

高等学校数学科教科書における美的性質の特徴に関する研究

— 共通必修科目「数学Ⅰ」の教科書分析を通して —

A Study on Characteristics of Aesthetic Qualities in High School Mathematics

— Through the Analysis of the Textbook of a Common Compulsory Subject “Mathematics I” —

数学科 花園隼人

<要旨>

数学や数学教育学では数学の美的性質の重要性が指摘されているものの、研究上の困難性から十分な研究が進められてこなかった。しかし、数学者ではない学習者でも数学の美的性質を識別できる可能性が指摘されたことで、この主題の研究意義が更に高まっている。

本研究では、数学において認められていると考えられる美的性質が、現行の共通必修科目である「数学Ⅰ」の教科書にどのように記載されているのか、その特徴を捉えることを目的として考察した。その結果、中学校以来用いられている「文字の考え」や「座標の考え」によってもたらされる美的性質の他、高等学校で特徴的な「集合の考え」によってもたらされる美的性質が多く取り上げられているという特徴が提示された。

<キーワード> 美的性質, 教科書分析, 高等学校数学科, 数学Ⅰ

1. はじめに

1.1 問題意識と研究課題

数学の研究においては考察方法や結論といった数学的対象の美的性質⁽¹⁾を識別すること、すなわち審美を行うことや、その美的性質を追求することが、新たな定理や方法の発見過程で決定的な役割を果たすことが主張されてきた (e.g. ボアンカレ, 1908/2002)。また、審美や美的性質の追求を学校数学に位置づけることの価値が、数学教育目標論において論じられてきた (e.g. 杉山, 2012)。

美的性質に関する数学教育学研究は、数学においてどのようなものが美しいかを考察する方向性 (e.g. ボアンカレ, 1908/2002) と、数学の研究で審美がどのように役立つかを考察する方向性 (e.g. Sinclair, 2004) の二つを主題として進められてきた。しかし、非数学者である学習者には美的性質が識別できないという指摘や (Silver et al, 1989)、美的性質の主観性に対する問題視 (Wells, 1990) によって、十分な研究は進められてこなかった。

このような研究動向に対し、Sinclair (2006) は中学生の考察過程を分析することで、「中学生なりの美的性質」についても、「審美」や「美的性質」の追求を行うことが考察過程を豊かにすることを指摘した。この研究成果は、非数学者が数学における美的性質を認識できるか否かという論争を超えるものであり、児童・生徒による「審美」を調査する研究 (e.g. 松尾, 1999) や、児童・生徒が「美しい」と感じた教材を分析する研究 (e.g. 池

田ら, 2010) の価値を高めるものであった。

しかし、Kline (1953) が主張するように、数学を創造してきた主要な動因の一つが美的性質の追求ならば、数学で追求される美的性質は、「中学生なりの」もの、極端に換言すると「なんでもあり」のものではなく、一定の構造をもっているのではないだろうか。また、審美や美的性質の追求が学習過程に果たす役割を学校数学で実現させるのならば、学習者が取り組む教材には数学らしい構造をもった美的性質が含まれるべきではないだろうか。

以上のような問題意識に基づいて、筆者は数学らしい構造をもった美的性質を捉えるために、数学者による審美の報告を分析し、数学における美的性質の特色を提示した (花園, 2014a)。また、この特色に基づいた枠組みを用いて、17 世紀の微分積分学における美的性質を特定した (花園, 2014b)。その結果、高等学校数学科教科書で一般的に記載されている微分積分学の基本定理の扱い方では、同定理の美的性質を教育内容として強調できないことが示唆された。

本稿では上記の示唆から得られた新たな疑問である、「そもそも教科書に記載された数学的対象からは美的性質が抽出できるのか、できるとしたらどのような美的性質なのか」について考察する。この疑問の解決によって、数学的対象の美的性質の学習の実現という観点における、教材としての教科書の位置づけを提示する。

1.2 研究方法

花園 (2014b) で用いた、数学者の審美的分析から構築した数学的対象の美的性質を捉える枠組みを用いて、高等学校数学科の共通必修科目である「数学Ⅰ」の教科書を分析する。教科書は、本校で採択している教科書の一つである啓林館『詳説数学Ⅰ』（高橋ら, 2011）を対象とする。この教科書は啓林館が発行している三種類の数学Ⅰの教科書のうち内容の網羅性を特徴としているものであり、他社の教科書と比較してもその特徴は際立つ。よって、分析の対象としても豊富な情報を有していると期待できる。

