数学的プロセスの質を高める授業に関する事例研究
－同様に確からしいように数え上げることの創出に焦点をあてて－

小林　廉

要　約

本研究の目的は，数学的プロセスの質を高める授業の一事例として，同様に確からしいように数え上げることの創出を目指す授業を提案し，その有効性と課題を示すことである．そのための方法として授業研究を実施した．結果として，ねらいとする認識の創出を促せた一方で，本来的に実現すべき数学的プロセスとのずれがあったなどの課題が明らかになった．これらの課題は，今後，数学的プロセスの質を高める授業を設計するにあたって視点として機能しうる．

1．はじめに

(1) 本研究の背景

東京学芸大学附属中高数学教育研究会[1)]では，数学を使い，創るプロセスを「数学的プロセス」と呼び，そのプロセスの質を高める授業のあり方について研究を進めてきている．これからの数学教育では数学の内容（コンテンツ）だけでなく過程（プロセス）をより一層重視することが求められる（例えば文科省教育課程部会算数･数学ワーキンググループ，2016）．授業において内容と過程をどう扱えばよいか，過程の質を高めていくにはどうしたらよいか，換言すると，数学の過程を遂行するための資質・能力をどう育成していくかということを一層追究していく必要がある．

こうした研究課題に対して，本研究会では，内容と過程は互いに組み込まれている（藤井，2016a）という前提のもと，具体的な内容に即した事例的な研究を行ってきている．ここで用いている研究方法は一貫して「授業研究」である．本稿は，本研究会が行った研究の一事例について記したものである．

(2) 本研究の目的と方法

本稿の事例は，数学的確率の前提である「同様に確からしい」を内容とし，その創出プロセスに焦点をあてたものである．即ち本研究の目的は，根元事象を同様に確からしいように数え上げることの創出を目指す授業を提案し，生徒の実態の一端を明らかにすることを通して，授業の有効性と課題を示すことである．同様に確からしいことの創出に焦点をあてる理由は，2節で詳述する．

本研究で用いる方法は「授業研究」である．授業研究の構成要素と過程は藤井（2014，2016b）によって明確化されている（図1）．本研究はこの過程を踏襲することによって進める．図1の「1.目標設定と実態把握及び計画立案」と「2.学習指導案の検討と作成」は本研究会所属の教員で行い，「3.研究授業」は筆者が授業者となって行う．研究授業の対象生徒は，数学A「場合の数」が既習であるが「確率」については未習である[2)]，国立大学附属中等教育学校3年生32名である．本授業研究は本研究会の公開研究会として実施す

る全国型(高橋, 2006)であり,「3.研究授業」と「4.研究協議会」は全国から申し込みのあった数学教育関係者を含めて行う.最後に「5.振り返り」で分析・考察を行う. 本稿の執筆自体も「5.振り返り」に位置づく活動である.

図1　授業研究の構成要素と過程(藤井, 2016)

分析対象とする授業は, 研究授業と, 研究協議会後に実施した授業の計 2 時間である. 授業は全てビデオで記録し, 生徒の記述物は全て収集して分析対象とする.

2.「目標設定と実態把握及び計画立案」と「学習指導案の検討と作成」の実際

(1) 目標設定と実態把握及び計画立案

授業研究の特徴は,「問い」から始まる点にある(藤井, 2014). 本研究会の研究主題は, 先述の通り数学的プロセスの質を高める授業のあり方である. 本項では, その具体化として同様に確からしいことの創出プロセスに焦点をあてた問題意識について述べる.

同様に確からしいという前提は, ラプラスの古典的確率論では「われわれが決めかねる程度が同じ」(ラプラス, 1814) という「無差別の原理」に基づいているが, これは試行に対する知識の程度に依存するなど, いくつかの問題をはらんでいる (内井, 1995). しかし,数学的確率の射程を理解する意味でも, そうした不完全さを含んだ上で, この前提は数学的確率の定義を支える要である. ところが, 筆者には, 中高生ともにこの前提への意識が徐々に弱くなっていってしまうのではないかという懸念がある (小林, 2017). なぜなら, 第1に, 特に高校・数学Aにおいては, 各根元事象が同様に確からしいことが徐々に暗黙の前提として扱われていくと想定できるからである. 数学Aの教科書では, 各根元事象が同様に確からしいことの記述が少なくなってゆくが, 様々な内容を学習していくうちに, 何が根元事象として同様に確からしいかを意識しなくなっていってしまうことが懸念される. 第2に, 同様に確からしいことの説明は, 中高両方において, それが誰にとってもわかりやすいような試行の例を用いてなされると想定できるからである. これは, 同様に確からしいことの理解が試行に対する生徒の知識の程度やイメージに依存することを考えれば,当然の指導とも言えるかもしれない. しかし一方で, 誰にとってもわかりやすい試行の例では, 生徒たちにとっては当然すぎる前提であるため,その確認に困ることがなく, 逆に意識されないことが懸念される. また, 不確定な事象の探究に確率を使うとなったときに, 何が根元事象として同様に確からしいかを見定められなくなる懸念がある.

