えなかった。

正多面体に絞ると，正四面体，正六面体，正八面体，正二十面体はできている様子があった。そのほかにも，デルタ多面体や星形多面体などをつくっている様子もあった。

第３時（公開授業）

最初の課題について触れ，正二十面体が球に一番近い形であったことを確認した。その後，正二十面体と同じ正多面体について扱うことを説明し，「正多面体は何種類つくることができるか？」を問うた。まずは予想として，何種類ありそうかを問うたところ，「無限にある」や逆に「無限ではないけどいくつかはわからない」といった発言があった。そして，ポリドロンを自由に使うことができるようにした上で，活動へ移った。

生徒たちは作業を進めながら，「無限にはなさそう」という声を発するようになっていった。

授業開始から 20 分ほど経過し，一度生徒たちが考えていることを共有する時間とした。共有する事項としては，なにか困っていることや確信をもっていえることなどである。１人の生徒が，１つの頂点に着目し，そこに集まる角度について発言があった（S2-1b 相当）。加えてその生徒は，ポリドロンが３枚以上ないと立体ができないことにも触れていた（S2-1a 相当）。しかし，何種類あるのかはまだ確信が持てていない様子であった。

もう一度，正多面体の条件である「どの面もすべて合同な正多角形である」ことと「どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている」ことを確認した上で，この時点でできている正多面体を確認した。

ちょうど５種類ができあがっていた。

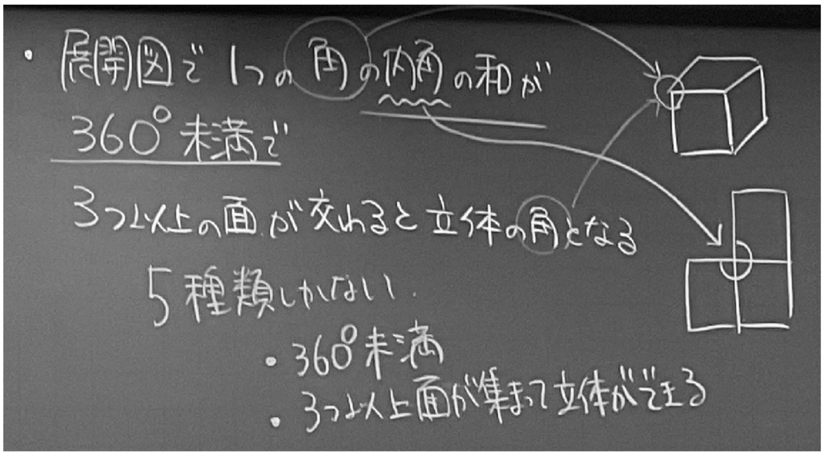


図４　公開授業における板書の一部①

その後，「今のところ５種類だけだが，それ以外にできないか？」と問うた。すると，正方形では正六面体以外できないといった発言が生徒から挙がった。理由としては，正方形２枚では立体がつくれず，３枚だと正六面体で，４枚だと角度の合計が360°になってしまうからといったものであった（S2-1d 相当）。それを受け，「今のところ３種類あるが，正三角形ではどうか」と問うと，それ以上はできないという発言があり，図５の模型（正三角形を６つ合わせたもの）を提示してきた。これで角度の合計が360°になってしまうことを示しているという。その後，正五角形についても同様の説明が生徒からなされ，正六角形も３枚で角度の合計が360°になってしまうから立体ができないことが挙げられた。また，正七角形以降も同様の理由で立体ができないことを確認し，５種類しかないことをまとめた。