2. 教科書から美的性質を捉える枠組み

2.1 美的性質の主観性に関する本研究の立場

数学における美的性質に関する数学教育研究は、審美が主観的であるといった理由から「何が美しいかの独断的規定に向かってよりは、美的判断がどんなふうに働き機能するのかの議論により多く向けられるようになってきた」(デービスら, 1982/1986, p.160)という経緯がある。しかし、ポアンカレ (1908/2002) が数学における美的性質を説明する際に「吾々に優美の感を起さしめるのは」(p.33, ただし下線は引用者) と一人称を複数形で述べていることや、上述の指摘をしたデービスら (1982/1986) も $\sqrt{2}$ の無理数であることの証明方法を二つ提示した上で、一方の証明を「専門数学者の10人中9人」(p.289) がより美しいと判断すると述べていることから、数学における美的性質は数学者の間で共有されていると考えられる。以上より、審美は主観に依存するものであるが、数学者たちの間では美的性質が共有されているという立場を取る。

このような美的性質の主観性に関する立場は先行研究でも検討されている。池田ら (2010) は、美的性質には人間によって創り出されるものと、人間の行為を超越して存在していて人間によって見出されるものがあると捉えている。また、金子 (2010) は「個人の主観や問題の文脈にとらわれない」(p.7) として数学の事実の構造に美的性質を認めている。この二者は美的性質を主観的なものに限定しない点で本研究の立場と一致している。

2.2 教科書から美的性質を捉える枠組み

本研究では、数学者による審美から抽出した「数学における美的性質の特色」に基づき、数学的対象の「混沌とした状態 S_c から秩序ある状態 S_o への変容 ($S_c \rightarrow S_o$ とする)」によって、その数学的対象の美的性質を捉えて

いる (花園, 2014b)。このように変容全体で美的性質を捉える理由は、上述の美的性質の主観性に関する立場から、変容で生じる美的性質の主観性も認めるためである。

例えば、不等式

の証明という数学的対象について考える。

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

まず、 a , b , $a + b$ のそれぞれと0の大小によって場

合分けをして絶対値記号をはずすことで不等式の成立を示す証明を (α) とする。次に、不等式の両辺を二乗した式の大小比較によって不等式の成立を示す証明を (β) とする。この証明 (α) は多くの場合分けを必要としており、一方の証明 (β) は場合分けを必要とせず統一的に説明している。よって、証明 (α) が得られた後に証明 (β) が得られたとすると、この不等式の証明という数学的対象の状態は、「多くの場合分けを必要とする」という状態から「統一的に説明できる」という状態に変容しているといえる。そして、この変容は「 $A > 0$, $B > 0$ のとき, $A > B \Rightarrow A^2 > B^2$ 」という実数の性質に基づく着想によってもたらされている。この二つの状態は数学的対象から特定することができるが、この変容で生じた美的性質がどのような性質のものであるかは主体の主観に依存すると定めているので、統一性や、あるいは統一的に説明できることによる簡潔性などと捉えることが可能になる。すなわち、変容で生じる美的性質のみを「分析的に」記述することは本研究の立場では不可能になる。

以上より、本研究では数学的対象の状態の変容 $S_c \rightarrow S_o$ を用いて美的性質を捉えるが、先の不等式の例のように、変容をもたらしした数学的な着想を明記することが美的性質の特徴をより明確にすると考えられる。よって、 $S_c \rightarrow S_o$ と変容をもたらしした数学的な着想 (I とする)、及び変容した数学的対象 (O とする) によって、教科書から美的性質を捉えることとする。例えば、先の不等式の例では以下の表1ようになる。