同様に確からしいことの指導は単元全体にわたって継続して行っていく内容ではあろうが,数学的確率の概念を初めて創り出す際に,「起こる可能性が等しいと考えられる各結果を同じ1通りとして数えることによって, ことがらの起こりやすさを数値化できる」ということを意識づけられるような授業をできないか. また, 同様に確からしいことが直観的

に明らかな試行から入るのではなく，同様に確からしいかどうかが問題になるような不確定な事象を敢えて扱うことで，この前提に焦点化できないか．このような授業は，同様に確からしいという数学的確率の前提を創り出しながら，それを用いて不確定な事象について判断するという，数学を使い，創るプロセスの実現になると考えたのである．

（2）学習指導案の検討と作成

学習指導案は，対象生徒が数学Aの「場合の数」を既習であることから，次の方向で作成した．それは，「場合の数を数え上げる」プロセスに焦点化し，もれなく重なりなく場合の数を数えることから，可能性を勘案して場合の数を数え上げることへと質を高めることを意図したことである．換言すると，「場合の数」として起こりうる全ての場合の数を数え上げる際は各結果の可能性を勘案する必要はなく全てが同じ「1 通り」でよいが，可能性を数値化するためにそれら場合の数の比を求める以上は，起こりうる各結果の可能性が等しいようにして（つまり同様に確からしいようにして）場合の数を「1 通り」と数える必要がある，という認識を創出しようとしたのである．目的が違うからこそそのプロセスの違いではあるが，もれなく重なりなく数えるだけでなく，可能性まで考慮する必要が生じたという意味で，質の高まりだと捉えている．

学習指導案の検討は，1 回約 2 時間，計 3 回にわたって行われた．1 回目で特に話題にされたのは教材の中身であり，2 回目以降では比較検討のあり方であった．以下，その 2 点について記述する．

①教材について

本時で用いる教材は，パスカルとフェルマーの往復書簡（1654 年）で議論された賭金分配問題を改変したものである．

プレイヤーAとプレイヤーBが，次のような**コイン投げのゲーム**を行う。

1. 表と裏のどちらが出やすいということはない公平なコインを投げる。
2. 表が出たらA，裏が出たらBの勝ちとする。
3. これを繰り返し，先に4回勝った方に賞金の全額が与えられる。

いま，コインを4回投げ，プレイヤーAが3勝，Bが1勝となったところで，どうしてもゲームを中断せざるを得なくなった。この状況で，賞金を適切に分配したい。
そこで，賞金の分配の仕方を，**このまま続けていたとしたらAが最終的に勝っていたであろう可能性と，Bが最終的に勝っていたであろう可能性に基づいて**決めることにした。
何対何に分配すればいいだろうか。

図 2　本時の教材

どのような意味で改変であるかを 2 点述べる．この 2 点は，教材に関する指導案検討において大きく話題とされたものである．

第 1 に，A，B それぞれがあと何勝すれば上がれるかという数値設定である．往復書簡では様々なケースで述べられている[3]．本実践では，A はあと 1 勝，B はあと 3 勝（以下，これを(1,3)と表す）に設定することになった．(1,3)の場合，ゲーム上の上がる場合の数は，A 上がり{A}，{BA}，{BBA}，B 上がり{BBB}の「4」通りである（以下，各回のゲームの勝者を，A と B の順列で示す）．ところが，これら 4 通りは同様に確からしくない．確率を求めるにあたっての根元事象は図 3 の樹形図にみられる {AAA}，{AAB}，…，{BBB} である（点線内はゲーム上は起こりえない結果）．したがって A:B＝3:1 としては誤りであり，正しくは A:B＝7:1 である．ここで求められるのは，ゲーム上はあと 1 回や 2 回で上がる場合であっても，架空にあと 3 回まで行った結果を踏まえて上がる場合を数えることである．この点こそが，フェルマーが明確に「すべての偶然を等価値のものとして扱いうるため」（伊吹ほか，1959，p.329）と述べて

仮定した点である．ここで，数値設定が(2,3)だと，B 上がりの場合でも{BBB}と{ABBB}というように同じ1通りとは見られない場合が生じる．一方で(1,2)だと生じる場合の数が少なすぎると判断され，(1,3)に設定された．