図５　生徒のつくった模型

次に,「概念的な問い」である「立体図形の説明をしたいのに，なぜ平面での説明をしたのだろう？」を問うた。すると，図６のような意見が出された。

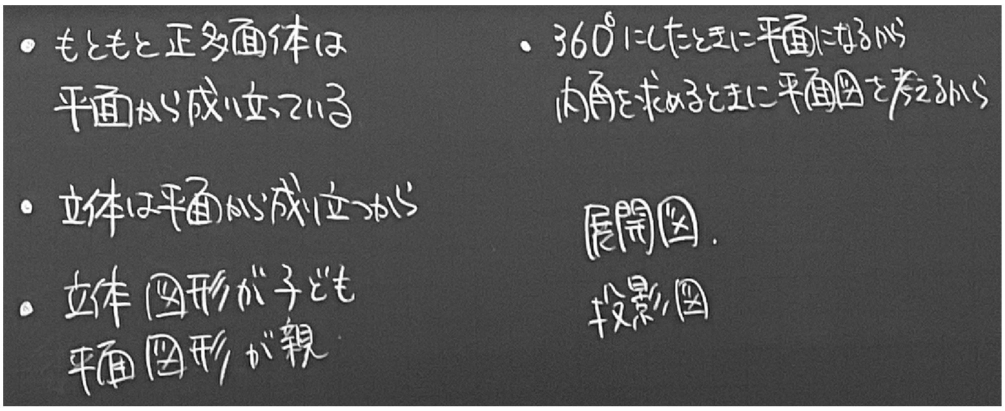


図６　公開授業における板書の一部②

授業時間が来てしまったので，振り返りシートの記述は控え教室に戻って実施することになった。

図７に示すように，立体を平面に置きかえて考えること，それにより立体の特徴が説明できるようになることなどを記述している生徒が大多数であった。

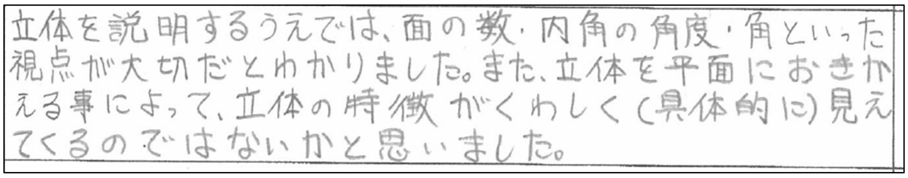

立体を説明するうえでは、面の数・内角の角度・角といった視点が大切だとわかりました。また、立体を平面におきかえる事によって、立体の特徴がくわしく（具体的に）見えてくるのではないかと思いました。

図７　生徒の振り返りシートでの記述

第４時

第４時では，正多面体５種類の面・頂点・辺の個数を調べ，表にまとめる活動から入った。表にまとめた後，これらから気が付いたことを挙げさせた。すると，面の数と辺の数が入れかわっている箇所があるなどの意見が出された。「それはなぜか理由を説明できますか？」と問うたが，なかなか意見が出されたなかった。その中で，オイラーの多面体定理につながる式も出された（図８）。

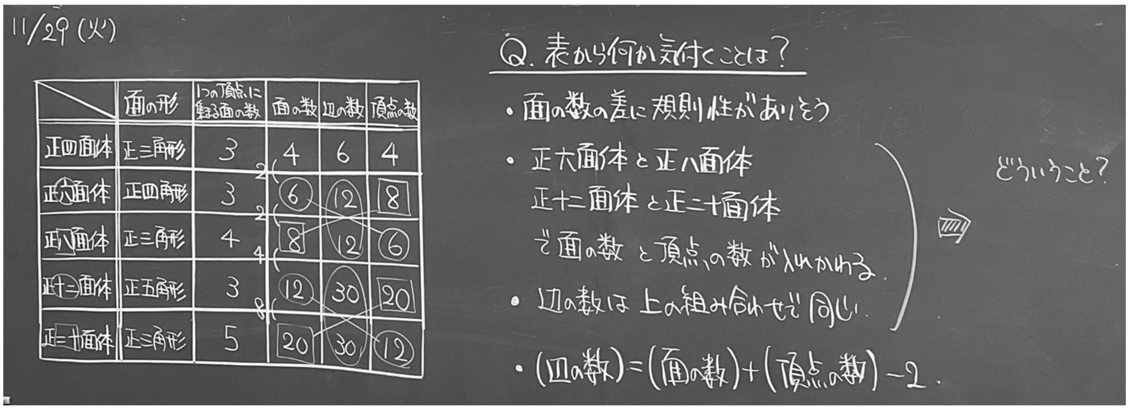


図８　第４時板書

第５時

第５時では，正六面体と正八面体のポリドロンでつくった模型をもとに，前時の疑問を解決することを試みた。ポリドロンを用いると，正八面体が正六面体にかみ合うように入る。これをもとにして，正六面体の各面の中心に点をとり，それらを結ぶと正八面体がつくられることを見出した。逆に正八面体の各面の中心に点をとると正六面体がつくられることにも言及し，正十二面体・正二十面体の組み合わせも同様に考えられることを確認し，「双対性」の説明を行なった。

生徒の認識としては，正四面体が自己双対である見方がまだできていない様子が見受けられたため，「正四面体も同じように見ることができないか？」と問うた。すると，正四面体の中に正四面体がつくられることに気づき，表において面と頂点が４で共通していることも理解した様子が見られた。

その後，正多面体のように，ある条件を満たすような立体図形はつくれないかという文脈で，①すべて正三角形でつくられるもの（のちに生徒から質問があったため，すべての面が正三角形であると条件を言い換えた；デルタ多面体の作成を意図している）と，②２種類の正多角形を組み合わせてつくられるもの（切頂多面体の作成を意図している）を考えさせる活動へ移行した。