表1 不等式の証明の美的性質

O	S_c	S_o	I
$ a + b \geq a + b $ の証明	証明(α)の 場合分けが 必要な状態	証明(β)の統 一的な状態	実数の性質

3. 教科書「数学Ⅰ」における美的性質の分析

3.1 分析方法

教科書の記述から美的性質をそなえる対象を特定するために、一つの対象が繰り返し取り上げられている箇所を抽出する。例えば対象が定理の場合には、その定理が適用範囲を広げる等の理由で再び取り上げられているかを調べる。そして繰り返し取り上げられていることが特定できた対象について状態の変容が認められた場合、最初取り上げられた際の状態を S_c 、再度取り上げられた際の状態を S_o としてとらえる。また、その変容をもたらしした着想を定める。

3.2 分析結果

分析の対象は『詳説 数学Ⅰ』（高橋陽一郎，2011）の7ページから237ページまでである。特定した変容は23箇所であり、単元ごとの内訳は以下の表2の通りであり、具体的な美的性質は表3にまとめた。

表2 単元ごとの変容の個数一覧

単元	変容の個数
第1章「数と式」（整式、実数、方程式と不等式、集合と命題）	12
第2章「2次関数」（関数とグラフ、2次関数の最大・最小、2次関数と方程式・不等式）	7
第3章「図形と計量」（鋭角の三角比、鈍角の三角比、正弦定理と余弦定理、図形の計量）	4
第4章「データの分析」（データの散らばり、データの相関）	0
課題学習	0

4. 教科書「数学Ⅰ」における美的性質の特徴

4.1 教科書「数学Ⅰ」における美的性質の特徴

分析の結果から、教科書全体を通して変容をもたらしした数学的着想Ⅰに共通性がみられた。具体的には、条件を文字によって一般化する「文字の考え」や、座標平面上的位置を用いる「座標の考え」、背後にある集合を用いて意味を拡張する「集合の考え」による数学的対象の状態の変容が多く見られた⁽²⁾。

一つ目の「文字の考え」は中学校で文字や文字式について学習する際に扱う考え方であり、高等学校においても様々な場面で利用されている。その教科書上の扱い方は教科書編纂の意図に依存すると考えられるが、今回分

析した『詳説数学Ⅰ』においては、例えば表3の⑬⑭⑮については⁽³⁾、「文字の考え」自体の解説はなく、文字を用いた一般化については理解できているものとされている。

二つ目の「座標の考え」は、中学校から導入されている座標の概念に基づくものであり、座標平面上的位置関係を利用したり、既習の概念を座標平面上的点として捉えなおすこととして捉えている。この着想は、中学校では例えば2元1次連立方程式の解法に利用されているものの、高等学校ではより広汎に用いることになる。

最後の「集合の考え」については、国内では昭和40年代において大きな動向であった数学教育の現代化における主要な着想であり、既習事項を整理したり関連づけたり、一般化や拡張をする際の重要な着想である。現行の学習指導要領においては数の集合が中学校1年生で扱う学習内容として位置づけられており、「集合の考え」は教授実践に当たって幅広く用いられているとも考えられるが、集合の概念は高等学校の学習内容として位置づけられていることから公の学習内容として「集合の考え」が扱えるのは高等学校の特徴であるといえる。

以下では、この高等学校で適用の場が広がる「座標の考え」と、高等学校で特徴的な「集合の考え」によってもたらされた変容による美的性質を中心に、単元ごとに特徴的な着想に基づく美的性質を詳細に考察する。

4.2 単元「数と式」における美的性質の特徴

「数と式」では整式の演算や因数分解の方法の状態が変容する記述が多く特定された。変容をもたらす数学的な着想Ⅰに着目すると、数との類推によるもの、図形モデルによるもの、集合の考えによるもの、文字の考えによるものが繰り返し得られた。以下ではこれらのうち高等学校で特徴的な、前者の三つについて詳細を述べる。

4.2.1 数との類推でもたらされる美的性質

①は整式の加法についての説明が例を用いて記述されている。そこでは、 $A=2x^3+x^2+6x-1$ 、 $B=x^3+7x^2-4$ のとき、 $A+B$ と $A-B$ を求めるという課題が設定され、はじめに同類項をまとめる次の方法が記述されている（ $A-B$ については省略）。

$$\begin{aligned} A+B &= (2x^3+x^2+6x-1) + (x^3+7x^2-4) \\ &= (2+1)x^3 + (1+7)x^2 + 6x - 1 - 4 \\ &= 3x^3 + 8x^2 + 6x - 5 \end{aligned}$$