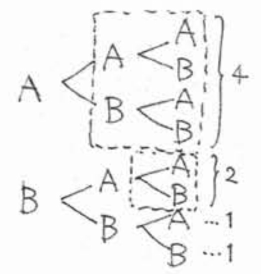

図3　(1,3)の樹形図

改変した第2の点は，「このまま続けていたとしたら…可能性に基づいて決めることにした」という文言を入れたことである．これは元の賭金分配問題では無い文言である．中断時点での戦績という「過去」の結果に基づくではなく，ゲームを続けると仮定して「未来」の結果に基づくとすることは，歴史的にみて決して簡単ではなかった（デブリン，2010）．最初に作成した指導案では，ここが議論となるような授業を意図していた．しかし，分配の仕方をオープンエンドな問題としたとき，立場によって様々な分配の仕方が考えられ（不公平でもよいから「過去」の結果のみに基づいて決める，といった考えもありうる），本時の主題である「場合の数を数える」プロセスに焦点化されない懸念が指摘された．そのため，最終的に勝っていたであろう可能性に基づいて決める，という前提を置くことになった．

②比較検討について

指導案において，比較検討として最初から意図していたのが，「3:1」案と「7:1」案との比較であった．「3:1」案を修正可能な意義ある誤りととらえ，「7:1」案との違いの議論を通して，可能性を数値化するためには起こりうる各結果の可能性が等しいように場合の数を「1通り」と数える必要がある，という認識を創出しようとしたのである．その検討では，「7:1」案が生徒の反応として出るのか，出なかったときどうするのか，出たとしても場合の数で「3:1」案としていた生徒たちがどこでどう可能性に着目して「7:1」案へと修正していけるのか，が話題とされた．そこで，次の3点に留意することになった．第1に，最初にゲームを実際に行わせることである．このゲームが偶然に左右されることと，1回多く投げた結果の可能性は投げる前の可能性の半分になることの実感を持たせるためである．第2に，「7:1」案が全く出ない場合は，他クラスで出た案，意見としてそれらを出すようにすることである．そして第3に，「3:1」案と「7:1」案の共通点（どちらも{BBB}と{BBA}は同じ1通りとしている）と相違点（{BA}や{A}を同じ1通りとみるかどうか）を問うことで，まずは{BA}となる可能性をどうみるかという課題を明確化することである．第1時ではここの議論を主眼とした．実験(多数回試行）は第2時に行うことにした．

3．「研究授業」の実際

(1) 自力解決の様相

授業は，まずは図2の上半分を提示し，実際にこのゲームを約5分間行い，その後ゲームを中断させ，下半分を提示するという問題提示から始めた．自力解決の様相をワークシートに基づいて整理すると以下のようになる．

第1に，「3:1」と求めている生徒が10名いる．これらの生徒は全て図4のようにAが勝つ場合とBが勝つ場合を正しく列挙した上でそう求めている．ただし，この10名の中には，図5のように，可能性という観点から「3:1」

に疑問を持っている生徒が２名いる．

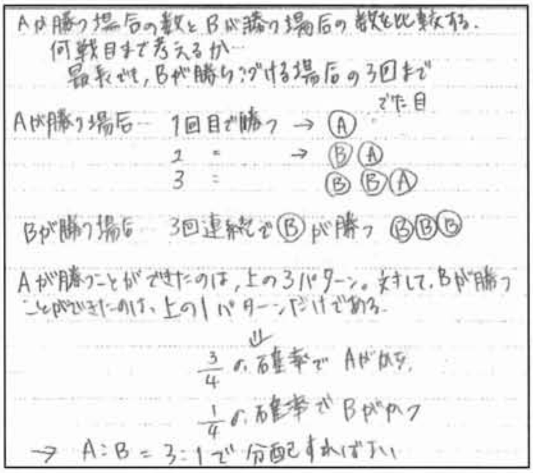

図４　生徒 AM の記述

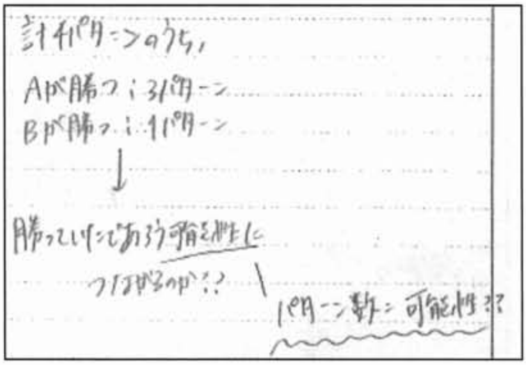

図５　生徒 TH の記述の一部

また，「3:1」以外の案も求めている生徒が１名いる．この案は，「B が連続して裏を出す確率は$\frac{1}{8}$，A が表を出す確率は常に$\frac{1}{2}$」としてその比をとって「4:1」とするもので，全体としては２名おり，これは「予想される生徒の反応」として挙がらなかったものであった．

第２に，「7:1」と求めている生徒が９名いる．これは指導案検討時の予想を上回るものであった．この求め方は複数ある．大きくは，$\frac{1}{2}$をかけあわせる求め方と，残り３回の場合の数を数える求め方に分かれる．図６は前者の例であり，最初は「A が勝つのは３つ，B が勝つのは１つ」と書いているが，その後可能性に着目し，$\frac{1}{2}$をかけあわせている．