第６時

前時に引き続き，デルタ多面体と切頂多面体をつくる活動から始めた。

デルタ多面体については，デルタ十二面体以外は２クラスともつくることができていた（デルタ十四面体は各クラス１名程度であった）。切頂多面体については，意図したものはほとんどできていなかったので，こちらで作成したものを紹介した。また，「iCross[8]」というアプリを用いて，実際に正十二面体の頂点を切断していくと二十・十二面体があらわれることを確認した。

次に，第４時で出された式を振り返り，オイラーの多面体定理を提示した。生徒の手元には様々な多面体があったため，その立体の頂点・辺・面の数を調べ，オイラーの多面体定理を確認して終えた。（２学期はここまでで終了した）

第７時

立方体を１つの平面で切断したときに，できる切断面の形がどうなるかを考察する探究課題に取り組んだ。図９を示し，この○のいくつかを通るように切断した場合を考えるよう指示した。生徒たちは，ポリドロンで作成した立方体を見ながら切断面を想像している様子が見受けられた。

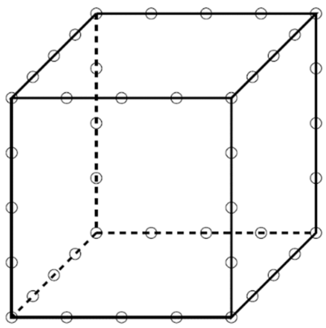


図９　切断のもととなる立方体

正三角形，二等辺三角形，正方形，長方形，正六角形などはすぐに出された。五角形についてはアイデアは出されたものの，正しく点をとれているものはほとんどなかった。

第８時

前時でうまく切れなそうなものがあることを確認しているので，切断のパターンについて考えることに取り組んだ。１つの面において２本の辺にそれぞれ１つずつ点が含まれていること，向かい合った面について切断面の辺が平行であることなどが考察として挙げられた。

こちらについても，「iCross」を用いながら，実際に切断された面がどのようになっているのかを確認した。

第９時

これまでの学習のまとめとして, 図形の構成要素について確認する授業を実施した。具体的には, 面と面の関係や直線と面の関係などである。

(5)　協議会を踏まえた授業考察

主に公開授業を行った第３時に絞っていく。

①「正多面体が５種類しかない理由を説明する」という課題設定について

本実践においては，それまでの時間数の都合も相俟って，正多面体をつくる活動と，正多面体が

[8] 三角錐や立方体などの立体図形を，切断することができる学習アプリである。

５種類しかない理由を考える活動とを同じ授業内で行なった。このことが,「概念的理解」を遠ざける結果になってしまったのではないかと考える。本来であれば，前時までで正多面体が５種類つくられている状態で，本時で「なぜ５種類しかないのか」を問うべきであった。協議会における指導助言の中でも,「部分的に壊していく方が大事で，組み立ての方を焦点当てるべきところではなかったのではないか」とご指摘いただいた。そうすることで，生徒一人ひとりが２次元と３次元を往還する活動をできたのではないかと考える。次のような質問が協議会で出されたが，これも活動を分けることで解決できたと考えられる。

今回具体的な模型があったことで，ここここをつなげるまでは平面だけど，ここここをつなげちゃったら立体だと，2 次元と 3 次元を連続的にできちゃうことでむしろ，ここまでは 2 次元で考えて，ここまでは 3 次元で考えてと思わない。そもそも 3 次元で考えづらいから 2 次元で考えようという困り感のようなものが出しづらかったのではないか。

2 次元と 3 次元を結びつけて考えるような，往還しているような実感を持てる工夫は？

②「概念的な問い」の抽象度について

本実践において,「概念的な問い」を「立体図形の特徴を説明するために大事なことは何か」と設定している。かなり抽象度が高い問いであるがゆえ，生徒の思考が発散ではなくぼやけてしまったことが課題として挙げられる。したがって，授業の最後で生徒の上記問いに対する考えを挙げてもらったところ，図６のように，ぼやけたあいまいなものしか出されなかった。

「概念的な問い」の設定の塩梅は今後の課題である。上記のように抽象的すぎても,「概念的理解」に迫ることは難しい。一方で，具体的すぎる，つまり「どういうときにどうすればいいか」や「こういうときはこういう見方をしましょう」といったことを問うような問いでは,「概念的理解」には迫らないし，他単元や他教科への転移から遠のいてしまう。具体的な目の前の教材に特化しつつも，他の文脈や場面を想定した問いが本来の「概念的な問い」ではないだろうか。