そして、この記述に続いて「同類項を次のように並べて右のように計算してもよい。」という記述があり、次の

ような「筆算」が記述されている。

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 6x - 1 \\ +) \quad x^3 + 7x^2 - 4 \\ \hline 3x^3 + 8x^2 + 6x - 5 \end{array}$$

ここでは、「整式の加法」という対象が繰り返し取り上げられており、その対象の状態が「筆算が用いられた状態」に変容している。この変容は、整式を「 x 進位取り記数法によって表現された数」のように見なすことで、数の計算における筆算と同様な筆算が可能になっている。ここでは減法についても同様に併記されており、さらに②では乗法についても同様な変容が捉えられる。そして、この変容からは計算の簡潔性が捉えられたり、数と整式との統一性が捉えられたりすると考えられる。特に後者の統一性に関しては、後の整式の除法を考える際の余りの理解に役立つものであると考える。

なお、この数との類似に関しては「数と式」を学習する段階では未習であることが考えられる。高等学校において位取り記数法についての学習は数学Aの「整数の性質」においてなされ、そこでは

$$1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

のように2進法で表される数を表現する方法も学習することになる。すなわち、この整式の計算における筆算については、どうしてこのような方法で計算をするのかといった根拠を生徒から引き出すのは容易ではない。

4.2.2 図形モデルによってもたらされる美的性質

③は乗法公式を利用して数の掛け算で暗算をしやすくする方法が紹介されている。そこでは、 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ であることを利用し、 41×39 など計算する例に加えて、面積図を用いた乗法公式の図的表現が掲載されている。

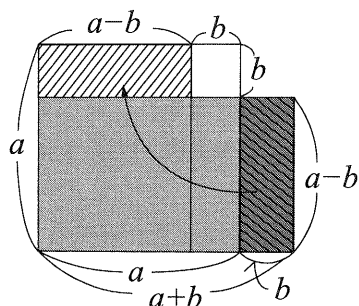


図1 乗法公式の図的表現 (i) (高橋ら, 2011, p.16)

ここでは、「乗法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 」という対象が繰り返し取り上げられており、その対象の状態が「式のみで表された状態」から「図によって表された状態」に変容している。同様に⑤についても、乗法公式 $(a+b)^2$ と $(a+b+c)^2$ と正方形の面積の関係が紹介されている。そこでは、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ と $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ の横に、面積図を用いた乗法公式の図的表現が図2のように掲載されている。

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{aligned}$$

図2 乗法公式の図的表現 (ii) (高橋ら, 2011, p.25)

この変容は等式の図形モデルを与えることで生じているが、等式の構造が明瞭になったなどととらえることができる。整式や方程式と面積図を関連づける考え方は、方程式の解法において歴史的に用いられてきた考え方もあり、適切なモデルを得ることは必ずしも容易ではないものの、数学らしい考え方の一つであるといえる。

4.2.2 「集合の考え」によってもたらされる美的性質

⑥は実数についての説明が記述されている。そこでは2ページ前からはじまっている有理数の説明に加えて、有理数ではない数として無理数が紹介されている。そして、「有理数と無理数を合わせて実数という。」(p.28)と説明されている。ここでは、数という対象が繰り返し取り上げられており、その対象の状態が「有理数と無理数の二つで構成されている状態」から「実数として一つにまとめられた状態」へと変容することによって、対象が統一的になっている。そしてこの統一性は、「集合の考え」によってもたらされたといえる。また、⑦には平方根を含む式の計算についての説明が記述されており、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ の分母を有理化する課題に対して次の方法が記述されている。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここでは、「平方根を含む式の商」という対象が繰り返し取り上げられており、その対象の状態が「分母が有理化された状態」への変容が記載されているが、このような有理化には実数が除法で閉じていることを示す意