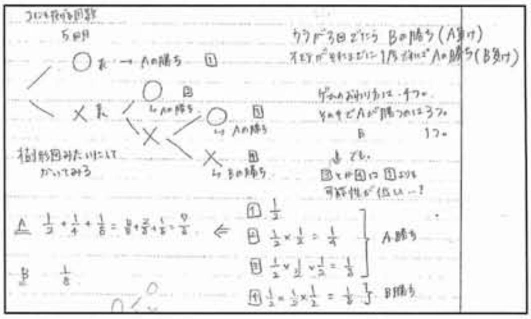

図６　生徒 TN の記述

$\frac{1}{2}$をかけあわせたと考えられる生徒は５名おり，中には図７のように「勝ちの濃度が違う」と表現した生徒がいる．これは指導案検討では予想していなかった表現であった．

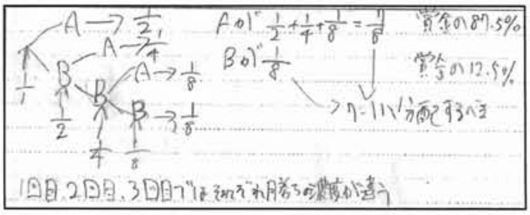

図７　生徒 YR の記述

また，B が勝つ可能性を$\frac{1}{8}$と求めただけで，それが A が負ける可能性であるとし，「7:1」と求めた生徒が１名いる．

図８は後者の例であり，ゲームとしては終わる場合についても３回続ける場合を列挙している．このように，残り３回の場合の数を$2^3 = 8$だとしている生徒が３名いる．

図８　生徒 HM の記述の一部

第３に，結論が出ていない生徒が６名おり，それらの記述は様々であるが，そのうち５名が何らかの形で過去の４回の結果に言及している．例えば図９のように１つのパターンを

挙げてみたり，図 10 のように過去の 3 勝 1 敗という結果に基づいてそれぞれの勝つ可能性を求めていたりする生徒がいる.

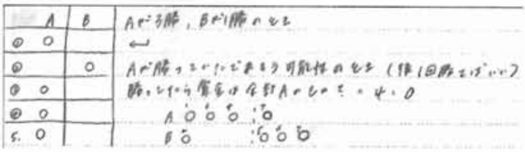

図 9　生徒 UK の記述の一部

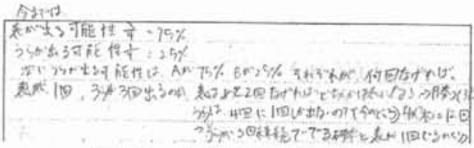

図 10　生徒 KY の記述の一部

(2) 比較検討の様相

図 4, 図 6, 図 7 の生徒を意図的に指名し，全て板書されたところでそれぞれ説明させた．ただし図 6 は意図的に「可能性が低い…？」までの記述を板書させた．図 7 の生徒 YR を指名した意図は,「濃度が違う」という表現を共有したかったためである．それぞれの説明が終わった後で周りの生徒と確認する時間を設け，その後に比較検討に入った．最初の発問は,図 4 と図 7 の共通点についてであった．

表 1　授業プロトコル①

T：…，3:1 と 7:1 じゃないですか，同じところはどこすか．共通してるのはどこ？…

S：(沈黙)　　(中略)

T：えっと結局 1 と見ているのは何？両方とも何で 1？ B は何で 1 ですか？…

S：勝つパターン

T：勝つパターンだよね．B の勝つパターンだよね．これ 1 通りだよね．…そうすると違いは？…どこで違いが発生していますか 2 つの案で.

S：A が勝つパターン

T：A が勝つパターン．…あのー，さっき YR が言ってましたけど，こっち（図 4）でいうと BA はどうみてるんですか？… BBB が 1 なんだよね，3:1 の 1 なんだよね，BA はどうみてるのこれ？…どう数えるべきなの？

S：(沈黙)

上記の通り,「3:1」案と「7:1」案の共通点と相違点を問う発問は十分に機能しなかった．この点については協議会での中心的な話題となった．その内容については後述する．

この後，図 7 の理解が不十分であると考えられたので，再度図 7 の説明を生徒 YR に促した．その上で，最初は 3:1 にしていたが 7:1 に意見を変えた生徒を指名した．

表 2　授業プロトコル②

T：どういうふうに納得したの？

S：3:1 案は，なんか，全部のパターンの確率が同じと考えてるけど，7:1 案は，どんどん確率が下がっているというところまで考えてるから，より現実的というか

また，そもそも図 4 と図 7 では，結論だけでなく求め方が異なる．そこで図 7 の 7:1 を，図 4 に合わせて場合の数の比と解釈し直そうとし，生徒 HM（図 8）を指名した．

表 3　授業プロコトル③

T：…こっちは，勝つパターンで 3:1 としたんだよね．でこっち結果 7:1 になるのであれば，勝つパターンが 7 通りあるという意味ですかこれ．終わるんだよねここでね．…7:1 ということは A が勝つパターンは 7 通りあるということですか？どういう 7 通りなの？