その一つの糸口として,「How」と「Why」の視点を協議会でご助言いただいた。どういうことをしたのか，どういう方法で解決したのかを問い，そのようにしたのはなぜなのかを問う。そうすることで，具体的な活動の考察から，少し視野を広げた考察へつなげられると考えられる。

２節　中学３年「関数」の実践報告

(1)　実践の概要

「いろいろな関数」は 10 月から学習し，公開授業では，本単元の 3 つ目の探究課題である「速度はどのように変化しているか，わかるかな」を扱った。

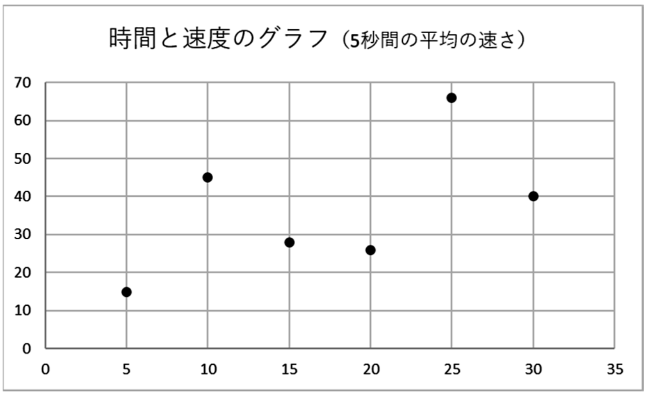
(2)　公開授業の目標

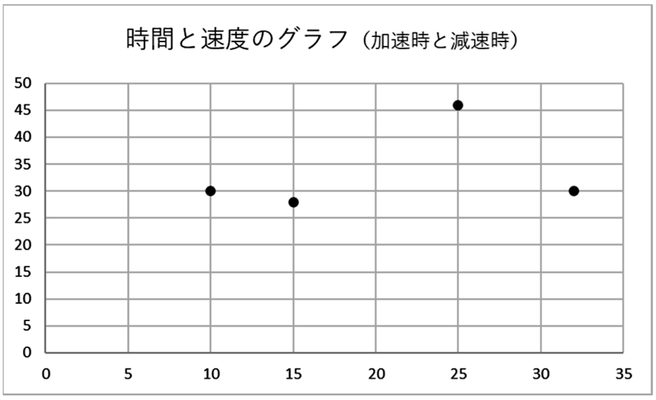
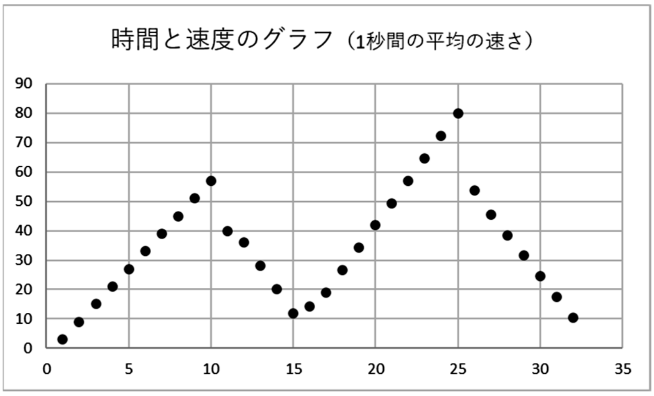
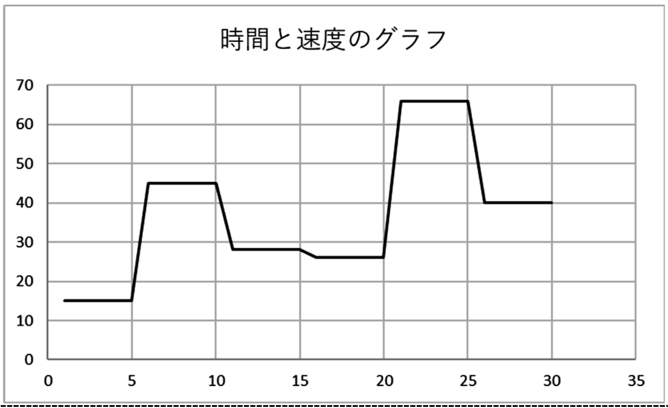
・時間と距離の関係のグラフの増加の仕方の違いから加速している部分と減速している部分がわかる。
・時間と距離の関係のグラフから区間を区切って平均の速さを求めることによって，時間と速度のグラフをつくる方法を考えることができる。