表 3 教科書「数学 I」から特定された美的性質一覧

No.	頁	O	S_c	S_o	I
①	11	多項式の加法・減法・乗法	筆算を用いない状態	筆算が用いられた状態	整式と数の x 進位取り記数法との類似
②	13				
③	16	多項式の乗法	式のみで表された状態	図によって表された状態	積を面積と捉える
⑤	25				
④	17	因数分解の方法	共通因数が置換されていない状態	共通因数が置換された状態	共通因数の置換
⑥	28	数概念	有理数と無理数の二つで構成されている状態	実数として一つにまとめられた状態	集合の考え
⑦	33	実数の表現	分母と分子に平方根を含む状態	分母が有理化された状態	有理化
⑧	35	対称式	基本対称式で表されていない状態	基本対称式で表されている状態	多項式の展開と因数分解
⑨	50	1 次項の係数が偶数の 2 次方程式の解の公式・判別式	約分されていない状態	約分された状態	文字の考え
⑩	51				
⑪	53	重解をもつ 2 次方程式の解法	未知数以外の文字を含む 2 次方程式の重解を、もとの方程式を定めてから求める方法	未知数以外の文字を含む 2 次方程式の重解を、もとの方程式を定めずに求める方法	文字の考え
⑫	61	方程式・不等式の解の概念	方程式や不等式の解が、方程式や不等式を満たす変数の値とされている状態	方程式や不等式の解が、条件を満たす実数の部分集合とされている状態	集合の考え
⑬	85	関数のグラフの y 軸方向への平行移動を表す方程式	具体的な数で表現された状態	文字で一般的に表現された状態	文字の考え
⑭	86	関数のグラフの x 軸方向への平行移動を表す方程式	具体的な数で表現された状態	文字で一般的に表現された状態	文字の考え
⑮	87	関数のグラフの平行移動を表す方程式	具体的な数で表現された状態	文字で一般的に表現された状態	文字の考え
⑯	92	関数のグラフの平行移動を表す方程式の求め方	経験的に平行移動を表す式が得られた状態	演繹的に平行移動を表す式が得られた状態	座標変換 (変数変換)
⑰	94	関数のグラフの平行移動を表す方程式	2 次関数の方程式に限定されていた状態	一般の関数の方程式まで一般化された状態	文字の考え
⑱	113	2 次方程式	2 次関数とは関連がない状態	2 次関数と関連づけられた状態	座標の考え
⑲	124	2 次関数と 2 次方程式と 2 次不等式	それぞれ独立な状態	関連づけられた状態	座標の考え
⑳	145	三角比の定義	鋭角で定義された状態	0° から 180° で定義された状態	座標の考え
㉑	149	三角比の相互関係	鋭角で立証された状態	0° から 180° で立証された状態	座標の考え
㉒	173	三角形の面積の公式	初期条件が様々にある状態	初期条件が決定条件と関連づけられた状態	条件の整理
㉓	174	正四面体の内接球の体積を求める方法	三角比を用いた状態	正四面体の体積を用いた状態	等積変形

味もあり、その観点からは閉包性も生じているともとらえられる。しかし、教科書には有理化についてのそのような記述はなかった。

⑫は、それまで方程式や不等式の解は、方程式や不等式を満たす変数の値として扱われていたのに対し、集合の考えにより、方程式や不等式を集合を決める条件と捉えなおし、解は条件を満たす集合として捉えなおされている。すなわち、方程式や不等式の解という数学的対象の状態が、集合を用いずに説明されていた状態から、集合を用いて説明された状態に変容している。この変容によって、方程式の解と不等式の解の統一性が生じているとも捉えられる。

4.3 単元「2次関数」における美的性質の特徴

「2次関数」においては、関数のグラフの平行移動と方程式の関係について、対象となる関数や方程式の求め方といった数学的対象の状態が、「文字の考え」や座標変換（変数変換）によって変容している記述が捉えられた。また、2次方程式・2次不等式と2次関数のグラフという数学的対象が、「座標の考え」によって別個に扱われていた状態から関連づけられた状態へ変容している記述が捉えられた。

以下では座標変換（変数変換）によってもたらされる美的性質と、「座標の考え」によってもたらされる美的性質について詳しく述べる。

4.3.1 座標変換(変数変換)によってもたらされる美的性質

⑬については、それまでの関数のグラフの平行移動後の方程式が、具体的な2次関数の平行移動の結果から経験的に得られていたのに対し、具体的な2次関数に対してではあるが、座標変換（変数変換）の考えを用いて演繹的に求めている。

具体的には、平行移動後のグラフ上の点 $P(x, y)$ に対応する平行移動する前の点 $Q(x-3, y-5)$ が、平行移動する前の2次関数の方程式を満たすことを用いて、 x と y の関係性を求めている。さらに、この結果を一般の2次関数に適用して、座標変換（変数変換）によって平行移動後の2次関数の方程式を求める方法をまとめている。