S：(ざわざわ)

T：そういうわけでもないの？要するに BBB を 1 通りとしたときに，本当はこれ 7 パターン分だったということですか？そこはどうで

すか．どう考えたらそうなるの？HM ちょっと言ってくれない？（中略）
S：（8 通りを板書して）本当はこれが全部の通りだったんだけど，そのうち A が 1 回でも勝っちゃうとその時点で試合が終了しちゃうから，特にここら辺（図 11 の AAA から ABB）を 1 つのパターンとして数えちゃってるのと，えっと，この 2 つ？（BAB と BBA）を 1 つのパターンとして考えちゃってるから，ここで消えるけど，そのまま続けていればこれぐらいの確率，パターンがあった中で，これだけ（BBB）が B が勝つパターンだから，…

しかし，「何で試合が続いていればと考えようと思ったんだっけ？」と問うと，HM は沈黙した．そこで，自力解決後の交流の時間で HM の意見を聞いて納得していたように見えた HT に，なぜ納得したかを問うた．

図 11　HM の板書

表 4　授業プロトコル④

T：これ聞いて納得したのは何で？
S：いやなんかあの，B が勝つためには 3 試合やらなくてはいけなくて，その確率を出すためには，3 試合必ずやる必要があるからという．なんというか，試合が続いてたら，限界まで試合が続いたら最大 3 戦やるから，だからその場合の確率を出さなきゃいけない．
T：限界までは 3 回，B が勝つにはか，限界まで 3 回やらないといけないから？
S：やらないといけないから，B が勝つ確率を求めるんだったら，その 3 戦やった場合を出さなきゃいけない．

この発言の前に授業時間は既に終了しており，この HT の発言を板書し，学習感想の指示を出したところで研究授業を終えた．

4．研究協議会の実際

（1）質疑

質疑では，延べ 12 人から質問・意見が出された．そのうち 9 名は比較検討時のあり方について発言し，3 名がこの教材の意義や適切性について発言した．ここでは，紙幅の都合上，第 2 時に影響を与えることになった重要な意見について記述する．それは，図 7 と図 11 をつなげることに関する意見である．

表 5　協議会での 1 つの意見

…（YR が発言した）濃度が違う，濃さが違うといったときの濃さって何なの，それを例えば重みが違うと言ったときに，最終的に最後の女の子が書いたところ（図 11）の上から 4 つが全部含まれて最初の「A」だとかね，そういう形で重みが違うんだとかいうように，彼のいう濃度が何なのかというふうなことを今日の授業で明らかにするというのが流れとしてはよかったんじゃないかなと．しかも最後，8 通り羅列するものが出てきましたので，それを使いながら，あと 5 分時間があれば，そこと濃度をきちんとつなげた話までいったはずなんですね．最後に発言した子は既にそのようなことを言ってましたので．…

この意見は，研究授業のねらいに関わる重要な指摘である．指導案検討時では，これと同趣旨のことを{BA}と{BBB}の可能性の比較に絞って行おうとしていた．しかし授業では，「濃度が違う」という表現が出され，また

7:1 の内訳も出されたにも関わらず，それらを結びつけるまで至らなかった．この意見を受けて，第2時では，図7と図11を結びつけることが一つの行うべきこととなった．

(2) 講師による指導助言

講師（指導助言者）による指導助言は，以下の5点にわたった．

第1に，数学的プロセスとは何かということは難しいが，一つは，数学的にものを考えるということを授業中に行うことが最も大切であり，それが授業の中で見えてくるかということである．もう一つは，内容と関わって生ずるのであり，今回でいえば確率の導入のところで何を考えることが大切だったかということを検討する必要があるということである．後者は，以下の第3の点に関係する．

第2に，共通点と相違点を問う発問は，結果を問うているのであり，考えるプロセスを問うていないということである．確かに，この発問は 3:1 と 7:1 という結果の比較を問うものであって，その結果に至るまでのプロセスは，それぞれの生徒から説明はされたものの，それだけで終わってしまっている．

第3に，それでは本時では何を考えるべきだったかというと，「同様に確からしい」よりも前に，全事象そして事象をつくりあげていくことだったのではないかということである．具体的には，3勝1敗後の5回目からではなく，1回目から決着がつくまでの勝敗結果のすべてが全事象であり，いまはそのうちどの事象が問題になっているのかを特定していくことから始めるべきだったのではないかということである．そのために，比較検討では，最初の4回の結果を気にしている生徒や，図4の生徒を取り上げてそこまでどう考えてそこにたどり着いたのかを問うことによって，最初4回を含めた全事象を出現させることが提案された．さらに関連して，3勝1敗という結果が5回目以降に影響するのかどうかという試行の独立性について議論すべきであるという指摘がなされた．これらの助言は，次の2点に基づいていた．一つは，対象生徒たちが場合の数は既習だったことである．もう一つは，確率とは本来，全事象（標本空間）の部分集合である事象に対応して定まる値のことであり，生徒たちにとっても，全事象を明確にすることが事象を特定する際に考える保障になると考えられることである．