(3) 公開授業の指導案

時間 (分)	学習活動（主な発問(T)，予想される生徒の反応(S)）	留意事項(〇)・ 評価(■)・手立て(□)
5 (5)	**1．本時の導入** 「物理入門」で扱ったサーキットのコースの問題を振り返る。 Ｔ１：物理入門では，このグラフからサーキットのコースのスタート地点が F の区間にあることを判断しました。このグラフからどのように判断したのですか。 Ｓ1-1：加速している時間が一番長い 50 秒から 60 秒の部分が一番長い直線部分の H になる。 →グラフが右上がりの部分は加速しているのでコースの直線部分であることを確認する。 Ｓ1-2：30 秒から 40 秒の部分は変化が小さいから小さいカーブが続いている A の辺りになる。 →グラフが谷になっている箇所は減速から加速に変わっているのでコースのカーブの部分であることを確認する。	〇スクリーンで物理入門の問題を共有する。
5 (10)	**2．問題把握①** T2：このグラフからサーキットのコースのスタート地点を判断しようと思います。物理入門のグラフと大きく異なる点は何ですか。 Ｓ2-1：縦軸が距離になっている。 →物理入門のグラフの縦軸は速度であることを確認する。 Ｓ2-2：増加し続けている。 →物理入門のグラフは減少から増加に変わる部分がサーキットのカーブであったことを確認する。 T3：サーキットのコースのカーブがこのグラフのどの部分になるのかわかりますか。 Ｓ3-1：わからない。 Ｓ3-2：減速している部分がカーブの部分になる。 →加速している部分（0～10 秒，15～25 秒，32～38 秒，41～42 秒）と減速している部分（10～15 秒，25～32 秒，38～41 秒）を確認する。 →カーブが 3 か所あることを確認する。 T4：これがサーキットのコースの図です。スタートしたのは A,B,C のどの区間でしょうか。そう判断した理由も説明しましょう。 **スタートしたのはどの区間でしょうか。そう判断した理由も説明しましょう。**	〇数学で扱うグラフを見せた後でワークシート①を配布する。 ■時間と距離の関係のグラフの増加の仕方の違いから加速している部分と減速している部分がわかっているか。 〇スクリーンでサーキットのコースの図を見せた後で印刷されたワークシート②を配布する。

5 (15)	**３．個人追及①** S 4-1：加速している部分に着目する。 S 4-1a：速さから判断 見た目のグラフの傾き具合から，15 秒～25 秒のところが最も速いので，直線コースが最も長い C の区間である。したがって，B の区間からスタートした。 S 4-1b：走行距離から判断 ３つの加速している部分（0～10 秒，15～25 秒，32 秒～38 秒）に着目し，走行距離が最も長い 15～25 秒のところが最も長い C の区間である。 S 4-2：減速している部分に着目する。 S 4-2a：速度の違いから判断① 見た目のグラフの傾き具合から，38 秒～42 秒のところが減速が最も小さいので，カーブが緩やかであることがわかる。 S 4-2b：速度の違いから判断② 見た目のグラフの傾き具合から，25 秒～30 秒のところが減速が最も大きいので，カーブが急であることがわかる。	○加速や減速部分の速さの比較を直線で捉えている生徒がいれば，取り上げる。
5 (20)	**３．集団討論①** S 4-1，S 4-2 の順で取り上げ，加速部分から判断しても，減速部分から判断しても B の区間からスタートしたと考えられることを確認する。	
3 (23)	**４．課題把握②** T 5：時間と距離のグラフから加速や減速の様子を読みとり，サーキットのコースについて考えることができました。このグラフから「物理入門」で与えられたような，時間と速度のグラフをつくりましょう。 **「時間と距離」のグラフから「時間と速度」のグラフをつくりましょう。**	
10 (33)	**５．個人追及②** ○平均の速さの求め方 S 5-1：区間ごとに平均の速さを求める。 S5-1-1　5 秒間ごと。 0～ 5 秒　0m～　75m　→15m/s 5～10 秒　75m～　300m　→45m/s 10～15 秒　300m～　440m　→28m/s 15～20 秒　440m～　570m　→26m/s	○ワークシート③とグラフ用紙を配付する。 ■時間と距離の関係のグラフから区間を区切って平均の速さを求めることによって，時間と速度のグラフをつくる方法を考える