すなわち、平行移動した2次関数の方程式を求める方法という数学的対象の状態が、座標変換（変数変換）によって、経験的な状態から演繹的な状態に変容している。

4.3.2 「座標の考え」によってもたらされる美的性質

⑭は2次関数のグラフと2次方程式が関連づけられ、⑮ではさらに2次不等式も関連づけが行われた。その際には、2次方程式の判別式の符号についても、関係が併せて説明されている。

ここでは、具体的な2次関数のグラフと、具体的な2次方程式や2次不等式の解との関係について、座標平面上における位置関係を用いて説明することによって変容をもたらしめているのであるが、4.2.2 であげた⑫のように方程式や不等式の解を集合でとらえることに基づけば、「集合の考え」によって関連づけることも可能である。しかし、そのような説明は記載されておらず、⑫の変容を生かせてはいない。このような「集合の考え」に基づく座標平面上の図形についての考察は「数学Ⅱ」の「図形と方程式」において扱われるが、ここでは関数のグラフとの関連づけは行われなため、「集合の考え」に基づく関数のグラフと方程式・不等式の解の関連づけは、明確には扱われていないといえる。

4.4 単元「三角比」における美的性質の特徴

「三角比」においては、三角比の定義の拡張や、その拡張に基づく相互関係の拡張という定義や定理の状態の変容が、三角比という概念を座標を用いて捉えなおす「座標の考え」によってもたらされている。また、三角形の面積を求める公式が三度登場し、最終的に三角形の決定条件に基づく公式が説明されている。これは三角形の面積を定める十分条件を特定することでもたらされているといえる。

以下ではこれらについて詳しく取り上げる。

4.4.1 「座標の考え」によってもたらされる美的性質

⑯では、三角比の定義という数学的対象が、鋭角の範囲で定義されている状態から、三角形の頂点を座標平面上の点と捉える「座標の考え」によって、 0° から 180° の範囲で定義されているという状態に変容されている。また⑰では、⑯で三角比の定義が拡張されたことに付随して、拡張前の定義で成立した関係が拡張後も成立することを確認している。ここでも、「座標の考え」によって、 0° から 180° の範囲でも成立することが確認されている。これらの変容では、定義や定理の一般性などが生じていると捉えられる。

4.4.2 条件の整理によってもたらされる美的性質

②では三角形の面積を求める公式という数学的対象について、初期条件が各頂点からの内心までの距離を利用したものなど様々に考えられる状態から、三角形の決定条件という面積を定める上での十分条件が明らかになった状態への変容がされている。具体的には、「三角形の3辺の長さが決まると、その面積も決まる。」(p.173)という説明のもと、ヘロンの公式が説明されている。なお、この他に、2辺とそのはさむ角を用いた公式は事前に提示されている(p.165)が、1辺と2角を用いた公式は扱われていない。この最後の公式も扱うことは、「面積を求める」という観点からは必要ないかもしれないが、「三角形の三つの決定条件それぞれに対応する公式がある」という状態への変容を経験することや、条件についての理解を深めることにつながると考える。

5. まとめと今後の課題

数学や数学教育学では数学の美的性質の重要性が指摘されているものの、研究上の困難性から十分な研究が進められてこなかった。しかし、数学者ではない学習者でも数学の美的性質を識別できる可能性が指摘されたことで、この主題の研究意義が更に高まっている。

本研究では、数学において認められていると考えられる美的性質が、現行の共通必修科目である「数学Ⅰ」の教科書にどのように記載されているのか、その特徴を捉えることを目的として考察した。その結果、中学校以来用いられている「文字の考え」や「座標の考え」によってもたらされる美的性質の他、高等学校で特徴的な「集合の考え」によってもたらされる美的性質が多く取り上げられているという特徴が提示された。

本稿においては分析の対象を共通必修科目の「数学Ⅰ」、特に啓林館の『詳説数学Ⅰ』に限定したが、科目をまたがった変容や、中学校の学習内容からの変容によって美的性質が生じる場合も考えられる。また、他の教科書からは異なる美的性質が捉えられるとも考えられる。よって、他の教科書についても分析した上で、情報を整理し、高等学校で扱われることが期待できる美的性質を整理することは残された課題である。