指導案検討においても，1回目からの樹形図を描こうとする生徒は想定されていた．しかし，そこでは(1,3)の決着パターンの数え方を問題としていたため，むしろ5回目以降のみに着目させる方向で検討がなされ，実際，問題提示においては「Aはあと1勝，Bはあと3勝」であることを強調した．一方で，それにも関わらず，コイン投げという試行が独立であることは授業で全く話題にされておらず，生徒の直観に任せる形になっていた．

第4の助言は，教材の適切性について検討する必要があるということである．くじ引きで当たる確率のように直観が働きやすい教材の方が良いのかそうでないのか，また，事象をどうとらえるかを扱える教材を検討できるとよいのではないかということである．

第5に，統計的確率の指導のあり方について検討する必要があるということである．それは，本教材の実験計画をどう立てるかということでもあり，統計的確率を中1で指導することになる新学習指導要領での指導のあり方を検討する必要があるということでもある．

5．振り返り（考察）

本実践の有効性と課題について，生徒による学習感想と，研究授業および協議会を踏まえた第2時の分析を通して考察する．

本実践の有効性は，可能性を数値化するためには起こりうる各結果の可能性が等しいように場合の数を「1通り」と数える必要があるという認識の創出を促し，場合の数を数え上げるプロセスの質を高められることである．実際，第1時後の学習感想で，既に次のように記述している生徒がいる．

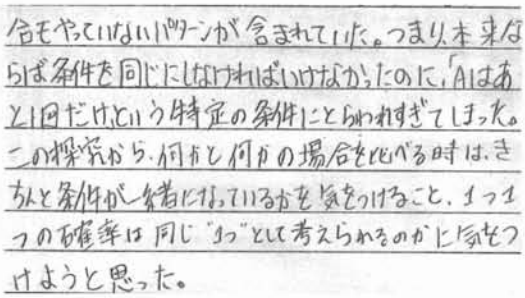
合もやっていないパターンが含まれていた。つまり本来ならば条件を同じにしなければいけなかったのに，「Aはあと1回だけ」という特定の条件にとらわれすぎてしまった。この探究から，何かと何かの場合を比べる時は，きちんと条件が一緒になっているかを気をつけること，1つ1つの確率は同じ"1つ"として考えられるのかに気をつけようと思った。

図 12　生徒 GY の学習感想の一部

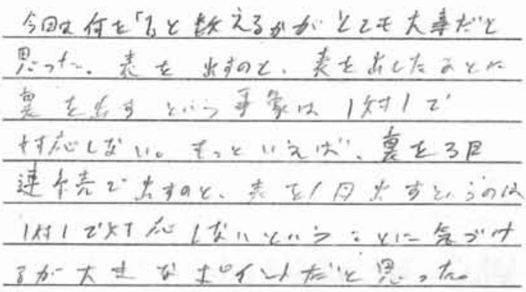
今回は何を「1」と数えるかがとても大事だと思った。表を出すのと，表を出したあとに裏を出すという事象は1対1で対応しない。もっといえば，裏を3回連続で出すのと，表を1回出すというのは1対1で対応しないということに気づけるが大切なポイントだと思った。

図 13　生徒 YT の学習感想の一部

図 12 の生徒 GY は自力解決では結論が出ていなかった生徒であるが，上記のような記述をできるまでの認識に至っている．図 13 の生徒は，最初は 3:1 にしていたが，自力解決中に 7:1 に変えた生徒である．

一方で，図 4 を記述した生徒 AM は，7:1 に修正しつつも「(図 11 のように) なぜないパターンを想像するのかわからなかった」と記し，図 6 を記述した生徒 TN は「YR が濃度が濃いというような表現をしていたが，その意味がよくわからない」と記していた．表 5 の指摘にあったように，「濃度」と図 11 が結びついていないと考えられたため，第2時ではその結びつけを試みた．まずは生徒 YR に「濃度」の意味の説明を促したが，「直感的な言い方なんですよ…」と説明に困った様子であったため，検討対象を図 11 に移すと，様々な発言・説明がなされた．

表 6　授業プロトコル⑤（下線筆者）

T：…（HM は図 11 で）続きまで考えてるじゃん？BA で終わるんだけど，その後も B と A を考えている．こうやって考えるとその何が起こるの？何がいいの？
S(MR)：<u>濃さが統一される</u>
T：もっかい言って
S(MR)：濃さが統一される．
T：濃さが統一される．…濃さが統一されるとはどういうことですか．…（中略）
S(MR)：…，BBA と一緒，<u>一番薄い状態に</u>．
T：あーあーあー，一番薄い状態に揃う．
S：3 つが．