	20～25 秒　　570m～　900m　→66m/s 25～30 秒　　900m～ 1100m　→40m/s S5-1-2　目盛りが読み取りやすいところ。 6 秒のときに 100m 10 秒のときに 300m 13 秒のときに 400m 18 秒のときに 500m　など S5-1-3　加速と減速の区間ごと。 加速　 0～10 秒　　0m～ 300m　→30m/s 減速　10～15 秒　300m～ 440m　→28m/s 加速　15～25 秒　440m～ 900m　→46m/s 減速　25～32 秒　900m～1110m　→30m/s S5-1-4　１秒間ごと。 走行距離の差を求めていく。 Ｓ5-2：0 秒からの時間ごとの平均の速さを求める。 0～ 5 秒　0m～ 75m　 →15m/s 0～10 秒　0m～ 300m　→30m/s 0～15 秒　0m～ 440m　→29m/s　など S5-3:何をすればよいのかわからない。 〇グラフのかき方 ・点をプロットする。 例えば，0～５秒の平均の速さは（５,15）に点をプロットする。 	ことができているか。 〇求め方を記入していない生徒には記入するように声をかける。 〇早く終わった生徒には，より正確なグラフをかく方法はないかと問う。 □かきたいグラフの横軸と縦軸を確認する。 □速度の求め方を確認する。

	  ・プロットした点を直線で結ぶ。 ・プロットした点をなんとなく曲線でつなぐ。 ・0〜5 秒の平均の速さが 15m/s だから，$0 < x \leq 5$の範囲では， $y = 15$のグラフをかく。 	
10 (43)	**6．集団討論②** S 5-1-1 を取り上げる。 0 秒から 5 秒までの間の速さを平均の速さといい， （平均の速さ）＝（進んだ距離）／（進んだ時間） で求められ，関数では「変化の割合」であることを確認する。 S 5-2 を取り上げ， S 5-1-1 との違いを比較する。 S 5-1-1 と S 6-2 では，10 秒のときの平均の速さとしてはど	○平均の速さはその区間を一定の速さで進んでいると仮定していることを意識化させる。 ○区間が小さいほうが実際

	ちらがより実際に近いのかを考える。	の速度に近づくことを想起させる。
7 (50)	**7. ふり返りと次時の確認** 本時の前半では,「時間と走行距離」のグラフから加速や減速の様子を読みとることでサーキットのスタート地点を判断することができました。後半では，区間ごとの平均の速さを求めることで時間と速度のグラフがつくれるのではないかと考えました。次回は,「物理入門」のようなグラフをつくるためには平均の速さをどのように求めればよいのかを考えていきます。今の自分の考えを書いておきましょう。	○ワークシートとグラフ用紙を回収する。

(4) 授業の実際

本時の中心的な内容である，個人追及②について取り上げる。速さの求め方を聞くと,（距離）÷（時間）という発言があった。予想される生徒の反応 S5-2：0 秒からの時間ごとの平均の速さを求める生徒が予想よりも多かった。そこで，まず，S5-2（F さん）の求め方を取り上げ，次に N さんの求め方を取り上げ比較させた。すると，F さんが求めた速さは,「瞬間の速度」で，N さんが求めた速さは「一定の区間を求めた速さで走っていると仮定している」という発言があった。この生徒にとって，F さんが求めた速さで使った時間は，0 秒からという意識はなく，速さを求める瞬間の時間という捉え方をしていることがわかる。これは，速さを変化の割合という概念で理解できていないことが原因ではないかと考えられる。

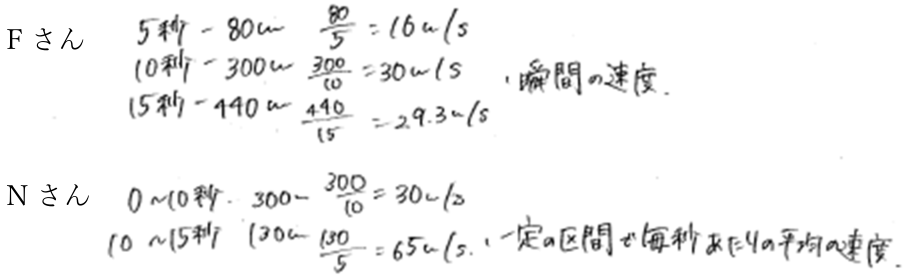


図 10　授業中に取り上げた速さの求め方

F さんの考え方も平均の速さを求めているという考えを引き出そうとしたところで授業が終わってしまったので，次の時間に，指導案の集団討論②以降を丁寧に扱うことにした。本時に生徒がかいていたグラフを示すと図 11 のとおりである。ほとんどの生徒が自分で求めた「速さ」を使ってグラフをかくことができていた。平均の速さを意識したグラフも見られた。