また、本稿で特定した美的性質に対し、高校生が審美を行い、数学者による研究で行われる審美と同様な反応を示すのかどうかを考察することも今後の課題である。

註

- (1) 先行研究では、形容詞「美しい」を体現化した「美しさ」が用いられることが多い(e.g. 松尾, 1999)。本稿では、この「美しさ」を数学的対象がそなえる性質として捉えていることを強調するため、美的性質と呼ぶ。
- (2) 「文字の考え」や「座標の考え」も「集合の考え」の一つとして位置づけることも考えられるが、着想の特徴を明確にするために、区別する。
- (3) ○付きの番号(e.g. ①)は表3の左端の番号を示しており、これは教科書から捉えた美的性質について、掲載順に番号を振ったものである。

引用・参考文献

- デービス, P.J.・ヘルシュ, R. (1982/2003).『数学的経験』. 森北出版株式会社.
- ハーディ, G. H. (1967/2006).「ある数学者の弁明」. ハーディ, G. H., スノー, C.P. (2006).『ある数学者の生涯と弁明』. シュプリングー・ヘアラク東京株式会社.
- 花園隼人. (2014a).「学校数学における『美しさ』をとらえる枠組みの構築：数学における『美しさ』の特色の分析を通して」. 筑波大学人間総合科学研究科学校教育専攻学校教育学研究紀要 (7). pp.105-125.
- 花園隼人. (2014b).「高等学校数学科における美的性質の教材化に関する一考察：17世紀微分積分学における美的性質の特定」. 日本数学教育学会第47回秋期研究大会発表集録. pp.177-180.
- 池田敏和ら. (2010).「小学校算数科における図形についての美しさを感じさせる教材開発」. 横浜国立大学教育人間科学部紀要. I, 教育科学 12. pp.1-12.
- 池田敏和ら. (2011).「算数・数学科における図形についての美しさを感じさせる教材開発とその指導」. 横浜国立大学教育人間科学部紀要. I, 教育科学 13. pp.17-39.
- 金子春香. (2010).「数学の美しさを感じ得る教材の開発に関する研究：文字式指導に焦点を当てて」. 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』第45巻, 第1号. pp. 5-26.
- Kline, M. (1953).『Mathematics in Western Culture』. New York: Oxford University Press.
- 松尾七重. (1999).「算数数学の美しさを感じ得るための方法」. 千葉大学教育学部研究紀要. I, 教育科学編 47. pp.71-79.

- Papert, S. A. (1978). The mathematical unconscious. In Wechsler, J. (Ed.). On aesthetics and science. Boston: Birkhauser. pp.104-119.
- Papert, S. A. (1980/1993). Mindstorms :children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books.
- Silver, E., & Metzger, W. (1989). Aesthetic influences on expert mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: a new perspective. New York : Springer-Verlag. pp.59-74.
- Sinclair, N. (2002) . Mindful of beauty: the roles of the aesthetic in the learning and doing of mathematics. Unpublished doctoral dissertation. Kingsron, ON, Queen's Univertsity.
- Sinclair, N. (2004) . The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. Mathematical thinking and learning, 6 (3) . pp.261-284.
- Sinclair, N. (2006) . Mathematics and beauty: aesthetic approaches to teaching children. New York : Teachers College Columbia University Press.
- 杉山吉茂 . (2012) . 「論説「数学する心」を育てる」. 杉山吉茂先生喜寿記念論文集編集委員会（編）. 『続・新しい算数数学教育の実践をめざして—杉山吉茂先生喜寿記念論文集』 . 東洋館株式会社 . pp.13-19.
- 高橋陽一郎ら . (2011) . 『詳説数学Ⅰ』 . 大阪：啓林館 .
- ポアンカレ, H. (1908/2002) . 『改訳 科学と方法』 . 東京：岩波書 .
- Wells, D. (1988) . 「Which is most beautiful?」 . The Mathematical Intelligencer, 10 (4) . pp.30-31.
- Wells, D. (1990) . 「Are these the most beautiful?」 . The Mathematical Intelligencer, 12 (3) . pp.37-41.