生徒 HM とは別の生徒 MR から「濃さが統一される」という発言があった．これは，生徒 YR の表現である「濃度」を使って生徒 HM による図 11 を説明しようとしていると解釈できる．これを受けて生徒 HM 本人は次のように発言した．さらに，図 6 を記述した生徒 TN からは，次のように「価値」という表現で説明があった．

表 7　授業プロトコル⑥（下線筆者）

S(HM)：濃さっていうのはその，そこから () る可能性がどんぐらいあるのかが濃さだと思うから，A で終わっているっていうのは，A

以降があるパターンが4つあるから，4つを1つとして考えたら濃さが濃いけど，BBBまでいったらもうBBBしかないから．（中略）
T：なんか，だんだん，濃さという意味が．TNとYT，同じ価値とか言ってなかったですか？（中略）
S(TN)：…，4つのパターンを同じ価値だと考えたときに，例えばBBAとかでAが勝った場合，だけどBBBだったらBが勝ったから，惜しかったわけじゃないですか．だけど，そのままAで勝ってたら，Bは全然なんか，完敗，だけど，BBAとBBBは，なんか惜しいというか，惜敗．
T：ん，もっかい，同じ価値というのは何なんだっけ？同じ価値じゃないっていうのは？
S：んと，負け方，Bが負けだけど，完敗か，惜しい負けか．(中略，Bが完敗だったか惜敗)だったかで，価値が違う．

さらに，図13を記した生徒YTを指名すると，次のように発言した．

表8　授業プロトコル⑦（下線筆者）

S(YT)：例えば僕は，何でもいいですけど，賭けみたいな感じで，コイン持ってきて，条件2つ与えるからどっちか選んでその条件通りになったら10円あげるよと僕が言うとするじゃないですか．(中略) じゃあA，…表出すという条件か，…BAだから…裏出して表出すという条件どっちか選んでって言ったら，普通の人だったら，じゃあ表出すって言って，表出そうとするじゃないですか．わざわざ表出したあとに裏出そうっていう条件選ばないですよね．
S：あー
S(YT)：…じゃあなんで選ばないかって言ったら，裏出した後に表出す方が，単純に表だけ出すより…難しいじゃないですか．裏出した後に表出す，さらにそこに条件加えることによって…難しくなるから，これ（A）とこれ（BA）を1:1でとらえているのがおかしいかなと．

こうした一連の発言は，「3:1」案に至る各場合（{A}，{BA}，{BBA}，{BBB}）の可能性が揃っていないこと，図11のように各場合（{AAA}，{AAB}，…，{BBB}）を考えればそれぞれの可能性が揃って同じ「1通り」として数え上げてよいことを説明していると解釈できる．実際，第1時後の学習感想では「3:1が間違っているようには思えなかった」と記した生徒もいたが，第2時においては7:1でよさそうであることが教室全体で共有された．表面上起こりうる同様に確からしくない結果を，同様に確からしくなるように意図的に条件を揃える必要のある問題を課し，議論することで，可能性を数値化するためには起こりうる各結果の可能性が等しいように場合の数を「1通り」と数える必要がある，という認識の創出を促せると考えられる．

一方で，課題は大きく3点挙げられる．

第1に，指導助言の3点目にあったように，本時の位置づけにおける本来的な数学的プロセス，換言すると数学的に考えるべきことと，本実践が意図したことに，ずれがあったと考えられることである．本実践では，コイン投げの試行が独立であることを話題とせず，授業当初から，5回目以降の結果を全事象として扱っていた．しかし，図9や図10のように，1回目からの結果が気になる生徒がいるのが当然である．1回目から決着が着くまでの結果全てを全事象とし，試行が独立である

から，5 回目以降の結果に焦点を当てられるというプロセスがまず出現すべきであった．また，そのプロセスの出現のためには，1 回目から決着が着くまでの全事象全てが見える樹形図などが必要であり，それがあって初めて，いま問題となっている事象（5 回目以降の結果）が明確になる．指導助言の 3 点目は，本実践での数学的に考えるべきことは何かということと，生徒のわかり方を踏まえた，極めて重要な指摘であったと考えられる．

第 2 に，比較検討において，数学的プロセスを出現させるための発問が適切性を欠いていたことである．指導助言の 2 点目にあった「共通点と相違点を問う発問は，結果を問うているのであり，考えるプロセスを問うていない」という指摘は，数学的プロセスの質を高める授業のあり方を研究主題とする本実践にとって決定的である．さらに，比較対象とした図 4 と図 7 では，結果だけでなく，そもそも求めるプロセスが異なっている．そのため共通点は見いだしにくいし，相違点は根本から異なるので答えづらい．図 4 の生徒 AM に対してなぜそう考えたのかを問うことで前出のプロセスを引き出したり，図 6 は意図的に「可能性が低い…？」までの記述を板書させたのであるから，なぜそう考えたのかを問うことから可能性についての議論を始めたりする必要があったと考えられる．