(5) 協議会を経ての授業考察

授業後の協議会では，探究テーマ，教材の意図や仮定について，生徒たちの反応，評価に関する質問があった。

本単元の探究テーマ「数理的なモデルを作成することは，事象の変化や関係性を捉えるために有効である。」に関して,「数理科学的モデルを作成することに該当するのは、時間と速さのグラフだったのか，と思う。事象の変化と関係性を捉えるために，という部分があまりわからない。何をとらえさせようとしていたのか。」という質問をいただいた。本教材の場合では，より正確な速度，瞬

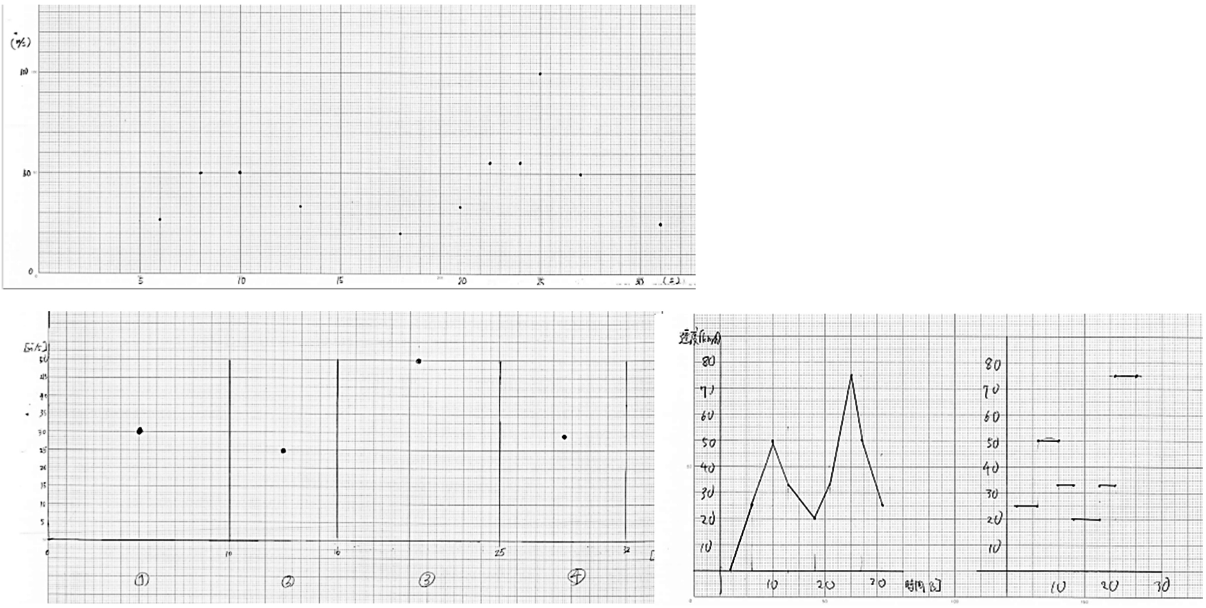


図 11　生徒が授業中にかいたグラフ

間の速さに近いものを求めるためには，与えられたグラフから距離を読み取るのでは無理だということに気が付き，では式で表せないか，という考えに至ることを期待している。

教材に関しては，中 3 にしてはレベルが高い内容ではないか，オートバイがレース中に直線では加速，カーブで減速としているが，必ずしもそうではないのではないか，というご意見をいただいた。物理入門で扱っている内容を活用した教材であり，速さに関する理解を深めることができる教材であると考えている。また，加速や減速に関しては物理入門と同様にしたが，仮定や条件の設定に関しては丁寧に確認する必要がある。生徒たちの反応に関しては，プロットする点がわかっていない生徒がいたが，v-t グラフの点をどのように捉えているのかという質問があった。物理で瞬間の速さを学んでいるので，今回の授業では，そのとき，そのときの速さを求めたい，と考えて欲しいと期待していた。他のクラスでは，区間ごと（加速，減速）でとらえている生徒が多かったので，このクラスでもそのように考える生徒が多いと予想していた。しかし，予想以上に，区間ごとではなく，単に，その時点の時間と距離（x座標とy座標）から速さを求める生徒が多かった。

西村圭一先生から次のようなご助言をいただいた。

生徒たちは，元のグラフが連続だから v-t グラフも連続になるという意識がなかった。本教材は微分につなげる高次な思考がかなり内在されているものであると評価していただいたが，事象と関連付けて考えるということが弱く，オートバイが走っているところを見せることもしていないので，イメージとグラフが結びついていない生徒もいた。

本教材と同様に微分につなげる題材として 400m 走のペース配分を教材化することを紹介してくださった。このように，事象と関連付けて考えられる教材を用いて，イメージとグラフを結び付けさせたい。そして，刻々と変化している様子から，連続性のあるものは区間を狭めて速さを捉えられるんだということに近づいていき，区間を狭くして平均の速さを求め，速さの変化を関数として捉えさせる授業をつくっていきたい。