第 3 に，実験による多数回試行の難しさが出現したことである．指導助言の 5 点目における懸念が具現化することとなった．実験は，時間の都合上，1 人 20 回，32 名で行った（1 名だけ 24 回行った）．実験回数が 624 回にしかならなかったため，実験結果はおよそ 6:1 に収束していくように見えることとなった．

そのため，第 2 時後には，図 14 のような記述をする生徒もいたが，図 15 のような記述をする生徒も現れた．

実験をしてみて6：1となったけど大体7：1に近かったので実感がわいた。少しずつ外れる分実験をする事の良さとも感じた。
ただそれでも7：1をほとんど近いためすごいと思った。

図 14　生徒 MK の記述

初めのブレがおさまっていっているのを見て、データの量が大切だと思った。でも 1：7をあまり感じられませんでした。

図 15　生徒 MN の記述

この点については本研究会での振り返りの議論でも多数の意見が出た．例えば，A が勝つ場合をまとめるのではなく，{A}，{BA}，{BBA}の相対度数を見せる必要があった（それぞれ 2:1 になるはず）ことが指摘された．

6．本研究の成果と今後の課題

本研究では，数学的プロセスの質を高める授業の一つの事例として，同様に確からしいように数え上げることを創出することにより場合の数を数え上げるプロセスの質を高めることを目指した授業に焦点化した．その上で，授業研究を通して，当該授業の有効性と課題を明らかにした．有効性は，可能性を数値化するためには起こりうる各結果の可能性が等しいように場合の数を「1 通り」と数える必要があるという認識の創出を促し，場合の数を数えるプロセスの質を高められることである．課題は，第 1 に本来的な数学的プロセスと本実践が意図した数学的プロセスにずれがあったと考えられること，第 2 に比較検討において数学的プロセスを出現させるための発問が適切性を欠いていたこと，そして第 3 に実験による多数回試行の難しさが出現したことである．

このうち，特に第１の課題と第２の課題は，今後，他の内容に焦点を当てた数学的プロセスの質を高める授業を設計するにあたって共通して視点として機能しうるものである．即ち，本事例研究を通して，数学的プロセスの質を高める授業のあり方について一般的な知見を得られたと捉えられる．授業研究を方法として用いる事例研究を実施することで，焦点化した数学的プロセスの質を高める授業について理解が深まるだけでなく，より一般的な知見を得ることができる．このようにして，授業研究を用いた事例研究を実施していくことで数学的プロセスの質を高める授業のあり方を追究していくことが今後の課題である．

註

１）東京学芸大学附属学校の数学科教員および東京学芸大学の数学教育関係教員を構成員とし，中等教育段階におけるより良い数学教育を実現することと，授業研究の在り方を追求し普及させていくことを目的として平成24年度に発足した研究会である．

２）対象の学校は６年一貫の独自カリキュラムを実施しており，３年次３学期に高校・数学Ａ「場合の数」を含む独自の単元を学習したのち，４年次最初に，中学校の学習内容も含めて初めて「確率」を学習する．本授業は，これらの単元の接続を意図している．

３）本稿における往復書簡に関する記述はすべて伊吹ほか（1959）による日本語訳に基づいている．

引用参考文献

藤井斉亮（2014），「理論構築の萌芽領域としての算数・数学科における授業研究(2)：授業研究の構成要素と構造の特定」，『日本数学教育学会第２回春期研究大会論文集』，111-118.

藤井斉亮（2016a），「世界に発信する授業研究と問題解決型授業」，『日本数学教育学会誌』，98(1)，1.

藤井斉亮（2016b），「授業研究における学習指導案の検討過程に関する一考察」，『日本数学教育学会誌』，96(10)，2-13.

伊吹武彦ほか監訳（1959），『パスカル全集Ｉ』，人文書院.

キース・デブリン，原啓介訳（2010），『世界を変えた手紙―パスカルとフェルマーと〈確率〉の誕生―』，岩波書店.

小林廉（2017），「「数学化」を実現することの価値に関する一考察―単元「確率」における「プロ野球・日本シリーズ」問題の実践―」，『数学教育学の礎と創造－藤井斉亮先生ご退職記念論文集－』，東洋館出版社.

ラプラス，内井惣七訳（1997），『確率の哲学的試論』，岩波文庫.

高橋昭彦（2006），「算数科における授業研究の類型とそれぞれの実態に関する考察－ある民間研究団体による授業研究会参加者に対する調査を通して－」，『日本数学教育学会誌』，88(8)，2-14.

坪井俊ほか（2017），『数学Ａ』（平成28年3月8日検定済），数研出版.

内井惣七（1995），『科学哲学入門』，世界思想社

（こばやし　れん
東京学芸大学附属国際中等教育学校
東京都練馬区東大泉 5-22-1）