また，大学入学共通テストの 100m 走のストライドとピッチを求める問題を例に挙げ，教科横断で行うことも考えられるというお話があった。

５章　おわりに

OECD の Education2030 プロジェクトにおいて，各国に共通で重要な課題として「カリキュラム・オーバーロード」が示されている（白井，2020)。すなわち，様々な社会的ニーズに応えるために学習内容が膨大化したこと，それらによって学校や子供たちの負担が大きくなっていることが，世界的な課題となっているのである。

「概念的理解」を志向する授業は，このような課題の解決に資するものであると考える。本校数学科では，独自テキストを作成し，それをもとに授業を実施している。たとえば，中学１年のテキストは，次のような構成になっている。

第１章　数の見方
　§１　整数
　§２　正の数・負の数
第２章　事象の見方
　§１　表とグラフ
　§２　繰り返しの関係
　§３　文字式と一次方程式
第３章　図形の見方
　§１　空間図形と平面図形
　§２　図形の構成
　§３　図形の求積
第４章　データの分析
　§１　問題を解決する
　§２　傾向を捉える

協議会で指導助言いただいた内容でもあるが，数学において大切にした見方・考え方を章や節のタイトルにしている。これは，10 年以上前のテキスト開発時から継続しているものである。

しかしながら，学年が上がるにつれ，内容ベイスの項目になっていたり，そもそも我々授業者自体がどこか内容に縛られて授業をしている感があるという点も，ご指摘いただいた。ここは，我々の姿勢も改めて見直す必要があると反省している点である。

次年度以降も，数学科としては，「概念的理解」を志向した授業をデザインし，実践していくことを継続していく。独自テキスト，そして IB という土台があるので，改めてカリキュラムから見直し，「概念的理解」を志向した授業の在り方を実践から検討していくことが，今後の課題である。

謝辞

公開研究会において，指導助言者を務めていただいた東京学芸大学の西村圭一先生に心より感謝申し上げます。

引用・参考文献

H. Lynn Erickson, Lois A. Lanning and Rachel French（2017）, *Concept-Based Curriculum and Instruction for the Thinking Classroom second edition*, Corwin（H・リン・エリクソンほか（2020),『思考する教室をつくる概念型カリキュラムの理論と実践―不確実な時代を生き抜く力―』, 北大路書房).

International Baccalaureate Organization（2014）, MYP: From principles into practice（国際バカロレア機構（2016),「MYP: 原則から実践へ」).

International Baccalaureate Organization（2020）, MYP: Mathematics guide（国際バカロレア機構（2020),「MYP: 「数学」指導の手引き」).

経済協力開発機構（OECD）(2010),『PISA の問題できるかな？国立教政策研究所 OECD 生徒の学習到達度調査』, pp.122-123,pp.189-190.

小林廉（2022),「『概念的理解』を目指す数学授業のデザインと実践―創造性を概念レンズに据えた『文字式による証明』の授業実践―」,『国際中等教育研究』, 15, pp.109-129.

文部科学省（2018),『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』, 日本文教出版.

文部科学省（2019),『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 数理編』, 日本文教出版.

太田伸也（2015),「第 11 章 図形 第 2 節 空間図形と空間観念」,『教科教育学シリーズ③ 算数・数学科教育（藤井斉亮編著)』, 一藝社, pp.198-204.

島田茂（1990),「空間の想像力」,『教職数学シリーズ実践編⑩ 教師のための問題集』, 共立出版, pp.94-101.

白井俊（2020),『OECD Education2030 プロジェクトが描く教育の未来―エージェンシー, 資質・能力とカリキュラム―』, ミネルヴァ書房.

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科（2013),「数学的リテラシーを育む授業の創造～公開研究会の報告を兼ねて～」,『国際中等教育研究』, 6, pp.55-67.

東京書籍（2022),『物理基礎』, pp.15-48.

Design and Practice of Mathematics Classes for Conceptual Understanding

－A Report on the Practice of Teaching in the 1st Grade "Composition of Shapes" and the 3rd Grade "Function"－

Abstract

In this paper, we attempt to design and practice a lesson based on the theoretical foundation of "Concept-Based Curriculum and Instruction (CBCI)," which is the background of MYP, and to obtain suggestions for mathematics lessons from it. In order to achieve this goal, we will conduct a "lesson study" on the topic of " Composition of Shapes" and "Function". The results showed that these lessons were considered to address contemporary issues in education, but that there were challenges, such as the difficulty in setting up conceptual understanding.